WISCONSIN ACADEMY

OF

SCIENCES, ARTS, AND LETTERS

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME QUARANTESIMOOTTAVO
1912-1913

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1913

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1912.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Boselli (S. E. Paolo), P.° Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Presidente dell'Istituto Storico Italiano, Socio corrispondente della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Membro del Consiglio e della Giunta degli archivi, Presidente del Consiglio Centrale della Società " Dante Alighieri ", Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mercantile, Membro del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ✠ e ✠, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa*, 3.

Eletto alla carica il 24 aprile 1910 — 12 maggio 1910.

Vice-Presidente

Camerano (Lorenzo), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Presidente del Club Alpino Italiano, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Socio onorario della Società zoologica italiana, Socio Onorario dell'Accademia dei Zelanti di Acireale. ✱, Comm. ♕. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Eletto alla carica il 29 maggio 1910 — 23 giugno 1910.

Tesoriere

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore di Geologia e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Presidente della Società Geologica Italiana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Cav. ♕. — *Torino, Museo Geologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Rieletto alla carica il 27 novembre 1910 — 15 dicembre 1910.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✱, Comm. ♕. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*

Rieletto alla carica il 22 gennaio 1911 — 5 febbraio 1911.

Segretario

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ⚜. — *Torino, Corso Vittorio Eman., 85.*

Eletto alla carica il 19 giugno 1910 — 17 luglio 1910.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ⚜, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Comm. ✻, e ⚜. — *Torino, Corso Sommeiller, 16.*

29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), *predetto.*

5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1893.

Segre (Corrado), *predetto.*

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* " del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ✠. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nel R. Politecnico, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Uff. ✠. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, ecc., ecc., Uff. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore ordinario e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica ed incaricato di Chimica bromatologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, già Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino Onorario di Crespellano (Bologna), Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio onorario dell'Associazione chimico-farm. toscana, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Membro d'onore della R. Accademia delle Scienze di Romenia (Bucarest); Membro onorario della *Verein Chemiker-Coloristen*; Socio Onorario dell'Associazione Chimica Industriale di Torino; Socio della *Deutsche Gesellschaft f. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Comm. ✠, ✗. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione nel R. Politecnico in Torino, Uff. ✱ e ✠. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale nella R. Università di Torino, Comm. ✠. — *Torino, Via Bidone, 36.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 10 marzo 1904.

Parona (Carlo Fabrizio), *predetto.*

15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, *Officier du mérite agricole*, della Società Veneto Trentina, ecc., Comm. ✠. — *Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*

10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Membro della Commissione superiore Metrica al Ministero di Agricoltura, Ind. e Comm., Membro del Consiglio Superiore dei servizi elettrici al Ministero delle Poste e Telegrafi, Comm. ✠. — *Torino, Via Cernaia, 40.* — Pensionato 30 novembre 1911.

9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della Società italiana delle scienze (detta dei XL) e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione. — *Corso Vinzaglio, 10.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell' Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, Onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ✠. — *Via Baretti, 45.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Balbiano (Luigi), Dottore in chimica e Professore ordinario di Chimica organica nel R. Politecnico di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di medicina di Roma, Socio onorario delle Società di Farmacia di Torino, di Parigi e di Liegi, Cav. Uff. ✱. — *Via Po, 22.*

15 maggio 1910 — 12 giugno 1910.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Dottore onorario in Filosofia della Università di Stockholm, Dottore onorario in Fisica della Clark University di Worcester. Mass, Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica celeste e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma. Professeur agréé à la Sorbonne (1912), Louis Clark Vanuxem lecturer (1912) all'Università di Princeton N. J., uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Membro straniero della Società Reale di Londra, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella classe di matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Membro straniero dell'Accademia nazionale delle Scienze (Stati Uniti d'America Washington), Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Gottinga, Membro corrispondente dell'Accademia Imperiale delle scienze di Pietroburgo, Socio corrispondente della Società medico-fisica di Erlangen, Membro dell'Accademia Imperiale Leopoldina Carolina di Halle, Membre du Bureau della Società matematica di Francia, Membro onorario della Società Matematica di Londra, Membro onorario della Società matematica di Kharkow, Membro onorario della Società matematica di Calcutta, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux e Membro corrispondente della Società Scientifica di Buenos Aires, Vice-Presidente del Comitato Talassografico Italiano, ✠, ✠. — *Roma, Via in Lucina, 17.*

3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Senatore del Regno, Professore emerito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Gr. Uffiz. ✠, Gr. Croce ✠. — *Napoli, Via dei Mille, 74.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ✱, ✠, ✠. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa e incaricato di Analisi infinitesimale, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e Presidente della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti, Socio ordinario non residente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli nella Sezione di Scienze matematiche, Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena, dell'Accademia di scienze naturali di Catania e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle scienze (Roma), della R. Società delle scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario delle Università di Christiania e di Glasgow, Comm. ✱, Gr. Uff. ✠, ✠. — *Via S. Martino, 32. Pisa.*
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum*

Svecana di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Cav. ✠, ✠, Comm. ✠.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Lorenzoni (Giuseppe), Dottore negli Studi d'Ingegnere civile ed Architetto, Professore di Astronomia nella R. Università e Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze ed Arti di Modena, Membro della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, ✠, Comm. ✠. — *Padova, Osservatorio astronomico.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.
Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.
Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.
Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.
Noether (Massimiliano), Professore nell'Università di Erlangen. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.
Baeyer (Adolfo v.), Professore nell'Università di München. — Id. id.
Thomson (John Joseph), Professore nell'Università di Cambridge. — Id. id.
Suess (Edoardo), Professore nell'Università di Vienna. — Id. id.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova (Firenze). — 16 Luglio 1864.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.

Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.

Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 12 Gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.

Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.

Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.

Enriques (Federico), Professore nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.

Guccia (Gio. Batt.), Professore nell'Università di Palermo. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.

Celoria (Giovanni), Senatore del Regno, Astronomo all'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.

Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.

Cerulli (Vincenzo), Direttore dell' Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.

Boussinesq (Valentino), Membro dell' Istituto, Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.

Levi-Civita (Tullio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.
Roiti (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.
Righi (Augusto), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.
Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.
Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.
Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.
Lorentz (Enrico), Professore nell'Università di Leiden. — 14 Giugno 1903.
Battelli (Angelo) Professore nell'Università di Pisa. — 15 maggio 1910.
Garbasso (Antonio), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.
Zeeman (P.), Protessore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.
Cantone (Michele), Professore nell'Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.
Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.
Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di Vienna. — 15 Maggio 1892.
Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.
Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — Id. id.
Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.
Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.
Ciamician (Giacomo), Senatore del Regno, Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.
Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 Marzo 1905.
Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 Marzo 1905.
Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — 5 Marzo 1905.
Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 Maggio 1910.
Willstätter (Richard), Professore nell'Università di Zürich. — Id. id.
Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.
Meyer (Ernesto v.), Professore nella R. Scuola superiore tecnica in Dresda. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Capellini (Giovanni), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 12 Marzo 1882.

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 Febbraio 1885.

Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica, Londra. — 3 Dicembre 1893.

Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.

Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.

Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — Id. id.

Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.

Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — Id. id.

Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 Marzo 1905.

Suess (Francesco Edoardo), Professore nell'Università di Vienna. — Id. id.

Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.

Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 Maggio 1910.

Kilian (Carlo), Professore nell' Università di Grenoble. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Saccardo (Andrea), Professore nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.

Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.

Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.

Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — Id. id.

Wiesner (Giulio), Professore nell'Univ. di Vienna. — 14 Giugno 1903.

Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — Id. id.

Belli (Saverio), Professore nella R. Università di Cagliari. — Id. id.

Baccarini (Pasquale), Professore nell' Istituto di Studi superiori in Firenze. — 15 Maggio 1910.

Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Sclater (Filippo **Lutley**), Segretario della Società Zoologica di Londra. — 25 Gennaio 1885.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.

Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.
Guenther (Alberto), Londra. — 3 Dicembre 1893.
Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.
Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School " di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.
Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — Id. id.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.
Weismann (Augusto), Professore nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 Marzo 1905.
Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History.* — Id. id.
Dastre (Alberto Giulio), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell' Università di Madrid. — 15 Maggio 1910.
Metchnikoff, Vice Direttore dell' Istituto Pasteur in Parigi. — Id. id.
Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.
Ehrlich (Paolo), Professore, Direttore dell'Istituto sperimentale di terapia in Frankfurt a. M. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Manno (Barone D. Antonio), Senatore del Regno, Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M. (Incaricato), Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✠ e Gr. Cord. ✠, Balì Gr. Cr. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*
Rieletto alla carica il 24 aprile 1910 - 12 maggio 1910.

Segretario.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*
Rieletto alla carica il 24 aprile 1910 - 12 maggio 1910.

ACCADEMICI RESIDENTI

Manno (Barone D. Antonio), *predetto.*
17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ✠, Uff. ✠, Comm. ✠. — *Torino, Via Principi d'Acaia, 5.*
7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società Romana di Storia patria, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Ateneo di Brescia, della R. Accad. dei Lincei, del R. Istituto Lombardo, della Società Reale di Napoli, ecc., Comm. ✠ e ✠. — *Torino, Via Bricherasio, 11.*
15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 20 maggio 1897.

Boselli (Paolo), *predetto.*
15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Prof. di Storia moderna nel R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della R. Deputazione Storica toscana, Comm. ✠. — *Firenze, Via Lorenzo il Magnifico, 10.*
15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Allievo (Giuseppe), Dottore aggregato in Filosofia, già Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, della R. Accademia di Lucca, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Uff. ✱, Gr. Uff. ✠. — *Torino, Piazza Statuto, 18.*
13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 20 giugno 1901.

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neolatine nella R. Università di Torino, Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Deputazione Veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria, di quella per l'Emilia e di quella per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, della Deputazione municipale ferrarese di storia patria, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia di Verona, della R. Accademia di Padova, dell'Ateneo Veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, della R. Accademia di scienze e lettere di Palermo, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*
8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 30 ottobre 1906.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, ✱, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*
8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Direttore della R. Scuola superiore di studi applicati al Commercio in Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Membro del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica, del Consiglio superiore

per l'Istruzione commerciale, agricola, industriale, della Commissione Reale per la riforma del Diritto privato, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche. ✱. Comm. ✠. — *Torino, Via Monte di Pietà, 26.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900. - Pensionato 29 agosto 1909.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Rettore della R. Università di Torino, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di diritto ecclesiastico. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina e Direttore della Biblioteca della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia Peloritana, dell'Ateneo di Brescia e dell'Accademia Virgiliana di scienze, lettere ed arti di Mantova, Direttore della Rivista di Filologia e d'Istruzione classica, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, Uff. ✱, Comm. ✠. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*

20 Maggio 1906 - 9 giugno 1906.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Uff. ✱, Comm. ✠. — *Corso Siccardi, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Dottore in Legge, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore di assistenza e beneficenza pubblica, Socio corrispondente onorario del Circolo di Studi sociali di Firenze, Uff. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Via Montebello, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Sforza (Conte Giovanni), Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena, per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, di Parma e Piacenza, e della Toscana, Socio onorario della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Ateneo di Brescia e della Società Ligure di Storia patria, Socio ordinario non residente della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablaisienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie*, Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della

Commissione senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia e della Colombaria di Firenze, Consigliere del Comitato Piemontese per la Storia del Risorgimento italiano, Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Soprintendente del R. Archivio di Stato di Torino, Gr. Uff. dell'Ordine del Medjidiè, Uff. ✱ e Comm.. ✠. — *Via S. Dalmazzo, 24.*

17 Febbraio 1907 - 19 aprile 1907,

Einaudi (Luigi), Dottore in legge, Professore di Scienza delle finanze e Diritto finanziario della R. Università di Torino ed incaricato di economia e legislazione industriale nel R. Politecnico di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e di quella dei Georgofili. — *Piazza Statuto, 16.*

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Baudi di Vesme (Alessandro dei conti), Dottore in Legge, Direttore della R. Pinacoteca di Torino, Vice Presidente della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie. — *Via dei Mille, 54.*

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Schiaparelli (Ernesto), Dottore in lettere, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro onorario dell'Istituto Khediviale egiziano e della Società Asiatica di Francia, della Società di Archeologia biblica di Londra, Direttore del R. Museo di Antichità di Torino, ✱, Comm. ✠.

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Villari (S. E. Pasquale), Senatore del Regno, Socio dell'Istituto Storico di Roma, Presidente del Consiglio degli Archivi, Professore di Propedeutica Storica e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, Socio straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Università di Pisa, Cav. dell'Ordine supremo della SS. Annunziata,

Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ✠, Cav. ✠, Cav. del Merito di Prussia, Membro del Consiglio dell'Ordine Civile di Savoia e del Consiglio dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, ecc.

16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen e di Pietroburgo, Dottore *ad honorem* delle Università di Oxford e di Cracovia, Uff. ✻, Comm. ✠, Cav. ✠. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*

20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), Senatore del Regno, già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale superiore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles Lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell'Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli e della R. Accademia di Lucca, Doct. Philosoph. (honoris causa) dell'Università di Berlino, Cav. della Legione d'Onore, Cav. ✠, Gr. Uff. ✻, Comm. ✠. — *Firenze, Piazza Savonarola, 2.*

20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore di Storia ecclesiastica nella Pontificia Università Gregoriana, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda. — *Roma, Via del Seminario, 120.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Gr. Uffiz. ✻, ✠. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*

29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore " honoris causa „ dell'Università di Giessen, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio ordinario della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, della Società Dantesca americana, della " New Language Association

of America „, della “ Société néophilologique „ dell'Università di Pietroburgo, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, dell'Ateneo Veneto, della Società Reale di Napoli, della R. Accademia di Palermo, della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della R. Società delle Scienze di Göttingen, dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles-Bettres), della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, dell'Accademia R. Lucchese, ✠, Uff. ✱, Comm. ♔. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Kerbaker (Michele), Dottore in lettere, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e incaricato di Sanscrito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della Società Reale di Napoli, della R. Accademia Pontaniana, Membro della Società Asiatica italiana di Firenze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Accademico corrispondente della Sezione di Scienze storiche e filologiche dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, Comm. ✱ e ♔. — *Napoli, Vomero, Via Scarlatti, 60.*
26 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Guidi (Ignazio), Dottore, Professore di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ✠, Uff. ✱, ♔, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Senatore del Regno, Direttore dei Musei Preistorico e Kircheriano, Professore nella R. Università di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. — *Via del Collegio Romano, 26.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Maspero (Gastone), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Foerster (Wendelin), Professore nell'Università di Bonn, Comm. ✱. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Duchesne (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Francese in Roma. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Prof. nella R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.
Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Zaccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 Marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.
Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Pavia. — 21 Giugno 1903.
Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 Giugno 1906.
Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Scienze storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.
Patetta (Federico), Prof. nella R. Università di Torino. — 15 Marzo 1896.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 Maggio 1908.
Luzio (Alessandro), Direttore del R Archivio di Stato in Mantova. — Id. id.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano). — 14 Marzo 1886.
Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a Savona. — 2 Gennaio 1887.
Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquari di Londra (Firenze). — 3 Marzo 1889.
Barnabei (Felice), Roma. — 28 Aprile 1895.
Gatti (Giuseppe), Roma. — 15 Marzo 1896.

Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 Maggio 1908.

Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.

Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 21 Giugno 1903.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.

Amélineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.

Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.

Lasinio (Fausto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.

Parodi (Giacomo Ernesto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.

Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.

Novati (Francesco), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 21 Giugno 1903.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Padova. — id. id.

Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — id. id.

D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — id. id.

Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona. — id. id.

Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Pavia. — id. id.

Vitelli (Gerolamo), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — 31 Maggio 1908.

Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Fraccaroli (Giuseppe), Professore. Milano. 26 Febbraio 1911.

Sabbadini (Remigio), Professore nella R. Accademia scientifico letteraria di Milano. Id. id.

Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Università di Palermo. — Id. id.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1911
al 31 Dicembre 1912.

ELEZIONI

SOCI

Somigliana (Carlo). È riconfermato, in seduta a Classi Unite del 21 gennaio 1912, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico.

Ruffini (Francesco) . **Chironi** (Giampietro) **D'Ercole** (Pasquale) .	Eletti nell'adunanza della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche del 21 gennaio 1912 per comporre la Commissione del premio Gautieri per la Filosofia (triennio 1909-1911).
Naccari (An[illegible]) . **Guareschi** (Icilio) . . **Camerano** (Lorenzo). **Fusari** (Michele) . . **De Sanctis** (Gaetano) **Renier** (Rodolfo) . . **Ruffini** (Francesco) . **Sforza** (Giovanni) .	Eletti nell'adunanza delle Classi Unite del 4 febbraio 1912 per comporre la 1ª Giunta del XVIII premio Bressa (Premio nazionale, quadriennio (1908-1912).
Stampini (Ettore) . . **De Sanctis** (Gaetano) **Ruffini** (Franceseo) . **Schiaparelli** (Ernesto)	Eletti nell'adunanza della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche del 4 febbraio 1912, per comporre la Commissione del premio Vallauri per la Letteratura latina (quadr. 1911-1914).

MORTI

11 Gennaio 1912.

Rossi (Francesco), Socio nazionale residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

3 Marzo 1912.

Saleilles (Raimondo), Socio straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

25 Marzo 1912.

Pacinotti (Antonio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Fisica generale e sperimentale).

30 Marzo 1912.

Teza (Emilio), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Linguistica e filologia orientale).

19 Maggio 1912.

Strasburger (Edoardo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

11 Giugno 1912.

Zirkel (Ferdinando), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

17 Luglio 1912.

Poincaré (Giulio Enrico), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

14 Novembre 1912.

Mowat (Roberto), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia ed Etnografia).

7 Dicembre 1912.

Darwin (Sir Giorgio H.), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare).

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Novembre 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-presidente CAMERANO, il Direttore della Classe NACCARI e i Soci: D'OVIDIO, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e SEGRE Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta del 16 giugno scorso.

Il Presidente, dato il benvenuto ai colleghi, fa le comunicazioni seguenti:

1° Lettera del Comitato per l'erezione di un ricordo marmoreo al compianto Socio SPEZIA, da apporsi alla facciata della casa ove ebbe i natali, a Piedimulera.

2° Condoglianze inviate dalla nostra Accademia all'" Institut de France „ per la morte del Socio straniero POINCARÉ. Apparteneva questi all'Accademia dal 28 giugno 1903. L'Accademia si fece rappresentare ai funerali. — Si dà incarico al Socio SOMIGLIANA di commemorare quell'eminente scienziato in una prossima adunanza.

3° Partecipazione della morte del Socio corrispondente ZIRKEL, che apparteneva all'Accademia dal 16 gennaio 1881. Furono inviate le condoglianze alla famiglia.

4° La Società Reale di Londra ha inviato due volumi da essa pubblicati in occasione del 250° anniversario della sua fondazione: *The Signatures in the first Journal-Book and the Charter-Book*, e *The Record of the Royal Society*.

5° L'Accademia, invitata, si fece rappresentare alle feste bicentenarie della fondazione dell'Accademia di Scienze, lettere ed arti di Bordeaux.

6° Invito al Congresso geologico internazionale, che si terrà al Canadà nell'estate del 1913.

7° Invito al Congresso internazionale di Zoologia in Monaco, nel marzo 1913. Si dà incarico al Vice-presidente Camerano di rappresentare l'Accademia.

8° L'Accademia, invitata, si fece rappresentare al 1° Congresso internazionale di Patologia comparata, tenutosi alla Facoltà di medicina di Parigi nell'ottobre scorso.

9° Comunicazione della Società Botanica italiana intorno ad una riunione in Genova, nello scorso ottobre, dei Delegati delle Associazioni aderenti al movimento di protezione dei monumenti naturali in Italia. In quella riunione fu eletto un Comitato organizzatore, di cui fa parte il Socio Camerano.

Il Socio corrispondente Pizzetti ha inviato in omaggio un suo opuscolo: *Rilevamento ottico del Campanile di Pisa*. — E così il Socio corrispondente Taramelli i suoi tre seguenti: *La foresta e le sorgenti*, *Il nubifragio del 21 e 22 agosto 1911 in Valtellina*, e *A proposito del giacimento carbonifero di Manno presso Lugano.* „. — Ed il Socio corrispondente Mangin la memoria sua: *Phytoplancton de la croisière du* “ *René* „ *dans l'Atlantique*, e la Nota, di lui e di N. Patouillard, *Les Atichiales, groupe aberrant d'Ascomycètes inférieurs*.

Il Socio Guareschi presenta, come omaggio della Presidenza del Congresso, gli *Atti del 2° Congresso nazionale di Chimica applicata*, Torino, settembre 1911.

Il Socio Jadanza offre, a nome dell'Autore, l'opuscolo del Prof. G. Boccardi: *Il nuovo Osservatorio di Torino*.

Presentazioni per la stampa negli *Atti*:

dal Socio GUARESCHI la sua *Nota III*: *Altre osservazioni sulle nuove reazioni caratteristiche e sensibilissime del bromo*;

dal Socio D'OVIDIO: A. SCRIBANTI, *Il planimetro a scure considerato come integrafo per equazioni differenziali*;

dal Socio PEANO: 1° M. BOTTASSO, *Il teorema di Rouché-Capelli per i sistemi di equazioni integrali*; 2° T. ASTUTI, *Sulla trasformazione di Tschirnhausen*; oltre ad una sua Nota intitolata: *Derivata e differenziale*;

dal Socio GUIDI: G. ALBENGA, *Problemi economici di tracciamento; i problemi di Launhardt e di v. Schrutka.*

Inoltre il Socio corrispondente ENRIQUES ha inviato, per la stampa negli *Atti*, una Nota di L. GODEAUX: *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique et linéaire.*

Per la stampa fra le *Memorie* il Socio SOMIGLIANA presenta: G. SANNIA: *Caratteristiche multiple di un'equazione alle derivate parziali in due variabili indipendenti*; ed il Socio GRASSI: A. G. ROSSI, *Alcune trasformazioni delle formole su la riflessione e la polarizzazione della luce.* Vengono incaricati di riferire sulla 1ª Memoria i Soci SOMIGLIANA e PEANO, sulla 2ª GRASSI e NACCARI.

LETTURE

Altre osservazioni sulle nuove reazioni caratteristiche e sensibilissime del bromo.

Nota III del Socio ICILIO GUARESCHI.

In due note presentate a questa Accademia il 28 aprile ed il 16 giugno 1912 (1) io ho dimostrato che con il reattivo Schiff

(1) *Nuova reazione del bromo sensibilissima anche in presenza degli altri alogeni*; e: *Sulla diffusione del bromo in natura e sua ricerca anche nelle materie organiche*, in " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, 1912, vol. XLVII, pag. 696 e 988. Questi miei due lavori furono poco dopo riassunti nel " Chemisches Zentralblatt „, 1912, Bd. 2, pag. 635 e 867; nel " Giornale di Chimica e Farmacia e Scienze affini „ di Torino, fasc. di sett. 1912; nel " Journal of the Chemical Society „ vol. 101, 1912, p. 989-990 ed altri giornali.

Queste mie due Note si trovano ora tradotte in tedesco nel " Zeitsch. f. analyt. Chemie „ del Fresenius.

Il sig. Denigés il 14 ottobre 1912, nei " Comptes Rendus „, t. 155, p. 721, cioè quasi *sei mesi dopo* la pubblicazione delle mie due Note, ha pubblicato un lavoro: *Sur une nouvelle réaction très sensible et caractéristique du brome libre*, che contiene quasi per intiero gli stessi fatti da me scoperti Però l'autore non fa vedere quale sia stato il procedimento logico, che ha seguito, o in base a quali altri studi, o per quale induzione, sia stato guidato nel fare anch'egli le stesse ricerche; nel principio della sua Nota dice semplicemente: " Lorsqu'on verse une solution aqueuse de brome dans du " bisulfite de rosaniline en solution dans l'eau „, ecc.

È veramente spiacevole che, dopo aver fatto conoscere *sei mesi prima* nei più importanti e diffusi giornali scientifici due Note su un determinato argomento, altri si metta sulla stessa strada.

La denominazione *du bisulfite de rosaniline* non è esatta.

Anche il metodo di preparazione del reattivo quale è indicato dal sig. Denigés non è nuovo; è quello di Schiff modificato dal Gayon nel 1888 e che ho adoperato anch'io, e che si usa comunemente nei laboratori.

L'aggiunta di *acqua ossigenata* non è necessaria perchè quando la carta imbevuta del reattivo sia stata ben spremuta fra carta sugante, non contiene più acido solforoso libero, e svela delle quantità infinitamente piccole di bromo.

per le aldeidi ossia colla fucsina decolorata col gas solforoso, o col bisolfito di sodio e l'acido cloridrico, oppure decolorata coll'idrosolfito di sodio, si possono svelare delle minime traccie di bromo libero anche in presenza del cloro e del jodo. Con questo reattivo ho dimostrato la presenza del bromo in un gran numero di sostanze naturali, o preparate.

Ugo Schiff già da lungo tempo (1) propose la soluzione di fucsina al 1 $^0/_{00}$ decolorata col gas solforoso, quale reattivo delle aldeidi; colle quali si colora in violetto. Poco dopo Caro e poi G. Schmidt (2) confermarono ed estesero questa reazione di Schiff a molti composti con funzione aldeidica, usando il reattivo preparato nello stesso modo.

Nel 1888 U. Gayon (3) modificò la composizione del reattivo Schiff (senza però ricordarne il nome) preparandolo mediante la soluzione 1 $^0/_{00}$ di fucsina, decolorata col bisolfito di sodio e acido cloridrico. Altri poi (Prudhomme, ecc.) proposero la soluzione di fucsina decolorata coll'idrosolfito sodico.

Io ho visto che in ogni caso il reattivo Schiff, tale e quale, oppure modificato nelle varie maniere, serve sempre benissimo, non solo come reattivo delle aldeidi, ma come reattivo del bromo libero, anche in presenza di cloro e di jodo. Anche la fucsina decolorata coll'*idrosolfito* è un eccellente reattivo del bromo; mi è parso anzi in certi casi che dia una colorazione quasi azzurra, molto più intensa.

Ho pure fatto notare nelle mie note precedenti che questa mia nuova reazione del bromo " forse potrà diventare un metodo di determinazione quantitativa dei bromuri in presenza di grandi quantità di cloruri e di joduri ".

Nella mia seconda nota ho fatto inoltre osservare che una reazione identica o analoga, e molto bella, si ha pure con altre materie coloranti derivanti dagli aminotrifenilmetano, quali la *fucsina* S decolorata col bisolfito, l'*acetato di rosanilina*, il *cloridrato di pararosanilina*, pure ridotti. Ma molto utile è il *vio-*

---

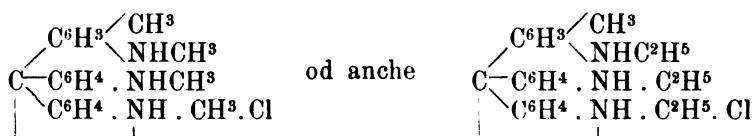
(1) " Comptes Rendus ", 1867, t. 64, p. 182; " Bull. Soc. Chim. de Paris ", 1867, t. VII, p. 518; " Jahresb. f. Chem. ", 1867, p. 505. Queste citazioni sono poi riportate in modo errato da vari autori.

(2) " Berichte d. deut. Chem. Gesell. ", 1881, t. XIV, p. 1848.

(3) " Bull. Soc. Chim. ", 1888 (2), t. 49. pag. 67.

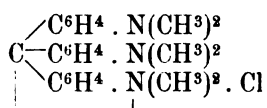
letto d'Hofmann decolorato col bisolfito; è un altro nuovo ed eccellente reattivo pel bromo. Io ho preparato le materie coloranti bromurate che si formano.

Il *Violetto d'Hofmann* da me adoperato è il primitivo violetto d'Hofmann rappresentato da:

$$C\begin{cases} C^6H^3\begin{cases}CH^3\\NHCH^3\end{cases} \\ C^6H^4 . NHCH^3 \\ C^6H^4 . NH . CH^3 . Cl \end{cases} \quad \text{od anche} \quad C\begin{cases} C^6H^3\begin{cases}CH^3\\NHC^2H^5\end{cases} \\ C^6H^4 . NH . C^2H^5 \\ C^6H^4 . NH . C^2H^5 . Cl \end{cases}$$

Il cosidetto *Methylviolett B extra* (*Hofmanns violett*) che ora trovasi nel commercio delle materie coloranti, non dà una così bella reazione come il precedente.

Il *Methylviolett röthlich* decolorato con bisolfito e acido cloridrico dà col bromo (e non col cloro o col jodo) una intensa colorazione violetta, ma la reazione è poco sensibile.

Il *Crystallviolett*:

$$C\begin{cases} C^6H^4 . N(CH^3)^2 \\ C^6H^4 . N(CH^3)^2 \\ C^6H^4 . N(CH^3)^2 . Cl \end{cases}$$

decolorato nello stesso modo (1) non dà col bromo una bella colorazione azzurra; versando a poco a poco la soluzione di bromo nel reattivo, questo assorbe il bromo poi dà un precipitato giallognolo che a poco a poco coll'eccesso il bromo si fa verde poi azzurro. Così si possono facilmente distinguere i due violetti cioè il crystallviolett dal violetto d'Hofmann.

L'*indaco* decolorato coll'idrosolfito si colora in azzurro col bromo anche in soluzione diluitissima; ma così fa pure col cloro e coll'aria atmosferica. Non è un buon reattivo.

Si deve notare che il reattivo fucsinico bisogna adoperarlo sempre a temperatura ordinaria; a caldo già per se stesso si colora più o meno, poi per raffreddamento si decolora di nuovo, ma se si è fatto scaldare troppo allora non si decolora più.

---

(1) Crystallviolett 0,5 gr., acqua gr. 500, bisolfito sodico gr. 5 e acido cloridrico a 1,19 cm^3 5.

È naturale che anche con questi miei reattivi del bromo si possono preparare delle cartine reattive asciutte da conservarsi, come si fa per centinaia di altri reattivi. Non vi ho trovato nessun vantaggio; meglio è usare la carta inumidita direttamente col reattivo e poi premuta bene fra carta da filtro.

Sulla diffusione del bromo. — Riguardo alla diffusione del bromo in natura, di cui ho già discorso nella mia seconda nota, farò ancora alcune osservazioni. Con le indicate mie reazioni caratteristiche del bromo ho potuto svelare questo elemento anche in quei prodotti chimici che si credono *assolutamente puri.* Ed invero io ho esaminato del *cloruro di magnesio* e del *cloruro di potassio* di una delle migliori fabbriche tedesche di prodotti chimici e fornitimi come assolutamente puri e privi di ogni sostanza estranea.

Gr. 9 a 10 (o anche solamente 5) di questi prodotti mescolati con circa 15-20 cm³ di acido cromico al 25 %, a temperatura ordinaria, o scaldando appena, dopo pochi istanti o pochi minuti manifestarono la presenza nettissima del bromo tanto col reattivo fucsinico, come col violetto d'Hofmann decolorato.

Il bromo nella cenere delle piante. Nella mia seconda nota: *Sulla diffusione del bromo in natura*, ecc., io ha fatto osservare di aver trovato delle traccie di bromuri nella cenere di alcune piante. Ho confermato ora questo fatto su della cenere ottenuta bruciando del legno dolce (carbonina de' forni). Ma ve ne è poco.

Ho poi esaminato due vecchi campioni di carbonato potassico preparati dall'incenerimento di piante continentali: un campione di *potassa commerciale della Toscana* e un campione di *potassa commerciale d'Ungheria.* Ho fatto il saggio su 5 gr. di ogni campione. Nella potassa detta *di Toscana* non trovai che minime traccie di bromo, ma ben visibili, mentre invece dalla *potassa d'Ungheria* ebbi subito, a temperatura ordinaria, e intensa, la reazione del bromo tanto col reattivo Schiff, quanto col violetto d'Hofmann decolorato. Tra queste due potasse vi è una enorme differenza nella quantità di bromo. Ciò deve dipendere dalla natura diversa dei terreni in cui sono cresciute le piante incenerite. In Ungheria abbondano i depositi di salgemma.

Con queste due reazioni ho in questi giorni potuto dimostrare facilmente la presenza del bromo nella cenere della *barbabietola* (*Beta vulgaris* delle *Chenopodiacee*).

Il prof. Marco Soave mi fece osservare che la barbabietola è una pianta di origine marina e la cui cenere conterrebbe forse dei bromuri. Ho esaminato un campione di potassa grezza proveniente da un zuccherificio, l'ho trattata con poca acqua per separare la parte insolubile; il liquido incoloro filtrato ed evaporato a secco lasciò un residuo bianco che colla soluzione di acido cromico al 25 % dava nettamente le reazioni del bromo tanto col reattivo Schiff, come col violetto d'Hofmann decolorato. Bastano 3-4 gr. di questa potassa grezza.

La cenere di barbabietola rossa coltivata vicino a Torino diede pure ben netta la reazione del bromo. L'idea del prof. Soave che forse la barbabietola faccia nel terreno una specie di selezione mi pare giusta.

La cenere delle foglie degli *spinaci* (*Spinacia oleracea* delle *Chenopodiacee*) contiene delle piccole quantità di bromo; molto netta si ha la reazione del bromo dalla parte inferiore delle foglie vicino alle radici e nelle radici stesse.

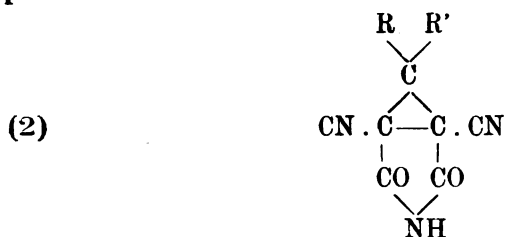
Bromidrati delle basi organiche od alcaloidi. — Queste mie reazioni del bromo possono servire a distinguere subito, in pochi istanti, i bromidrati degli alcaloidi dagli altri loro sali. Basta scaldare 0,05 a 0,10 o anche meno, di sale alcaloideo, con soluzione di acido cromico al 15-25 % e sovrapporre al tubo una cartina inumidita col reattivo; si avrà subito la nota reazione se il sale era un bromidrato, come ad esempio il bromidrato di conina, il bromidrato di chinina, ecc.; nulla se era un cloridrato. Una traccia di bromidrato, di etilamina con poco acido cromico a caldo dà immediatamente il bromo. Basta anche trattare il bromidrato con acqua di cloro e poi aggiungere a poco a poco il reattivo fucsinico; si ha subito la colorazione violetta.

Ricerca degli ipobromiti. — Ho osservato che le mie reazioni pel bromo sono sensibili anche per gli ipobromiti; basta trattare una soluzione, anche diluitissima, di ipobromito con acido cloridrico purissimo, o anche acido solforico, e poi a poco a poco col reattivo fucsinico si ha un colore che può variare, secondo la concentrazione, dall'azzurro chiaro sino ad un precipitato violetto rosso. Basta una traccia di ipobromito.

Derivati bibromurati delle diciandialchilglutarimidi. — Il gas solforoso sciolto in acqua sottrae il bromo assai facilmente dai bibromoderivati:

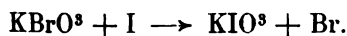
```
            R   R'
             \ /
              C
             / \
(1)   CNBrC     CBrCN
         |       |
         CO     CO
           \   /
            NH
```

per trasformarli in:

```
            R   R'
             \ /
              C
             / \
(2)    CN . C———C . CN
            |   |
            CO  CO
             \ /
             NH
```

Il reattivo fucsinico non solo sottrae il bromo a questi composti, come il gas solforoso, ma nel tempo stesso dà precipitato violetto azzurro intenso, quando lo si scalda un poco coi bibromoderivati accennati. Si precipita la materia colorante bromurata e si forma il composto 2).

Il mio reattivo può servire a svelare facilmente il bromo in combinazione *labile.*

Bromati e jodo. — Coi reattivi sovraindicati si può dimostrare anche la decomposizione dei bromati per mezzo del jodo. Quando si scalda del bromato potassico misto con del jodo si sviluppano dei vapori di jodo e di bromo insieme; meglio se il miscuglio di bromato e jodo si riscalda con dell'acqua, allora il bromo si sviluppa in grande quantità. Ha luogo la reazione:

$$KBrO^3 + I \longrightarrow KIO^3 + Br.$$

Basta anche meno di $^1/_2$ milligr. di bromato potassico con poco jodo e qualche goccia d'acqua, e far bollire, per avere subito intensa la reazione del bromo in vapore.

Può diventare una bella esperienza di lezione.

Decomposizione dei bromuri e spostamento del bromo dai suoi composti per mezzo del jodo. Esperimenti per lezione. — È noto che, come si suol dire, l'affinità degli alogeni per i metalli diminuisce dal fluire al cloro, al bromo ed al jodo; è quindi in molti casi facile spostare o scacciare il cloro col fluore dai cloruri metallici, il bromo dai bromuri mediante il cloro, il jodo mediante il bromo.

Però nel caso di composti ossigenati l'ordine dell'affinità è invertito, cioè i composti ossigenati del jodo sono i più stabili, seguono quelli del bromo e del cloro, ed infine il fluore che non forma composti ossigenati.

Riguardo agli alogenuri possono però avvenire delle reazioni inverse, per l'azione di massa, ed il bromo spostare ad esempio il cloro dei cloruri metallici.

Oltre ad alcune vecchie ricerche di Lassaigne, Fr. Selmi, Millon ed altri, sono specialmente da ricordarsi le importanti ricerche di Potilizin, di Berthelot e di Julius sullo spostamento reciproco degli alogeni.

Julius (1), ad esempio, notò che il cloruro d'argento ed il bromuro d'argento per l'azione a caldo del vapore di jodo sono completamente trasformati in joduro d'argento. La trasformazione si desume dal fatto che rimane del joduro d'argento, o un miscuglio di joduro e di bromuro.

Coi mezzi ordinari non è facile dimostrare questo fatto, questa reazione inversa, per renderla evidente in lezione anche ad un numeroso uditorio.

Io ho osservato che il jodo scaccia il bromo da molti bromuri metallici sia quando si mescolano allo stato solido, oppure si fanno agire in presenza dell'acqua; ed il bromo spostato può essere subito reso manifesto coi miei reattivi coloranti. Sono reazioni tanto sensibili e caratteristiche che possono utilmente servire a fare delle esperienze di corso.

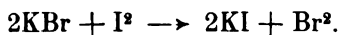
Con queste reazioni del vapore di bromo ho potuto svelare che certi composti bromurati i quali bollono regolarmente ad una determinata temperatura, o, come suol dirsi, distillano inalterati, sviluppano invece del bromo sia pure talora in traccie.

(1) " Zeits. f. analyt. Chem. ", 1883, p. 723.

Ho osservato inoltre che molti bromuri metallici, anche stabilissimi, a temperatura elevata, vicino al punto di fusione o di poco oltre il punto di fusione emettono dei vapori di bromo. Tali sono i bromuri dei metalli alcalini ed i bromuri alcalino-terrosi. Non ho ancora fatto le esperienze fuori del contatto dell'aria, la quale certamente può avere influenza sulla decomposizione dei bromuri.

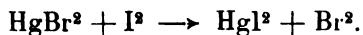
Bromuro di potassio. Questo sale riscaldato sopra il suo punto di fusione (722° circa) emette dei vapori di bromo.

Mescolato con del jodo e riscaldato si ha pure del bromo, ma poco. Invece quando una soluzione di bromuro potassico si scalda con del jodo si produce subito tanto bromo da renderlo manifesto facilmente. Tra il bromuro e il jodo ha dunque luogo, in parte, la reazione inversa:

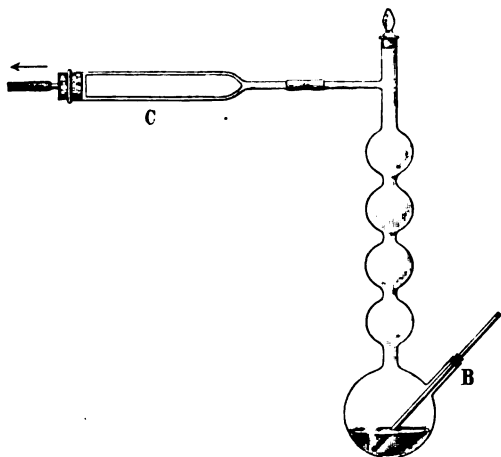
$$2KBr + I^2 \longrightarrow 2KI + Br^2.$$

Bromuro di sodio. Il bromuro di sodio fonde verso 757° e non emette vapori di bromo o delle traccie minime.

Bromuro di bario. Il bromuro di bario che fonde verso 812°, quando è scaldato anche prima della temperatura di fusione emette nettamente dei vapori di bromo.

Bromuro mercurico. Scaldando il bromuro mercurico $HgBr^2$, fonde e poi sublima senza sviluppare del bromo; se però al bromuro si mescola del jodo e si scalda, allora si sviluppa, insieme ai vapori di jodo, anche del bromo, riconoscibile colla solita carta reattiva. Ha luogo probabilmente la reazione:

$$HgBr^2 + I^2 \longrightarrow HgI^2 + Br^2.$$

Quando si mescola il bromuro mercurico con acqua e jodo a temperatura ordinaria, si sviluppa poco bromo ma riscaldando, le carte reattive tanto colla fucsina decolorata quanto col violetto d'Hofmann decolorato manifestano benissimo lo sviluppo del bromo insieme ai vapori di jodo. Se si fa passare una corrente d'aria nell'apparecchio, sulla carta reattiva contenuta in un lungo tubo si producono subito le note colorazioni visibili anche da un grande uditorio.

Per queste esperienze e per quelle sulle ceneri, sui sali, ecc. già accennate, serve benissimo un palloncino munito di più bolle nel collo, per condensare il jodo o un apparecchietto analogo.

Il tubo *a* piatto e largo può contenere una lunga e larga carta inumidita col reattivo, in modo che così la reazione può

Apparecchietto per dimostrazioni in lezione.

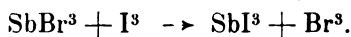
essere visibile anche in una esperienza di scuola. Si fa passare una lenta corrente di aria da *B* in *C*. Il tubo *C* può essere sostituito con un altro più piccolo cilindrico, stretto, con entro una striscia di carta reattiva, sino all'imbocco della strozzatura. Così la sensibilità è grandissima. Il tubo *B* può essere tolto quando non si voglia far gorgogliare l'aria nel liquido o si esperimenti con materie solide.

Qualunque altro apparecchietto simile può servire. In pochi minuti si può ricercare il bromo nei cloruri o joduri impuri.

Bromuro di uranile UrO^2Br^2. Riscaldato si decompone e sviluppa molto bromo.

Tribromuro di arsenico $AsBr^3$. Fatto bollire non emette vapori di bromo; nemmeno quando si aggiunga del jodo. Forse delle traccie minime.

Tribromuro di antimonio $SbBr^3$. Questo composto riscaldato all'ebollizione in tubo da saggio non dà bromo, ma se si aggiunge un poco di jodo allora si sviluppa il bromo:

$$SbBr^3 + I^3 \rightarrow SbI^3 + Br^3.$$

Meglio si sviluppa il bromo scaldando il bromuro di antimonio con jodo e acqua.

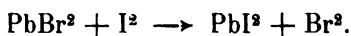
Anche a temperatura ordinaria un miscuglio di tribromuro e jodo oppure di tribromuro jodo e acqua, sviluppa del bromo.

Bromuro di solfo SBr^2. Scaldato, già per sè dà del bromo riconoscibile facilmente, e tanto meglio se si aggiunge del jodo.

Bromuro di piombo $PbBr^2$. Per riscaldamento diventa giallo poi fonde in liquido rosso e a temperatura più elevata sviluppa dei vapori di bromo riconoscibili benissimo colle mie cartine reattive.

Se si mescola il bromuro di piombo con jodo e si scalda quasi subito insieme ai vapori di jodo si manifesta la presenza dei vapori di bromo. Meglio se si scalda il miscuglio nell'apparecchietto (V. fig.).

Dunque anche in questo caso ha luogo la reazione inversa:

$$PbBr^2 + I^2 \longrightarrow PbI^2 + Br^2.$$

Invece scaldando il miscuglio di bromuro di piombo, jodo e acqua lo sviluppo del bromo è minore e più lento.

Acido bromidrico. L'acido bromidrico concentrato fatto bollire anche per lungo tempo non dà del bromo e nemmeno quando lo si fa bollire insieme a del jodo in eccesso; o almeno ne sviluppa delle traccie minime.

Bromuri di idrocarburi ed altri derivati bromurati. -- Col mio reattivo si può riconoscere molto bene e presto se un bromoderivato organico si decompone per riscaldamento.

Il *bromuro di isobutilene* $(CH^3)^2CBr.CH^2Br$, ad esempio, bolle regolarmente e non dà traccia di vapori di bromo. Fatto bollire anche con del jodo non dà traccia di bromo.

Il *bromoformio* già per ebollizione, a pressione ordinaria, si decompone in piccola quantità e dà dei vapori di bromo. Ritornerò su questo fatto con nuove esperienze.

Il bromoformio esposto alla luce solare sviluppa del bromo quasi subito ed è reso assai manifesto dai miei reattivi. È questo un mezzo molto facile e comodo per vedere se un composto bromurato sviluppa o no del bromo per l'azione della luce.

Il *bromuro di etilene bromurato* $CH^2Br.CHBr^2$ bolle regolarmente a 186°-187° senza sviluppare vapori di bromo e se fatto bollire insieme a del jodo dà solamente delle minime traccie di jodo.

Il *bromuro di isoamile* $(CH^3)^2CH.CH^2.CH^2Br$. Non dà bromo per ebollizione; nemmeno se mescolato al jodo.

Bromalioidrato. — Gr. 5 di *bromalioidrato* $CBr^3.CH(OH)^2$ fatto bollire dà quasi subito delle piccole quantità di vapori di bromo. Se al liquido si aggiunge un poco di jodo, circa 0,5 gr., allora la quantità di vapori di bromo aumenta assai. Questa reazione fatta entro l'apparecchietto è resa molto evidente.

Il bromalioidrato, esposto alla luce solare, sviluppa pure del bromo.

Si continueranno questi studi su un gran numero di bromuri metallici e bromoderivati organici.

Con questa nota, e le altre due già pubblicate, intendo di riserbarmi il diritto di continuare le ricerche in questo campo di studio. Il reattivo di Schiff per le aldeidi, che è diventato anche il mio reattivo pel bromo, potrà, spero, arrecare altri utili servigi.

Torino, R. Università, 16 Novembre 1912.

Il planimetro a scure considerato come integrafo per equazioni differenziali.

Nota di ANGELO SCRIBANTI.

Sono generalmente conosciute le applicazioni che nella valutazione approssimata dell'area e della posizione del baricentro di una figura piana [1] può avere come strumento polare un apparecchio di estrema semplicità, che sotto il nome di planimetro a scure è stato introdotto nel 1885 dal danese Prytz; la qui annessa figura ne ricorda lo schema. In un mio lavoro,

[1] Cfr. fra l'altro, F. W. Hill, in “ Philosophical Magazine ”, 1894 e G. B. Maffiotti, in “ Riv. di topogr. e catasto ”, 1896.

che si trova ora in attesa di essere inserito in altra pubblicazione [1], io esamino le applicazioni delle quali questo stesso apparecchio diventa suscettibile, ove venga usato nella quadratura delle figure piane in luogo di un ordinario integratore Amsler o di un integrafo Abakanowicz. Altrove si trova dimostrato [2] che questo apparecchio, o più precisamente un altro del quale il planimetro a scure non è che una schematizzazione, può servire per la costruzione grafica dei trascendenti π e e,

per la polisezione dell'arco e per la soluzione di altri notevoli problemi. Altrove [3] ancora si fa vedere che esso può essere impiegato come integratore discreto, ossia come integrometro, di equazioni differenziali riducibili ai noti tipi di Riccati e di Abel. In questa nota io mi propongo di rilevare, ciò che non mi consta essere mai stato fatto, come l'apparecchio sia suscettibile ancora di trovare impiego in qualità di integratore

(1) Cfr. Scribanti, in " Atti del collegio degli ingegneri navali e meccanici in Italia ", 1912.

(2) Cfr. Kleritj-Lubomirsky, in " Dingler's Polytechnisches Journal ", 1897.

(3) Cfr. L. Jacob, *Le calcul mécanique*, 1911, pag. 361.

continuo, ossia di integrafo, delle equazioni differenziali di un certo tipo, venendo così ad assumere le funzioni di un integrafo di Pascal.

Con riferimento alla annessa figura si supponga che un planimetro a scure di lunghezza l si trovi inizialmente adagiato in OA col calcatoio in A e con la scure in O e che, indi, al suo calcatoio venga fatta percorrere una curva di assegnata equazione

$$y = f(x).$$

Corrispondentemente la scure lascerà sul foglio come traccia del suo passaggio una curva di equazione

$$\eta = \varphi(\xi)$$

i cui elementi geometrici, in base alla semplice ispezione della figura, risultano legati a quelli della curva proposta mediante le relazioni

$$l \operatorname{sen} \lambda = y - \eta \qquad x + l = \xi + l \cos \lambda$$

dove è

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{d\eta}{d\xi} = \eta'.$$

Si riconosce agevolmente, mediante una opportuna combinazione delle relazioni testè scritte, che come relazione caratteristica del funzionamento dell'apparecchio può essere assunta la

$$l \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} + \eta = f\left(\xi + \frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} - l\right)$$

la quale viene così a costituire l'equazione differenziale della curva $\eta = \varphi(\xi)$ lasciata sul foglio come traccia del passaggio della scure allorchè il calcatoio descrive la proposta curva $y = f(x)$. Questo risultato può essere interpretato anche col dire che lo strumento, in quanto descrive meccanicamente la curva $\eta = \varphi(\xi)$, eseguisce l'integrazione dell'equazione differenziale suddetta. Il planimetro a scure è dunque suscettibile di essere considerato, e rigorosamente, come un integrafo continuo per tutte le equazioni differenziali che sono riducibili al tipo

$$l \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \pm \eta = f\left(\xi \pm \frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} \mp l\right)$$

dove il doppio segno sta a tener conto della eventualità che il planimetro, nella posizione iniziale che esso occupa allorquando sta adagiato sull'asse delle ascisse, abbia la scure situata dalla banda sinistra o dalla banda dritta del calcatoio.

Si vede dalla relazione testè scritta che il planimetro a scure, sebbene rispondente a uno schema cinematico di gran lunga più semplice di quello cui risponde l'integrafo di Pascal a riga rettilinea con rotella integrafica orientata parallelamente all'asta viaggiante, serve però all'integrazione di una classe di equazioni differenziali più complesse che non quelle della classe

$$l\eta' \pm \eta = f(\xi)$$

la quale definisce il campo di azione dell'integrafo normale Pascal (1).

Però, quando il planimetro a scure venga applicato a diagrammi fondamentali abbastanza ribassati perchè la loro descrizione col calcatoio dia luogo a obliquità dell'asta abbastanza piccole per poter considerare come trascurabili le potenze superiori della tangente d'obliquità e poter quindi porre

$$\eta'^2 = \text{zero},$$

l'equazione caratteristica del funzionamento dell'apparecchio si ridurrà identicamente a quella che è stata testè riportata come caratteristica dell'integrafo Pascal.

Segue che il planimetro a scure può in prima approssimazione sostituire l'*integrafo per equazioni differenziali* di tipo normale Pascal nelle sue varie applicazioni e conseguenze, precisamente come esso può in prima approssimazione sostituire l'*integrafo per quadrature* di tipo Abakanowicz, giusta quanto si trova dimostrato nell'altro mio lavoro più sopra accennato, nel quale indico pure una forma di realizzazione pratica del planimetro a scure, la quale permette l'effettivo tracciamento grafico della funzione integrale.

Le precedenti deduzioni sono abbastanza semplici per non aver bisogno di essere ulteriormente chiarite, tuttavia potrà

(1) Cfr. Ernesto Pascal, in " Giornale di matematiche ", 1910 e 1911.

essere opportuno illustrarle mediante un esempio relativo a un caso semplice. Così, se al calcatoio venga fatta percorrere la retta

$$y = k\,x$$

obliqua sull'asse delle ascisse, l'ordinata della curva corrispondentemente descritta dalla scure (curva che evidentemente sarà allora una trattrice avente l'obliqua per asintoto) sarà la funzione integrale corrispondente all'equazione differenziale

$$l\,\frac{\eta' - k}{\sqrt{1 + \eta'^2}} + \eta = k(\xi - l)$$

cui in questo caso si riduce l'equazione caratteristica del funzionamento dell'apparecchio, circa la quale giova osservare che un tentativo di integrazione analitica condurrebbe a notevoli complicazioni.

Se poi l'obliqua percorsa dal calcatoio è abbastanza poco inclinata sull'asse delle ascisse perchè dia luogo a obliquità dell'asta del planimetro di sufficiente piccolezza perchè si possa sempre ritenere $\eta'^2 = 0$, allora l'equazione caratteristica del funzionamento del planimetro a scure si ridurrà in prima approssimazione a

$$l\,\eta' + \eta = k\,\xi$$

e la sua funzione integrale, che analiticamente potrebbe essere determinata nella esponenziale

$$\eta = kl\left(e^{-\xi/l} + \frac{\xi}{l} - 1\right),$$

avrà una imagine grafica nelle ordinate della corrispondente curva traccia del passaggio della scure.

Il teorema di Rouché-Capelli per i Sistemi di equazioni integrali.

Nota di MATTEO BOTTASSO.

È noto (*) che un teorema completo sulle condizioni di compatibilità o meno di un qualsiasi sistema di equazioni lineari (algebriche) è stato dato dal ROUCHÉ (**). Il CAPELLI poi (***), valendosi della nozione di caratteristica di una matrice, ha enunciato in forma più espressiva ed elegante tali condizioni, dimostrando che, per la compatibilità del detto sistema con valori finiti delle incognite, occorre e basta abbiano la stessa caratteristica le due matrici formate l'una con i soli coefficienti e l'altra con i coefficienti e termini noti.

Tale teorema suole appunto chiamarsi di ROUCHÉ-CAPELLI; esso può mettersi sotto altra forma introducendo la nozione di *sistema aggiunto* (ed omogeneo), come indicherò nell'Appendice della presente Nota. In questo lavoro mi propongo di fissare anche per i sistemi lineari di equazioni integrali le condizioni della loro compatibilità od incompatibilità; e di mettere in evidenza coll'Appendice la completa analogia che sussiste (a questo riguardo) con i sistemi di equazioni lineari algebriche.

(*) Cfr. nell' " Encyclopédie des Sciences Math. ", ed. franc., l'art. I 9, *Les fonctions rationnelles*, exposé d'après l'art allem. de E. NETTO par R. LE VAVASSEUR, n[i] 12-16 (T. I, vol. 2, pp. 39-50).

(**) E. ROUCHÉ, *Sur la discussion des équations du premier degré*, " C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris ", t. 81 (1875), pp. 1050-52. Il ROUCHÉ considera qui il caso di n equazioni con n incognite; tale ipotesi però non lede (per questi sistemi algebrici) la generalità del problema, come si è precisato nell'Appendice.

(***) A. CAPELLI, *Sopra la compatibilità e incompatibilità di più equazioni di primo grado con più incognite*, " Riv. di Matem. ", vol. II (1892), pp. 54-58.

Si consideri con FREDHOLM (*) il sistema di equazioni integrali:

$$(1)\qquad \varphi_s(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy = \psi_s(x) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

ove λ è un parametro qualsiasi; $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ indicano le funzioni incognite; $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_m(x)$ sono funzioni date al pari delle nm funzioni (nuclei)

$$k_{st}(x, y) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m\,;\; t = 1, 2, \ldots, n),$$

tutte finite ed integrabili nell'intervallo $0 \overline{} 1$.

Essendo arbitrari gli interi positivi m, n, sussiste il TEOREMA: *Affinchè le equazioni del sistema* (1) *ammettano delle soluzioni (finite ed integrabili in* $0 \overline{} 1$) *è necessario e sufficiente che le funzioni date* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_m(x)$ *soddisfino ad ogni relazione della forma:*

$$(2)\qquad \int_0^1 \sum_1^m {}_s\, \psi_s(x)\, \Phi_s(x)\, dx = 0\,,$$

essendo $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_m(x)$ *una qualsivoglia possibile soluzione del sistema aggiunto di* (1) *ed omogeneo:*

$$(3)\qquad \epsilon_{t'}\, \Phi_{t'}(x) + \epsilon_t\, \lambda \int_0^1 \sum_1^m {}_s\, k_{ts}(y, x)\, \Phi_s(y)\, dy = 0\,,$$

$$\left(t = t' = 1, 2, 3, \ldots; \qquad \epsilon_{t'} = \begin{cases} 1 \text{ per } t' < m \\ 0 \quad " \quad t' > m \end{cases}, \qquad \epsilon_t = \begin{cases} 1 \text{ per } t \leq n \\ 0 \quad " \quad t > n \end{cases}\right).$$

Osserviamo che, essendo il sistema (3) lineare ed omogeneo, se

$$(4)\qquad \Phi_{q1}(x),\ \Phi_{q2}(x),\ \ldots,\ \Phi_{qm}(x), \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

è un gruppo di p sue soluzioni, indicando con μ_1, μ_2, ..., μ_p delle costanti arbitrarie sarà pure:

$$(5)\qquad \sum_1^p {}_q\, \mu_q\, \Phi_{q1}(x),\ \sum_1^p {}_q\, \mu_q\, \Phi_{q2}(x),\ \ldots,\ \sum_1^p {}_q\, \mu_q\, \Phi_{qm}(x),$$

(*) I. FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, " Acta Mathematica ", t. 27 (1903), pp. 365-90, n. 10.

una soluzione dello stesso sistema. Inoltre si potrà scegliere un numero $p \geq 0$ (sufficientemente grande) di soluzioni (4) *linearmente indipendenti* di (3), in guisa che ogni altra funzione $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x),\ldots, \Phi_m(x)$ del sistema considerato sia esprimibile linearmente con le (4), cioè risulti del tipo (5).

La proposizione precedente potrà allora enunciarsi così:

La condizione necessaria e sufficiente perchè le equazioni del sistema (1) *ammettano delle soluzioni è che le funzioni* $\psi_1(x), \psi_2(x),\ldots, \psi_m(x)$ *soddisfino alle* $p > 0$ *relazioni:*

$$(2') \qquad \int_0^1 \sum_1^m {}_s\, \psi_s(x)\, \Phi_{q s}(x)\, dx = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

essendo (4) *un gruppo completo di* p *soluzioni linearmente indipendenti di* (3), *mediante le quali si possa esprimere sotto la forma* (5) *ogni soluzione di questo sistema.*

Nel caso di $n = m$ e per un valore generico di λ il sistema (3) non ammette che soluzioni identicamente nulle, e le (1) hanno soluzioni comunque siano le $\psi_1(x), \psi_2(x),\ldots, \psi_m(x)$ (*). Se invece si prende per λ un autovalore λ_0 di (1), o (3), per $\Phi_{qs}(x)$ si possono assumere le np autofunzioni del sistema (3), e le (2′) non sono altro che le condizioni indicate, per il caso in esame, dalla Sig.^{na} G. Greggi (**). — Siccome quando $n \neq m$ dobbiamo continuamente riferirci al caso di $n = m$ ed è bene di questo aver presenti le formule risolutive, nel § 1 si richiameranno rapidamente tali formule, indicate dalla Greggi nella Nota cit.,

---

(*) Vedi G. Greggi, *Le formole risolutive e i teoremi di Schmidt per i sistemi di equazioni integrali* (" Atti del R. Ist. Veneto ", t. LXXI, parte 2ª, a. 1911-12, pp. 541-551).

(**) Loc. cit., n. 5, p. 548. È da notarsi che, a differenza di quanto si verifica per i sistemi lineari algebrici, questo caso di $n = m$ non può ritenersi includa gli altri casi possibili, poichè supponendo, per es., tutti nulli i nuclei $k_{st}(x, y)$ e la funzione data $\psi_s(x)$ di una delle equazioni di (1), ne seguirebbe pure necessariamente l'annullamento della funzione incognita $\varphi_s(x)$. Lo stesso accade, del resto, per il sistema di equazioni lineari algebriche:

$$x_s + \lambda \sum_1^n {}_t\, a_{st} x_t = c_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

(dal quale può passarsi all'equazione integrale di 2ª specie), in cui, supposto $c_r = a_{r1} = a_{r2} = \ldots = a_{rn} = 0$, ne segue essere $x_r = 0$.

dando però ad esse una *forma più esplicita*, quale conviene alle nostre deduzioni.

Nei seguenti § 2. § 3 si dimostrerà il teorema enunciato quando sia rispettivamente $m < n$ od $m > n$, assegnando pure in modo esplicito le corrispondenti formule risolutive quando le (1) hanno soluzioni.

Nel § 4 viene poi considerata l'ipotesi in cui $m > n$ e le funzioni incognite $\varphi_s(x)$ siano solamente in numero di n, cioè le $m - n$ ultime, per es., equazioni del sistema (1) risultino di prima specie; anche per tale caso si dimostra valere il teorema generale enunciato.

§ 1. — *Formule esplicite risolutive di un sistema di* n *equazioni integrali con altrettante funzioni incognite.*

1. Del sistema

$$(1') \qquad \varphi_s(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy = \psi_s(x) \qquad (s = 1, 2, ..., n),$$

indicheremo con $D_k(\lambda\,; n)$, o brevemente $D(\lambda\,; n)$, il *determinante*, cioè l'espressione:

$$(6) \qquad D_k(\lambda\; n) = D(\lambda, n) = \sum_0^\infty {}_r \frac{\lambda^r}{r!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots$$

$$\int_0^1 \sum_1^n {}_{i_1} \sum_1^n {}_{i_2} \cdots \sum_1^n {}_{i_r} K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & ..., & x_r; & i_1, & i_2, & ..., & i_r \\ x_1, & x_2, & ..., & x_r; & i_1, & i_2, & ..., & i_r \end{pmatrix} dx_1,\ dx_2,\ ...,\ dx_r,$$

ponendo in generale:

$$K\begin{pmatrix} x_0, & x_1, & ..., & x_r; & s_0, & s_1, & ..., & s_r \\ y_0, & y_1, & ..., & y_r; & t_0, & t_1, & ..., & t_r \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k_{s_0t_0}(x_0, y_0), & k_{s_0t_1}(x_0, y_1), & \ldots, & k_{s_0t_r}(x_0, y_r) \\ k_{s_1t_0}(x_1, y_0), & k_{s_1t_1}(x_1, y_1), & \ldots, & k_{s_1t_r}(x_1, y_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{s_rt_0}(x_r, y_0), & k_{s_rt_1}(x_r, y_1), & \ldots, & k_{s_rt_r}(x_r, y_r) \end{vmatrix}$$

ove le $x_0, x_1, ..., x_r$, $y_0, y_1, ..., y_r$, sono delle variabili nell'intervallo fissato $0 \vdash 1$, ed $r, s_0, s_1, ..., s_r$, $t_0, t_1, ..., t_r$ sono degli interi positivi.

Essendo, per $h = 1, 2, ..., p$, $s = 1, 2, ..., n$, le ξ_h, η_h delle variabili come le x_s, ed r, p, s_h, t_h, i_s degli interi positivi, la

$$D\left[\begin{pmatrix}\xi ; s \\ \eta ; t\end{pmatrix} p\right), \lambda ; n\right] = \sum_{0}^{\infty}{}_{r} \frac{\lambda^r}{r!} \cdot \tag{7}$$

$$\cdot \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{1}^{n}{}_{i_1} \cdots \sum_{1}^{n}{}_{i_r} K \begin{pmatrix}\xi_1, ..., \xi_p, x_1, ..., x_r; s_1, ..., s_p, i_1, ..., i_r \\ \eta_1, ..., \eta_p, x_1, ..., x_r; t_1, ..., t_p, i_1, ..., i_r\end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_r$$

dà con il suo secondo membro l'espressione di un *minore d'ordine* p *del determinante* $D(\lambda ; n)$, che verrà brevemente indicato mediante il primo membro.

Fra questi minori potremo considerare quelli ottenuti:

1° eseguendo nella (7) la sostituzione $\begin{pmatrix}\xi_q = x, & s_q = s \\ \eta_l = y, & t_l = t\end{pmatrix}$, minore che s'indicherà con

$$D\left[\begin{pmatrix}\xi ; s \\ \eta ; t\end{pmatrix} p\right) \begin{pmatrix}\xi_q = x, & s_q = s \\ \eta_l = y, & t_l = t\end{pmatrix}, \lambda ; n\right];$$

2° eseguendo nella (7) la sostituzione $(\xi_q = x,\ s_q = s)$, minore che indicheremo con

$$D\left[\begin{pmatrix}\xi ; s \\ \eta ; t\end{pmatrix} p\right) (\xi_q = x,\ s_q = s),\ \lambda ; n\right];$$

3° eseguendo nella (7) la sostituzione $(\eta_l = y,\ t_l = t)$, e tale minore verrà indicato con

$$D\left[\begin{pmatrix}\xi ; s \\ \eta ; t\end{pmatrix} p\right) (\eta_l = y,\ t_l = t),\ \lambda ; n\right].$$

Infine, per brevità, porremo ancora:

$$D\left[\begin{pmatrix}x ; s \\ y ; t\end{pmatrix}, \lambda ; n\right] = D\left[\begin{pmatrix}\xi ; s \\ \eta ; t\end{pmatrix} 1\right) \begin{pmatrix}\xi_1 = x, & s_1 = s \\ \eta_1 = y, & t_1 = t\end{pmatrix}, \lambda ; n\right],$$

$$D\left[\begin{pmatrix}x ; q \\ y ; l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi ; s \\ \eta ; t\end{pmatrix} p\right), \lambda ; n\right] = D\left[\begin{pmatrix}\xi ; s \\ \eta ; t\end{pmatrix} p + 1\right) \begin{pmatrix}\xi_{p+1} = x, & s_{p+1} = q \\ \eta_{p+1} = y, & t_{p+1} = l\end{pmatrix}, \lambda ; n\right].$$

2. — Il determinante $D(\lambda ; n)$ è quello relativo all'equazione a cui vien ricondotto, per seguire quanto è stato indicato dal Fredholm (loc. cit., n° 10), il sistema (1'), cioè è il determinante dell'equazione:

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^n k(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \psi(y), \tag{S}$$

ove $k(x, y)$ e $\psi(x)$ sono funzioni definite con le condizioni:

$$(9)\quad \begin{cases} k(x+s-1,\ y+t-1) = k_{st}(x, y), \\ \psi(x+s-1) = \psi_s(x), \qquad (0 \leq x, y \leq 1\ ;\ s, t = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Ogni funzione $\varphi(x)$, definita nell'intervallo $0 \vdash n$ e soddisfacente alla (8), permette di ricavare n funzioni definite dalle

$$(10)\qquad \varphi_s(x) = \varphi(x+s-1) \qquad (0 \leq x \leq 1,\ s = 1, 2, \ldots, n),$$

le quali soddisfano al sistema (1'); e viceversa, ad ogni soluzione di questo corrisponde (per mezzo delle (9), (10)) una soluzione determinata della (8).

L'espressione esplicita delle $\varphi_s(x)$ mediante le $\psi_s(x)$ e $k_{st}(x, y)$ si ottiene, come è stato mostrato dalla Greggi, coll'applicazione di un opportuno lemma di calcolo integrale (*), e quando sia $D(\lambda; n) \neq 0$ si avrà così:

$$(\mathrm{I})\qquad \varphi_s(x) = \psi_s(x) - \frac{\lambda}{D(\lambda; n)} \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, \psi_t(y)\, D\left[\begin{pmatrix} x\,;\,s \\ y\,;\,t \end{pmatrix},\ \lambda; n\right] dy$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Supponendo, in particolare, che le $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ siano tutte nulle, si avrà che:

Ogni sistema lineare omogeneo di equazioni integrali:

$$(11)\qquad \varphi_s(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

non è soddisfatto che da funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *identicamente nulle per ogni valore di* λ, *che non annulla il determinante* $D(\lambda; n)$ *del sistema stesso.*

Poichè $D(\lambda; n)$ è pure il determinante del sistema aggiunto (ed omogeneo) di (1'), cioè del sistema (3) ove sia $n = m$, si ha così, come si è detto, che:

Per $n = m$ *e* $D(\lambda; n) \neq 0$ *son nulle tutte le soluzioni del sistema aggiunto di* (1'), *e quindi le relazioni* (2) *o* (2') *sono identicamente soddisfatte comunque siano le* $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$.

(*) Questo lemma esprime, in sostanza, la possibile riduzione di un integrale definito, semplice o multiplo, a somme, semplici o multiple, di integrali pure definiti ed estesi ad intervalli (o campi) parziali in cui siasi suddiviso l'intervallo (o campo) totale.

3. — La soluzione (I) del sistema (1′) viene a mancare quando per $\lambda = \lambda_0$ risulta $D(\lambda; n) = 0$, ossia quando λ_0 è un *autovalore* per il sistema (1′); sia precisamente λ_0 radice multipla d'ordine p di $D(\lambda; n)$: cioè di questo determinante siano nulli tutti i minori $D\left[\begin{pmatrix}\xi; s\\ \eta; t\end{pmatrix} q\right), \lambda_0; n\right]$ d'ordine $q < p$, e non siano nulli tutti i minori di ordine p.

Se è, per es.,

$$(12) \qquad D\left[\begin{pmatrix}\xi; s\\ \eta; t\end{pmatrix} p\right), \lambda_0; n\right] \neq 0,$$

il sistema omogeneo:

$$(11') \qquad \varphi_s(x) + \lambda_0 \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

risulterà avere infinite soluzioni, le quali si otterranno applicando il procedimento del Fredholm (*) alla (8) resa omogenea, cioè alla

$$(8') \qquad \varphi(x) + \lambda_0 \int_0^n k(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0;$$

e ricavandone, come si è indicato nel n° 2 per (1′), le soluzioni del sistema (11′).

In tal guisa, indicando con $s_1, s_2, \ldots, s_p, t_1, t_2, \ldots, t_p$ degli interi positivi fissati ad arbitrio fra i numeri $1, 2, \ldots, n$; con $C_1, C_2, \ldots, C_p$ delle costanti arbitrarie, e con $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ dei valori pure arbitrariamente scelti nell'intervallo $0 \vdash 1$, purchè sia soddisfatta la (12), come espressione esplicita delle soluzioni di (11′) si ha:

$$(\mathrm{II}) \quad \varphi_s(x) = \sum_1^p {}_q\, C_q \frac{D\left[\begin{pmatrix}\xi; s\\ \eta; t\end{pmatrix} p\right) (\xi_q = x,\ s_q = s), \lambda_0; n\right]}{D\left[\begin{pmatrix}\xi; s\\ \eta; t\end{pmatrix} p\right), \lambda_0; n\right]} \quad (s = 1, 2, \ldots, n);$$

od anche, indicando con $A_1, A_2, \ldots, A_p$ delle costanti arbitrarie:

$$(\mathrm{II}') \quad \varphi_s(x) = \sum_1^p {}_q\, A_q D\left[\begin{pmatrix}\xi; s\\ \eta; t\end{pmatrix} p\right) (\xi_q = x,\ s_q = s), \lambda_0; n\right] \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

(*) Loc. cit., § 2, n. 9.

4. — Nelle stesse ipotesi del n° precedente, come è stato dimostrato dal FREDHOLM (*), affinchè il sistema (1′), ossia la (8), abbia soluzioni, occorre e basta che la funzione $\psi(x)$ sia *ortogonale* a tutte le *autofunzioni* (o soluzioni fondamentali) relative a λ_0 dell'equazione aggiunta (ed omogenea) della (8), ossia della:

$$(13) \qquad \Phi(x) + \lambda_0 \int_0^n k(y, x)\, \Phi(y)\, dy = 0 ;$$

cioè si abbia:

$$(14) \qquad \int_0^n \psi(x)\, \Phi_h(x)\, dx = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

essendo $\Phi_h(x)$ le p autofunzioni della (13).

Ponendo:

$$\Phi_{hs}(x) = \Phi_h(x + s - 1) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p ; s = 1, 2, \ldots, n),$$

le (14), tenendo pure presenti le (9), potranno scriversi:

$$(2'') \qquad \int_0^1 \sum_1^n{}_s\, \psi_s(x)\, \Phi_{hs}(x)\, dx = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

ove le $\Phi_{hs}(x)$ sono le np autofunzioni (cioè costituiscono le p soluzioni fondamentali) del sistema aggiunto di (1′):

$$(3') \quad \Phi_s(x) + \lambda_0 \int_0^1 \sum_1^n{}_t\, k_{ts}(y, x)\, \Phi_t(y)\, dy = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

corrispondenti all'autovalore λ_0.

Considerando delle condizioni relative alla (8) la primitiva forma, da cui il FREDHOLM ha dedotto le (14) (**), si ha immediatamente:

Affinchè il sistema (1′) *abbia delle soluzioni corrispondenti all'autovalore* λ_0, *occorre e basta che le* $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ *soddisfino alle relazioni:*

$$(15) \quad \int_0^1 \sum_1^n{}_t\, \psi_t(x)\, D\left[\begin{pmatrix} \xi ; s \\ \eta ; t \end{pmatrix} p \right) (\eta_q = x,\ t_q = t),\ \lambda_0 ; n\right] dx = 0$$
$$(q = 1, 2, \ldots, p),$$

(*) Loc. cit. Cfr. pure, per es., T. LALESCO, *Introduction à la théorie des équations intégrales* (Paris, A. Hermann, 1912), Ch. II, 14, p. 61.

(**) Loc. cit., p. 377, (15).

comunque si scelgano i valori $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ *nell'intervallo* $0 \vdash 1$, *e comunque si scelgano* $s_1, s_2, \ldots, s_p, t_1, t_2, \ldots, t_p$ *fra gli interi positivi* $1, 2, \ldots, n$.

Se tali condizioni sono soddisfatte, il sistema (1') avrà infinite soluzioni: esse si ottengono, senza difficoltà, col procedimento indicato nei n[i] precedenti (*) e sono:

$$\text{(III)} \quad \varphi_s(x) = \psi_s(x) + \sum_1^p {}_q A_q D\left[\begin{pmatrix} \xi ; s \\ \eta ; t \end{pmatrix} p\right)(\xi_q = x, s_q = s), \lambda_0 ; n\right] -$$

$$- \lambda_0 \int_0^1 \sum_1^n {}_t \frac{D\left[\begin{pmatrix} x ; s \\ y ; t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi ; s \\ \eta ; t \end{pmatrix} p\right), \lambda_0 ; n\right]}{D\left[\begin{pmatrix} \xi ; s \\ \eta ; t \end{pmatrix} p\right), \lambda_0 ; n\right]} \psi_t(y)\, dy \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

ove si assegnino alle costanti $A_1, A_2, \ldots, A_p$ valori arbitrarî.

Osserviamo che, per la (II'), la soluzione generale del sistema (3') aggiunto di (1') è:

$$\Phi_t(x) = \sum_1^p {}_q B_q D\left[\begin{pmatrix} \xi ; s \\ \eta ; t \end{pmatrix} p\right)(\eta_q = x, t_q = t), \lambda_0 ; n\right] \qquad (t = 1, 2, \ldots, n),$$

essendo $B_1, B_2, \ldots, B_p$ costanti arbitrarie e $\xi_q, \eta_q, s_q, t_q, (q = 1, 2, \ldots, p)$ dei valori arbitrariamente scelti nei campi poc'anzi indicati.

Perciò affinchè siano soddisfatte, nel caso in esame, le condizioni espresse dalla (2), occorre e basta si abbia:

$$\text{(15')} \quad \int_0^1 \sum_1^n {}_t \psi_t(y) \sum_1^p {}_q B_q D\left[\begin{pmatrix} \xi ; s \\ \eta ; t \end{pmatrix} p\right)(\eta_q = y, t_q = t), \lambda_0 ; n\right] dy = 0 ,$$

comunque si scelgano i parametri $B_1, B_2, \ldots, B_p$; o, in altro modo, si può dire che in questo caso le (2') equivalgono alle (15), epperò risulta verificato che il teorema nostro vale nel caso considerato di $n = m$.

§ 2. — *Sistema di* m *equazioni integrali con un numero maggiore* n *di funzioni incognite.*

5. — Nell'ipotesi di $m < n$, il sistema (1) può scriversi sotto la forma:

$$\text{(16)} \quad \varphi_s(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^m {}_t k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy = \psi_s(y) -$$

$$- \lambda \int_0^1 \sum_{m+1}^n {}_t k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy \qquad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

(*) I. Fredholm, loc. cit., p. 378.

ed il sistema aggiunto (3) è formato dai due gruppi di equazioni:

$$\Phi_s(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^m{}_t\, k_{ts}(y, x)\, \Phi_t(y)\, dy = 0 \qquad (17)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\int_0^1 \sum_1^m{}_t\, k_{tr}(y, x)\, \Phi_t(y)\, dy = 0 \qquad (18)$$
$$(r = m + 1, m + 2, \ldots, n).$$

Supponiamo dapprima che non sia nullo il determinante $D(\lambda; m)$ (definito nel n° 1), cioè escludiamo che λ sia autovalore del sistema (16), in cui si riguardino come note le funzioni $\varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+2}(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Il sistema (17) [ed a fortiori il sistema formato dalle (17) e (18)] non ammetterà allora che soluzioni identicamente nulle (V. il n° 2), epperciò le condizioni espresse dalle (2), o (2'), nelle quali si potrà pensare scritto

$$\psi_s(x) - \lambda \int_0^1 \sum_{m+1}^n{}_t\, k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy$$

al posto di $\psi_s(x)$, risulteranno identicamente soddisfatte, cioè le funzioni date $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_m(x)$ non dovranno soddisfare ad alcuna condizione. Come soluzioni del sistema (16), nell'ipotesi considerata, si possono infatti assumere ad arbitrio le funzioni $\varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+2}(x), \ldots, \varphi_n(x)$ e con esse le $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ espresse per le (I), dalle:

$$\text{(I')} \qquad \varphi_s(x) = \psi_s(x) - \lambda \int_0^1 \sum_{m+1}^n{}_t\, k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy +$$
$$+ \frac{\lambda^2}{D(\lambda; m)} \int_0^1 \int_0^1 \sum_1^m{}_t \sum_{m+1}^n{}_r\, k_{tr}(y, z)\, \varphi_r(z)\, D\left[\begin{pmatrix} x ; s \\ y ; t \end{pmatrix}, \lambda ; m\right] dy\, dz -$$
$$- \frac{\lambda}{D(\lambda; m)} \int_0^1 \sum_1^m{}_t\, \psi_t(y)\, D\left[\begin{pmatrix} x ; s \\ y ; t \end{pmatrix}, \lambda ; m\right] dy \qquad (s = 1, 2, \ldots, m).$$

Risulta così dimostrato che il nostro teorema generale sussiste nel caso ora esaminato. Per dimostrare la validità dello stesso teorema quando λ sia un autovalore del sistema (16), converrà premettere il seguente:

6. Lemma. *Date* p *costanti* $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *e le* pl *funzioni*

$$\chi_{q1}(x),\ \chi_{q2}(x),\ \ldots,\ \chi_{ql}(x) \qquad (q = 1, 2, \ldots, p), \tag{19}$$

finite ed integrabili nell'intervallo $a^{\frown}b$, *delle quali non sono tutte nulle quelle formanti una qualsiasi linea del quadro* (19); *affinchè un gruppo di* l *funzioni* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_l(x)$, *finite ed integrabili in* $a^{\frown}b$ *soddisfino alle* p *relazioni:*

$$\int_a^b [\chi_{q1}(x)\,\varphi_1(x) + \ldots + \chi_{ql}(x)\,\varphi_l(x)]\,dx = a_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, p) \tag{20}$$

occorre e basta che esse siano del tipo:

$$\varphi_h(x) = \mu_1 f_{h1}(x) + \ldots + \mu_p f_{hp}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots, l), \tag{21}$$

essendo $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ *certe costanti e le* $f_{hq}(x)$ *delle funzioni, finite ed integrabili in* $a^{\frown}b$, *che posson esser scelte in modo arbitrario con l'unica condizione che il determinante di elementi:*

$$\int_a^b [\chi_{q1}(x) f_{1r}(x) + \ldots + \chi_{ql}(x) f_{lr}(x)]\,dx \qquad (q, r = 1, 2, \ldots, p),$$

non sia nullo se le $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *non sono tutte nulle e sia nullo nel caso opposto. I valori delle costanti* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ *son ben determinati dalle* $f_{hq}(x)$ *nel 1° caso, e non sono tutti determinati nel 2° caso.*

In particolare:

Se vi è una colonna, sia la h*-esima, del quadro* (19) *delle cui funzioni nessuna è identicamente nulla, si potrà soddisfare alle* (20) *assumendo completamente ad arbitrio le* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{h-1}(x), \varphi_{h+1}(x), \ldots, \varphi_l(x)$ *e ponendo:*

$$\varphi_h(x) = \mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x) + \ldots + \mu_p f_p(x), \tag{20'}$$

essendo $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ *delle costanti (tutte determinate o no) e le* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ *delle funzioni, sempre finite ed integrabili in* $a^{\frown}b$, *scelte con la sola condizione che il determinante di elementi*

$$\int_a^b \chi_{qh}(x) f_r(x)\,dx \qquad (q, r = 1, 2, \ldots, p),$$

sia nullo o non secondochè rispettivamente le $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{h-1}(x), \varphi_{h+1}(x), \ldots, \varphi_l(x)$ *soddisfano o non alle condizioni:*

$$\int_0^1 \Big[\sum_1^{h-1}{}_r\, \chi_{qr}(x)\,\varphi_r(x) + \sum_{h+1}^{l}{}_r\, \chi_{qr}(x)\,\varphi_r(x)\Big]\,dx = a_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, p).$$

Infatti, è ovvio anzitutto che ogni soluzione $\bar{\varphi}_1(x)$, $\bar{\varphi}_2(x)$, ..., $\bar{\varphi}_l(x)$ della (20) rientra nelle (21), ponendo per es. $f_{h1}(x) = \bar{\varphi}_h(x)$, $(h = 1, 2, ..., l)$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_p = 0$.

Basterà d'altra parte sostituire le (21) nelle (20) per ottenere il sistema d'equazioni lineari nelle μ_1, μ_2, ..., μ_r:

$$\sum_1^p {}_r \mu_r \sum_1^l \int_a^b \chi_{qh}(x) f_{hr}(x)\, dx = a_q \qquad (q = 1, 2, ..., p),$$

il quale permette di ricavare subito la proposizione enunciata.

7. — Consideriamo ora di $D(\lambda; m) = 0$ una radice λ_0, multipla secondo $p \geq 1$, che potremo chiamare ancora *autovalore* di (16) o di (1). Riguardando in questo caso, come nel n° 5, fissate le $\varphi_{m+1}(x)$, $\varphi_{m+2}(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, sarà (17) il sistema aggiunto di (16), e per ogni soluzione $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_m(x)$ di tale sistema aggiunto dev'essere, per quanto si è dimostrato nel § 1:

$$(22) \qquad \int_0^1 \sum_1^m {}_s \Phi_s(x) \left\{ \psi_s(x) - \lambda_0 \int_0^1 \sum_{m+1}^n {}_r k_{sr}(x, y)\, \varphi_r(y)\, dy \right\} dx = 0,$$

ossia:

$$(22') \qquad \int_0^1 \sum_1^m {}_s \psi_s(x) \Phi_s(x)\, dx = \lambda_0 \int_0^1 \sum_{m+1}^n {}_r \varphi_r(x) \int_0^1 \sum_1^m {}_s k_{sr}(y, x) \Phi_s(y)\, dx\, dy.$$

In altro modo, osservato che, per essere p la molteplicità dell'autovalore λ_0, in virtù della (II) le (17) possono ammettere p (e non più di p) soluzioni linearmente indipendenti, indicando precisamente con

$$(23) \qquad \Phi_{q1}(x),\ \Phi_{q2}(x),\ ...,\ \Phi_{qm}(x) \qquad (q = 1, 2, ..., p_1, ..., p)$$

un gruppo (completo) di p soluzioni indipendenti del sistema (17), le (22) o (22') equivarranno alle condizioni seguenti:

$$(22'') \qquad \int_0^1 \sum_1^m {}_s \psi_s(x) \Phi_{qs}(x)\, dx = \lambda_0 \int_0^1 \sum_{m+1}^n {}_r \varphi_r(x) \int_0^1 \sum_1^m {}_s k_{sr}(y, x) \Phi_{qs}(y)\, dx\, dy$$
$$(q = 1, 2, ..., p).$$

Supponiamo ancora, com'è lecito, che un certo numero (intero e positivo) $p - p_1 \geq 0$ delle soluzioni (23), per es., le ultime $p - p_1$ di queste, rappresentino il massimo numero possibile di soluzioni linearmente indipendenti comuni ai due sistemi

(17), (18), ossia un gruppo completo di soluzioni linearmente indipendenti del sistema formato dalle (17) e (18). Allora, per $q = p_1 + 1, p_1 + 2, \dots, p$, le (22″) si riducono a:

$$(22'')_1 \qquad \int_0^1 \sum_1^m{}_s \psi_s(x)\, \Phi_{qs}(x)\, dx = 0 \qquad (q = p_1 + 1,\ p_1 + 2, \dots, p),$$

le quali esprimono, come vuole il teorema enunciato nell'introduzione, che le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$ debbono verificare le (2), o (2′).

Le prime p_1 equazioni (22″), ponendo:

$$(24) \qquad \begin{cases} a_q = \int_0^1 \sum_1^m{}_s \psi_s(x)\, \Phi_{qs}(x)\, dx, \\ \chi_{qr}(x) = \lambda_0 \int_0^1 \sum_1^m{}_s k_{sr}(y, x)\, \Phi_{qs}(y)\, dy, \end{cases}$$

$$(q = 1, 2, \dots, p_1;\ r = m + 1, m + 2, \dots, n),$$

diventano:

$$(22'')_2 \qquad \int_0^1 [\chi_{m+1,q}(x)\, \varphi_{m+1}(x) + \dots + \chi_{nq}(x)\, \varphi_n(x)]\, dx = a_q$$
$$(q = 1, 2, \dots, p_1).$$

Per il lemma del n° 6 si potranno soddisfare queste equazioni (cioè le prime p_1 delle (22″)), comunque siano le funzioni date $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$, scegliendo opportunamente le $\varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+2}(x), \dots, \varphi_n(x)$, poichè, per l'ipotesi fatta riguardo alle (23), nessuna di queste per $q = 1, 2, \dots, p_1$ soddisfa al sistema (18); cioè, come vuole il lemma del n° 6, per nessun valore di $q = 1, 2, \dots, p_1$ risultano identicamente nulle tutte le $n - m$ funzioni:

$$\int_0^1 \sum_1^m{}_s k_{s,m+1}(y, x)\, \Phi_{qs}(y)\, dx, \dots, \int_0^1 \sum_1^m{}_s k_{sn}(y, x)\, \Phi_{qs}(y)\, dy.$$

Rimane dunque dimostrato che *nel caso di* $m < n$ *e qualunque sia il valore di* λ, *per l'esistenza di soluzioni del sistema* (1), *o* (16), *le* $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$ *debbono soddisfare unicamente alle* (2), *o* $(22'')_1$, *ove le* $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_m(x)$ *indicano una qualsiasi soluzione del sistema formato dalle* (17) *e* (18), *cioè del sistema aggiunto di* (16).

8. — Dai n¹ 6, 7 risulta pure che:

1° *Se tutte le soluzioni di* (17) *son pure soluzioni di* (18) (*cioè questo sistema è conseguenza di quello*), *si possono nel dato sistema* (16) *assumere per* $\varphi_{m+1}(x)$, $\varphi_{m+2}(x), \dots, \varphi_n(x)$ *delle funzioni completamente arbitrarie* (*purchè finite ed integrabili nell'intervallo* $0 \frown 1$). *Per un autovalore* λ_0 *di molteplicità* p *le* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$ *dovranno soddisfare alle* p (*per* $p_1 = 0$) *relazioni* $(22'')_1$ *nelle quali* $\Phi_{q1}(x), \Phi_{q2}(x), \dots, \Phi_{qm}(x)$, ($q = 1, 2, \dots, p$) *si possono ritenere le autofunzioni del sistema* (17) *relative a* λ_0.

2° *Se invece il sistema* (18) *non è conseguenza del sistema* (17), *non si possono scegliere tutte le* $\varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+2}(x), \dots, \varphi_n(x)$ *completamente ad arbitrio, poichè si debbono soddisfare le* $(22'')_2$; *e le* $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$ *devono soddisfare alle* $p_1 \geq 0$ *condizioni* $(22'')_1$, *ossia alle* (2').

Per il n° 6 possiamo aggiungere che, considerate $(n - m)\,p_1$ funzioni:

$$f_{h1}(x),\ f_{h2}(x),\ \dots,\ f_{hp_1}(x) \qquad (h = m+1,\ m+2,\ \dots,\ n),$$

finite ed integrabili in $0 \frown 1$, scelte con la sola condizione che non sia nullo il determinante i cui elementi sono:

$$\int_0^1\int_0^1 \sum_{m+1}^{n}{}_h f_{hr}(x) \sum_1^m{}_s k_{sh}(y,x)\, \Phi_{qs}(y)\, dx\, dy \qquad (q, r = 1, 2, \dots, p_1),$$

si potrà assumere:

$$\varphi_h(x) = \sum_1^{p_1}{}_r \mu_r f_{hr}(x) \qquad (h = m+1,\ m+2,\ \dots,\ n),$$

essendo $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p_1}$ costanti determinate.

Si osservi che l'esservi fra le $\chi_{qr}(x)$ [definite dalle (24)] con un medesimo secondo indice r qualche funzione identicamente nulla, cioè l'essere

$$\int_0^1 \sum_1^m{}_s k_{sr}(y,x)\, \Phi_{qs}(y)\, dy = 0\,,$$

per qualcuno dei valori $q = 1, 2, \dots, p_1$, significa che una qualche soluzione di (17) delle (23), per $q \leq p_1$, pur non essendo soluzione di (18), soddisfa alla equazione di questo sistema corrispondente all'indice r.

Se quindi *nel sistema* (18), *quando non sia conseguenza del sistema* (17), *esiste almeno una equazione la quale non sia soddisfatta da alcuna delle soluzioni* (23) (*per* $q = 1, 2, \dots, p_1$) *di* (17) *ma non di* (18); *per il n° 6 è possibile scegliere* $n - m - 1$ *delle funzioni* $\varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+2}(x), \dots, \varphi_n(x)$ *completamente ad arbitrio ed assumere la rimanente di esse come combinazione lineare, a coefficienti determinati, di* p_1 *funzioni* $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{p_1}(x)$ *che basterà scegliere in modo generico.*

In ogni caso, scelte le $\varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+2}(x), \dots, \varphi_n(x)$, le espressioni di $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$, nell'ipotesi considerata di $D(\lambda_0; m) = 0$, saranno in virtù delle (III):

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \varphi_s(x) = \psi_s(x) - \lambda_0 \int_0^1 \sum_{m+1}^{n}{}_r\, k_{sr}(x, y)\, \varphi_r(y)\, dy +$$
$$+ \sum_1^p{}_q A_q D\left[\begin{pmatrix}\xi\,;\,s\\ \eta\,;\,t\end{pmatrix} p\right)(\xi_q = x,\ s_q = s),\ \lambda_0\,;\,m\right] -$$
$$-\lambda_0 \int_0^1 \sum_1^m{}_t \frac{D\left[\begin{pmatrix}x\,;\,s\\ y\,;\,t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\,;\,s\\ \eta\,;\,t\end{pmatrix} p\right),\ \lambda_0\,;\,m\right]}{D\left[\begin{pmatrix}\xi\,;\,s\\ \eta\,;\,t\end{pmatrix} p\right),\ \lambda_0\,;\,m\right]} \left\{ \psi_t(y) - \lambda_0 \int_0^1 \sum_{m+1}^{n}{}_r k_{tr}(y,z)\varphi_r(z)dz \right\} dy,$$
$$(s = 1, 2, \dots, m),$$

essendo $D\left[\begin{pmatrix}\xi\,;\,s\\ \eta\,;\,t\end{pmatrix} p\right),\ \lambda_0\,;\,m\right] \neq 0$, ed $A_1, A_2, \dots, A_q$ delle costanti arbitrarie, ecc.

§ 3. — *Sistema di m equazioni integrali con altrettante funzioni incognite delle quali solo n < m compaiono sotto il segno integrale.*

9. — Nel sistema (1) si abbia $m > n$, cioè si tratti del sistema:

$$\text{(1}'\text{)} \quad \varphi_t(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^n{}_s\, k_{ts}(x, y)\, \varphi_s(y)\, dy = \psi_t(x) \qquad (t = 1, 2, \dots, n),$$

$$\text{(1}''\text{)} \quad \varphi_r(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^n{}_s\, k_{rs}(x, y)\, \varphi_s(y)\, dy = \psi_r(x) \qquad (r = n+1, \dots, m).$$

Limitandoci a considerare le prime n di queste equazioni, cioè le (1′) del § 1, potremo ripetere per esse quanto si è detto nel § 1 stesso; cioè, perchè esistano delle soluzioni di un tale

sistema occorre e basta che le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ soddisfino alle (2'), od altrimenti alle

$$(2) \qquad \int_0^1 \sum_1^m {}_s\, \psi_s(x)\, \Phi_s(x)\, dx = 0\,,$$

essendo $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)$ una qualsiasi possibile soluzione del sistema (3') (V. n° 4). E soddisfatte dette condizioni, le (III), o le (I) per λ generico, ci dànno le espressioni di $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$.

D'altro lato, se $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ è una soluzione così ottenuta per le (1'), sostituendo tale gruppo di funzioni nelle rimanenti equazioni (1'') se ne ricaveranno senz'altro le espressioni corrispondenti per $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \dots, \varphi_m(x)$; cioè, perchè esistano soluzioni del sistema formato da (1'), (1''), occorre e basta che le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ soddisfino alle (2), mentre le $\psi_{n+1}(x), \psi_{n+2}(x), \dots, \psi_m(x)$ possono essere qualunque.

Ora, nel caso in esame, le ultime $m-n$ equazioni del sistema (3) aggiunto di (1) si riducono a $\Phi_{n+1}(x) = \Phi_{n+2}(x) = \dots = \Phi_m(x) = 0$; e le prime n equazioni di tale sistema si identificano con le (3'). Quindi, le condizioni ultimamente enunciate equivalgono ancora a dire che le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots, \psi_m(x)$ debbono soddisfare alle (2), essendo $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x), \dots, \Phi_m(x)$ una qualsivoglia soluzione dell'aggiunto del sistema formato da (1') e (1''); cioè, anche nel caso di $m > n$, per il sistema (1) vale il nostro teorema generale.

§ 4. — *Sistema di* m *equazioni integrali con un numero minore* n *di funzioni incognite.*

10. — Si voglia ora considerare il seguente sistema, distinto in due gruppi, con un numero complessivo m di equazioni, maggiore del numero n delle funzioni incognite:

$$(25) \qquad \varphi_s(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy = \psi_s(x) \qquad (s = 1, 2, \dots, n),$$

$$(26) \qquad \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, k_{rt}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy = \psi_r(x)$$
$$(r = n+1, n+2, \dots, m),$$

a cui corrisponde il sistema aggiunto:

$$(27)\qquad \Phi_s(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^m {}_t\, k_{ts}(y, x)\, \Phi_t(y)\, dy = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

il quale può pure scriversi:

$$(27')\quad \Phi_s(x) + \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, k_{ts}(y, x)\, \Phi_t(y)\, dy = -\lambda \int_0^1 \sum_{n+1}^m {}_r\, k_{rs}(y, x)\, \Phi_r(y)\, dy,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Nel caso di un valore generico per λ, cioè di $D(\lambda\,; n) \neq 0$, per dimostrare il nostro teorema si risolva il sistema (25), come si è fatto nel § 1 per (1'); si hanno così le $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ espresse dalle (I), senza alcuna condizione per le $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$.

Sostituendo dette espressioni (I) nelle (26), si ottiene:

$$\lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_s\, k_{rs}(x, z) \Big\{ \psi_s(z) - \frac{\lambda}{D(\lambda\,; n)} \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, \psi_t(y)\, D\left[\begin{pmatrix} z\,; s \\ y\,; t \end{pmatrix}, \lambda\,; n\right] dy \Big\}\, dz = \psi_r(x),$$

ossia:

$$(28)\qquad \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_s\, k_{rs}(x, y)\, \psi_s(y)\, dy -$$
$$- \frac{\lambda^2}{D(\lambda\,; n)} \int_0^1 \int_0^1 \sum_1^n {}_t\, \psi_t(y) \sum_1^n {}_s\, k_{rs}(x, z)\, D\left[\begin{pmatrix} z\,; s \\ y\,; t \end{pmatrix}, \lambda\,; n\right] dy\, dz = \psi_r(x)$$
$$(r = n + 1, n + 2, \ldots, m),$$

che sono le condizioni a cui debbono soddisfare le $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$, ..., $\psi_m(x)$, perchè le (I) siano le soluzioni di tutte le equazioni (25) e (26).

D'altro lato, nell'ipotesi fatta di $D(\lambda\,; n) \neq 0$, nel sistema aggiunto (27') si possono assumere ad arbitrio le $\Phi_{n+1}(x)$, $\Phi_{n+2}(x)$, ..., $\Phi_m(x)$ e per le altre $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_n(x)$, in virtù delle (I), si avranno di conseguenza le espressioni:

$$\Phi_s(x) = -\lambda \int_0^1 \sum_{n+1}^m {}_r\, k_{rs}(y, x)\, \Phi_r(y)\, dy +$$
$$+ \frac{\lambda^2}{D(\lambda\,; n)} \int_0^1 \int_0^1 \sum_1^n {}_t \sum_{n+1}^m {}_r\, k_{rt}(y, z)\, \Phi_r(y)\, D\left[\begin{pmatrix} z\,; t \\ x\,; s \end{pmatrix}, \lambda\,; n\right] dy\, dz,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

Quindi nel nostro caso le condizioni (2) del teorema da dimostrarsi assumono la forma seguente:

$$\int_0^1 \sum_1^m {}_s \psi_s(x)\,\Phi_s(x)\,dx = \int_0^1 \Big\{ \sum_{n+1}^m {}_r \psi_r(x)\,\Phi_r(x) -$$

$$- \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_s \sum_{n+1}^m {}_r k_{rs}(y,x)\,\psi_s(x)\,\Phi_r(y)\,dy +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{D(\lambda;n)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \sum_1^n {}_t \sum_1^n {}_s \sum_{n+1}^m {}_r k_{rt}(y,z)\,\psi_s(x)\,\Phi_r(y)\,D\left[\begin{pmatrix} z\,;\,t \\ x\,;\,s \end{pmatrix}, \lambda\,;n\right] dy\,dz \Big\} dx = 0,$$

ossia:

$$\int_0^1 \sum_{n+1}^m {}_r \Phi_r(x) \Big\{ \psi_r(x) - \lambda \int_0^1 \sum_1^n {}_s k_{rs}(x,y)\,\psi_s(y)\,dy +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{D(\lambda;n)} \int_0^1\!\!\int_0^1 \sum_1^n {}_t \sum_1^n {}_s k_{rt}(x,z)\,\psi_s(y)\,D\left[\begin{pmatrix} z\,;\,t \\ y\,;\,s \end{pmatrix}, \lambda\,;n\right] dy\,dz \Big\} dx = 0$$

$$(s = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ m).$$

E perchè queste siano verificate, essendo arbitrarie le $\Phi_{n+1}(x)$, $\Phi_{n+2}(x)$, ..., $\Phi_m(x)$, occorre e basta, com'è chiaro, siano verificate le (28). c. d. d.

11. — Consideriamo ora del sistema (25) un autovalore λ_0 di molteplicità p.

Ammesso sia per es. $D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p, \lambda_0\,;n\right] \neq 0$, perchè le (25) ammettano soluzioni per $\lambda = \lambda_0$, come si è visto nel n° 4, occorre e basta si abbia:

$$(15') \qquad \int_0^1 \sum_1^n {}_s \psi_s(y) \sum_1^p {}_q B_q\, D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right) (\eta_q = x,\ t_q = s),\ \lambda_0\,;n\right] dx = 0,$$

essendo $B_1, B_2, \ldots, B_p$ costanti arbitrarie; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ dei valori scelti ad arbitrio nell'intervallo $0 \frown 1$, ed $s_1, s_2, \ldots, s_p, t_1, t_2, \ldots, t_p$ arbitrariamente scelti fra gl'interi positivi $1, 2, \ldots, n$.

Se sono soddisfatte queste (15′), le infinite soluzioni della (25) si ottengono dalle (III) (V. n° 4) assegnando alle costanti A_1, A_2, ..., A_p dei valori arbitrari.

Le condizioni che debbono inoltre essere soddisfatte perchè le espressioni (III) verifichino pure le (26), cioè siano soluzioni

di tutto il sistema da noi considerato, s'ottengono sostituendo le (III) nelle (26), cioè sono:

$$(29)\qquad \lambda_0 \int_0^1 \sum_1^n{}_s\, k_{rs}(x,y)\, \psi_s(y)\, dy -$$

$$- \lambda_0^2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_1^n{}_s \sum_1^n{}_t\, k_{rs}(x,y)\, \frac{D\left[\begin{pmatrix} y\,;\,s \\ z\,;\,t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right), \lambda_0\,;\,n\right]}{D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right), \lambda_0\,;\,n\right]}\, \psi_t(z)\, dy\, dz +$$

$$+ \lambda_0 \int_0^1 \sum_1^p{}_q\, A_q \sum_1^n{}_s\, k_{rs}(x,y)\, D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right)(\xi_q = y,\, s_q = s),\, \lambda_0\,;\,n\right] dy = \psi_r(x)$$

$$(r = n+1,\, n+2,\, \ldots,\, m).$$

D'altra parte, se nel sistema aggiunto (27′) riguardiamo come fissate le $\Phi_{n+1}(x)$, $\Phi_{n+2}(x)$, ..., $\Phi_m(x)$, perchè esistano delle altre funzioni $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_n(x)$ che ad esso soddisfano, occorre e basta che i secondi membri delle (27′) stesse verifichino le relazioni solite formate con le soluzioni dell'aggiunto di (27′), cioè del sistema:

$$F_s(x) + \lambda_0 \int_0^1 \sum_1^n{}_t\, k_{st}(x,y)\, F_t(y)\, dy = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

le cui soluzioni, per la (II′) del n° 3, sono:

$$F_s(x) = \sum_1^p{}_q\, A_q\, D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right)(\xi_q = x,\, s_q = s),\, \lambda_0\,;\,n\right] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n);$$

cioè per i secondi membri delle (27′) dev'essere:

$$(30)\qquad \int_0^1 \int_0^1 \sum_1^p{}_q\, A_q \sum_1^n{}_s \sum_{n+1}^m{}_r\, k_{rs}(y,x)\, \Phi_r(y)\,.$$

$$.\, D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right)(\xi_q = x,\, s_q = s),\, \lambda_0\,;\,n\right] dx\, dy = 0\,,$$

qualunque siano le costanti A_1, A_2, ..., A_q.

Soddisfatte tali relazioni dalle $\Phi_{n+1}(x)$, $\Phi_{n+2}(x)$, ..., $\Phi_m(x)$, le espressioni delle altre $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_n(x)$, soddisfacenti con le precedenti alle (27), per le (III) sono:

$$\Phi_s(x) = -\lambda_0 \int_0^1 \sum_{n+1}^m{}_r\, k_{rs}(y,x)\, \Phi_r(y)\, dy +$$

$$+ \lambda_0^2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_1^n{}_t \sum_{n+1}^m{}_r\, k_{rt}(z,y)\, \Phi_r(z)\, \frac{D\left[\begin{pmatrix} y\,;\,t \\ x\,;\,s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right), \lambda_0\,;\,n\right]}{D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right), \lambda_0\,;\,n\right]}\, dy\, dz +$$

$$+ \sum_1^p{}_q\, B_q\, D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right)(\eta_q = x,\, t_q = s),\, \lambda_0\,;\,n\right] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Quindi la relazione generale (2) per il sistema attuale, formato dalle (25) e (26), assume la forma seguente:

$$(31)\qquad \int_0^1 \sum_{n+1}^{m}{}_r\, \Phi_r(x) \Big\{ \psi_r(x) - \lambda_0 \int_0^1 \sum_1^n{}_s\, k_{rs}(x,y)\, \psi_s(y)\, dy +$$

$$+ \lambda_0^2 \int_0^1 \int_0^1 \sum_1^n{}_t \sum_1^n{}_s\, \psi_s(z)\, k_{rt}(x,y)\, \frac{D\left[\begin{pmatrix} y\,;\,t \\ z\,;\,s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right), \lambda_0\,;\,n\Big]}{D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right), \lambda_0\,;\,n\Big]}\, dy\, dz \Big\} dx +$$

$$+ \int_0^1 \sum_1^n{}_s \sum_1^p{}_q\, B_q\, \psi_s(x)\, D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right) (\eta_q = x,\ t_q = s),\ \lambda_0\,;\,n\Big]\, dx = 0\,;$$

e dev'essere verificata per valori arbitrarî delle costanti B_1, $B_2, \ldots, B_p$ e da ogni gruppo di funzioni $\Phi_{n+1}(x)$, $\Phi_{n+2}(x), \ldots, \Phi_m(x)$ che può soddisfare alle (27'), cioè, per quanto precede, da ogni gruppo delle funzioni indicate soddisfacenti alle (30). Poichè queste son soddisfatte supponendo nulle tutte le predette funzioni Φ, seguono immediatamente dalla (31) le condizioni espresse dalla (15'), cioè l'annullarsi per valori arbitrarî di $B_1, B_2, \ldots, B_p$ dell'ultimo integrale nel primo membro della (31).

Combinando poi linearmente la (31) con (30) si verrà ad aggiungere nella $\}$ $\{$ del 1° membro di (31) il seguente gruppo di termini:

$$\int_0^1 \sum_1^p{}_q\, A_q \sum_1^n{}_s\, k_{rs}(x,y)\, D\left[\begin{pmatrix} \xi\,;\,s \\ \eta\,;\,t \end{pmatrix} p\right) (\xi_q = y,\ s_q = s),\ \lambda_0\,;\,n\Big]\, dy\,;$$

e per l'arbitrarietà nella scelta delle funzioni $\Phi_{n+1}(x)$, $\Phi_{n+2}(x), \ldots, \Phi_m(x)$ si deduce così, dalla (31) stessa, la (29). E si vede pure con eguale facilità che dalle (15') e (29) seguono le (30) e (31); quindi anche nel caso in esame sussiste la proposizione che ci siamo proposti di dimostrare in questa Nota.

Appendice.

Vogliamo ora mostrare che le condizioni di compatibilità di un sistema di equazioni algebriche di 1° grado si possono esprimere, in modo analogo a quello che abbiamo fatto per i sistemi di equazioni integrali, col seguente teorema (*):

(*) Questa analogia viene in certa guisa ad estendere il noto parallelismo fra i sistemi di equazioni lineari algebriche e le equazioni integrali; parallelismo messo in luce, fra gli altri, dall'HILBERT [*Grundzüge einer allge-*

Dato un qualsiasi sistema di m *equazioni lineari con* n *incognite*

(1) $$\sum_1^n {}_t a_{st} x_t = c_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

affinchè esso ammetta qualche soluzione finita (cioè formata da un gruppo di valori finiti delle incognite) è necessario e sufficiente che i termini noti $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *soddisfino ad ogni relazione del tipo:*

(2) $$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m = 0,$$

essendo $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *una qualsiasi (eventuale) soluzione del sistema:*

(3) $$\sum_1^m {}_s a_{st} y_s = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n),$$

che potremo dire **aggiunto** *(ed omogeneo)* (*) *del sistema* (1).

Od altrimenti:

Per la compatibilità delle (1) *occorre che* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *soddisfino alle relazioni:*

(2') $$c_1 y_1^{(q)} + c_2 y_2^{(q)} + \ldots + c_m y_m^{(q)} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

essendo $y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots, y_m^{(q)}$, $(q = 1, 2, \ldots, p)$ *un sistema completo di* $p \geq 0$ *soluzioni linearmente indipendenti del sistema aggiunto* (3).

Prima di procedere alla dimostrazione s'osservi che, quando $n > m$ possiamo aggregare al dato sistema $n - m$ equazioni identiche (cioè con coefficienti e termini noti nulli); e quando $n < m$ possiamo aggiungere nei primi membri di ogni equa-

---

meinen Th. der lin. Integralgleichungen (" Göttingen Nach. ", 1904), Heft I, pp. 49-91]; cfr. pure la mia Nota: *Sull'equazione alle potenze di un'equazione secolare ed applicaz. alle equazioni integrali* (" Atti R. Ist. Veneto ", t. 71, 1912, pp. 917-930).

(*) Ciò per mantenere qui la denominazione usata nelle equazioni integrali. Peraltro il sistema (3) potrebbe chiamarsi coniugato di (1), poichè, riguardando i primi membri di (1') come esprimenti una sostituzione lineare fra le variabili x e le c, i primi membri della (3') vengono a rappresentare la *sostituzione coniugata* [Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Transformations linéaires* (Pavia, Mattei et C., 1912), Appendice, III, p. 148].

zione di (1) $m - n$ termini con altrettante nuove incognite, i cui coefficienti siano tutti nulli; sicchè, senza ledere alla generalità, *è lecito supporre, come faremo nel seguito,* n = m.

Inoltre, se r è la caratteristica del determinante (o matrice, escludendo le linee e colonne identicamente nulle) dei coefficienti del sistema considerato:

$$(1') \qquad a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = c_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

possiamo supporre (dopo eseguita, eventualmente, una conveniente permutazione fra le incognite ed un'altra fra le equazioni) sia:

$$(4) \qquad \alpha_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Allora, se è in primo luogo $r = n$, il sistema (1′) ammetterà una soluzione (unica) formata da valori finiti di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, che si hanno risolvendo il dato sistema con la nota regola di Leibniz (*); ed il sistema aggiunto

$$(3') \qquad a_{1t}y_1 + a_{2t}y_2 + \ldots + a_{nt}y_n = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

non è soddisfatto che da valori tutti nulli delle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, e la (2), ove $m = n$, è verificata identicamente qualunque siano i valori delle $c_1, c_2, \ldots, c_n$; dunque nell'ipotesi fatta il teorema enunciato è vero.

Quando $r < n$, com'è noto dalla teoria dei sistemi di equazioni lineari ed omogenee, le ultime $n - r$ equazioni dell'aggiunto (3′) debbono essere conseguenza delle prime r, cioè delle

$$(3'') \quad a_{1t}y_1 + a_{2t}y_2 + \ldots + a_{rt}y_r = -(a_{r+1,t}y_{r+1} + \ldots + a_{nt}y_n)$$
$$(t = 1, 2, \ldots, r);$$

quindi, dalla risoluzione di queste ultime, segue subito che un

(*) Comunemente, ma erroneamente, attribuita a Cramer; cfr. G. Peano, *Formulario Matematico*, t. V (Torino, Bocca, 1905), p. 146.

gruppo completo di soluzioni linearmente indipendenti del sistema (3''), ossia di (3'), è formato da:

$$
\begin{gathered}
y_1^{(q)} = \alpha_{1q}, \; y_2^{(q)} = \alpha_{2q}, \ldots, y_r^{(q)} = \alpha_{rq}, \\
y_{r+1}^{(q)} = 0, \ldots, y_{q-1}^{(q)} = 0, \; y_q^{(q)} = -\alpha_r, \; y_{q+1}^{(q)} = 0, \ldots, y_n^{(q)} = 0,
\end{gathered} \tag{5}
$$

per $q = r + 1, r + 2, \ldots, n$, essendo:

$$
\alpha_{iq} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{i-1,1} & a_{q1} & a_{i+1,1} & \ldots & a_{r1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{1r} & a_{2r} & \ldots & a_{i-1,r} & a_{qr} & a_{i+1,r} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\ldots,r;\; q=1,2,\ldots,n). \tag{6}
$$

Ciò premesso, supponiamo che siano soddisfatte le condizioni (2'), ove $m = n$, ossia, per le (5):

$$
\sum_1^r{}_i \, c_i \alpha_{iq} - c_q \alpha_r = 0 \qquad (q = r + 1, r + 2, \ldots, n) \tag{2''}
$$

cioè, per le (4) e (6):

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & c_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & c_r \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qr} & c_q \end{vmatrix} = 0 \quad (q = r + 1, r + 2, \ldots, n), \tag{2'''}
$$

od ancora, per essere r la caratteristica del determinante dei coefficienti di (1'), indicando con $\bar{x}_{r+1}, \bar{x}_{r+2}, \ldots, \bar{x}_n$ dei valori arbitrari:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & c_1 - a_{1,r+1}\bar{x}_{r+1} - \ldots - a_{1n}\bar{x}_n \\ . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr} & c_r - a_{r,r+1}\bar{x}_{r+1} - \ldots - a_{rn}\bar{x}_n \\ a_{q1} & a_{q2} \ldots a_{qr} & c_q - a_{q,r+1}\bar{x}_{r+1} - \ldots - a_{qn}\bar{x}_n \end{vmatrix} = 0 \tag{7}
$$

$$(q = r + 1, r + 2, \ldots, n).$$

Ora le ultime relazioni (7) esprimono che, assunti ad arbitrio nelle prime r equazioni di (1'):

$$(8) \qquad a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sr}x_r = c_s - a_{s,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{sn}x_n$$
$$(s = 1, 2, \dots, r),$$

dei valori (finiti) $\bar{x}_{r+1}, \bar{x}_{r+2}, \dots, \bar{x}_n$ per le ultime $n-r$ incognite e ricavati i valori $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$, che assumono in conseseguenza le altre r incognite, la soluzione così ottenuta per le (8) soddisfa pure ad ognuna delle ultime $n-r$ equazioni di (1'), cioè è una soluzione di questo sistema.

Viceversa: se il sistema (1') ammette una soluzione $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \dots, \bar{x}_n$, essa soddisferà alle (8) e saranno inoltre verificate le (7), le quali non esprimono altro se non che tale soluzione soddisfa non solo alle (8), ma anche a ciascuna delle $n-r$ ultime equazioni di (1'); ma, per esser nulli tutti i determinanti d'ordine $r+1$ formati con i coefficienti a_{st}, dalle (7) seguono le (2'''), ossia le (2''), e quindi saranno verificate le (2') o le (2). c. d. d.

Osservazione. — Le (7) esprimono la condizione necessaria e sufficiente perchè la matrice formata dai coefficienti e dai termini noti del sistema (1') abbia la stessa caratteristica r del determinante dei coefficienti di (1') (*). Quindi, poichè si è mostrata l'equivalenza delle (7) alle (2), o (2''), dal nostro teorema può dedursi subito quello enunciato dal Capelli; ed inversamente da quest'ultimo può ricavarsi il primo.

Torino, novembre 1912.

(*) Per alcuni teoremi sull'annullamento di matrici cfr. la mia Nota: *Sui sistemi di equazioni ottenuti da un determinante simmetrico di forme in più serie di variabili* (di prossima pubblicazione nei "Rendic. del R. Ist. Lombardo", (2), XLVI).

Sulla trasformazione di Tschirnhausen.

Nota della Dottoressa TERESA ASTUTI.

Rappresentiamo con

(1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots + a_n$$

un polinomio di grado n nella variabile x e chiamiamo

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

le n radici dell'equazione

(2) $$f(x) = 0.$$

Sia ancora

(3) $$\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} \dots + b_m$$

un polinomio di grado m nella variabile x.

Noi diciamo *trasformata di Tschirnhausen dell'equazione* (2) *mediante il polinomio trasformatore* (3) un'equazione

$$F(\xi) = 0,$$

di grado n, tale che le sue n radici sieno

$$\xi_1 = \varphi(\alpha_1), \ \xi_2 = \varphi(\alpha_2), \ \dots, \ \xi_n = \varphi(\alpha_n).$$

È noto che tale trasformazione si può ottenere mediante l'impiego delle formole di Newton. Alcune considerazioni d'indole generale, come per esempio la legge del peso di Cayley, rendono più facile e meno fastidioso l'impiego delle suddette formule; ma non evitano tuttavia la necessità di impiegarvi molto tempo.

Non mancano altri metodi: quello stesso che qui proponiamo si può ritenere potenzialmente noto.

Mi pare ciò nonostante opportuno richiamare su di esso l'attenzione, in vista di una generalizzazione, che io credo importante, alla quale il metodo immediatamente conduce.

Consideriamo insieme con l'equazione (4) la seguente equazione nella variabile x

$$\varphi(x) - \xi = 0 \tag{5}$$

dove ξ rappresenta un parametro indipendente da x. Se β_1, $\beta_2 \ldots \beta_m$ sono le radici dell'equazione (5) ci basterà scrivere la condizione

$$\beta_r = \alpha_s \tag{6}$$

per esprimere che le due equazioni (2) e (5) hanno una radice comune. Ma dalla (6) risulta subito

$$\varphi(\beta_r) = \varphi(\alpha_s). \tag{7}$$

Ora, per la (5), la grandezza $\varphi(\beta_r)$ vale nient'altro che ξ, perciò se le due equazioni (2) e (5) hanno qualche radice comune, deve essere verificata la relazione

$$\xi = \varphi(\alpha_s).$$

Se noi dunque scriviamo un'equazione in ξ, la quale si annulli ogni volta che le due equazioni (2) e (5) hanno radici comuni, allora questa equazione avrà evidentemente tra le sue radici le grandezze

$$\varphi(\alpha_1),\ \varphi(\alpha_2)\ \ldots\ \varphi(\alpha_n).$$

Consideriamo ora *la risultante* (per esempio nella forma di Sylvester) delle due equazioni (2) e (5). Dal modo stesso nel quale è formata, si vede subito che essa è di grado n in ξ; chiamiamola

$$S(\xi) = 0. \tag{8}$$

Questa risultante ha n radici, le quali sono

$$\varphi(\alpha_1),\ \varphi(\alpha_2)\ \ldots\ \varphi(\alpha_n).$$

Finchè le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, tra di loro, e le $\varphi(\alpha_1) \ldots \varphi(\alpha_n)$, tra di loro, sono differenti, allora è fuori dubbio che la $S(\xi)$ si può ben assumere come $F(\xi)$, cioè come trasformata di Tschirnhausen della $f(x) = 0$ mediante il polinomio trasformatore $\varphi(x)$.

I valori delle α sui quali potrebbe cadere qualche dubbio non possono, come si vede da ragionamenti molto usuali in algebra, introdurre casi di eccezione.

Volendo, per esempio, la trasformata di Tschirnhausen dell'equazione

$$(9) \qquad f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

mediante il polinomio

$$(10) \qquad \varphi(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

basterà considerare l'equazione

$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2 - \xi = 0$$

e poi scrivere il determinante di Sylvester

$$S(\xi) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 - \xi & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & b_2 - \xi & b_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & b_2 - \xi \end{vmatrix};$$

la trasformata di Tschirnhausen sarà

$$S(\xi) = 0.$$

Ciò che abbiamo finora detto non si può dire essenzialmente nuovo; credo nuova invece la seguente estensione.

Consideriamo, al posto dell'equazione (5), l'equazione

$$(11) \qquad \varphi(x) - \xi \psi(x) = 0$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono due polinomi primi tra di loro e procediamo sulla (2) e sulla (11) come abbiamo proceduto sulla (2) e sulla (5).

Abbia la (11) la radice α_k in comune con la (2).

Intanto risulta subito che α_k non può annullare il polinomio $\psi(x)$ perchè se ciò avvenisse, α_k annullerebbe, come si vede dalla (11), anche $\varphi(x)$, contro l'ipotesi che questi due polinomi sieno primi tra di loro. Sostituendo α_k nella (11) otteniamo dunque

$$\xi = \frac{\varphi(\alpha_k)}{\psi(\alpha_k)}.$$

Si vede allora che, costruendo la risultante delle equazioni (2) e (11), si viene ad avere una estensione della trasformata di Tschirnhausen, dove il polinomio trasformatore è sostituito da un rapporto di due polinomi.

Volendo per esempio la trasformata dell'equazione

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

mediante il rapporto trasformatore

$$\frac{1}{\lambda - x},$$

considereremo l'equazione

$$1 - \xi(\lambda - x) = 0$$

e giungeremo al determinante

$$S(\xi) = \begin{vmatrix} a_0 & \xi & 0 & 0 \\ a_1 & 1 - \lambda\xi & \xi & 0 \\ a_2 & 0 & 1 - \lambda\xi & \xi \\ a_3 & 0 & 0 & 1 - \lambda\xi \end{vmatrix}$$

l'equazione $S(\xi) = 0$ avrà le tre radici

$$\frac{1}{\lambda - \alpha_1}, \quad \frac{1}{\lambda - \alpha_2}, \quad \frac{1}{\lambda - \alpha_3}.$$

Dallo sviluppo del determinante $S(\xi)$ si verifica senz'altro che la somma di queste tre grandezze, che sappiamo essere uguale ad $\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}$, risulta uguale al rapporto (negativamente preso) fra il coefficiente di ξ^2 e quello di ξ^3.

Se poi al posto dell'equazione (11) noi consideriamo la seguente equazione

$$\varphi_0(x) + \xi\varphi_1(x) + \xi^2\varphi_2(x) + \ldots \xi^m \varphi_m(x) = 0,$$

allora, procedendo nel modo dianzi indicato, risolviamo il problema di scrivere un'equazione algebrica $F(\xi) = 0$ di grado mn, avendo per radici assegnate funzioni *algebriche* delle radici dell'equazione proposta. Questa trasformazione non ha quel carattere d'immediato vantaggio delle precedenti, ma credo tuttavia opportuno averne fatto cenno.

Derivata e differenziale.

Nota del Socio G. PEANO.

I trattati moderni di analisi infinitesimale sogliono definire la derivata d'una funzione come il limite del rapporto incrementale. Poi definiscono il differenziale della funzione quale il prodotto della sua derivata pel differenziale della variabile indipendente. Questo poi, si definisce come una quantità arbitraria, costante o variabile, o come un incremento della variabile, finito o infinitesimo; e l'infinitesimo è variamente trattato. Alcuni autori, quali Todhunter, Veblen, considerano il $\frac{dy}{dx}$ come un simbolo per indicare la derivata, e indecomponibile negli elementi dy e dx.

La cosa diventa molto più chiara, se si definisce il *differenziale* come sinonimo di *derivata*. L'identità fra differenziale e derivata sarà qui schiarita con argomenti logici e storici.

Il lettore, che desideri verificare i brevi testi dei varii autori, che qui saranno riprodotti, potrà, se gli è comodo, consultare il " Formulario mathematico ", da me edito; e il cui tomo V, 1906-08, citerò coll'abbreviazione (Formul.). Sarà bene ricordare che le citazioni storiche ivi contenute furono quasi tutte raccolte dal Dr. Gio. Vacca, già assistente di Calcolo infinitesimale presso la R. Università di Torino. Egli pure mi coadiuvò validamente nella riduzione in simboli dei teoremi di Calcolo infinitesimale.

L'argomento logico molto semplice, è che dovunque sta scritto *differenziale*, si può leggere *derivata*, e la verità della proposizione rimane.

Ad esempio, prendo una delle formule scritte da Leibniz nel 1677, e riprodotte nella celebre memoria " Nova methodus pro maximis et minimis ", Acta erud. 1684:

$$d\,\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}\,.$$

Essa si può leggere: " la derivata di $\frac{1}{x}$ vale meno la derivata di x, divisa per x^2 ". Si suppone implicitamente che x sia funzione d'una variabile.

La formula, ove $u = f(x, y, z)$:

$$du = f_x'dx + f_y'dy + f_z'dz,$$

che nei libri moderni si suol dare come definizione del differenziale totale, si può leggere " la derivata di u è la somma dei prodotti delle derivate parziali di f per le derivate delle funzioni x, y, z ". Questa proposizione si suol dare come teorema, o regola per derivare le funzioni composte.

L'espressione $\frac{dy}{dx}$, che si suol interpretare come un simbolo per dire " derivata di y rispetto ad x ", si può leggere " derivata di y divisa per la derivata di x ".

La $\frac{d^2y}{dx^2}$, che si suol leggere " derivata seconda di y rispetto ad x ", si può anche leggere " derivata seconda di y divisa pel quadrato della derivata prima di x, supposto che la x varii uniformemente ". Questa ipotesi del moto uniforme di x, ossia che la derivata di x sia costante, è sempre espressa ai tempi di Bernoulli, Taylor, Maclaurin (Formul. pag. 304); solo nei tempi moderni essa condizione si tace.

Del differenziale sotto il segno integrale parlerò fra breve.

Risulta che i differenziali sono derivate di funzioni, la variabile indipendente è *quasi* sempre indeterminata, cioè può essere qualunque. Però, benchè raramente, troviamo negli scritti di Leibniz (Formul. pag. 277):

$$d\overline{x^2} = 2x, \qquad d\overline{x^3} = 3x^2,$$

ove, senza alcun dubbio, il simbolo d di Leibniz, e che egli chiama *differentia*, è la nostra derivata.

Formule non omogenee nei differenziali, e in cui quindi differenziale significa la moderna derivata, e non semplicemente quantità proporzionale alla derivata, si incontrano ancora in Condorcet, *Miscellanea Taurinensia*, t. IV, anno 1766-69.

Newton, nel suo celebre libro " Philosophiae naturalis prin-

cipia mathematica „, di cui la prima edizione è del 1686, parla di *fluentes* e *fluxiones*, che si sogliono ora tradurre in *funzione* e *derivata*; la fluxione è l' " ultima ratio „ degli incrementi delle variabili. In quel libro non c'è alcun simbolo per indicare la derivazione; solo posteriormente egli scrisse un punto sulla variabile per indicarne la flussione. Ma l'identità fra il dx di Leibniz e $\dot{x}$ di Newton, e delle rispettive scuole, fu affermata dai loro successori.

Così lo sviluppo in serie di potenze, mediante le derivate successive, fu data da Joh. Bernoulli nel 1694, e da Taylor nel 1715; e dalla seconda si passa alla prima leggendo d al posto del punto. Sicchè ben a ragione il Bernoulli protestò che la serie di Taylor è la sua " sub alio tantum characterum habitu „.

La identità fra differenziale e flussione, è affermata da Mac Laurin, " A treatise of fluxions, 1742 „ § 723, pag. 591: " The symbol $\dot{x}$ or dx expresses the fluxion of x „.

Leseur et Jacquier, editori e commentatori dei " Principia „ di Newton, nel 1790, nota 158, affermano parimente:

" Fluxiones secundae designantur sic $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, vel ddz, ddy, ddx „.

Adunque era opinione generale, ai tempi di Leibniz e Newton, e loro successori immediati, che vi fosse identità fra il differenziale dx, e la flussione $\dot{x}$, e siccome si ritiene ora che la flussione di Newton sia la derivata attuale, così per un secolo il differenziale fu sinonimo dell'attuale derivata.

Un metodo per riconoscere l'identità o meno fra differenziale, flussione, e derivata è di ricorrere alle definizioni loro. Ma questo metodo non è applicabile; perchè la derivata si presentò come un elemento geometrico, tangente ad una curva, o meccanico, velocità d'un punto.

Gli autori espressero questo concetto mediante altre frasi, come rapporto di quantità infinitesime, o " ultima ratio „, o momento; ma la definizione aritmetica di derivata non si trova nè in Leibniz, nè in Newton, nè in Eulero: e questa lacuna era universalmente avvertita.

Per esempio, Newton, dopo considerato l'ultima ragione di due grandezze evanescenti, dice " Objectio est, quod quanti-

tatum evanescentium nulla est ultima proportio; quippe quae antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, nulla est „. Che si può tradurre " alcuni definiscono la tangente ad una curva, come la retta che unisce due punti coincidenti, o consecutivi, o infinitamente prossimi della curva: ma si può obiettare, che questa retta non esiste; poichè finchè i due punti sono distinti, la retta non è ancora la tangente; e quando i due punti coincidono, la retta non è più determinata „. Newton risponde all'obiezione con ragioni tratte dalla meccanica-fisica; i concetti considerati non sono ancora espressi colla matematica pura.

Lagrange, nella " Théorie des fonctions analytiques, dégagée de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites ou de fluxions „ pubblicata nel 1797, crede di liberarsi di questi concetti mal definiti, come infinitesimi, e limiti. Perchè la parola *limite*, al pari di *infinitesimo*, di *ultima ragione*, di *valor vero* d'un rapporto che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, era una delle tante forme per nascondere la difficoltà.

Lagrange definì derivata di fx, quale il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$ secondo le potenze di h. Ma questo sviluppo in serie:

$$f(x+h) = fx + hf'x + \ldots$$

non si può interpretare nel senso che la serie nel secondo membro sia convergente, ed abbia per somma il primo. Questo modo di interpretare la serie, troppo stretto, è posteriore a Lagrange; si trova in Cauchy, e durò fino agli ultimissimi tempi. Quella serie si deve interpretare come un modo abbreviato per indicare una successione di limiti. Io ho dato quest'interpretazione più lata della serie di potenze, o serie di Taylor, nel 1884 (Formul. pag. 229); Poincaré nel 1886 la chiamò serie asintotica. In sostanza, la formula precedente significa:

$$\lim \frac{f(x+h) - fx}{h} = f'x\,,$$

sicchè *la limite*, di cui Lagrange si voleva *dégager*, comparisce da un'altra parte.

Si noti che Lagrange scrive sempre fx, $f'x$, e non $f(x)$, $f'(x)$ colle parentesi. Il Serret, che curò la 4ª edizione del 1881, alterò le formule di Lagrange; sono fedeli la 2ª ed. del 1813 e la 3ª del 1847.

La definizione, mediante sole idee di matematica pura, del *limite*, o espressioni equivalenti, infinitesimo, valore ultimo, differenziale, somma di infinite quantità, ecc., cercata durante più secoli, fu enunciata solo da una quarantina di anni (Formul. pag. 232).

La definizione di limite involve idee matematiche semplicissime, unite a idee logiche: " Data una prima quantità, se ne può determinare una seconda, in modo che comunque si prenda una terza quantità, si abbia mod $(y-a) < h$ ".

La prima, seconda e terza quantità, o variabili, debbono essere rispettivamente accompagnate dai segni logici Ɔ (si deduce), ∃ (esiste), e Ɔ. Ogni spostamento di queste tre relazioni logiche Ɔ, ∃, Ɔ, rende falsa la definizione. E pare che vi sia molta difficoltà a intendere la successione di tre relazioni logiche, servendoci del linguaggio comune. La definizione di limite, di continuità equabile, di convergenza equabile, contengono la successione di relazioni logiche Ɔ∃Ɔ; e sono scoperte dell'ultimo mezzo secolo.

È noto che le successioni ƆƆ e ∃∃ si riducono rispettivamente a Ɔ e ∃.

Le lettere x, y, z, di cui si considerano i differenziali dx, dy, dz, o flussioni $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, non indicano numeri, ma bensì indicano funzioni, il cui valore è un numero.

Nel Formulario, è scritto q invece di " numero, o quantità, reale ". Sulle lettere x, y, z di cui parliamo, non bisogna fare le ipotesi $x \varepsilon$ q, $y \varepsilon$ q, ecc.; ma bisogna farne un'altra che spiegherò.

Nelle scritture $\log x$, $\sin x$, ... e in generale fx, la x è il valore della variabile, log, sin, ... f è detto " segno o caratteristica della funzione "; e sin 0, sin 1, sin x, $f0$, $f1$, fx sono i valori della funzione corrispondenti ai valori 0, 1, x della variabile (*).

(*) Scriverò *sin*, come abbreviazione del latino *sinus*, secondo l'uso costante in Francia, Germania, Inghilterra, Russia, e fino nel Giappone: poichè le formule matematiche hanno la stessa forma ovunque, eccetto in

Secondo questa nomenclatura, che si incontra in Lagrange, la parola *funzione* isolata, non ha più ragione di essere; ma si hanno a considerare solo " la caratteristica della funzione ", e " il valore della funzione ". Alla parola *funzione* darò il valore di " caratteristica della funzione " e quindi in $\log x$, log è la funzione, e $\log x$ è il valore della funzione corrispondente al numero x. Per prendere un esempio più volgare, nell'espressione " padre di Pietro ", la prima parte " padre di " indica la funzione o corrispondenza, o termine relativo; e tutta l'espressione ci dice il valore della funzione.

I trattati di analisi solevano, e molti ancora sogliono distinguere le quantità in costanti a, b, ..., e variabili x, y, ... Ma questa distinzione non ha senso; perchè ogni lettera dell'alfabeto ha lo stesso valore, cioè un valore costante, in tutta la formula: ed ha un valore variabile da formula a formula. Così nella formula

$$a, b \epsilon \mathrm{q} \,.\, \supset .\, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

la a indica lo stesso valore nell'ipotesi " a è una quantità " e nei due membri dell'identità.

La proposizione precedente rimane vera sia che si legga semplicemente " se a e b sono quantità ", ovvero " se a e b sono quantità costanti ", o " se esse sono quantità variabili ".

Parimenti la frase " sia a una quantità data, determinata, fissa " significa " sia a una quantità non data, indeterminata, variabile "; perchè sempre invece della prima espressione si può usare la seconda, e la verità della proposizione rimane. Questi aggettivi *costante*, *fisso*, *dato*, sono in generale, in matematica, dei pleonasmi.

Italia, ove si è modernizzato il latino *sinus* in *sen*. E quest'uso italiano è anche contrario all'etimologia; invero *seno* italiano non ha il valore del latino-matematico *sinus*. È noto che Ptolemeo calcolò le corde degli archi da 0° a 180°; e tuttora ne possediamo la tavola. L'astronomo arabo Al Battani, nell'800 " piegò la corda in due ", e chiamò *gib* la metà della corda; e questa parola araba vale francese *pli*, italiano *piega*. I matematici europei, nel 1500, tradussero l'arabo *gib*, nel latino *sinus*, che in latino classico ha il valore di *piega*. Così Virgilio " nuda genu, nodoque sinus collecta fluentes ", vuol dire che Venere si presentò a Enea, nuda il ginocchio, e raccolta le fluenti pieghe della veste.

Alcune volte le parole *costante* e *variabile* hanno valore relativo; cioè si può dire che " y è quantità variabile con x "; ma allora y non è una quantità, non è vero che $y \varepsilon$ q; bensì y appartiene alla categoria delle *funzioni*.

Molti trattati definiscono la funzione (e così scrissi anch'io): " dicesi che y è funzione di x, se ad ogni valore di x corrisponde un valore di y ". Ma qui si definisce la parola *funzione* mediante la parola *corrispondenza*, che non è stata prima definita. Il circolo vizioso si può celare alquanto, dicendo che " per ogni x risulta determinato y ", " per ogni x si ha il valore di y "; poichè il termine *funzione* è espresso mediante *determinazione*; ovvero è espresso da elementi grammaticali *per, si ha.* L'idea espressa dalla parola *funzione*, o dai suoi sinonimi *operazione*, *corrispondenza*, *relazione*, appartiene alla logica pura. Come essa si possa esprimere mediante le idee primitive della logica, si può vedere nel *Formulario mathematico*, ovvero nel grande libro di Russell e Withehead, *Principia mathematica*.

Nel Formulario, col simbolo vFu, ove u e v sono classi, si intende " funzione che ad ogni u fa corrispondere un v ". La proprietà fondamentale del simbolo è:

$$f \varepsilon v \mathrm{F} u \,.=:\, x \varepsilon u \,.\supset_x .\, f x \varepsilon v$$

" dire che f è un v funzione degli u, significa dire che, comunque si prenda x nella classe u, sempre fx è un individuo della classe v ". La classe u è il campo in cui è definita la f; i valori della funzione f appartengono al campo v, senza necessariamente riempierlo tutto.

Per esempio si ha:

$$\sin \varepsilon \mathrm{qFq},$$

che significa:

$$x \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset .\, \sin x \varepsilon \mathrm{q}.$$

Per indicare la derivata, al simbolo d di Leibniz, preferisco la lettera D, più evidente, adottata da Arbogast nel 1800, poi abitualmente da Cauchy (Formul. pag. 304). Allora si ha per esempio:

$$x \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset .\, \mathrm{D} \sin x = \cos x,$$

che si legge " se x è una quantità (costante o variabile), si ha che la derivata del *sinus*, pel valore x, vale $\cos x$ ". Al posto di x posso mettere un numero qualunque, per esempio 0; essendo vera l'ipotesi, poichè $0 \epsilon q$, si sopprime, e risulta:

$$\mathrm{D}\sin 0 = \cos 0 = 1.$$

La scrittura " $\mathrm{D}\sin x$ " o in generale " $\mathrm{D}fx$ " contiene tre segni: D, f, x. La successione di tre segni abc può essere decomposta colle parentesi in due modi: $(ab)c$ e $a(bc)$. La scrittura " $\mathrm{D}fx$ " deve essere intesa decomposta in $(\mathrm{D}f)x$, " derivata della funzione f, pel valore x ", e non già in $\mathrm{D}(fx)$, derivata del numero fx, che non ha senso. Per esempio $\mathrm{D}\sin 0$ significa $(\mathrm{D}\sin)0$, o $\cos 0$, e non già $\mathrm{D}(\sin 0)$, cioè $\mathrm{D}0$, che non ha senso.

Se all'operazione funzionale D diamo la forma d'un punto superiore, secondo Newton, o d'un accento a destra, secondo Lagrange, l'osservazione rimane. La scrittura $f'x$ di Lagrange significa $(f')x$, e non $(fx)'$. E pare che sia appunto per indicare che $\mathrm{D}fx$ (Arbogast) o $f'x$ (Lagrange) si debbano interpretare $(\mathrm{D}f)x$ e $(f')x$, che alcuni autori, dopo il 1823 scrivono $\mathrm{D}f(x)$, $f'(x)$.

Invece di $\mathrm{D}\sin x$ si potrà scrivere $\sin' x$, ma non $(\sin x)'$; questa deve sempre essere accompagnata dalla spiegazione: " $(\sin x)'$ non indica già un ente che dipende da $\sin x$, come le parentesi indicano, ma bensì... ". Nella formula $(\sin x)' = \cos x$, posto $x = 0$, si ha: $0' = 1$, formula senza senso.

Anche la scrittura " $\mathrm{D}f(x)$ " che si deve leggere " noi scriviamo le parentesi attorno alla x, per indicare che esse vanno attorno al gruppo $\mathrm{D}f$ ", presenta difficoltà e complicazioni del tutto inutili; essendo una convenzione contraria alle convenzioni fatte sulle parentesi in matematica elementare. Secondo questa convenzione generale, le parentesi servono a raggruppare più segni; entro parentesi non si può trovare una lettera sola. Chi scrive $\mathrm{D}f(x)$ invece di $(\mathrm{D}f)x$, dovrebbe anche scrivere $ab(c)$ invece di $(ab)c$.

Chi scrive colle parentesi $f(x)$, dovrebbe, per uniformità, anche scrivere $\sin(x)$, $\log(x)$, ed $f((x+h))$, con doppia parentesi, perchè già una parentesi serve a raggruppare i tre segni x, $+$, h.

Queste parentesi parasite allungano le formule, ed obbli-

gano ad accompagnarle con spiegazioni in linguaggio comune. Ma in un gran numero di formule completamente scritte in simboli, producono confusioni ed anche equivoci. Perciò gli autori che più curano la forma dei simboli, sopprimono queste parentesi. Per esempio, HAMILTON, *Elements of quaternions*, 1899, tom. I, a pag. 462, ove comincia a parlare di funzioni, scrive ancora $f(x)$, secondo l'uso comune, ma subito a pag. 465 e successive scrive fx. E non scrive mai le parentesi trattandosi di quaternioni; le parentesi inutili complicherebbero molto questa teoria, profonda pei concetti, ed elegante per la forma simbolica.

Ecco in breve, la storia delle parentesi attorno alla variabile. Prima di Lagrange non si scrisse mai nelle formule la variabile; le lettere x, y, z hanno un significato oscillante fra caratteristica e valore d'una funzione. Questa notazione è ancora in uso oggi, promiscuamente colle notazioni posteriori, in uno stesso libro, e qualche volta anche in una stessa formula.

Lagrange, nell'opera citata del 1797, introduce la notazione fx, ove distingue la " caractéristique " f dal valore della funzione fx. Ma già in quest'opera, a pag. 66, trattandosi d'una funzione $F(x, y)$ di due variabili, si incontra la notazione $F'(y)$ per indicare la derivata " prise relativement à y seul ", ciò che oggi molti scrivono F'_y.

Parseval, nelle " Mémoires de l'Institut ", t. 1, anno 1798, oltre alla notazione, ancora in uso, μ_r " μ con indice r ", per indicare il valore della funzione μ, rispondente al valore r della variabile, scrive pure, per lo stesso scopo, $\mu^{(r)}$, ove le parentesi attorno ad r stanno per avvertire che non si tratta d'una potenza; e scrive poi $\varphi(\omega)$, ove le parentesi avvertono che non si tratta d'un prodotto aritmetico, ma bensì di ciò che oggi chiamasi prodotto funzionale.

Cauchy, nel 1815 (*Mém.* pubblicate nel 1827) usa con regola uniforme le parentesi attorno alla variabile; e quest'uso va in seguito diffondendosi.

Chi vuole che le formule matematiche dicano tutto, senza bisogno di addizioni verbali, non può dare ad un segno due valori. L'attribuire alle parentesi, oltre alla funzione di raggruppare più segni, ancora un'altra funzione, è come il voler fare un'aritmetica decimale, in cui le cifre 6 e 9 siano rappresentate da uno stesso segno.

La formula già vista:

$$x \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \mathrm{D} \sin x = \cos x,$$

ove si consideri l'eguaglianza delle funzioni (Formul. pag. 81 prop. 1·6), si può scrivere:

$$\mathrm{D} \sin = \cos.$$

Se, con Hamilton, indichiamo con " exp „ la funzione esponenziale, cioè poniamo $\exp x = e^x$, potremo scrivere:

$$\mathrm{D} \exp = \exp.$$

Se con log intendo " logaritmo d'un numero positivo „ e con / intendo *reciproco*, si avrà:

$$\mathrm{D} \log = / .$$

Se / vale " reciproco „, $/a$ vale " reciproco di a „, e " b/a „ vale il prodotto di b pel reciproco di a, che si indica abitualmente con $\frac{b}{a}$, notazione la cui esecuzione tipografica costa tre volte quella della b/a.

Se suppongo che x sia funzione reale di variabile reale, $x \varepsilon \mathrm{qFq}$, siamo anche tentati di scrivere:

$$\mathrm{D} \sin x = \cos x \times \mathrm{D}x$$

ove $\mathrm{D} \sin x$ indica $\mathrm{D}(\sin x)$, e non già $(\mathrm{D} \sin)x$, il quale ultimo vale solo $\cos x$.

Se invece di D leggo d, ho le note formule sui differenziali, come si trovano scritte da Leibniz.

E quindi siamo indotti a ritenere che le lettere x, y, z,..... di cui Leibniz prendeva i differenziali, e Newton le flussioni, siano delle funzioni, cioè esattamente dei qFq.

Però formule del tipo dell'ultima scritta non si trovano nel Formulario; esse darebbero luogo ad equivoci. Invero nel calcolo funzionale, il prodotto, o successione di due funzioni fg, p. es. log sin, ha già un senso, la funzione f della funzione g, o il logaritmo del seno; e non possono più assumere quello di prodotto aritmetico dei valori di f e di g. Così f^2 indica ff, cioè

la f della f, e non la funzione il cui valore sia il quadrato aritmetico del valore di f; e $\sin^2 x$ indica $\sin \sin x$, e non già $(\sin x)^2$.

Scrivere $\sin^2 x$ per indicare $(\sin x)^2$, è, dice Gauss, " ganz gegen alle Analogien ".

Per eliminare questo equivoco, senza bisogno di dire col linguaggio comune il senso delle formule, ma in modo che le formule esprimano da sè il loro significato, basterebbe distinguere, con segni speciali, i prodotti funzionali dai prodotti aritmetici.

Ma è più semplice lo scrivere esplicitamente la variabile indipendente.

Se f è (la caratteristica d')una funzione, e x una lettera (variabile come ogni lettera dell'alfabeto, che non sia eretta a simbolo, come i numeri e, π), con $fx|x$ intenderemo la stessa f. Questo simbolo $|x$, leggasi " variando x ", permette di ritornare dal valore della funzione alla caratteristica della funzione, e si userà quando l'espressione che contiene x non abbia ancora, e si voglia ridurre ad avere, la forma fx.

Per esempio, se pongo $fx = x^2$, potrò ricavare $f = x^2|x$; e siccome x^2 si può leggere " quadrato di x ", ne risulta che " $x^2|x$ " rappresenta la funzione " quadrato di ".

Allora non c'è pericolo di confondere fg, prodotto funzionale di f e g, colla funzione $h = [(fx)(gx)]|x$, che dà $hx = (fx)(gx)$.

Per vedere come funzionano le parentesi fra i simboli di derivata, di funzione, e di numero, riproduco l'enunciato del teorema sulla derivata di funzioni di funzioni, dal Formul. pag. 281.

$$u, v \,\epsilon\, \mathrm{Cls'q} \,.\, f \,\epsilon\, \mathrm{q F} u \,.\, g \,\epsilon\, u \mathrm{F} v \,.\, x \,\epsilon\, v \cap \delta v \,.\, gx \,\epsilon\, \delta u \,.\, \mathrm{D} f(gx),\ \mathrm{D} gx \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .$$
$$\mathrm{D}(fg)x = \mathrm{D}f(gx) \times \mathrm{D}gx$$

" Supponiamo che u e v indichino due classi di quantità, che f indichi una quantità funzione definita nella classe u, e che g sia un u funzione dei v, cioè sia g un'altra funzione dei v, i cui valori appartengano alla classe u. Prendiamo un x nella classe v, e che appartenga anche alla classe derivata di v, cioè sia infinitamente prossimo ad altri v; ciò è necessario per poter parlare di $\mathrm{D}gx$. Supponiamo poi che gx, valore corrispondente ad x di g, il quale valore è necessariamente un u, appartenga

alla classe derivata di u. Supponiamo infine l'esistenza della derivata di f, pel valore gx, e della derivata di g pel valore x. In tale ipotesi, si ha la formula scritta „.

Ricordiamo che per le convenzioni già fatte sulle parentesi $\mathrm{D}(fg)x$ vale $[\mathrm{D}(fg)]x$, e $\mathrm{D}f(gx)$ vale $(\mathrm{D}f)(gx)$.

Nella formula ora scritta, posso al posto di f e g porre funzioni speciali; per es., *log* e *sin*; e ricordando che $\mathrm{D}\log = /$, e che $\mathrm{D}\sin = \cos$, ho la formula

$$\mathrm{D}(\log\sin)x = /\sin x \times \cos x.$$

A questo risultato non si può arrivare con una sostituzione materiale nelle formule scritte nei comuni trattati di calcolo. La formula che comunemente si legge, è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx},$$

la quale è inintelligibile nel giusto senso, se non vi si aggiunge a parole " ove $\frac{dy}{dx}$ indica la derivata di y rispetto ad x, e $\frac{dy}{du}$ indica la derivata di y rispetto ad u, considerando la u come variabile indipendente „. Questa formula, che non è completa, poichè deve essere completata dal linguaggio comune, è anche contro la storia. La formula precedente in Leibniz è una vera identità aritmetica, poichè dy, dx, du hanno in tutti i posti ove sono scritti, lo stesso senso.

Se nella formula precedente

$$\mathrm{D}(fg)x = \mathrm{D}f(gx) \times \mathrm{D}gx,$$

al posto di x leggo t, e al posto della funzione g leggo x, e la variabile t, invece di scriverla sullo stesso rigo, la scrivo come indice, secondo un uso di quei tempi e dei nostri, ottengo:

$$\mathrm{D}(fx)_t = \mathrm{D}f(x_t) \times \mathrm{D}x_t.$$

Qui sottintendo l'indice t; scrivo secondo Lagrange f' invece di $\mathrm{D}f$, e secondo Leibniz, d invece di D, ed ho la formula ibrida nelle notazioni

$$d(fx) = f'(x) \times dx,$$

e, supposto dx non nullo:

$$f'(x) = \frac{d(fx)}{dx}.$$

Qui conservo le parentesi attorno ad x, per ricordare che x sta per x_ι. Questa formula rassomiglia molto alla comune $f'(x) = \frac{dfx}{dx}$, ove mancano le parentesi attorno ad fx. Se porigo $y = fx$, la formula diventa $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, e nessuna parentesi è necessaria, anzi quella attorno ad x è superflua.

Passiamo alla notazione dell'integrale. La definizione di integrale è più semplice di quella di derivata. Invero, la derivata si definisce come un limite, e in questa definizione comparisce la successione di segni logici $\supset$, $\exists$, $\supset$; invece nella definizione di integrale compaiono solo i limiti superiore e inferiore di certe classi di numeri.

La definizione di limite superiore, dal Formul. pag. 107, è:

$$u \epsilon \mathrm{Cls'Q} \,.\, a \epsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset : a = \mathrm{l'}u \,.=.\, \theta a = \theta u$$

" Se u è una classe di quantità positive e se a è una quantità positiva, allora dicesi che a è il limite superiore degli u, quando la classe dei numeri minori di a coincide colla classe dei numeri minori di qualche u ".

E se si vuol eliminare il simbolo θ, che rappresenta la classe dei numeri fra 0 e 1, ovvero se si vuol ridurre il *qualche* del linguaggio comune ad essere espresso con sole operazioni logiche fondamentali, l'eguaglianza logica $\theta a = \theta u$ equivale alle due proposizioni:

$$x \epsilon u \,.\supset_x .\, x \leq a$$
$$x \epsilon \theta a \,.\supset .\, \exists\, u \frown y \ni (y > x)$$

" Se x è un u, esso è sempre minore di a, non esclusa l'eguaglianza ".

" Se x è un numero minore di a, si può determinare un numero della classe u, e y tale che soddisfi la condizione $y > x$ ".

Di queste due condizioni, la prima contiene un solo segno $\supset$. e la seconda la coppia $\supset\exists$.

In molti trattati sta definito l'integrale come il limite verso cui tende una somma; la definizione dell'integrale come il limite superiore dei valori della somma sta lentamente diffondendosi (Formul. pag. 343).

Cavalieri, nella geometria degli indivisibili, 1639, pag. 524, dice " tutte le linee del triangolo ", " tutti i quadrati del triangolo " invece degli attuali " integrale dell'ordinata, o del quadrato dell'ordinata, del triangolo ", o coi simboli comuni $\int x dx$, $\int x^2 dx$. (Formul. pag. 352).

Parimenti Wallis, nel 1665 dice " radices quadraticæ universales " invece del nostro $\int \sqrt{x} dx$. (Formul. pag. 356). Mercator nel 1668 (Formul. pag. 246), dice " summa quadratorum " col valore del nostro $\int x^2 dx$; e *summa* invece dell'attuale *integrale* occorre in Keplero 1605, e altri (Formul. pag. 359, 246).

Pertanto, in conformità del linguaggio matematico di quel tempo, l'integrale o somma di tutti i valori della funzione f, si può indicare con Sf, ove S è l'iniziale della parola *somma*. I limiti dell'integrale si esprimevano sempre col linguaggio comune. Volendosi scrivere nella formula, $S(f, u)$ indicherà " l'integrale della funzione f, esteso all'intervallo u " o " la somma di tutti i valori di f ", o " l'area descritta dall'ordinata fx, mentre l'ascissa x varia nell'intervallo u ". Si avrà così (Formul. pag. 352):

$$S\left(\sin, 0 \frown \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

" l'integrale del seno, nell'intervallo da 0 a $\frac{\pi}{2}$ vale 1 ".

Se invece di dare la caratteristica della funzione, diamo un'espressione che contiene x, ne dedurremo la caratteristica operando con $|x$; quindi per esempio (Formul. 350):

$$m \varepsilon Q . \supset . S(x^m | x, \theta) = 1 / (m + 1),$$

notazione del tutto conforme al linguaggio di Cavalieri, Wallis, Mercator, ecc.

La regola dell' “ integrazione per sostituzione „ (Formul. pag. 350) è:

$$a, b \epsilon q . g, Dg \epsilon (q F a^{-} b) cont . f \epsilon [q F (g`a^{-} b)] cont . \supset .$$
$$S(f ; ga, gb) = S(fgx \times Dgx | x ; a, b)$$

“ date due quantità a e b, e una funzione g reale e continua, insieme alla sua derivata, nell'intervallo da a a b; e una funzione f reale e continua definita nel campo dei valori assunti da g (la quale f potrebbe anche essere definita in un campo più vasto), si ha la formula scritta „. Se, in modo analogo a quanto si è fatto per la derivata delle funzioni di funzioni, al posto di x leggo t come indice, al posto di g leggo x, e sottintendo i limiti, si avrà:

$$Sf = Sfx_t \times Dx_t ;$$

e se qui sottintendo l'indice t, e scrivo d invece di D, si ha:

$$Sf = Sfxdx,$$

ove il secondo membro è tutto conforme alla notazione di Leibniz.

“ La somma di tutti i valori della funzione f vale la somma di tutti i valori della funzione fx moltiplicata per la derivata di x, qualunque sia la funzione x d'una variabile arbitraria „. In altre parole. Sf secondo i primi matematici, diventa $Sfxdx$, ove si lasci indeterminata la variabile indipendente.

Leibniz, per la somma, scrisse una s minuscola; per. es. lettera a Wallis, 29 martii 1697: “ ubi s significat Summationem, et d Differentiationem „. La s minuscola si è ingigantita in maiuscola (Lagrange 1760), e poi oltre.

Confrontando la notazione del Formulario $S(x^m, x, 0^{-}1)$ con quella moderna equivalente $\int_0^1 x^m dx$, si è indotti a ritenere che il segno d stia per indicare la variabile d'integrazione, ed abbia il valore del nostro segno |. Ed effettivamente ora il segno d nell'integrale sta puramente per indicare la variabile d'integrazione; ma in origine esso rappresentava la differenza, o derivata.

I limiti poi, scritti in basso e in alto dell'integrale, e introdotti da Fourier (*Mém.* 1815), non rispondono all'idea primitiva; invero $\int(x^m | x, 0 \urcorner 1)$ vale l'$\int x^m dx$, ma non fra i limiti 0 e 1, bensì fra i limiti della variabile indipendente, cui corrispondono i valori 0 e 1 della r.

Le cose dette precedentemente sono molto contrarie all'opinione e uso comune; e questa è la ragione per cui scrivo il presente articolo. Però non sono tutte nuove; perchè altri già si occuparono delle notazioni del calcolo infinitesimale.

Ed è assolutamente necessario riportare qui le parole d'un illustre matematico e filosofo, che una morte immatura rapì recentemente alla scienza; seguiranno brevi note.

H. Poincaré, *La notation différentielle et l'enseignement* (L'" Enseignement mathématique ", 1899, pag. 106).

" Dans un article très intéressant de M. H. Laurent, sur les mathématiques spéciales en France, je lis la phrase suivante: " Ce n'est pas, je pense, ici qu'il convient de montrer combien la notation différentielle est plus commode que celle des dérivées; c'est aux gens compétentes que je m'adresse et non à des élèves, et je pense que personne ne contestera la haute portée philosophique de la doctrine différentielle ". Je ne dirai pas que j'ai lu cette phrase avec étonnement; car elle exprime une opinion assez répandue; mais, en ce qui me concerne, je conteste absolument les avantages de la notation différentielle et je crois qu'on ne doit l'enseigner aux débutants que quand ils sont déjà familiarisés avec la notation des dérivées. La notation de Leibniz, dit M. Laurent, est plus commode que celle de Lagrange. Pourquoi plus commode? J'en cherche les raisons et je n'en trouve que deux:

" 1° Si on emploie les accents pour représenter les dérivées, on sera privé de cette ressource pour distinguer les unes des autres des quantités analogues, mais différentes; on ne pourra plus dire, par exemple: soient x, y, z et x', y', z' deux points dans l'espace:

" 2° Pour faire connaître la variable par rapport à laquelle on différentie, il faut affecter les lettres d'indices qui peuvent devenir gênants pour le typographe si la lettre porte déjà d'autres indices pour une autre cause.

" Ce sont là des inconvénients tout matériels, tout exté-

rieurs et qui peuvent être compensés par des avantages de même ordre, tel que le suivant:

" Je veux représenter la valeur que prend la dérivée de $f(x)$ pour $x=0$; je n'ai aucun moyen de le faire avec la notation de Leibniz; avec celle de Lagrange je n'ai qu'à écrire $f'(0)$ [Nota 1].

" Mais, dira-t-on, c'est là prendre la question par le petit côté. Que sont ces considérations purement matérielles auprès de la haute portée philosophique d'une notation qui rappelle à chaque instant la définition, le sens profond des quantités que l'on a à manier? Hélas, elle ne les rappelle que trop, et il vaudrait mieux les rappeler moins que de les rappeler imparfaitement. Neuf fois sur dix, on n'évitera les erreurs qu'en tâchant d'oublier la signification primitive de ces symboles; c'est ce que je vais montrer bientôt.

" Quant à moi, j'emploie d'ordinaire la notation différentielle, d'abord parce que c'est la langue que parlent la plupart de mes contemporains et ensuite à cause des petites raisons matérielles que j'ai exposées plus haut. Mais si j'écris en différentielles, le plus souvent je pense en dérivées [2]. J'ai dit que la notation différentielle est imparfaite et nous expose à l'erreur: c'est ce qu'il me reste à démontrer.

" Tout va bien quand on se borne aux différentielles du premier ordre et quand il n'y a qu'une variable indépendante. Oh alors, j'approuve sans réserve tout ce qu'on peut dire au sujet de la portée philosophique du symbole leibnizien et de ses avantages.

" Mais, dès que l'on passe aux dérivées du second ordre, on nage dans l'absurdité; soit z une fonction d'une variable y qui est elle-même fonction de x; j'écris:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}. \quad [3]$$

" Dans cette formule j'écris deux fois d^2z, et ce symbole a deux significations différentes. Dans le second membre, il signifie que si je donne à y deux accroissements successifs *égaux*, la fonction z subit deux accroissements successifs dz et $dz+d^2z$.

" Dans le premier, il signifie que si je donne à x deux ac-

croissements successifs égaux, d'où résultent pour y deux accroissements successifs *inégaux*, la fonction z subit deux accroissements successifs dz et $dz + d^2z$.

" La difficulté s'aggrave si on a plusieurs variables indépendantes; j'écris:

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy .$$

" Là encore nous avons trois fois le symbole dz avec trois significations différentes. La première fois dz représente l'accroissement subi par z quand x et y se changent en $x + dx$ et $y + dy$; la seconde fois l'accroissement de z quand x et y se changent en $x + dx$ et y; la troisième fois l'accroissement de z quand x et y se changent en x et $y + dy$.

" Que de pièges à éviter! Aussi les débutants ne les évitent-ils pas. J'ai vu un élève intelligent et déjà avancé exposer comme il suit la théorie de la vitesse du son, en masquant seulement par quelques artifices ce que sa démonstration avait de choquant.

" Nous avons à intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2 \frac{d^2z}{dx^2}$$

je divise par d^2z et je multiplie par dx^2; j'ai:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = a^2$$

d'où:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

ce qui prouve que le son peut se propager dans les deux sens avec la vitesse a. — " C'est singulier, répondait l'examinateur, excellent physicien que je ne veux pas nommer; votre démonstration est bien plus simple que toutes celles que je connaissais „; et il lui donna la note 19.

" Si je voulais être méchant, il ne serait pas difficile de trouver des erreurs analogues dans des livres imprimés.

" L'emploi des ∂ ronds est un palliatif insuffisant. Ce n'est pas deux formes de d qu'il faudrait, il en faudrait cinq, il en faudrait dix [4].

" Pourquoi en somme est-on plus choqué de ses anomalies, pourquoi engendrent-elles relativement plus d'erreurs? C'est parce qu'on oublie l'origine de ces notations, qu'on ne considère pas $\frac{d^2z}{dx^2}$ comme le quotient de deux quantités d^2z et dx^2 envisagées séparément, mais qu'on regarde au contraire cette fraction comme un *bloc*, comme la dérivée seconde de z par rapport à x. C'est en un mot *parce qu'on pense en dérivées*.

" Il faut donc apprendre à penser en dérivées; quand on aura pris cette habitude on pourra sans danger se servir de la notation leibnizienne. Il est clair que le meilleur moyen de donner cette habitude aux élèves, c'est de leur enseigner d'abord la notation de Lagrange. Quand ils seront familiarisés avec ce langage, quand'ils s'en seront servis dans de nombreux exercices, quand ils sauront faire un changement de variables [5] on pourra sans inconvénient leur parler de la notation de Leibniz. Jusque-là on doit s'en abstenir, ou tout au moins se borner *aux différentielles du premier ordre et seulement dans le cas où il n'y a qu'une variable indépendante*. Si au contraire dès le début on veut leur apprendre à faire des changements de variables avec la notation de Leibniz, ils ne sauront jamais les faire correctement [6].

" Je ne veux pas dire qu'il ne faut pas, *plus tard*, leur enseigner la notation différentielle; il faut qu'ils puissent manier ce langage qui est usité par tout le monde, de même qu'il faut savoir l'allemand, bien que cette langue ait des règles de construction ridicules et un alphabet qui n'a pas de sens commun, parce qu'elle est parlée par soixante millions d'hommes dont beaucoup sont des savants.

" Il est un cas cependant où la notation différentielle reprend tous ses avantages, où ses inconvénients disparaissent, et où l'on ne peut lui refuser une haute valeur philosophique et éducative. C'est celui où l'on n'envisage que des différentielles du premier ordre et avec une seule variable indépendante.

" Il peut être utile de se familiariser de bonne heure avec cette notion, d'apprendre ainsi à raisonner correctement sur les

infiniment petits. On comprendra ainsi facilement la théorie des petites erreurs, si importante pour la pratique.

“ En résumé, en mathématiques spéciales, on doit employer presque exclusivement la notation de Lagrange; on fera connaître aux élèves les différentielles premières, en insistant surtout sur le cas où il n'y a qu'une variable indépendante.

“ Si on aborde le cas où il y en a plusieurs, on se servira exclusivement de la notation de Lagrange pour les dérivées partielles; on n'écrira jamais:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

mais

$$df = f_x' dx + f_y' dy$$

on s'abstiendra absolument de parler des différentielles secondes.

“ A l'École polytechnique et dans les Facultés, on enseignera la notation différentielle et on l'emploiera de préférence „.

[Nota 1]. Veramente Lagrange scrisse $f'x$ e non $f'(x)$. Alla notazione di Leibniz basta aggiungere il valore della variabile; cioè scrivere $\mathrm{D}fx$, o dfx, ove Leibniz scrive solo df.

[2] Siccome differenziali e derivate sono identici, secondo gli autori dei secoli scorsi, si pensa sempre nello stesso modo, sia pensando agli uni che alle altre.

[3] L'espressione della derivata seconda d'una funzione di funzione, coi simboli del Formulario, si scrive:

$$u, v \,\epsilon\, \mathrm{Cls'q} \,.\, f \,\epsilon\, \mathrm{qF}u \,.\, g \,\epsilon\, u\mathrm{F}v \,.\, x \,\epsilon\, v \cap \delta^2 v \,.\, gx \,\epsilon\, \delta^2 u \,.\, \mathrm{D}f(gx), \mathrm{D}^2 f(gx),$$
$$\mathrm{D}gx, \mathrm{D}^2 gx \,\epsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .$$
$$\mathrm{D}^2(fg)x = \mathrm{D}^2 f(gx) \times (\mathrm{D}gx)^2 + \mathrm{D}f(gx) \times \mathrm{D}^2 gx .$$

“ Dati i due campi di variabilità u e v, ed f una quantità funzione definita un u, e g un numero della classe u funzione dei v; se x è un numero della classe v, e della sua derivata seconda (e quindi della derivata prima; ciò è necessario, affinchè si possa parlare di derivate prima e seconda di f), e se gx è un numero della derivata seconda di u, ed esistono le derivate prima e seconda di f, pel valore gx, e le derivate prima e seconda di g pel valore x, allora si ha la formula scritta „.

Questa formula non presenta alcuna ambiguità, perchè ha un'interpretazione sola; ivi, al posto di f, y, x si possono sostituire funzioni determinate, o un numero determinato, e si trova meccanicamente una formula vera; e differisce in sostanza dalle formule ordinarie solo nelle parentesi, che qui sono messe a posto.

Non risulta che la formula citata dal Poincaré si trovi in Leibniz: queste scritture ambigue debbono essere dell'ultimo secolo.

[4] Che i ∂ tondi non bastino per indicare le derivate, fu già osservato da Jacobi, loro introduttore (Formul. pag. 278).

[5] Il cambiamento di variabili, di cui parla l'autore, costituisce appunto le regole della derivata di funzione di funzione, e dell'integrazione per sostituzione, sopra trattate.

[6] Qui si intende di parlare, non delle notazioni di Leibniz, ma della degenerazione moderna di quelle notazioni.

Mi manca il tempo e la pazienza di ricercare chi sia il primo ad affermare che dx, dy siano infinitamente piccoli, il che, nel senso che oggi si attribuisce all'infinitamente piccolo, è contrario a ciò che scrisse Leibniz; poichè oltre all'esempio già citato, ove $dx = 1$, possiamo ancora citare l'altra frase: " recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx " (Formul. pag. 277). Nè chi sia il primo ad affermare che dx sia un incremento (infinitesimo o non) di x, il che sempre ne limita il valore.

Da una raccolta di citazioni, che debbo alla gentilezza e studio del Dr. Togliatti, già mio studente, estraggo quanto segue:

De l'Hospital, *Analyse des infiniment petits*, 1716:

" La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la différence..... On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d pour marquer la différence ".

M. Varignon. *Éclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits*, 1725:

" La différence ou différentielle d'une quantité est l'accroissement ou la diminution instantanée de sa valeur ".

M. Gaetana Agnesi, *Instituzioni Analitiche*, 1748:

" Si chiama differenza o flussione d'una quantità variabile quella porzione infinitesima, ecc. „.

Una quantità infinitamente piccola e costante, intesa come una quantita minore di ogni quantità assegnabile, è contraddi-toria in sè stessa; poichè ogni quantità è maggiore della sua metà.

Una quantità infinitesima, e variabile, presenta le difficoltà già esposte a proposito della parola *variabile*. Dice un autore " apriamo un trattato di calcolo infinitesimale, o di fisica matematica; tutti i dx, dy, che a libro chiuso erano fissi, diventano variabili e si precipitano a zero; chiudiamo il libro per riaprirlo all'indomani: tutti i dx, dy.... sono al loro posto! „

Enti infinitesimi, nel senso che appartengano ad una categoria di enti, comprendenti le ordinarie quantità positive, sopra i quali enti siano definite le comuni operazioni e relazioni aritmetiche, e di cui uno sia minore d'ogni numero positivo, pur essendo maggiore di zero, non presentano alcun assurdo in se stessi. Furono studiati da numerosi autori; per es. da me nella nota " Sugli ordini degli infiniti „ nella R. Accademia dei Lincei, 12 giugno 1910. A questi infinitesimi costanti si riducono in sostanza gli infinitesimi variabili, bene espressi. Ma questi infinitesimi non sono necessarii, anzi inutili, in un corso di Calcolo infinitesimale ordinario.

Però nulla impedisce di dire, ove lo si trovi comodo, che dx, dy, derivate di x, y, sono la *misura* degli incrementi momentanei o infinitesimi di x e y; e sopprimendo la parola *misura*, si potrà dire che dx dy sono gli incrementi infinitesimi di x y; benchè dx dy siano quantità determinate e finite.

In conclusione, Leibniz fu il primo a introdurre i simboli funzionali d e s, che chiamò *differenza* e *somma*, e ne scrisse le regole fondamentali. Invece di *differenza*, si disse più tardi anche *differenziale*; Newton lo chiamò *flussione*, scrivendo un punto al posto di d; Lagrange lo chiamò *derivata*, e scrisse un accento invece di d; e contemporaneamente indicò esplicitamente la variabile indipendente. Arbogast e Cauchy mutarono d in D, conservando l'indicazione della variabile indipendente.

Il simbolo s di *somma* fu chiamato integrale da Joh. Bernoulli nel 1690 (Formul. pag. 342) e si ingigantì in $\int$ nell'ultimo secolo.

Il calcolo infinitesimale, come scienza o successione di teoremi non è il lavoro d'una persona; bensì di tutti i matematici da Euclide ed Archimede fino ad oggi. Però spetta a Leibniz il merito d'aver introdotti dei simboli per le operazioni, di aver mostrato come si operi su questi. E questo merito è ritenuto grande da tutti coloro che pensano che l'analisi è essenzialmente un linguaggio ben fatto.

Le notazioni di Leibniz sono ancora le più chiare; però è comodo, per ragioni tipografiche, di scrivere le majuscole D e S invece delle minuscole originali *d* e *s*. Ed inoltre, se si vuole che le formule dicano tutto, senza bisogno di aggiunte verbali, si deve scrivere esplicitamente (quando occorra) la variabile indipendente.

Così si hanno esattamente le notazioni seguite nel *Formulario Mathematico*.

Problemi economici di tracciamento. I problemi di Launhardt e di v. Schrutka.

Nota dell'Ing. GIUSEPPE ALBENGA.

Esaminando la convenienza economica e commerciale del tracciato di una qualsiasi linea di comunicazione o di un complesso di linee, si incontrano alcuni interessanti problemi di minimo che possono venir risoluti con grande semplicità ricorrendo a principi elementari ed a notissimi teoremi della statica.

I problemi economici di tracciamento si presentano d'ordinario sotto due forme distinte. Talune volte si tratta di stabilire una rete più o meno semplice di vie di comunicazione fra località determinate, con tronchi all'incirca rettilinei ed è possibile ammettere che il costo da rendersi minimo (somma delle spese di costruzione e del capitale anticipato corrispondente alle spese di mantenimento e di esercizio) sia direttamente proporzionale alla lunghezza di ciascun tronco. La risoluzione del problema è in tal caso legata ad una ordinaria ricerca del minimo di una funzione nota e si hanno i classici problemi, che

Launhardt studiò fin dal 1872 [1]; essi possono venir ridotti alla determinazione di opportuni sistemi piani di forze in equilibrio e vincolate a passare per alcuni dati punti fissi. Altre volte si devono invece collegare due punti o due linee già esistenti con una nuova linea lungo la quale il costo è variabile e funzione dell'elemento che si considera. Si hanno allora quei problemi che io chiamerò di v. Schrutka dal nome di chi per il primo molto recentemente li espose e ne indicò la risoluzione analitica per alcuni casi più particolarmente interessanti [2]. Questi problemi, che dipendono dal calcolo delle variazioni, conducono al tracciamento di curve funicolari di fili flessibili ed inestensibili assoggettati ad una data tensione e sollecitati da forze che ammettono un determinato potenziale.

Nel presente scritto tratto nelle loro linee essenziali i problemi di Launhardt e di v. Schrutka valendomi delle analogie meccaniche ora accennate e mostro come esse consentano la risoluzione di casi più generali di quelli sinora considerati.

I problemi di Launhardt. — I problemi fondamentali di Launhardt sono due diversi: il problema del nodo (Satz vom Knotenpunkte) e quello del punto di diramazione (Satz vom Anschlusspunkte).

Il primo di essi può enunciarsi:

dati tre punti A_1, A_2, A_3 da collegare tra di loro, trovare il punto P più conveniente (nodo) per diramarne i tre tronchi PA_1, PA_2 e PA_3, lungo i quali il costo per unità di lunghezza vale rispettivamente c_1, c_2, c_3.

Indicando con c il costo unitario per il tronco generico e con l la lunghezza di esso, il punto P cercato sarà per definizione quello per cui risulta

(1) $$\sum c\, l = \text{min.}$$

o ciò che fa lo stesso

(2) $$\sum c\,.\,dl = 0.$$

[1] W. Launhardt, *Kommerzielle Trassierung d. Verkehrswege*, in "Zeitschrift d. Arch. und Ing Vereines zu Hannover", 1872, col. 515 e più estesamente nella *Theorie des Trassierens* dello stesso autore, Hannover, 1887. I problemi di Launhardt sono svolti ampiamente anche nel 1° vol. dell'*Handbuch d. Ingenieurwissenschaften. Vorarbeiten u. s. w.*

[2] Lothar v. Schrutka, *Ueber die ökonomischeste Trassenführung für den Fall dass die Kosten für den laufenden Kilometer mit dem Orte wechseln*, "Oesterr. Wochenschrift für d. öffentl. Baudienst", 1911, pag. 581.

Consideriamo le c come forze uscenti da P e dirette ai punti A_1, A_2, A_3, e i dl come le proiezioni sulle c di uno spostamento virtuale del punto P. Il primo termine della (2) è allora un lavoro virtuale ed il suo annullarsi per ogni spostamento ci dice che le c costituiscono un sistema di forze in equilibrio. Esse sono di conseguenza equipollenti ai lati di un triangolo.

Si ha così una dimostrazione rapida ed evidente del teorema

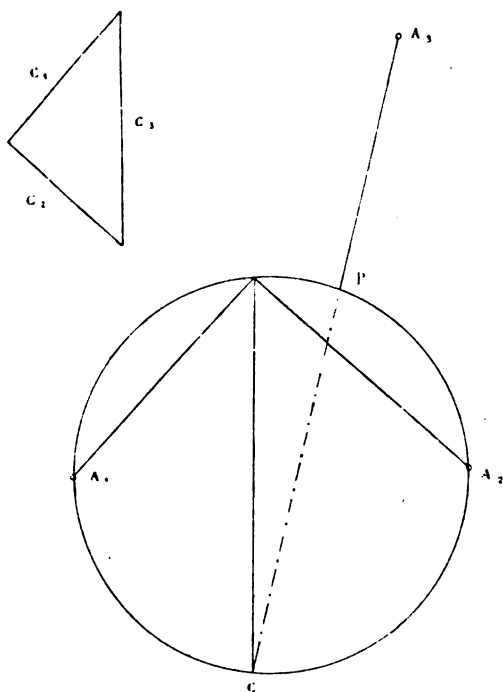



Fig. 1.

fondamentale di Launhardt. L'analogia meccanica sulla quale si fonda la presente dimostrazione era già stata notata da questo autore, che l'aveva dedotta indirettamente e come risultato del suo teorema.

Per costruire il punto P sul disegno si segue di solito la via indicata da Launhardt: riesce più semplice il seguente metodo di falsa posizione. Costruito il triangolo delle c, dopo averlo orientato ad arbitrio, si tirino per A_1 ed A_2 le parallele a c_1 e c_2 (fig. 1). La parallela alla c_3 per il punto di inter-

sezione di c_1 e di c_2 coinciderà in direzione con la risultante di queste due forze e non passerà in generale per A_3. Orientando diversamente il triangolo delle c. le forze c_1 e c_2 roteranno di un medesimo angolo φ intorno ad A_1 e ad A_2 e la loro risultante roterà, per un noto teorema di Möbius sul centro di forze comunque dirette nel piano [1], dello stesso angolo φ intorno ad un punto C del circolo luogo del punto di intersezione di c_1 e di c_2: punto che si determina come intersezione del circolo e della parallela alla c_3 per una posizione qualunque del triangolo. Congiungendo C con A_3 si ha evidentemente in P, intersezione di $C A_3$ con il circolo, il punto cercato.

Il punto C può anche determinarsi come intersezione di due posizioni della c_3 corrispondenti a due diversi orientamenti del triangolo delle c. Si ricade allora in un caso particolare d'una costruzione di Forchheimer [2] per tracciare le reti di canali.

La ripetuta applicazione dei procedimenti indicati conduce alla soluzione dell'altro problema di Launhardt:

trovare la spezzata più conveniente fra due punti A e B quando ai vertici di essa facciano capo altre linee secondarie passanti per dati punti A_1, A_2, ..., A_n, e valga la solita ipotesi sul costo lungo ciascun tronco.

In questo caso la soluzione grafica di Forchheimer [3] è più rapida e preferibile di quella ottenuta con gli altri procedimenti.

Il problema del punto di diramazione può venir così posto:

determinare il punto P più conveniente per diramare da una linea di comunicazione rettilinea $A_1 A_2$ un tronco diretto ad un punto dato A_3 quando valgano le solite ipotesi sul costo lungo ciascun tratto della strada.

Combinando la relazione (2) intesa al solito come espressione del teorema dei lavori virtuali con il vincolo d'essere il punto P obbligato a giacere sulla retta $A_1 A_2$, si ha subito che il punto cercato è quello per il quale vi ha equilibrio fra la forza c_1, la c_2 e la proiezione di c_3 su $A_1 A_2$. L'angolo φ che la direzione

---

[1] MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik*, § 115. Cfr. anche HENNEBERG, *Die graphische Statik der starren Systeme*, pag. 87.

[2] FORCHHEIMER, *Ueber Rohrnetze*, " Zeitschrift d. Vereines deutscher Ingenieure ", 1889, pag. 365.

[3] FORCHHEIMER, op. cit.

del tronco incognito fa con la retta data si ottiene quindi facilmente dal triangolo rettangolo che ha per un cateto $c_2 - c_1$ e per ipotenusa c_3 (fig. 2).

Il risultato ora ottenuto può estendersi con lievi modificazioni al caso d'una linea curva $A_1 A_2$. Il vincolo del sistema e la relazione (2) mostrano che il punto cercato è quello per il quale vi ha equilibrio fra le c_1 e c_2 agenti secondo la tangente alla curva sul punto P e la proiezione di c_3 su questa tangente. L'angolo φ che la direzione cercata farà con la tangente si trova quindi con la costruzione indicata per il caso

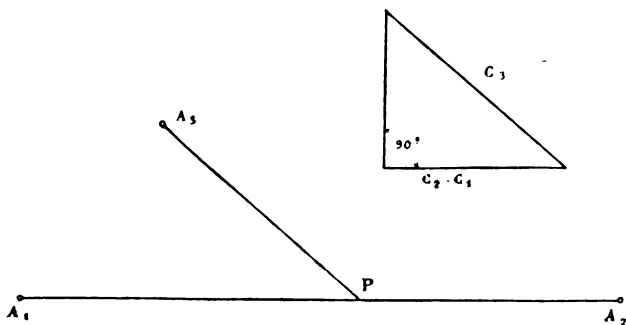



Fig. 2.

precedente. È poi facile determinare per via grafica la vera posizione del tronco.

I problemi di v. Schrutka. — Si debbano collegare con la linea di comunicazione per la quale risulti minima la spesa due determinati punti A e B: il costo dell'elemento ds di linea sia una funzione nota Φ delle coordinate, ad esempio cartesiane ortogonali, dell'elemento. La linea cercata sarà quella che passando per A e per B soddisfa alla condizione

$$\int_{x_A}^{x_B} \Phi \, ds = \min. \tag{3}$$

dove x_A ed x_B sono le ascisse dei punti terminali A e B. La relazione (3) equivale notoriamente alla

$$\delta \int_{x_A}^{x_B} \Phi \, ds = 0 \tag{4}$$

la quale esprime che la variazione prima dell'integrale definito contenuto nella (3) deve essere nulla: si tratterà effettivamente di un minimo quando la variazione seconda di questo integrale sia positiva.

La riduzione della (4) ad una espressione di calcolo integrale, costituisce un classico problema del calcolo delle variazioni, che ha numerose applicazioni nella fisica matematica, e conduce alle equazioni differenziali seguenti per le estremali (curve fra le quali si trova quella che risolve il problema):

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{d}{ds}\left(\Phi \dfrac{dx}{ds}\right) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{d}{ds}\left(\Phi \dfrac{dy}{ds}\right) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = \dfrac{d}{ds}\left(\Phi \dfrac{dz}{ds}\right) . \end{cases}$$

Le (5) sono, come è facile verificare, le equazioni differenziali di una curva funicolare d'un filo flessibile ed inestensibile soggetta ad una tensione Φ e sollecitata da forze X, Y, Z che derivano dal potenziale Φ. Tra le funicolari che passano per A e per B è facile trovare quella che soddisfa la (3).

Per note proprietà delle estremali le (5) valgono ancora quando le condizioni agli estremi siano diverse da quelle ora supposte ed in particolare quando i due punti terminali non siano fissati ma possano spostarsi liberamente su due curve determinate (caso del collegamento di due linee esistenti con una nuova linea di minima spesa) o quando sia dato uno dei punti ed il secondo possa trovarsi in un punto qualunque d'una data curva (collegamento di una località A con una via di comunicazione già costruita).

Le equazioni (5) riconducono il problema economico ad un problema meccanico molte volte studiato. In pratica la funzione Φ è d'ordinario assai semplice e basta, data la natura del quesito, una soluzione non assolutamente rigorosa: si potrà quindi quasi sempre risolvere le (5) con metodi approssimati di integrazione, grafici od analitici.

Le (5) contengono come caso particolare quello trattato da von Schrutka, quello cioè in cui la linea è piana e la Φ è

indipendente da una delle coordinate, la x ad esempio. È facile allora ridursi alle quadrature.

Dalla seconda delle (5) facendo

$$p = \frac{dy}{dx}$$

e quindi

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + p^2}$$

si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi' = \frac{d}{dx\sqrt{1+p^2}}\left(\Phi \frac{dy}{dx\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{d}{dx\sqrt{1+p^2}}\left(\Phi \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$$

ed eseguendo la derivazione e fatto

$$p' = \frac{dp}{dx}$$

con facili riduzioni

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{p'}{1+p^2} \tag{6}$$

che coincide con una delle relazioni date da Schrutka.

Dalla (6) con integrazioni semplici si ottiene

$$p = \sqrt{c^2\Phi^2 - 1}\,, \tag{7}$$

e con una successiva integrazione

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{c^2\Phi^2 - 1}} + c' \tag{8}$$

dove c e c' sono due costanti di integrazione.

La relazione (7) poteva scriversi facilmente anche per via diretta ricordando che, come si dimostra nei primi elementi di calcolo delle variazioni (6), quando siasi posto

$$\int_{x_A}^{x_B} \Phi\, ds = \int_{x_A}^{x_B} \Phi\sqrt{1+p^2}\, dx = \int_{x_A}^{x_B} f dx \tag{9}$$

la equazione differenziale delle estremali è, per f indipendente da x,

$$f - p\frac{\partial f}{\partial p} = c$$

e osservando che è per la (9)

$$f = \Phi\sqrt{1+p^2}\,,$$

$$\Phi\sqrt{1+p^2} - \frac{\Phi p^2}{\sqrt{1+p^2}} = C$$

da cui la (7).

Il caso più interessante in pratica è quello di Φ funzione lineare della y, cioè di

$$\Phi = a + by\,; \tag{10}$$

le (5) ci dicono subito che le estremali sono in questa ipotesi catenarie omogenee. A questo risultato può giungersi anche semplicemente col procedimento seguente.

Riferendoci ad un nuovo asse delle x parallelo al precedente e spostato di $-\frac{b}{a}$ la (10) diviene

$$\Phi = y$$

e la condizione di minimo (3) può scriversi

$$\int_A^B y\,ds = \min. \tag{11}$$

Indichiamo con l la lunghezza della curva, con Y l'ordinata del baricentro di essa, avremo per una nota proprietà del baricentro

$$\int y\,ds = Yl$$

e quindi la (11) potrà scriversi

$$Yl = \min. \tag{12}$$

Fra tutte le curve passanti per A e B e lunghe l, soddisferà la (12) quella per cui il baricentro è più prossimo all'asse x; questa curva è notoriamente la catenaria.

La linea di comunicazione più conveniente e la curva funicolare sopra definita coincidono ancora quando linea e funicolare debbano giacere sopra una determinata superficie [1]; la soluzione che si ottiene in questo caso ha un interesse pratico soltanto per quelle linee che non siano soggette a limitazioni nel valore della pendenza.

---

[1] Cfr. APPELL, *Mécanique rationnelle*, vol. I.

Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique et linéaire.

Note de LUCIEN GODEAUX.

M.M. Enriques et Severi ont démontré, il y a quelques années, que si une involution d'ordre premier, sur une surface hyperelliptique ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$), ne possède qu'un nombre fini de coïncidences, cette involution est cyclique [1]. Plus tard, M. Enriques a démontré que si, sur une surface algébrique dont tous les genres sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$), on a une involution d'ordre premier et également de genre un, cette involution est cyclique [2].

L'analogie existant entre ces deux résultats nous a conduit à étudier les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques de mêmes genres arithmétique et linéaire p_a, $p^{(1)}$. Nous sommes ainsi arrivés au théorème suivant, dont la démonstration fait l'objet du présent travail.

Soient deux surfaces algébriques F^*, F *ayant les mêmes genres arithmétique* p_a *et linéaire* $p^{(1)}$, *les genres géométriques respectifs* p^*_g. p_g *et telles que* $p_a > 0$, $p^*_g > 1$, $p_g > 1$. *Si entre ces deux surfaces il existe une correspondance* $(1, n)$, *où* n *est premier, le genre linéaire* $p^{(1)}$ *est égal à l'unité, les genres géométriques sont égaux et l'involution d'ordre* n *déterminée sur* F *est cyclique.*

La démonstration de ce théorème a été divisée en deux paragraphes.

Dans le premier paragraphe, en m'appuyant sur un théorème de M. Enriques concernant la relation entre les systèmes

[1] *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* " Acta Mathematica ,, 1909, vol. XXXII. XXXIII (Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris).

[2] *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* " Rend. R. Accad. di Bologna ,, marzo 1910.

canoniques de F^* et F, et sur l'égalité des genres linéaires de ces surfaces, je démontre que l'on a $p^{(1)}=1$. Un autre théorème de M. Enriques me permet alors d'affirmer que F^* et F possèdent chacune un faisceau de courbes elliptiques. Au moyen d'un lemme de M. Rosenblatt sur les surfaces de genre $p^{(1)}=1$, je démontre enfin qu'à une courbe elliptique du faisceau existant sur F^* correspond une seule courbe elliptique du faisceau existant sur F. C'est pour établir cette dernière propriété que l'hypothèse de l'égalité des genres arithmétiques de F^* et F est nécessaire.

Dans le dernier paragraphe, je montre l'existence sur F d'une transformation birationnelle, de période n, de cette surface en elle-même. Cette transformation engendre l'involution déterminée sur F par la correspondance.

§ 1.

1. — Soient F^*, F deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique p_a et linéaire $p^{(1)}$. En désignant par p^*_g, p_g respectivement les genres geométriques de ces surfaces, nous supposerons que l'on a $p_a > 0$, $p^*_g > 1$, $p_g > 1$. Par ces hypothèses, nous excluons les surfaces rationnelles ($p_a = P_2 = 0$), les surfaces référables point par point aux surfaces réglées ($P_4 = P_6 = 0$), les surfaces hyperelliptiques ($p_a = -1, p_g = P_4 = 1$), elliptiques ($p_a = -1$), les surfaces à courbe canonique ou pluricanonique d'ordre zéro ($P_4 = 1$), etc.

Supposons qu'entre les surfaces F^*. F existe une correspondance $(1, n)$, n étant premier. A un point de F^* correspondront donc n points (distincts ou non) de F et, inversement, à un point de F correspondra un seul point de F^*.

Nous admettrons, du moins dans ce premier paragraphe, que les surfaces envisagées sont dépourvues de courbes exceptionnelles (ce qui n'enlève rien à la généralité, puisque l'on a toujours $P_{12} > 0$).

Indiquons par $|L^*|$ le système canonique de F^*, par $|L|$ celui de F et par D la courbe (éventuellement d'ordre zéro), lieu des points de coïncidence pour l'involution I_n définie sur F par la correspondance donnée (un groupe de I_n étant un groupe de n points correspondants à un même point de F^*).

Par un théorème de M. Enriques (1), on a, sur F,

$$(I) \qquad | L' + D | = | L | ,$$

$|L'|$ désignant le système linéaire correspondant, sur F, au système canonique $| L^* |$ de F^*.

De l'égalité précédente, on déduit

$$n(p^{(1)} - 1) + [DD] + [L'D] = p^{(1)} - 1 ,$$

où $[DD]$ et $[L'D]$ désignent, suivant une notation usitée, respectivement le degré virtuel de la courbe D, et le nombre des points communs aux courbes D et L'.

On a $[DD] \geq 0$, $p^{(1)} \geq 1$, $n > 1$, $[L'D] \geq 0$, donc nécessairement,

$$p^{(1)} = 1 , \ [DD] = 0 , \ [L'D] = 0 .$$

Par un théorème de M. Enriques (2), une surface de genre linéaire $p^{(1)} = 1$ et de genre arithmétique $p_a > 0$, possède un faisceau de genre $p_g - p_a$, constitué de courbes elliptiques, hors le cas $p_a = P_2 = 1$. Le système canonique de la surface est composé avec ce faisceau.

Nous voyons donc que sur la surface F^* il existe un faisceau $\{C^*\}$ de genre $p^*_g - p_a$, constitué de courbes elliptiques C^*, et de même, sur F, un faisceau $\{C\}$, de genre $p_g - p_a$, de courbes elliptiques C.

Des égalités $[DD] = 0$, $[L'D] = 0$ et (I), on déduit d'abord que la courbe de coïncidence D, si elle existe, est constituée de quelques courbes du faisceau $\{C\}$. On en déduit de plus que la transformée d'une courbe C^* est constituée par quelques courbes C.

Nous allons maintenant démontrer qu'à une courbe C^* ne peut correspondre qu'une seule courbe C.

(1) *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche.* " Mem. della R. Accademia di Torino ", 1893, ser. 2a, vol. XLIV. Voir aussi: SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica.* " Rend. R. Ist. Lomb. ", 1893, ser. 2a, vol. XXXVI.

(2) *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. " Rend. della R. Accad. di Bologna ", déc. 1906.

2. — Rappelons tout d'abord un lemme de M. Rosenblatt sur les surfaces de genre $p^{(1)} = 1$ (1). Soit une surface algébrique de genres $p^{(1)} = 1$, $p_a > 0$, $p_g > 1$. D'après un théorème de M. Enriques invoqué précédemment, cette surface possède un faisceau $\}k\{$ de genre $p_g - p_a$ de courbes elliptiques, avec lequel est composé le système canonique.

Soit m le nombre de courbes k entrant dans une courbe canonique de la surface. Quelques-unes de ces courbes pourront être fixes, c'est-à-dire appartenir à toutes les courbes canoniques de la surface. De plus, le système canonique de la surface pourra avoir quelques autres composantes fixes, éventuellement des parties de courbes k. Quoiqu'il en soit, les groupes de m courbes k forment, dans le faisceau $\}k\{$, une série linéaire $g_m^{p_g-1}$ dont la dimension $p_g - 1 (> 0)$ est égale à la dimension du système canonique de la surface.

Supposons que la série $g_m^{p_g-1}$ puisse être spéciale. Alors, on a, par le théorème de Riemann-Roch,

$$p_g - 1 > m - (p_g - p_a),$$

ou

$$m < 2p_g - p_a - 1.$$

D'autre part, le théorème de Clifford donne

$$m \geq 2(p_g - 1).$$

On a donc

$$2p_g - p_a - 1 > 2p_g - 2,$$

c'est-à-dire $p_a < 1$. Mais nous avons supposé $p_a > 0$, donc la $g_m^{p_g-1}$ ne peut être spéciale.

Si la $g_m^{p_g-1}$ n'est pas spéciale, nous avons, par le théorème de Riemann Roch,

$$p_g - 1 = m - (p_g - p_a),$$

d'où $m = 2p_g - p_a - 1$. Ainsi:

(1) *Algebraische Flachen mit diskontinuirlich unendlich vielen birationalen Transformationen in sich.* " Rendic. del Circ. Matem. di Palermo ", 1912, vol. XXXIII.

Le système canonique d'une surface algébrique de genres $p^{(1)} = 1$, $p_a > 0$, $p_g > 1$, *est composé avec un faisceau de courbes elliptiques, chaque courbe canonique se composant de* $2p_g - p_a - 1$ *courbes du faisceau, et éventuellement de quelques composantes fixes qui ne sont pas des courbes totales du faisceau.*

Observation. — Le lemme de M. Rosenblatt s'étend avec une légère modification au cas $p_a = 0$. Alors, on a en effet, en désignant par $i > 0$ l'indice de spécialité de la $g_m^{p_g - 1}$,

$$2p_g - 1 = m + i \qquad \text{(Riemann-Roch)}$$

$$2(p_g - 1) \leq m. \qquad \text{(Clifford).}$$

On en déduit $i = 1$ et par suite:

Une courbe canonique d'une surface de genres $p^{(1)} = 1$, $p_a = 0$, $p_g > 1$ *se compose de*

a) $2p_g - 1$ *courbes du faisceau de genre* p_g *de courbes elliptiques* $\{k\}$ *existant sur la surface, ou de*

b) $2p_g - 2$ *courbes formant un groupe canonique de* $\{k\}$, *en dehors de composantes fixes éventuelles.*

3. — Reprenons les surfaces F^*, F liées par la correspondance algébrique $(1, n)$, et supposons qu'il puisse se faire qu'à une courbe générique C^* de F^* correspondent plusieurs courbes C de F. Le nombre de ces courbes est nécessairement un diviseur de n, et n étant premier, il ne peut être que n lui-même.

Dans le faisceau $\{C\}$, nous avons par suite une involution d'ordre n et de genre $p^*_g - p_a$. Le nombre des coïncidences de cette involution est, d'après la formule de Zeuthen, égal à $2(p_g - p_a - 1) - 2n(p^*_g - p_a - 1)$. La courbe de coïncidence D de l'involution I_n sur la surface F est évidemment constituée par les courbes C ainsi obtenues.

Une courbe canonique L^* de F^* comprend, comme nous avons vu, $2p^*_g - p_a - 1$ courbes C^*. Une courbe canonique L de F comprend $2p_g - p_a - 1$ courbes C. Or nous avons la relation

$$|L' + D| = |L|.$$

Une courbe L comprend donc:

a) $n(2p_g^* - p_a - 1)$ courbes C provenant d'une courbe L^*,

b) $2(p_g - p_a - 1) - 2n(p_g^* - p_a - 1)$ courbes C composant la courbe D,

c) éventuellement quelques courbes C transformées de courbes partielles du faisceau $\{C^*\}$ entrant comme composantes fixes dans $|L^*|$.

Nous avons donc

$$n(2p_g^* - p_a - 1) + 2(p_g - p_a - 1) - 2n(p_g^* - p_a - 1) \leq 2p_g - p_a - 1,$$

c'est-à-dire

$$(p_a + 1)(n - 1) \leq 0.$$

Or, nous avons $n > 1$; l'inégalité précédente entraine donc $p_a \leq -1$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $p_a > 0$.

La correspondance entre F^* et F est donc telle que la transformée d'une courbe elliptique C^* de F^* est une courbe C unique de F. Il existe donc une correspondance birationnelle entre les faisceaux $\{C^*\}$, $\{C\}$ de genres respectifs $p^*_g - p_a$, $p_g - p_a$ et par suite on a $p_g = p^*_g$.

En résumé, *les surfaces* F*, F, *liées par une correspondance* (1, n), *où* n *est premier, ont*:

1° *même genre linéaire* $p^{(1)}$ (*par hypothèse*),

2° $p^{(1)} = 1$,

3° *même genre arithmétique* $p_a > 0$ (*par hypothèse*),

4° *même genre géométrique* $p_g > 1$,

5° *chacune un faisceau de genre* $p_g - p_a$ *de courbes elliptiques. La correspondance* (1, n) *entraîne une correspondance birationnelle entre les deux faisceaux.*

§ 2.

4. — Soit F une surface algébrique de genres linéaire $p^{(1)} = 1$, arithmétique $p_a > 0$, géométrique $p_g > 1$. Sur cette surface, nous avons un faisceau de genre $p_g - p_a$, $\{C\}$, de courbes elliptiques, avec lequel est composé le système canonique.

Supposons que sur F il existe une involution I_n, d'ordre premier n, pour laquelle les courbes C sont invariantes. Si F^* est une surface dont les points représentent les groupes de I_n, nous supposerons que cette surface a les mêmes genres linéaire, arithmétique et géométrique que F. Sur F^*, nous avons un faisceau $\}C^*\{$, de genre $p_g - p_a$, de courbes elliptiques. Les points d'une courbe C^* représentent les groupes de I_n situés sur une courbe C.

On sait qu'une involution elliptique d'ordre premier située sur une courbe elliptique, est cyclique. En d'autres termes, si entre deux courbes elliptiques C^*, C, nous avons une correspondance algébrique $(1, n)$, où n est premier, il existe une transformation birationnelle T de C en elle-même, qui possède les propriétés suivantes:

a) elle est de période n $(T^n \equiv 1)$,

b) elle transforme en lui-même tout groupe de n points de C correspondants à un même point de C^*.

Donc, sur chaque courbe elliptique C du faisceau $\}C\{$ sur F, nous avons une transformation birationnelle T transformant en lui-même tout groupe de I_n situé sur la courbe envisagée. Mais nous ne pouvons pas en conclure qu'il existe sur F une unique transformation birationnelle T', de période n, laissant invariant tout groupe de I_n et définissant, sur chaque courbe C, la transformation T relative. Un raisonnement bien simple le montre de suite. Imaginons une courbe dont les points correspondent aux courbes du faisceau $\}C\{$, ou mieux, la surface de Riemann R représentant les points réels ou imaginaires de cette courbe. A chaque point P de R correspond une courbe C de $\}C\{$ et par conséquent une transformation cyclique T définie *sur cette courbe* par I_n.

Si le point P décrit un cycle fermé sur R, la transformation T varie d'une façon continue. Mais lorsque P est revenu à sa position initial P_0, il se peut fort bien que la transformation T obtenue par continuité ne coïncide pas avec la transformation initiale T_0, mais coïncide au contraire avec une puissance T_0^r $(1 < r < n)$ de cette transformation. C'est ce qui n'arriverait pas si T' existait.

Nous réussirons cependant à établir l'existence de cette transformation T'.

5. Forme de l'équation de la surface F^*. — Considérons un " modèle projectif " de la surface F^* situé dans un espace linéaire à trois dimensions, de coordonnées cartésiennes (x, y, z). Une courbe elliptique C^* sera représentée par deux équations algébriques

$$\lambda = \varphi(x, y, z), \quad \mu = \psi(x, y, z),$$

λ et μ étant deux paramètres variables avec la courbe et liés par une équation algébrique

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

de genre $p_g - p_a$. L'équation de F^* sera ainsi

$$f(\varphi, \psi) = 0.$$

Posons

$$\psi(x, y, z) = \frac{\psi_1(x, y, z)}{\psi_2(x, y, z)},$$

ψ_1 et ψ_2 étant des polynomes entiers.

Considérons alors un système linéaire de surfaces contenant la surface

$$\psi_1(x, y, z) - \mu\psi_2(x, y, z) = 0,$$

et assez ample pour découper sur F^* un système linéaire, ∞^3, simple, de courbes. Cela est évidemment toujours possible. Rapportant projectivement les courbes de ce système aux plans d'un espace (X, Y, Z), on obtient un nouveau modèle projectif de F^* dont l'équation s'obtiendra en éliminant λ et μ entre les équations

$$\lambda = \Phi(X, Y, Z), \quad \mu = \frac{Y}{X},$$

$$f(\lambda, \mu) = 0. \tag{1}$$

Les équations

$$\lambda = \Phi(X, Y, Z), \qquad X\mu - Y = 0 \tag{2}$$

représentent une courbe elliptique C^*.

Dans la suite, lorsqu'il sera question de la surface F^*, c'est de ce dernier modèle projectif qu'il s'agira.

Soient m l'ordre de F^*, m' l'ordre de C^*, η le degré de $f(\lambda, \mu)$ par rapport à λ. La surface F^*, d'ordre m, possède une droite $(m - \eta m')$-uple, l'axe des Z, et tout plan passant par cette droite rencontre encore la surface en η courbes elliptiques C^*.

6. Forme de l'équation de la surface F. — Soient X, Y, Z, U les coordonnées cartésiennes d'un espace linéaire à quatre dimensions.

Considérons une courbe elliptique C^* représentée par les équations (2) où les paramètres λ et μ ont des valeurs déterminées.

On sait que toute courbe elliptique irréductible C, possédant une involution d'ordre premier n dont les groupes sont représentés par les points de C^*, peut être représentée par les équations

$$(3) \qquad \lambda = \Phi(X, Y, Z), \quad \mu X - Y = 0, \quad U^n = H(X, Y, Z),$$

où $H(X, Y, Z)$ est un polynôme entier, irréductible, de degré n en X, Y, Z, choisi de telle manière que la surface $H = 0$ ait des contacts n — ponctuels en tous ses points de rencontre avec la courbe C^*.

Les coefficients du polynôme $H(X, Y, Z)$ dépendent en général de quelques irrationalités arithmétiques. Ces irrationalités pourront varier avec C^*, c'est-à-dire avec λ et μ.

Considérons la surface de Riemann R dont les points représentent les couples de valeurs réelles ou imaginaires de λ, μ satisfaisant à l'équation (1). A tout point P de R correspond donc une courbe C^* et, à cause des irrationalités entrant dans les coefficients de $H(X, Y, Z)$, un certain nombre $\rho > 1$ de courbes C birationnellement distinctes.

Partons d'une position initiale P_0 et faisons décrire au point P un cycle fermé. Lorsque P sera revenu en P_0, les ρ courbes C, qui auront varié d'une façon continue, ne se représenteront généralement plus dans le même ordre. Cela tient à la variation des irrationnalités des coefficients de $H(X, Y, Z)$.

Or, considérons la surface F dont il a été question plus haut. A tout point de R correspond une courbe C^* de F^* et, d'après ce que nous avons vu, une seule courbe C de F. Cette courbe C sera d'ailleurs représentée par des équations telles que (3). Soient C_0 la courbe C qui correspond à la position initiale P_0; C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\rho-1)}$ les $\rho - 1$ autres courbes représentées par les équations (3), dans lesquelles λ et μ assignent les valeurs correspondantes à P_0. Lorsque P, après avoir décrit un cycle fermé quelconque, est revenu en P_0, la courbe C définie par continuité en partant de C_0, ne peut coïncider avec l'une des courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\rho-1)}$, car alors la surface F n'existerait pas. Ces $\rho - 1$ dernières courbes se seront d'ailleurs généralement permutées entre elles.

Nous voyons donc que, si F existe, il y a une courbe C définie par les équations (3) qui se reproduit lorsque le point P correspondant de R décrit des cycles fermés quelconques. En d'autres termes, dire que F existe revient à dire qu'il existe un polynôme $H(X, Y, Z)$ dépendant rationnellement de λ et μ. Indiquons ce polynôme par $H(X, Y, Z; \lambda, \mu)$.

Si la surface F existe, elle sera donc représentée par les équations obtenues en éliminant λ et μ entre

$$\lambda = \Phi(X, Y, Z), \quad \mu = \frac{Y}{X},$$

$$f(\lambda, \mu) = 0, \qquad U^n = H(X, Y, Z; \lambda, \mu).$$

L'équation

$$H\left(X, Y, Z; \Phi, \frac{Y}{X}\right) = 0$$

(rendue entière) représente une surface H d'un certain ordre $\nu (> \eta n)$, passant $(\nu - \eta n)$ fois par l'axe des Z. Tout plan passant par cette droite rencontre la surface H, en dehors de cette droite, en η courbes d'ordre n. De plus, le long de leur courbe d'intersection (en dehors de l'axe des Z), les surfaces F^* et H ont un contact n-ponctuel.

7. Conclusion. — La transformation homographique de période n

$$X' = X,\ Y' = Y,\ Z' = Z,\ U' = \epsilon U,$$

où ϵ est une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité, transforme en elle-même la surface F. Par suite, il existe une transformation birationnelle cyclique T' d'ordre n de F en elle-même. Cette transformation engendre une involution d'ordre n, dont les groupes sont représentés par les points de F^*. De plus, T' transforme chaque C en elle-même. L'involution engendrée par T' coïncide donc avec I_n. On en conclut que:

Si entre deux surfaces algébriques F^*, F, *de genres* $\mathrm{p}^{(1)} = 1$, $\mathrm{p}_a > 0$, $\mathrm{p}_g > 1$, *on a une correspondance* $(1, \mathrm{n})$, *où* n *est premier, l'involution d'ordre* n *déterminée sur* F *est cyclique.*

Ce théorème, rapproché de celui que nous avons établi au § 1, démontre le théorème énoncé au début de ce travail.

Liège, Septembre 1912.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 24 Novembre 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. SENATORE GIUSEPPE CARLE
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: RENIER, PIZZI, CHIRONI, STAMPINI, D'ERCOLE, SFORZA, EINAUDI, BAUDI DI VESME, e DE SANCTIS Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente BOSELLI e dei Soci: MANNO, Direttore della Classe, RUFFINI e SCHIAPARELLI.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 23 giugno 1912.

Si presenta la scheda di sottoscrizione per le onoranze al compianto Socio SPEZIA.

I Soci DE SANCTIS e BAUDI DI VESME dànno conto brevemente dei Congressi internazionali di archeologia e di storia dell'arte tenutisi in Roma nello scorso ottobre, a cui portarono l'adesione della nostra Accademia.

Si comunica che alle feste giubilari della Società Reale di Archeologia di Bruxelles venne invitato a rappresentare l'Accademia il Presidente della stessa Società G. DES MAREZ.

È presentato d'ufficio il volume del Socio corrispondente BIADEGO: *Vittorio Betteloni: Discorso commemorativo: Carteggio e bibliografia* (Verona, Franchini, 1912). A nome del Prof. G. DE GREGORIO il Socio RENIER fa omaggio del vol. VI degli *Studi glottologici italiani* di cui il DE GREGORIO è direttore.

Per gli *Atti* il Socio CHIRONI offre due sue note; l'una intitolata: *Raimondo Saleilles (1855-1911), Commemorazione*; l'altra: *L'opera scientifica di Giorgio Giorgi nel diritto italiano*; e il Socio DE SANCTIS una nota del Dr. Giorgio PASQUALI, *Per la storia del culto d'Andania*.

Per le *Memorie* il Socio RENIER presenta un lavoro di Giacomo SURRA, intitolato: *Indagini sul carattere e sull'arte di Giuseppe Giusti*. Il Presidente delega i Soci RENIER e SFORZA a riferirne in una prossima adunanza.

Il Socio D'ERCOLE offre pure per le *Memorie* una sua monografia: *La logica hegeliana*, parte prima; e il Socio SFORZA un suo lavoro sopra *Un compagno del P. Guglielmo Massaia in Africa (1848-1866)*.

La Classe, presa cognizione degli scritti del D'ERCOLE e dello SFORZA, ne delibera la inserzione nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

IN MEMORIA

DI

RAIMONDO SALEILLES

Cenno necrologico letto dal Socio G. P. CHIRONI.

RAIMONDO SALEILLES! È un grande giurista che la morte ha crudamente tolto, nella piena maturità dell'ingegno e dell'attività singolarmente geniale, alla Facoltà di Parigi di cui era conspicuo ornamento, agli studi giuridici alla cui elevazione aveva concorso con l'opera ben degna del movimento intellettuale odierno. E se dell'immaturo fato si dolgono quanti erano larghi a lui di ammirazione e di amicizia, ne abbiam cagione di special cordoglio noi italiani che perdemmo in lui un fervido estimatore della scienza nostra: ne ha motivo di profondo rammarico questo Consesso, che chiamandolo fra i suoi accademici avea giustamente onorato un maestro ch'era vanto dell' Università francese.

Già, alla giovine scuola civilistica italiana si sentiva più che attratto, come legato da comunanza di origine. La scuola nostra era sorta col magnifico rifiorire che avean fatto da noi gli studi di diritto romano; era nata dalla restaurazione di questa immortale parte della gloriosa latinità, condotta con l'intento d'insinuare nella larga conoscenza pratica della legge romana intesa qual diritto comune, quella novità di dottrine e di metodo che a tanta altezza avea sollevata la scuola germanica: richiamando così a fecondità di vita lo studio tradizionale. Ed i maestri, ai quali è diritto la perenne e devota gratitudine nostra, conseguirono, come lo vollero e vi attesero, il proseguito intento: la scuola pandettistica mostrò con l'opera

loro quale ricchezza di dottrine e di leggi eterne fossero racchiuse nei testi, ne pose in ogni maggior luce le verità che conservarono nei secoli, e che superando ogni circostanza di luoghi e di tempi, ogni varietà di casi, son fonte viva di saggi e validi ordinamenti giuridici. Ancora risonava il fatidico appello di JHERING, " pel diritto romano, ma oltre, ma al di là del diritto romano ", e la giovine scuola di legge civile illuminava già della nuova luce la grave materia raccolta dalla pratica forense: giustamente aveva pensato che la finalità augurata dall'insigne maestro si rifletteva con particolar modo e virtù sulla vita del diritto civile, dove più direttamente opera, per la natura sua, quella ragion di ogni diritto che è la volontà della persona: e forte del nuovo metodo, reso più severo nell'indagine, più sicuro nei risultati dell'uso ben disciplinato di quello strumento necessario ad ogni ricerca ch'è la storia, innalzò a dignità di scienza la coltura ch'era constituita di brevi ristretti e di ricchi commentari. Così la dottrina italiana ritrovava se stessa, riprendeva la tradizione già interrotta da miserevoli condizioni di studii, e dall'avvenuta sopraffazione di leggi straniere: la riprendeva, dopo essersi arricchita per via di dottrine e d'istituti attinti alla scienza ed alle leggi di fuori: e da tal fusione di elementi derivò l'essere e l'individualità sua.

Il moto innovatore eccitato in Italia da FILIPPO SERAFINI, consentendovi e aiutandolo NICOLA DE CRESCENZIO, ILARIO ALIBRANDI, FRANCESCO SCHUPFER, FRANCESCO BELLAVITE, FRANCESCO FILOMUSI-GUELFI, s'era pur manifestato nella scuola francese, dove alla prima spinta data dal PELLAT, seguiva l'opera magistralmente efficace del BUFNOIR, proseguita nell'applicazione alla ragion civile, con acume e genialità mai più superata, da J. E. LABBÉ. E se noi studiosi italiani tenevamo in egual modo per institutori i maestri nostri, i pandettisti tedeschi e questi insigni giuristi francesi, significanti tutti l'alto rinnovamento degli studi, RAIMONDO SALEILLES, pur procedendo in più diretto modo del BUFNOIR, si teneva, onorandosene, scolaro di FILIPPO SERAFINI: RAIMONDO SALEILLES, che dei nuovi procedimenti fu poi nella scuola francese maestro valentissimo.

È dalla latinità giuridica restaurata ch'egli mosse: ne sentì tutta l'intera vigoria di progressività e di espansione nell'età che volge; e formò la sua scuola, insegnando con l'autorità del-

l'esempio, che gli studi romanistici, rafforzati con la ricerca storica profonda e con l'opportuno e vivo aiuto del diritto comparato, sono fondamento unico e vero di ogni savia indagine, di ogni corretta costruzione giuridica. Quanta novità e ricchezza di frutti ne trasse, e quale incremento n'ebbe la scienza! Lo dicono, e lo diranno nella storia della nostra disciplina, i suoi lavori: la monografia, veramente preziosa di acume critico, di studio profondo e di esposizione elegante, sul demanio pubblico in Roma e la sua applicazione in materia artistica (1888, 1889), d'onde, per un breve accenno, trasse poi occasione ad uno special contributo sulle *piae causae*; e lo studio che meglio ne mostra tutta l'altezza dell'ingegno, la virtù della mente indagatrice, l'acutezza della critica e la genialità del costruire dottrinalmente, sulla " teoria generale delle obbligazioni " (2ª ediz., 1901). La scienza delle pandette, del diritto francese e del diritto nuovo germanico, adoperata con felicità grande di metodo e di misura, dànno particolar valore a questo libro, ch'è onor vero della letteratura giuridica moderna.

Il forte nutrimento romanistico avea nel SALEILLES maggior ricchezza dalla conoscenza del diritto comparato, ch'egli possedeva con piena e diretta signoria. Ne dànno alta testimonianza, oltre ai minori scritti sulle persone giuridiche nel diritto civile germanico (1902) e sul testamento olografo secondo questo diritto raffrontato al francese (1903, 1904), un'assai elaborata e dotta introduzione allo studio del codice civile tedesco (1904), ed un'eccellente monografia sul possesso dei mobili giusta gli ordinamenti di questo codice in comparazione al francese (1907), dove son pure notevoli raffronti col diritto inglese e con lo svizzero. Nè contribuisce meno a significare il valor del giurista il concorso ch'egli dette alla traduzione francese del codice civile tedesco (1904), che nella parte delle obbligazioni venne da lui arricchita di note preziose: e vi contribuiscono pure in modo assai notevole il volume sulla dichiarazione di volontà (1902), e lo studio recentissimo, giustamente lodato per ampiezza di dottrina e venustà di forma, intorno la personalità giuridica (1910).

Ma altri atteggiamenti ebbe l'ingegno di RAIMONDO SALEILLES, onde avea armonico compimento in lui la figura del giurista. Indagatore degli antichi istituti giuridici del suo paese,

scrisse sull'ufficio degli scabini e dei notabili nei tribunali carlovingi (1889), sui delitti e le pene nel ducato di Borgogna (1892), sui rapporti fra il tribunale ecclesiastico e l'autorità secolare (1892), sul codice civile ed il metodo storico (1900). Ricercatore egregio anche fuor del campo strettamente civilistico, scrisse intorno la nuova scuola di diritto penale (1903), la criminalità e l'individualizzazione della pena (1898); indagatore equo ed acuto sul modo di applicare alla pratica della vita le costruzioni dottrinali, scrisse note reputatissime in vari annali di giurisprudenza; dettò lo studio sugli accidenti del lavoro e la responsabilità oggettiva (1897), che rimarrà contributo prezioso alla teoria della colpa: e molti lavori di non lieve importanza pubblicò nel bollettino della fiorentissima Società di studi legislativi (1904, 1906, 1911), alla cui fondazione cooperò, e ch'egli illustrò con l'eminente opera sua.

Questa breve rassegna dei principali momenti in cui si svolse l'attività scientifica di Raimondo Saleilles, è poi caro a me italiano di chiudere col ricordo dei lavori che scrisse sulla legislazione nostra intorno ai monumenti e le belle arti (1894): saggi preziosi di dottrina e di critica; e con la memoria di un atto suo gentilmente devoto in onore di Filippo Serafini. A sua iniziativa, la facoltà di Aix concorse a celebrare il giubileo del grande romanista italiano: ed alla nobile festa egli partecipò con un lavoro sulla "*controversia possessionis* e la *vix ex conventu*„.

Tale l'opera varia, complessa, e nella varietà sua pur sempre genialmente alta, di Raimondo Saleilles: ch'io ricordo con devozione di studioso, e con affetto profondo di amico. Illustrò, come a pochi fu dato in non lungo volger di anni, la scienza, e la cattedra cui ascese succedendo al suo insigne maestro, il Bufnoir: creò una scuola, e produsse allievi che ne continuano degnamente le tradizioni: riunì in se doti magnifiche di scienziato e d'institutore ammirato per la vivezza, la lucidità, l'eleganza del dire. Nè lo adornavano meno le virtù che lo ponevano fra i cittadini migliori. L'educazione famigliare avea fortemente posto nella coscienza sua di uomo il sentimento religioso, e gli studi gliel'aveano affinato ed elevato: ma il legista pur deplorando il dissidio fra il Governo del suo paese e la Chiesa, pur dolendosi del turbamento che il duro contrasto infliggeva alle coscienze, insegnava il rispetto agli ordinamenti

constituiti, esprimendo il voto che la conciliazione fra il depositario legittimo dell'autorità sociale e la depositaria augusta della fede, restituisse pace agli spiriti e tranquillità e concordia alla nazione. Bello e nobile carattere: ed è ai meriti eminenti dello scienziato, alle grandi virtù dell'uomo, che noi tutti, estimatori, amici, colleghi, pensiamo, tributando alla memoria di Raimondo Saleilles l'omaggio del più doloroso rimpianto.

Per la storia del culto di Andania.

Nota del Dr. GIORGIO PASQUALI.

Un'iscrizione scoperta di recente ad Argo e pubblicata da W. Vollgraff BCH XXXIII 1909, 175 sgg., illumina di riflesso particolari ancora oscuri della legge sacra di Andania (Dittenberger *Syll.*² 653 = Michel *Rec.* 694 = Prott e Ziehen *Leges sacrae* II 1, 58 = GDI III 4689). Perchè il primo e sinora unico editore non ha forse ricavato dall'iscrizione tutto ciò che avrebbe potuto, così non sarà inutile che io la trascriva qui ancora una volta e vi aggiunga un breve commento, nel quale tuttavia non tratterò se non quei punti che hanno più speciale relazione con la legge di Andania (1).

Ἐπὶ γραμματέος τῶν | συνέδρων Ἱέρωνος τοῦ | Ἐπικύδεος, | ἱερέος δὲ τοῦ Πυθαέος |⁵ Δαμοσθένεος τοῦ Νικοκρά|τεος Παιονίδα, | προμαντίων δὲ Σωϊβίου τοῦ | Σωϊβίου, Ἀντιγένεος τοῦ| Πολυκράτεος Ναυπλιαδᾶν, |¹⁰ γροφέων δὲ Θερσαγόρου τοῦ | Νικοφαέος, Φιλοκλέος τοῦ | Ξενοφάντου Δμαϊππιδᾶν, | πυροφόρου Τιμαγόρου τοῦ Χα|ριτίμου Κλεοδαΐδα, |¹⁵ προμάντιος Φιλοκρατείας | τᾶς Λυσίωνος Αἰθαλέες (2)· | *χρησμὸς | ὁ γενό-*

(1) Io mi astengo perciò affatto dal ricercare, che nome convenga a divisioni di popolo quali sono i *Παιονίδαι*, *Ναυπλιάδαι* e così via, e quale origine esse abbiano. Particolari diplomatici del prescritto hanno per noi poca importanza. Così pure non voglio entrare nella questione, se i *σύνεδροι*, il cui *γραμματεύς* è qui eponimo, siano magistrati comunali di Argo o non piuttosto, come il Vollgraff (p. 177) pare disposto a credere, magistrati di una lega di città argoliche, formatasi poco dopo il 146.

(2) Esempi raccolti dal Vollgraff a p. 184 (nella nota a p. 183) e a p. 189 paiono giustificare il passaggio dal nome della donna in genitivo singolare a quello della divisione del popolo in nominativo plurale.

μενος τᾶι πόλει τῶν Μεσ|σανίων ἀνεγράφη κατὰ τὸ ψά|[20] φισμα τῶν ἀρχόντων καὶ συνέ|δρων, μαντευομένου Μνασιστρά|του τοῦ ἱεροφάντα περὶ τᾶς θυσί|ας καὶ τῶν μυστηρίων· | ὁ θεὸς ἔχρησε· Μεγάλοις Θε|[25] οῖς Καρνείοις καλλιεροῦντι κα|τὰ τὰ πάτρια· λέγω δὲ καὶ Μεσ|[σανί]ο[ι]ς ἐ[πι]τελεῖν τὰ μυστή|[ρια: qui la stele è rotta.

Già l'editore ha osservato che l'oracolo non si può riferire se non al culto di Andania; misteri e religione dei *Μεγάλοι Θεοί* in Messenia, un magistrato sacerdotale di nome Mnasistrato appaiono in tutt'e due le iscrizioni, e, così tutto insieme, certo solo in queste due iscrizioni. Io non so intendere i dubbi del Vollgraff (p. 181), se il Mnasistrato dell'iscrizione argiva sia tutt'uno con quello della legge d'Andania, o forse soltanto un membro della medesima famiglia sacerdotale. La legge d'Andania porta, di che nessuno ha mai dubitato, chiare in sè le tracce di una recente riforma del culto; chi interroga un oracolo *περὶ τᾶς θυσίας καὶ τῶν μυστηρίων* vuol legittimare o sapere respinto dalla divinità un cambiamento o introdotto o da introdursi nel loro ordinamento, è un riformatore o un avversario di riforme. L'iscrizione nuova deve, per ragioni paleografiche, appartenere a un dipresso alla stessa età che la legge di Andania; non è verosimile che in breve giro di anni il culto fosse riformato due volte. La sola conclusione metodicamente legittima è che i due Mnasistrati sono una sola persona. Ragioni in contrario non ne vedo. La forma dell'omega è, sì, differente nelle due versioni, ma un unico indizio di tal genere avrebbe valore solo pel confronto tra due iscrizioni della stessa città e solo quando noi possedessimo di quella tanto materiale epigrafico da potere stabilire con qualche probabilità che i due segni non siano stati in uso per qualche tempo l'uno accanto all'altro. Le due epigrafi sono, nel caso nostro, scolpite in paesi diversi, da scalpellini che seguivano tradizioni differenti. Nessuno può dire se una delle iscrizioni e quale e di quanti decenni sia più antica dell'altra. Dunque le due iscrizioni, dobbiamo fin d'ora concludere, si riferiscono alla stessa riforma del culto di Andania (1).

(1) Apparirà più sotto che per ragioni interne il *χρησμός*, se non l'iscrizione in cui il *χρησμός* è eternato, deve essere collocato forse qualche mese

Il responso è dato alla città dei Messeni rappresentata dall'ἱεροφάντης di Andania, Mnasistrato; la formula giuridica basta qui a risolvere l'annosa questione, se le magistrature nominate nella legge sacra appartenessero alla cittaduzza Andania o a Messene. I misteri di Andania appartennero, almeno dalla promulgazione della *lex sacra* in poi, a Messene, come i misteri eleusinii ad Atene. A dir tutto, non se ne sarebbe mai dovuto dubitare, perchè già il personale di culto sarebbe stato troppo numeroso per un borgo di quella fatta. Se era ancora lecito dubitarne col Sauppe, l'osservazione dello Ziehen sulla prescrizione (r. 45) che *οἱ ἐπὶ τῶν διαφόρων* dovessero avere un censo non minore di un talento, avrebbe dovuto bastare a rimuovere ogni dubbio; quanta gente così ricca ci sarà stata ad Andania? (1).

Ancora: Pausania (IV 33, 6) parla dei ruderi di Andania, eppure pare, a quel che dice, che il culto fosse ancora celebrato: da chi, se non dai Messeni? Pure è bene che ci sia una testimonianza anche per tempi più antichi. E si può forse andare un passo più oltre: l'oracolo impone anche ai Messeni di compiere i misteri. Qui c'è la frattura, e come il periodo poteva finir qui, così anche e a pari diritto non si può escludere che seguisse ancora una determinazione " secondo l'uso avito, nel tal giorno „, e così via. Ad ogni modo, il *καὶ Μεσσανίοις*, che è supplemento sicuro, ha già di per sè un senso chiaro, qualunque cosa seguisse. L'oracolo è reso ai Messeni, eppure i Messeni sono nominati a parte, e al loro nome precede un " anche „. A me pare che se ne debba concludere necessariamente che la prima parte dell'oracolo non si riferisca propriamente ai Messeni. Poi si aggiunge: " E anche i Messeni devono celebrare i misteri, devono prender parte ai misteri „. Soggetto della prima

---

prima della legge di Andania. Per la cronologia di questa cfr. A. WILHELM, " Oesterr. Jahreshefte „ X 1907 p. 21, che sostiene con assai buone ragioni che quest' iscrizione è datata secondo l'êra provinciale macedonica; che, quindi, il 55° anno menzionato nella r. 10, corrisponde all'anno 93 a. C.

(1) Il SAUPPE (*Ausgewählte Schriften* p. 306) aveva intravvisto la verità, ma non si potè poi indurre ad accettarla sic et simpliciter per ragioni di pochissimo conto. La vide bene e confutò quelle ragioni G. SEELIGER *Messenien und der achäische Bund* Zittauer Gymn.-Progr. 1896/97 p. 27 n. 33. L'argomento nuovo recato dallo ZIEHEN sta a p. 175 delle sue *Leges sacrae* II 1.

proposizione devono essere allora quelli di Andania, quelli che in Andania compiono i misteri. Se ne conchiude che allora per la prima volta fu imposto dall'oracolo ai Messeni di celebrare loro i misteri di Andania.

La proposizione precedente vuol dire: " Sacrificando ai *μεγάλοι θεοί* alle Carnee, compiono opera ad essi gradita e conforme al costume patrio ". Non saprei tradurre in maniera meno macchinosa, tanta ricchezza di significato chiude in sè il *καλλιερεῖν*. Se l'oracolo insiste, come mostrano le parole, sull'essere gradito ai numi il costume di celebrare i riti in onore dei *μεγάλοι θεοί* al tempo delle Carnee, vuol dire che di quest'insistenza, a dissipare scrupoli, c'era bisogno. Ma dubbi di quel genere non possono sorgere, se non quando un culto si ripristina o si modifica. Ad esser brevi, Mnasistrato ha riformato il culto d'Andania; egli ha trasportato alle Carnee il tempo dei riti, dei misteri in onore dei *μεγάλοι θεοί*. Ugualmente egli ha procurato che i Messeni prendessero su di loro l'esercizio di quel culto. E, a farsi la via libera, s'è fatto imporre queste modificazioni dall'oracolo più celebre del Peloponneso prima ancora di proporre la legge sacra. Naturalmente, per riuscire nel suo intento, egli doveva ottenere che il dio presentasse come ripristino di costume avito quello che più probabilmente non era se non innovazione. L'iscrizione argiva è, quindi, anteriore di alcuni mesi a quella di Andania; o, per lo meno, il *χρησμός* è anteriore alla *lex sacra*.

Io non mi nascondo che tutto ciò è interpretazione, cioè, sino almeno a un certo punto, ipotesi, congettura. Ma mi pare che sia la sola interpretazione che, come soddisfa le ragioni della sintassi e della posizione delle parole, così si accorda con quello che sul culto di Andania sappiamo dalla grande iscrizione e da Pausania. Su questo secondo punto ancora poche parole.

Che la legge di Andania presupponga una riorganizzazione del culto, aveva già visto il Sauppe. In quel documento Mnasistrato occupa un posto singolarissimo: marcia primo nella processione, ancora innanzi al sacerdote degli dèi in cui onore si celebrano i misteri (r. 28); la città ha decretato a lui come *διάφορον εἰς τὸν στέφανον* seimila dramme (r. 52); egli avrà vita natural durante la vigilanza della fonte *Ἅγνα* (r. 84): ha diritto alle pelli delle vittime offerte e al terzo dei *διάφορα*

(r. 86); terrà l'una delle due chiavi del tesoro, che si costruirà presso la fonte (r. 92); prenderà parte al banchetto sacro con moglie e figli (r. 97). I dieci (r. 150) nomineranno *τοὺς συνλειτουργήσοντας μετὰ Μνασιστράτου*. E sempre tutti questi privilegi sono concessi a Mnasistrato personalmente, non all'*ἱεροφάντης*; che Mnasistrato fosse e fosse stato ierofante, lo abbiamo appreso solo ora dal *χρησμός*. Ora, che in una legge sacra, che doveva avere valore perpetuo, si destinassero privilegi a un sacerdote, designandolo col nome, non col titolo, è particolarità singolarissima, che vuole la sua spiegazione. Che a Mnasistrato fossero riserbati onori *ἕως ἂν ζεῖ* (r. 85), vita natural durante, non si spiega se non ammettendo ch'egli conservasse *ad personam* privilegi di un ufficio, a cui aveva rinunziato per sè e per i suoi successori, per la sua discendenza. La spiegazione è stata già data dal Sauppe (1). Pausania (IV 26, 5 sgg.) racconta che quando Epaminonda dopo Leuctra volle richiamare in patria i Messeni e fondar loro una città, essi esitavano a riprendere domicilio in Andania e in Oichalia, dove avevano sofferto sventura per l'ira dei Dioscuri. Allora apparve in sogno a Epàminonda una figura di vecchio, *ἱεροφάντῃ μάλιστα εἰκασμένος*, lo esortò a ridare ai Messeni la patria, chè i Dioscuri erano ormai placati, e gli promise gloria eterna. La stessa figura apparve ad Epitele, cui gli Argivi avevano dato la strategia e il cómpito di rifondare Messene, e gl'impose di scavare in quel punto dell'Ithome, dove vedesse crescere edera e mirto, e di riportare alla luce e a salvezza la vecchia, perchè essa soffriva chiusa nella camera di bronzo e stava già per soffocare. Epitele, fatto

(1) Confesso con vergogna di non essere riuscito a capire i dubbi del Vollgraff. Che la razza di Mnasistrato non si estingueva con lui, è espressamente testimoniato: a r. 97 si dispone che al banchetto sacro prendan parte tra gli altri *καὶ Μνασίστρατον καὶ τὰν γυναῖκά τε καὶ τὰς γενεὰς αὐτοῦ*. È noto che a volte certi onori, p. e. la prossenia, si concessero non solo a quello che più direttamente è onorato e ai suoi figli nati, ma anche ai nascituri, anche quando l'onorato era celibe e forse ancora impubere; ma una formula di quel genere presuppone pur sempre che la famiglia non sia condannata ad estinguersi. Questo contro ciò che il Vollgraff nota a p. 181/82. Io riferisco sopra nel testo l'opinione del Sauppe, tenendo conto di osservazioni felici di Meister e di Ziehen (nei loro commenti); si può dire che negli ultimi anni si è formata su quest'iscrizione una specie di *opinio vulgata*; essa è anche la giusta. Ad inserire osservazioni mie non rinunzio.

giorno, scavò e trovò un' idria di bronzo, che portò subito a Epaminonda, cui raccontò anche il suo sogno. Questi aprì l'idria e ci trovò una lamina di sottilissimo stagno arrotolata come un libro; in essa era contenuta l'istruzione per i misteri dei *μεγάλοι θεοί*. Quel che segue non importa più al nostro fine. Pausania racconta con ricercata grazia nei particolari, ma con non molta abilità nell'insieme, e dalle sue parole non risulta chiaro che significato abbia nella leggenda il sogno di Epaminonda e in che relazione sia con il sogno di Epitele. Eppure non si può negare che chi inventò quella leggenda ebbe in genere la mano felice, anche se il concatenamento non appaia così chiaro nel racconto di Pausania. Il sogno di Epaminonda dissipa in lui gli scrupoli che il rifiuto dei Messeni gli aveva messo in cuore; il sogno di Epitele assicura al fondatore di Messene nuova un prezioso talismano di incolumità; l'ira degli dèi è cessata; la via a una seconda fondazione di Messene è libera.

Ora Pausania stesso (IV 27, 5) racconta che i discendenti della famiglia degli antichi sacerdoti trascrissero la *τελετή* prescritta nella laminetta *ἐς βίβλους*; narra più sotto (IV 33, 5) che l'idria di bronzo si custodiva al tempo suo nel Carnasio di Andania. Nella legge sacra si parla a r. 84 della fonte chiamata *Ἅγνα διὰ τῶν ἀρχαίων ἐγγράφων* cioè nella laminetta, a r. 11 della *κάμπτρα*, cassa di libri, come spiega il Meister (1), e dei *βιβλία ἃ ἔδωκε Μνασίστρατος*. I libri sono la trascrizione della laminetta, ch'era rimasta fino allora in possesso dell'antica famiglia sacerdotale (2). Chi consegna i libri sacri, rinunzia al suo ufficio; Mnasistrato rinunziò dunque per il primo al possesso assoluto ed esclusivo della prescrizione sacra, la accomunò con gli *ἱεροί*, con quelli che di volta in volta dovevano dirigere i misteri.

Questo ragionamento è confermato e precisato dal nuovo documento. Mnasistrato ha consultato l'oracolo per sentirsi dire che, facendo così e così, opererebbe in modo caro agli dèi e

(1) Nel suo commento in GDI III 2 p. 132.

(2) Lo Ziehen (p. 179) identifica gli *ἔγγραφα* e i *βιβλία*, crede cioè che gli uni e gli altri fossero trascrizione della laminetta; la differenza non ha per il nostro fine nessun valore.

conforme all'uso avito; se egli si presenta sotto forma di restauratore, dev'essere stato un innovatore: questo insegna la storia di ogni religione. Mnasistrato è detto nel *χρησμός* argivo *ἱεροφάντης*; nella *lex sacra* di Andania non è più che Mnasistrato; ha, dunque, rinunciato all'ufficio. E il nome della sacra magistratura non è indifferente: Epitele sognò un *ἱεροφάντης*, sognò, cioè, che un avo, forse il ceppo dell'antica famiglia sacerdotale di Andania, gli indicasse dove troverebbe la vecchia presso a soffocare. Pausania aggiunge poche righe più sotto (IV 26, 8) che dicono che quel vecchio sia stato *Καύκων, ὃς ἀφίκετο ἐξ Ἀθηνῶν ἐς Ἀνδανίαν παρὰ Μεσσήνην τὴν Τριόπα*. Questa è speculazione genealogica di poca importanza. Pare però che se ne debba indarre che quel *Καύκων* dovesse esser creduto il ceppo della famiglia sacerdotale. E infatti Pausania fa di lui (IV 1, 5) il fondatore del culto di Andania.

Mnasistrato, dunque, riformò il culto, calmando gli scrupoli suoi e di altri con l'oracolo dell'Apollo di Argo. Per che ragioni e in che modo, ci accingiamo subito a vedere: egli volle ed ottenne che i Messeni prendessero su di sè i misteri come lor propri, e, per compensarli in qualche modo, fece lor parte delle istruzioni per la *τελετή*, che fin allora erano rimaste prezioso retaggio della sua famiglia. Nella legge di Andania già i Messeni *ἐπιτελοῦσι τὰ μυστήρια*. Quale può essere stata la ragione di questa riforma? Io non ne so vedere che una: la ragione economica. Il principio del primo secolo a. C. fu notoriamente per tutto il mondo antico un tempo di miseria. Che Andania fosse una terra di Bengodi, non c'indurremo facilmente a credere. Il culto s'era trascinato avanti fino allora, come meglio poteva (1); un giorno un rampollo dell'antica famiglia sacerdotale pensò di affidare l'amministrazione dei misteri, addossandone le spese,

(1) Lo Ziehen (p. 176) ammette che il culto potesse essere da tempo cessato e fosse proprio allora istaurato da Mnasistrato, ma ha forse torto. Il principio del primo secolo a. C. non era, appunto per ragioni economiche, il tempo più propizio alla ripristinazione di misteri costosi. Anche non si capirebbe perchè fossero concessi a Mnasistrato tanti privilegi, di natura specie pecuniaria, vita sua natural durante, se egli non ne avesse già goduto se i misteri fossero cioè cessati del tutto per qualche tempo. Del resto anche lo Ziehen ammette la possibilità che i misteri fossero non sospesi, ma celebrati non secondo il rito.

alla città che in quel paese era la grande città, anche a costo che ne scapitasse l'esclusività dell'ufficio della sua famiglia. Se ne sarà consolato con le onoranze che i Messeni gli avran tributato; a non ridursi sul lastrico seppe pensare, come abbiamo già veduto.

Che la ragione fosse quella che abbiamo detto, conferma la prima proposizione dell'oracolo: sacrificando ai *Μεγάλοι θεοί* al tempo delle Carnee, quei di Andania seguono un costume patrio. Dunque erano sorti scrupoli; dunque anche in questo punto Mnasistrato voleva cambiare. Qui mi conviene battere una via più lunga: il culto di Andania si riferisce a Demetra, Hermes, ai *Μεγάλοι θεοί*, ad Apollo Carneo e ad *Ἅγνα* (cfr. specie r. 33, 68). I *Μεγάλοι θεοί* sono, a mio parere, i Dioscuri (1). La leggenda, quale la si ricostruisce da Pausania, non ha senso se non si ammette che il rinvenimento della vecchia è la garanzia che l'ira dei Dioscuri contro i Messenii è cessata. Dunque i *Μεγάλοι θεοί* devono essere qui i Dioscuri, perchè i Dioscuri devono aver parte nei riti imposti e descritti nella laminetta di stagno. Il Sauppe si decise invece (p. 295) per i Cabiri di Samotracia per ragioni di pochissimo valore; quest'è, mi pare, il solo punto debole di quella memoria nella quale egli ha per la prima volta insegnato a interpretare assennatamente ed esattamente un'iscrizione greca. Un' iscrizione metrica nel *κλίσιον τὸ Λυκομιδῶν* in Phlya si spacciava per opera di un sant'uomo Methapo (Paus. IV, 1, 8); in questa poesia egli narra di aver purificato il tempio messenio, cioè andanio, di Hermes, Demetra e Core, e di aver ammirato come Lycos figlio di Pandion avesse riprodotto colà in Andania il culto eleusinio. Ora Methapo ha, secondo Pausania, introdotto anche il culto dei Cabiri in Tebe. Di lì il Sauppe induce che i *Μεγάλοι θεοί* devono essere anche in Andania i Cabiri. Ma in primo luogo la poesia può essere una falsificazione recente. Essa conosce ad Andania le *Μεγάλαι θεαί* come Pausania (IV 33, 5), non i *Μεγάλοι θεοί*. E poi, chi

(1) Töpffer *Att. Geneal.* 218 sgg. ha visto qui il vero e ha esposto bene le ragioni della sua opinione. Pausania adopra *μεγάλοι θεοί* solo in senso di Dioscuri (I 31, 1. VIII 21, 4). I Dioscuri confusi con i Cabiri, per vero, già in tempo ellenistico.

dice che dappertutto dove si attribuivano fondazioni di culti a questo personaggio immaginario dovessero aver luogo i Cabiri?

Dioscuri e Demetra sono una combinazione normale almeno in Messenia. Così i Messeni, che rivendicavano a sè la nascita dei Dioscuri contro le pretese degli Spartani (Paus. III 26, 3), avevano anche in un tempio di Demetra gruppi statuari dei Dioscuri e delle Leucippidi da loro rapite; così almeno, se intendo bene il passo di Pausania (IV 31, 9) *καὶ Δήμητρος ἱερὸν Μεσσηνίοις ἐστὶν ἅγιον καὶ Διοσκούρων ἀγάλματα φέροντες τὰς Λευκίππου* (1).

E la combinazione di una divinità ctonica quale fu Demetra con uno che ha almeno alcuni aspetti ctonici come Hermes non dà a pensare (2). Ma che c'entra qui il Carneo? Eppure il suo culto non potrebbe essere più intimamente fuso con quello delle altre divinità. L'*ὅρκος* degli *ἱεροί* si prestava nel tempio del Carneo (r. 7), di restauri e allargamenti nel tempio, nel *Καρνειάσιον* e del modo di provvedervi con i redditi del culto si parla nella *lex sacra* a ogni piè sospinto (r. 54 [*τὰ*] *κ*[*α*]*τασκευαζό*[*μενα*] *ἐν* [*τῶ*]*ι Καρνειασίωι*; 55 [*τὰ*] *ἐπισκε*[*υα*]*ζόμενα ἐν τῶι Καρνειασίωι*; 59 e 63 *εἰς τὰν ἐπισκευὰν τῶν ἐν τῶι Καρνειασίωι*). Le solennità sono celebrate, come il Sauppe (p. 304) aveva intuito, come il Foucart (3) dimostrò, nel mese che per la maggior parte dei Dori è il Carneo, il mese sacro, la *ἱερομηνία*, in luglio o in agosto; ché al Carneo spartano deve corrispondere l'*ἑνδέκατος μήν* nel quale gli *ἱεροί* devono prestare il loro giuramento.

Ora l'oracolo mostra che il sacrificio ai Dioscuri non fu sempre celebrato nel mese Carneo: se fosse stato sempre così, Mnasistrato non avrebbe sentito il bisogno di farsi rispondere dal dio di Argo, che quei di Andania, sacrificando durante le Carnee, operavano in modo grato agli dèi e non si allontana-

---

(1) A dir vero, Pausania passa così liberamente dall'ordine topografico al sistematico, si fa così pochi scrupoli di sostituire, per variare lo stile, *ἄγαλμα* a *ναός* che l'interpretazione assai probabile non è però assolutamente sicura. Sulle abitudini stilistiche di Pausania e in generale sulla sua forma letteraria cfr. un articolo che uscirà, spero, in "Hermes" XLVIII.

(2) A dir vero, i passi raccolti dal Gruppe nell'indice della sua *Griechische Mythologie* sotto Hermes e Demeter non provano nulla.

(3) Cfr. Dittenberger ad v. 11.

vano dalla consuetudine patria. Che si tratti anche nell'oracolo di un sacrificio annuale, di una festa solenne, dunque dei misteri, non par dubbio; poichè gli Andanii avranno sacrificato ai Dioscuri non una sola volta l'anno. Mnasistrato ha dunque trasportato al tempo delle Carnee la celebrazione dei misteri dei Dioscuri, ha fuso i misteri con le Carnee. La ragione non può essere, mi sembra, che una sola, la stessa che lo indusse a offrire ai Messeni la direzione del culto di Andania: la ragione economica. Non ci erano tanti danari da buttar via che potessero riuscir bene due grandi feste annuali; meglio una sola, ma splendida. Ma la grande solennità dorica, le Carnee, non si potevano abolire; bisognava fonderle con la solennità particolare di Andania. Mnasistrato si fece suggerire questo dall'oracolo (1).

Ora sarebbe metodicamente poco corretto supporre che il culto del Carneo e quello degli dèi di Andania si fossero già confusi in tempo anteriore. Sappiamo che ci fu un riformatore; non è probabile che ce ne sia stato più d'uno. Allo stato degli atti dobbiamo concludere che Apollo Carneo nel culto di Andania o forse in quello di Messene non aveva nulla di comune con gli altri dèi prima di Mnasistrato. Così non c'è più bisogno di far risalire una combinazione tanto poco abituale di divinità diverse a tempi antichissimi e di tirare magari in ballo l'invasione dorica, come sono stati costretti a fare gl'interpreti precedenti.

Chi ragioni così, può forse anche rendersi conto più chiaramente di un passo oscuro della *lex sacra*. Essa annovera tra coloro che devono prender parte al sacro banchetto (r. 96) anche *τόν τε ἱερῆ [καὶ τὰν] ἱέρεαν κ[αὶ τὰ]ν ἱέρεαν τοῦ Καρνείου.* Lo Ziehen (p. 181) crede, in parte seguendo il Sauppe, che uno dei due *καὶ τὰν ἱέρεαν* sia ripetuto per solo errore dello scarpellino, unisce *τὰν ἱέρεαν* con *τοῦ Καρνείου* e opina che tutti gli altri dèi insieme avessero un sacerdote, il Carneo la sacerdotessa sua. Quest'interpretazione mi pare inaccettabile. Chiunque legga senza preconcetti le parole *τόν τε ἱερῆ καὶ τὰν ἱέρεαν τοῦ*

(1) Ormai il *Καρνείοις* dell'oracolo è un argomento decisivo in favore dell'opinione, che l'*ἐνδέκατος μήν* dei Messeni corrispondesse al Carneo spartano, cioè al Metageitnion attico.

Καρνείου, intenderà che il genitivo dipenda parimenti da tutt'e due gli accusativi. Il passo che lo Ziehen chiama in aiuto si rivolge contro di lui. A r. 28 è detto che nella solenne processione subito dopo Mnasistrato, che tiene il primo luogo. deve venire *ὁ ἱερεὺς τῶν θεῶν οἷς τὰ μυστήρια γίνεται μετὰ τᾶς ἱερέας*. Anche qui, chi legga senz'aver prima un'opinione, dovrà intendere " con la sacerdotessa corrispondente „, vale a dire intendere anche nella seconda parte *μετὰ τᾶς ἱερέας τῶν θεῶν οἷς τὰ μυστήρια γίνεται*. Eppure il testo tradizionale dev'essere errato, sebbene epigrafisti del valore del Dittenberger sembrino non avervi trovato nulla nè di strano nè di degno di menzione. Si può sì intendere che lo *ἱερεύς* e la prima *ἱέρεα* siano i sacerdoti di tutti gli dèi venerati nei misteri, che il Carneo avesse per conto suo solo una *ἱέρεα* in più, quella che è enumerata per seconda. Ma è pur sempre strano che a *τόν τε ἱερῆ καὶ τὰν ἱέρεαν* non si aggiungesse nessun distintivo quando doveva seguire ancora una *ἱέρεα τοῦ Καρνείου*. Io penso che sia ancora il più semplice accettare la correzione che già prima dello Ziehen fu proposta dal Sauppe, solo intendere diversamente il testo che ne risulta. Qui si parla del sacerdote e della sacerdotessa del Carneo, perchè non ve ne erano altri. Mnasistrato, rinunziando al suo ufficio, si guardò bene dal far nominare un successore. L'ufficio di sacerdote nei misteri doveva essere assunto dal sacerdote e dalla sacerdotessa del Carneo messenio. Quest'era insieme un provvedimento economico e il solo che rispettasse le suscettibilità di Mnasistrato, che non voleva aver successori. È perfettamente in regola, perchè era perfettamente indifferente, che a proposito della *πομπή* si parlasse del sacerdote e della sacerdotessa degli dèi, in cui onore si celebravano i misteri; a proposito del *δεῖπνον*, del sacerdote e della sacerdotessa del Carneo. Questa interpretazione, che certo io per il primo non vorrei gabellare per sicura, mi pare a ogni modo la più probabile.

Göttingen.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

PROGRAMMA

DEL

PREMIO AVOGADRO

La R. Accademia delle scienze di Torino deliberava nell'adunanza del 23 giugno 1912, di destinare la residua somma della sottoscrizione per le onoranze ad Amedeo Avogadro come premio ad un lavoro di chimica, avente relazione colla legge di Avogadro, che venga pubblicato nel triennio 1912-14, e di aprire in proposito uno speciale concorso.

Le norme del concorso sono le seguenti:

È assegnato un premio intitolato ad Amedeo Avogadro di L. **1500** (convertibile a scelta in una medaglia d'oro) a quel concorrente che nel triennio 1912-14 abbia pubblicato il migliore lavoro di chimica, d'indole sperimentale o storico-critica, avente relazione colla legge di Avogadro.

I lavori presentati non si restituiscono e dovranno essere scritti in una delle quattro seguenti lingue: italiana, francese, tedesca. inglese ed inviati in almeno tre copie a **stampa** entro il 31 dicembre 1914.

Il concorso scadrà il 31 dicembre 1914 ed il premio sarà conferito entro l'anno 1915.

Nessuno dei membri nazionali residenti o non residenti della R. Accademia di Torino potrà concorrere al premio.

Il Presidente
Paolo Boselli.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 1° Dicembre 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, D'Ovidio, Peano, Jadanza, Guareschi, Fileti, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari, e Segre Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Viene letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente comunica che il Sindaco di Torino ha gentilmente donato all'Accademia, per il medagliere sabaudo che questa possiede, quattro esemplari delle medaglie rappresentanti le LL. MM. i Re Umberto e Vittorio Emanuele III, e le Regine Margherita ed Elena.

Il Socio Jadanza offre in dono la 3ª edizione delle sue *Tavole tacheometriche centesimali*; ed il Socio Fusari il suo *Compendio di Anatomia umana*, in due volumi.

Il Socio Mattirolo presenta pure in dono una sua Nota *Sull'endemismo dell' "Isoetes Malinvernianum" di Cesati e De Notaris*, e parecchi scritti di Storia della scienza inviati in omaggio dall'Autore Prof. G. B. De Toni. E similmente il Socio Parona offre a nome del Prof. F. Sacco varie pubblicazioni di questo scienziato, di argomento geologico.

Per la stampa negli *Atti* vengono presentate le seguenti Note:

G. A. Favaro, *Sulla flessione del piccolo meridiano Bamberg del R. Osservatorio astronomico di Torino*, dal Socio Jadanza;

I. Guareschi, *Una nuova causa di errore nella determinazione dei pesi atomici*;

M. Pieri, *Sui sistemi di ∞^1 superficie*, dal Socio Peano;

A. Pensa, *Sopra alcuni operatori differenziali omografici*, dallo stesso Socio Peano;

G. Sannia, *Equazione differenziale delle congruenze* W, dal Socio Segre.

LETTURE

Sulla flessione del piccolo meridiano Bamberg del R. Osservatorio astronomico di Torino.

Nota di G. A. FAVARO.

Viene adoperato, all'Osservatorio di Torino, quale cerchio meridiano per osservazioni di distanze zenitali, uno strumento di passaggi di Bamberg, invertibile, a cannocchiale spezzato, provvisto di un cerchio zenitale che viene letto con due microscopi micrometrici opposti (1).

Di questo istrumento il Ch.^{mo} Prof. Boccardi si è servito per la riosservazione delle declinazioni delle stelle del suo catalogo, e dovendo passare alla riduzione di queste osservazioni, ha dovuto pensare all'influenza che può esercitare su esse la flessione. Il gradito incarico di fare lo studio relativo alla flessione è toccato a me, che ben volentieri lo assunsi, tanto più perchè speravo che mi fosse assegnato quell'istrumento per osservare le declinazioni delle stelle di riferimento per il catalogo fotografico di Catania.

Ebbi dunque in consegna il piccolo cerchio meridiano Bamberg poco tempo dopo il mio arrivo a Torino, ma sgraziatamente potei adoperarlo ben poco, premendo al Direttore di trasportarlo al nuovo Osservatorio di Pino torinese, e dovetti così rinunciare anche ad uno studio accurato della divisione del cerchio che avevo in animo di fare.

(1) V. descrizione e figura nella Memoria del Prof. A. Abetti, *Il piccolo meridiano di Arcetri*, fasc. 7°, Firenze, 1908, e alcuni cenni descrittivi nella Memoria del Prof. G. Boccardi, *Sulla latitudine del R. Osservatorio di Torino*, " Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino ", Ser. II, T. LXI, 1911.

Non credo inopportuno richiamare qui alcune nozioni sulla flessione astronomica che mi permettono di fare alcune considerazioni relative al mio caso.

È noto che i due tubi che costituiscono un cannocchiale diritto si inflettono sotto l'azione della gravità, e si inflettono tanto più quanto più le estremità (oculare ed obiettivo) distano dall'asse di rotazione. Ha però luogo *flessione astronomica* solo quando l'abbassamento dell'oculare differisce da quello dell'obiettivo, nel quale caso soltanto viene modificata la direzione della linea che unisce il centro dell'oculare con quello dell'obiettivo. Nel cannocchiale spezzato, in luogo del tubo oculare, esiste nella direzione del tubo obiettivo un cilindro compatto, il quale serve bene a controbilanciare il tubo obiettivo ma non ad eliminare l'effetto della flessione. E se nei cannocchiali diritti bene costruiti, con i due tubi dello stesso metallo omogeneo, di forma la più perfetta possibile, risulta quasi trascurabile la flessione, non lo è più affatto negli strumenti a cannocchiale spezzato.

Dall'azione della gravità è pure alterata la forma del cerchio verticale, e con essa sono alterate le distanze dei tratti della graduazione. L'insieme della flessione del cerchio e del tubo del cannocchiale costituisce la *flessione totale* od *astronomica*.

Il fenomeno non è però così semplice nè così facile ad analizzarsi, come si presenterebbe a prima vista, poichè alla flessione (malgrado tutte le precauzioni) si uniscono i possibili spostamenti del vetro dell'obiettivo e del micrometro, la variazione di curvatura dei fili di declinazione sotto l'influenza dell'umidità dell'aria, gli errori sistematici provenienti da irradiazioni delle lampadine adoperate per l'illuminazione (1); ed essendo

---

(1) Vedi M. Hamy, *Notice sommaire sur les travaux scientifiques*, Paris, 1902 e F. Boquet, *Les Observ. méridiennes*, II, Paris, 1909. Possono avere sensibile influenza le ineguaglianze di temperatura della stanza d'osservazione, tanto che per determinazioni di flessione col metodo dei due collimatori sono consigliate le giornate nuvolose, piovose, senza vento, con piccole variazioni di temperatura. — Il Bauschinger trovò che una piccola variazione di temperatura produce una flessione che dura parecchi minuti; che avvicinando la mano al tubo, senza toccarlo, si produce una flessione di 0",3: la presenza dell'osservatore si manifesta dopo 10 minuti con una flessione di 0",2: una differenza di 1 grado tra le due faccie del tubo producono una flessione orizzontale di 0",71: una piccola lampada, posta ad un metro

quindi impossibile determinare isolatamente l'effetto della flessione, si deve pensare a tenerne conto soltanto in quei casi nei quali non è possibile altrimenti eliminarne o attenuarne grandemente l'influenza.

Così, ad esempio, come consigliò il Bessel, può esser eliminato l'effetto della flessione combinando le osservazioni opportunamente, osservando, cioè, gli oggetti direttamente e per riflessione nelle due posizioni diretta ed inversa dell'istrumento: oppure, come fecero Repsold ed Hansen, osservando con un cannocchiale costruito in modo da poter sostituire l'oculare all'obiettivo.

Nel caso nostro però, cioè d'un istrumento a cannocchiale spezzato e per osservazioni di declinazione di stelle alquanto lontane dallo zenit, non è possibile prescindere dalla flessione, di cui quindi deve essere determinato l'ammontare per correggere con essa i dati d'osservazione.

***

La correzione risultante dalla flessione si esprime con una funzione periodica della distanza zenitale, che nella forma più generale, sviluppata in serie, è espressa dalla:

$$f_z = f_1 \operatorname{sen} z + f_2 \cos z + f_3 \operatorname{sen} 2z + f_4 \cos 2z + \ldots$$

ma che, secondo l'opinione della maggior parte degli astronomi (1), si può in quasi tutti i casi ridurre alla semplice forma

$$f_z = f_1 \operatorname{sen} z + f_2 \cos z$$

dal cannocchiale, determina una flessione di 1'',2 che dura più di 5 minuti. — Il Boquet, da uno studio fatto per cercare la legge di variazione della flessione con la temperatura, usufruendo di 1400 osservazioni, ha potuto ricavare che la variazione della flessione è proporzionale a quella della temperatura, e che per 10° di variazione di temperatura la flessione varia di 0'',1.

(1) Cfr. Villarceau, " Comptes rend. de l'Ac. des Sciences „ (Paris), XCIII.

dove f_1 rappresenta la *flessione orizzontale* e f_2 la *flessione verticale*.

Non riescirà difficile scorgere che anche f_2, la quale sta ad attestare principalmente un difetto di coincidenza dei centri di gravità dell'obiettivo e dell'oculare con l'asse di figura del tubo, non può essere che una quantità piccolissima. E siccome poi nella determinazione della flessione ci si trova per lo più in presenza di molteplici cause di errori accidentali, tanto che è stato avvertito (1) che fra vari valori ottenuti si ebbero molto grandi divergenze prima che gli osservatori si fossero famigliarizzati con le precauzioni da prendere, e d'altra parte a me non fu possibile prolungare più oltre le osservazioni per ottenere un miglior valore della flessione, così ritengo di poter qui senz'altro considerare questo elemento come proporzionale al seno della distanza zenitale, vale a dire, ritenere per f_z la espressione

$$f_z = f \operatorname{sen} z.$$

Con ciò si ammette che la flessione sia nulla per stelle allo zenit e che raggiunga il suo massimo valore per l'astro all'orizzonte (2).

La determinazione di questo coefficiente, o *flessione orizzontale*, può venire eseguita con parecchi metodi. Accennerò qui soltanto al metodo classico [metodo di Bessel] dei due collimatori, disposti nel piano orizzontale passante per l'asse di rotazione del cannocchiale, col quale metodo si hanno risultati indipendenti dagli errori di divisione del cerchio, ma affetti dalle deformazioni normali dovute alla *flessione del cerchio* e da altre

---

(1) Cfr. BOQUET, vol. citato, pag. 210 e OLTRAMARE et LANCELIN, *Détermination des distances polaires absolues et recherche de la latitude de l'Observ. de Paris (en 1897)*, pag. 10.

(2) Vedi su questo argomento A. NOBILE, *Il cerchio meridiano Reichembach-Heurtraux del R. Oss. di Capodimonte*, " Acc. Pontaniana ,, Napoli, 1888, e *Risultati delle Osservazioni meridiane della seconda metà del 1890*, Napoli, 1891. — V. risoluzione diretta del problema della flessione con la teoria dell'elasticità esposta da V. BAGGI nelle pubblicazioni: *Sulla flessione dei cannocchiali nella misura delle distanze zenitali*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ,, XXX, 1895, e nelle " Astronom. Nachrichten ,, vol. 137, n. 3285.

deformazioni anormali dovute alla ineguale distribuzione della temperatura. Furono fatte determinazioni di flessione con l'osservazione di stelle diretta e per riflessione [Périgaud] e altre con apparecchi ausiliari [Lœwy, Porro, Secchi, Houzeau, ecc.] e misurando separatamente la flessione del cerchio e quella del tubo [Périgaud].

Ogni metodo però è sgraziatamente destinato a presentare o difficoltà o inconvenienti, e sarebbe quindi opportuno eseguire la determinazione della flessione con quanti più metodi è possibile per avere di essa un valore sufficientemente esatto.

La mancanza di mezzi e di tempo non mi permise di usare di alcuno dei metodi suaccennati e dovetti quindi limitarmi a ricavare la flessione orizzontale da osservazioni di stelle fondamentali di note declinazioni, che culminassero a distanze zenitali non troppo vicine a 90° per evitare le incertezze della rifrazione.

Teoricamente le osservazioni meridiane di due stelle — o l'una zenitale per la quale è nulla la flessione, e l'altra vicina all'orizzonte per la quale è notevole il valore della flessione, oppure ambedue vicine all'orizzonte, ma l'una boreale, l'altra australe — possono dare la flessione orizzontale.

Se infatti indichiamo con E il punto equatoriale istrumentale, sarà

$$E_z = E \pm f \operatorname{sen} z$$

(ove il segno dipende dal senso della graduazione del cerchio), dalla quale si scorge che la stella zenitale dà il valore del punto equatoriale E, col quale poi si ricava dall'osservazione dell'altra stella il valore di f: o che, dal confronto di una stella boreale con una australe avendo valori della flessione di segno opposto rispetto ad un senso determinato degli archi, si ha f dalla espressione

$$E_{zS} \mp E_{zN} = \pm f (\operatorname{sen} zS + \operatorname{sen} zN).$$

***

Trascrivo nella tabella I il programma delle osservazioni contenente le posizioni approssimate delle stelle (α e δ per 1920,0) e le loro distanze zenitali.

Furono fatte le osservazioni con cerchio ad E e ad W, leggendo, come al solito, i due microscopi micrometrici per evitare l'errore di eccentricità del cerchio; mi parve poi sufficiente, per evitare od attenuare l'errore di graduazione del cerchio, (tenuto conto che le stelle erano distribuite fra $z = 0°$ e $z = 75°$ a Nord e a Sud) di far ruotare di 90° il cerchio meridiano dopo la prima serie costituita dalle prime quattro serate.

Avverto qui pure che in queste quattro prime serate ho seguito un programma di stelle esclusivamente a Sud o a Nord; nelle tre sere successive ho seguito programma promiscuo di stelle a Nord e a Sud con qualche zenitale intermedia per controllo dei valori del punto equatoriale.

La temperatura venne data da un termometro posto nell'interno della cupola presso la fenditura meridiana e la pressione venne data dal barometro collocato nella sottostante sala meridiana, per cui fu tenuto conto della differenza d'altezza.

Per le puntate, le stelle, piuttosto grosse, furono bisecate col filo mobile lasciato sempre nella stessa posizione.

Ho cercato nella puntata di ogni stella, quanto fu possibile, di condurre al centro la livella di spia del supporto dei microscopi micrometrici per evitare l'influenza, benchè piccola, della incertezza nel valore di una parte.

Ebbi cura infine che le puntate approssimate delle singole stelle fossero fatte press'a poco ad eguale distanza di tempo dal passaggio al meridiano, affinchè per tutte si stabilisse in egual modo l'equilibrio meccanico del cannocchiale (1).

Aggiungerò qui che la sera del 10 settembre 1912 ho determinato le costanti istrumentali, prima con l'inversione dell'istrumento nell'osservazione del passaggio al meridiano di *61 g Sagittae* e di *k Capricorni*, poi senza inversione con cerchio ad E osservando il passaggio di π *Capricorni*, *73 Draconis* e *α Cygni*; ottenni piccoli valori per inclinazione, azimut e collimazione:

$$i = + 0^s{,}10 \quad a = + 0^s{,}01 \quad c = + 0^s{,}08.$$

(1) Questa mia annotazione ho poi vista confermata leggendo che il Bauschinger stima che in due o tre minuti la flessione può oscillare di 0″,1 a 0″,2 e che quindi si deve appunto aver di mira anche il tempo necessario al cannocchiale per mettersi in posizione di equilibrio.

TAB. I. — *Programma delle osservazioni.*

	*	Gr.	α 1912.0	δ 1912.0	*Z* vera
			h m s	° ′ ″	° ′ ″
1	ζ Sagittari	2.7	18.57. 1	— 30. 0.24	75. 4.40 S
2	τ Sagittari	3.5	19. 1.27	— 27.48. 0	72.52.14 S
3	λ Aquilae	3.2	19. 1.35	— 5. 0.55	50. 5. 2 S
4	25 H. Cam.	5.1	7.12.59	+ 82.34.50	52.21. 0 N
5	θ Lyrae	4.3	19.13.19	+ 37.58.35	7. 5.23 S
6	τ Draconis	4.5	19.17.15	+ 73.11.33	28. 7.37 N
7	*b* Aquilae	5.3	19.20.46	+ 11.45.19	33.18.42 S
8	Gr. 1308	5.8	7.21.44	+ 68.38.48	66.17.11 N
9	*a* Vulpeculae	4.6	19.25. 3	+ 24.29.10	20.34.50 S
10	ι Cygni	3.9	19.27.29	+ 51.32.31	6.28.35 N
11	h^2 Sagittari	4.6	19.31.21	— 25. 4.43	70. 8.54 S
12	θ Cygni	4.5	19.34. 5	+ 50. 1. 1	4.57. 5 N
13	δ Cygni	2.8	19.42.13	+ 44.54.56	0. 9. 0 S
14	δ Sagittae	3.8	19.43.28	+ 18.19. 0	26.45. 0 S
15	Gr. 1374	5.5	7.49.41	+ 74. 9.16	60.46.45 N
16	β Aquilae	3.7	19.50.59	+ 6.11.11	38.52.51 S
17	53 Camelop.	6.3	7.54.12	+ 60.33.58	74.22. 0 N
18	*c* Sagittari	4.6	19.57.15	— 27.57.19	73. 1.28 S
19	θ Aquilae	3.1	20. 6.46	— 1. 4.59	46. 9. 1 S
20	*g* Camelop.	5.8	8. 8.31	+ 76. 1.37	58.54.24 N
21	α^2 Capric.	3.6	20.13.10	— 12.49. 6	57.53.10 S
22	π Capric.	5.2	20.22.17	— 18.30. 3	63.34. 7 S
23	*o* Urs. Maj.	3.3	8.22.58	+ 61. 0.48	73.55.10 N
24	θ Cephei	4.1	20.28. 6	+ 62.41.53	17.37.59 N
25	73 Draconis	5.3	20.32.41	+ 74.39.11	29.35.17 N
26	α Cygni	1.3	20.38.26	+ 44.57.55	0. 6. 0 S
27	ε Cygni	2.4	20.42.39	+ 33.38.24	11.25.31 S
28	η Cephei	3.5	20.43.30	+ 61.29.48	16.25.55 N
29	76 Draconis	6.0	20.49. 1	+ 82.12.22	37. 8.27 N
30	ν Cygni	3.9	20.53.54	+ 40.49.40	4.14.15 S
31	ρ Urs. Maj.	4.9	8.54.38	+ 67.58.24	66.57.36 N
32	59 *f′* Cygni	4.8	20.56.50	+ 47.10.37	2. 6.45 N
33	ξ Cygni	3.9	21. 1.44	+ 43.34.35	1.29.19 S
34	σ^2 Urs. Maj.	4.9	9. 2.40	+ 67.29.34	67.26.28 N
35	Br. 2777	6.0	21. 7.17	+ 77.46.11	32.42.16 N
36	3 Pisc. Austr.	5.6	21. 8. 4	— 27.58.44	73. 2.47 S
37	ε Micr. = = 4 Pis. Au.	4.8	21.12.36	— 32.32.27	77.36.29 S
38	α Cephei	2.5	21.16.29	+ 62.12.45	17. 8.51 N

Per quanto riguarda le riduzioni, dirò prima di tutto che alle letture dei microscopi micrometrici ho applicato le correzioni per il passo (*run*), e precisamente alla media delle due letture fatte ai due tratti comprendenti la *linea di fede* ho applicato la correzione calcolata colla formola:

$$\Delta\left(\frac{L_1+L_2}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{L_1+L_2}{2}\frac{1}{240}\right)(L_1-L_2).$$

Notisi che, per correzione alla detta media, l'Albrecht a pag. 49 delle sue *Formeln und Hilfstafeln für geogr. Ortsbestimmungen*, 1908, dà un'espressione equivalente alla seguente

$$\left(\frac{L_1+L_2}{2}-\frac{1}{2}F\right)\frac{L_1-L_2}{F-(L_1-L_2)}$$

(dove F è il numero dei secondi micrometrici compresi fra due divisioni successive del cerchio e che nel nostro caso è eguale a 240″), la quale espressione sarebbe veramente più rigorosa; però quella, alla quale sono pervenuto con considerazioni analoghe a quelle che condussero l'Abetti (1) alla correzione per la somma delle due letture, dà valori sensibilmente differenti solamente quando la differenza L_1-L_2 superi i 5″ (2), ed è di più facile uso.

Per abbreviare poi il lavoro ho compilato una tavola a doppia entrata, che, per l'ammontare della semisomma $^1/_2(L_1+L_2)$ compreso fra 0″ e 240″ (comprendendo appunto 240″ due tratti successivi del cerchio del Bamberg) e per valori di L_1-L_2 compresi fra 0″ e 10″ (e quindi per i decimali) dà direttamente la correzione $\Delta\,^1/_2(L_1+L_2)$ (3).

---

(1) Pag. 35, fasc. 7 delle Pubblicaz. d'Arcetri.

(2) Per $L_1-L_2=2''$ si ha (nel nostro caso in cui $F=240''$) la differenza massima di 0″,01; per $L_1-L_3=3''$ si ha al massimo la discordanza di 0″,02; per $L_1-L_2=10''$ la discordanza massima è di 0″,22.

(3) Riporto qui accanto la tabella, potendo essa servire anche per cerchi di graduazione diversa: basta infatti sostituire alle colonne estreme contenenti $^1/_2(L_1+L_2)$ i numeri che si ottengono a partire da 0″,0 con progressione aritmetica, adottando per differenza il quoziente della divisione per 100 del numero F dei secondi micrometrici contenuti in due tratti successivi del cerchio.

TABELLA che da le correzioni, per il passo del micrometro (run), alla media delle due letture fatte a due tratti successivi del cerchio. — In questo caso è $F = 240''$, e la differenza della progressione geometrica è $2''.4$.

$L_1 - L_2$ / $\frac{1}{2}(L_1+L_2)$	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″	$L_1 - L_2$ / $\frac{1}{2}(L_1+L_2)$
0″.0	0″.50	1″.00	1″.50	2″.00	2″.50	3″.00	3″.50	4″.00	4″.50	240″.0
2.4	.49	0.98	1.47	1.96	2.45	2.94	3.43	3.92	4.41	237.6
4.8	.48	.96	1.44	1.92	2.40	2.88	3.36	3.84	4.32	235.2
7.2	.47	.94	1.41	1.88	2.35	2.82	3.29	3.76	4.23	232.8
9.6	.46	.92	1.38	1.84	2.30	2.76	3.22	3.68	4.14	230.4
12.0	.45	.90	1.35	1.80	2.25	2.70	3.15	3.60	4.05	228.0
14.4	.44	.88	1.32	1.76	2.20	2.64	3.08	3.52	3.96	225.6
16.8	.43	.86	1.29	1.72	2.15	2.58	3.01	3.44	3.87	223.2
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
108.0	.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	132.0
110.4	.04	.08	.12	.16	.20	.24	.28	.32	.36	129.6
112.8	.03	.06	.09	.12	.15	.18	.21	.24	.27	127.2
115.2	.02	.04	.06	.08	.10	.12	.14	.16	.18	124.8
117.6	.01	.02	.03	.04	0.05	.06	.07	.08	.09	122.4
120.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	120.0

NB. Il segno è *eguale* a quello di $L_1 - L_2$ per $\frac{L_1+L_2}{2} < 120''$ ed è *opposto* per $\frac{L_1+L_2}{2} > 120''$.

Ho riferito la posizione della livella del supporto dei micrometri al suo tratto centrale che corrisponde alla divisione 30, e quindi risultano correzioni negative soltanto per le posizioni della livella a destra di quel tratto; per valore di una parte della livella ho adottato 2",10.

Per il calcolo della rifrazione ho usato le tavole di Albrecht, secondo la nota formola:

$$\log R = \log \alpha \operatorname{tg} z + \log B + \log T + \lambda \log \gamma$$

ove non entra il fattore A perchè solo una stella raggiunge la distanza zenitale 77° e del fattore λ poi ho tenuto conto per le stelle di z superiore a 45°; anzi noto qui che soltanto per $z > 60°$ si ebbe influenza nel centesimo di secondo d'arco trattandosi di piccoli valori di $\log \gamma$ corrispondenti a piccole differenze di temperatura da quella normale (9°,3) per cui $\log \gamma = 0$. Per la pressione, è trascurabile la riduzione alla gravità normale.

Nelle tabelle III ... IX sono dati per ogni stella — dopo il suo numero progressivo del programma e la sua posizione rispetto allo zenit (S = Sud, N = Nord) e rispetto al polo al suo passaggio al meridiano (s = culminaz. superiore, i = culmin. inferiore) — la media delle letture corrette dei due microscopi micrometrici, la correzione per lo spostamento del supporto, la correzione di rifrazione, la declinazione apparente e infine il punto equatoriale. Questo è stato ottenuto colle espressioni:

$$\frac{L_1 + L_2}{2} + l + r \pm \delta \qquad \text{per le stelle culminanti superiorm.}$$

$$\frac{L_1 + L_2}{2} + l + r \pm (180° - \delta) \qquad \text{„ „ inferiorm.}$$

ove, dato il senso della graduazione del cerchio, vale il segno + per cerchio ad W e il segno — per cerchio ad E.

Con i valori E_n dell'ultima colonna sono state fatte, per ogni serata, le equazioni di condizione del tipo

$$E_n = E \pm f \operatorname{sen} z_n$$

dove, nel nostro caso, vale il segno + per cerchio ad E e stella

a S e per cerchio ad W e stella a N, e vale il segno — per cerchio ad E e stella a N e per cerchio ad W e stella a S.

Dalle equazioni di condizione furono tratte, col metodo dei minimi quadrati, le equazioni normali che danno i valori più probabili del punto equatoriale E e della flessione f. Con gli scarti poi dei singoli valori E_n furono ricavati gli errori probabili sia di E che di f con le note formole:

$$r_E = 0{,}674 \sqrt{\frac{[vv]}{p_E(m-2}} \qquad r_f = 0{,}674 \sqrt{\frac{[vv]}{p_f(m-2)}} .$$

Infine dai valori di f di ogni sera è stato tratto il più probabile valore di f dando ai singoli valori pesi inversamente proporzionali ai quadrati degli errori medi, e, dando poi gli stessi pesi agli scostamenti, è stato calcolato l'errore probabile di f con la formola

$$r_f = 0{,}674 \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} .$$

Tab. III. — **5 Settembre 1912** — Cerchio ad E.

a $18^h,9$ $t = 22^\circ.5$ $p = 735^{mm}.88$ [21°.6] a $20^h,4$ $t = 21^\circ.2$ $p = 735^{mm}.91$ [21°.2] a $21^h,0$ $t = 20^\circ.5$ $p = 735^{mm}.69$ [21°.1]

*		$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$	l	r	δ	$E_{,,}$	ANNOTAZIONI
		° ′ ″	″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
1	S ; s	350.39.10.28	—1.05	—3.17.05	—30. 0.31.2	20.36.23.4	Cielo sereno: orizzonte fosco:
3	„ „	15.36.37.82	—3.04	—1. 3.95	— 5. 0.54.4	25.2	immagini irrequiete.
5	„ „	58.35.15.14	—0.63	— 6.67	+37.58.44.6	23.2	r = tranquillità dell'immagine.
7	„ „	32.22.26.89	—1.15	— 35.23	+11.45.25.8	24.7	s = nitidezza „ „
9	„ „	45. 6. 3.43	—0.21	— 20.14	+24.29.18.7	24.4	1 = ottima; 2, 3, 4 = pessima.
11	„ „	355.34.10.72	—1.47	—2.27.04	—25. 4.45.8	18.0	
14	„ „	38.55.52.50	+0.52	— 27.06	+18.19. 8.0	18.0	
16	„ „	26.48.22.52	—1.47	— 43.28	+ 6.11.16.9	20.9	$r = 3$ $s = 2$
18	„ „	352.41.52.30	+2.10	—2.53.24	—27.57.20.0	21.2	$r = 3$ $s = 2$
19	„ „	19.32.23.92	+0.21	— 55.88	— 1. 4.53.4	21.6	$r = 1$ $s = 2$
21	„ „	7.48.44.76	—0.73	—1.25.37	—12.49. 1.7	20.4	$r = 2$ $s = 2$
22	„ „	2. 8. 9.19	+0.21	—1.47.58	—18.29.59.3	21.1	$r = 2$ $s = 2$
26	„ „	65.34.23.90	+0.84	— 0.09	+44.58. 8.5	16.1	$r = 2$ $s = 1$
27	„ „	54.15. 7.23	—3.04	— 10.87	+33.38.37.4	15.9	$r = 2$ $s = 1$
30	„ „	61.26.14.62	—1.47	— 4.00	+40.49.53.5	15.7	$r = 1$ $s = 2$
33	„ „	64.11.11.14	—0.10	— 1.40	+43.34.48.1	21.5	$r = 1$ $s = 2$

Equazioni normali: $91''.30 = 16.00\,E + 8.49 f$ $54''.57 = 8.49\,E + 6.44 f$

dalle quali: $E = 20^\circ\,36'\,19''.0$; errore prob. $\pm 1''.0$ $f = + 3''.14$; errore prob. $\pm 1''.48$.

Tab. IV. — **7 Settembre 1912** — Cerchio ad W.

a $18^h,7$ $t = 17^\circ.2$ $p = 740^{mm}.22$ [21°.2] a $20^h,6$ $t = 15^\circ.9$ $p = 741^{mm}.28$ [20°.4] a $21^h,4$ $t = 14^\circ.0$ $p = 741^{mm}.54$ [19°.0]

*		$\frac{1}{2}(L_1+L_2)$	l	r	δ	E_n	ANNOTAZIONI
3	S; s	115°.44′.22″.25	−0″.16	+1′. 5″.67	− 5°. 0′.54″.3	110°.44′.33″.5	$r=2$ $s=1$ Cielo sereno.
5	„ „	72.45.40.62	−1.94	+ 6.86	+37.58.45.9	31.4	$r=2$ $s=2$
7	„ „	98.58.33.15	−1.42	+ 36.19	+11.45.26.0	33.9	
11	„ „	135.46.39.91	+4.03	+2.31.05	−25. 4.45.9	29.1	$r=3$ $s=2$
12	N; „	60.43.18.22	+5.71	− 5.19	+50. 1.13.1	31.8	
14	S; „	92.24.50.37	+7.48	+ 27.80	+18.19. 8.3	34.0	
16	„ „	104.32.22.70	+9.99	+ 44.48	+ 6.11.17.1	34.3	
18	„ „	138.38.52.76	+2.25	+2.58.10	−27.57.20.2	32.9	
19	„ „	111.48.26.47	+4.55	+ 57.43	− 1. 4.53.3	35.2	
21	„ „	123.32. 7.88	+0.68	+1.27.76	−12.49. 1.7	34.6	
22	„ „	129.12.43.66	−3.62	+1.50.58	−18.29.59.3	31.3	
26	„ „	65.46.29.25	−2.15	+ 0.10	+44.58. 9.1	36.3	
27	„ „	77. 5.42.05	+1.83	+ 11.46	+33.38.37.8	33.1	
30	„ „	69.54.33.26	+1.83	+ 4.11	+40.49.54.0	33.2	
33	„ „	67. 9.43.58	+0.26	+ 1.44	+43.34.48.6	33.9	
37	„ „	143.12.46.88	+0.26	+4. 5.96	−32.32.21.6	31.5	$r=3$ $s=3$

Equazioni normali: $66''.00 = 16.00\,E - 80.7f$ $\quad -30''.79 = -8.07\,E + 6.34f$

dalle quali: $E = 110^\circ 44' 33''.7$; err. prob. $\pm$ 0.5 $\quad f = +1''.08$; errore prob. $\pm$ 0.78.

TAB. V. — **8 Settembre 1912** — Cerchio ad W.

a $18^h,6$ $t = 18^o.0$ $p = 740^{mm}.75$ [$20^o.9$] a $20^h,2$ $t = 16^o.1$ $p = 740^{mm}.65$ [$20^o.7$] a $21^h,3$ $t = 14^o.8$ $p = 740^{mm}.59$ [$19^o.9$]

*		$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$	l	r	δ	E_n	*ANNOTAZIONI*
4	N ; i	13°.20′.41″.71	+1″.31	−1′.10″.86	+82°.34′.52″.3	110°.44′.39″.9	r = 3 s = 2. Cielo sereno: calma.
6	N ; s	37.33.21.36	−3.20	−0.29.30	+73.11.45.2	34.1	r = 2-3 s = 2
8	N ; i	359.25.26.44	−2.46	−2. 3.94	+68.38.41.3	38.7	r = 3 s = 2-3
10	N ; s	59.12. 0.84	−0.90	− 6.23	+51.32.43.3	37.0	r = 2-3 s = 1
12	N ; s	60.43.29.11	−3.30	− 4.76	+50. 1.13.3	34.3	
13	S ; s	65.49.30.63	−0.16	+ 0.15	+44.55. 8.2	38.8	r = 2-3 s = 2
15	N ; i	4.55.25.47	−2.04	−1.37.93	+74. 9. 7.5	38.0	r = 2-3 s = 2
17	N ; i	351.21.42.94	+1.41	−3.13.30	+60.33.52.2	38.8	r = 2-3 s = 3
20	N ; i	6.47.40.10	−3.21	−1.31.04	+76. 1.28.2	37.6	r = 2-3 s = 2-3
23	N ; i	351.48.29.70	−0.27	−3. 8.00	+61. 0.41.7	39.7	r = 3 s = 2-3
24	N ; s	48. 2.47.40	−4.35	− 17.52	+62.42. 6.8	32.3	r = 2 s = 2
25	N ; s	36. 5.36.50	+4.76	− 31.31	+74.39.24.7	34.6	r = 2 s = 2
26	S ; s	65.46.25.63	+0.57	+ 0.10	+44.58. 9.3	35.6	
28	N ; s	49.14.47.38	+2.25	− 16.28	+61.30. 2.6	35.9	
29	N ; s	28.32.41.95	−2.67	− 41.80	+82.12.35.0	32.5	r = 2 r = 2
31	N ; i	358.45. 3.02	+0.47	−2. 8.92	+67.58.16.6	38.0	r = 2 s = 2
33	S ; s	67. 9.46.06	+0.57	+ 1.43	+43.34.48.9	37.0	r = 2 s = 2
35	N ; s	32.58.48.12	−1,00	− 35.72	+77.46.23.9	35.3	r = 1 s = 2
38	N ; s	48.31.52.52	+1.41	− 17.07	+62.12.58.9	35.8	

Equazioni normali : $85''.90 = 19.00\ E + 9.44\ f$ $49''.41 = 9.44\ E + 7.06\ f$

dalle quali : $E = 110^o\ 44'\ 35''.1$; errore prob. $\pm\ 0''.5$ $f = +\ 2''.84$; errore prob. $\pm\ 0''.93$.

TAB. VI. — **9 Settembre 1912** Cerchio ad E.

a $19^h,1$ $t = 17^\circ.8$ $p = 736^{mm}.17$ [$21^\circ.0$] a $20^h,2$ $t = 16^\circ.9$ $p = 736^{mm}.14$ [$20^\circ.9$] a $21^h,3$ $t = 16^\circ.1$ $p = 735^{mm}.74$ [$20^\circ.4$]

*		$\frac{1}{2}(L_1+L_2)$	l	r	δ	E_n	*ANNOTAZIONI*
4	N ; *i*	118°. 0′.16″.71	+1″.47	+1′.10″.40	+82°.34′.52″.1	20°.36′.20″.7	$r=2$ $s=1$. Sereno con nubi: nebbia all'orizz.
6	N ; *s*	93.47.40.04	−0.73	+ 29.09	+73.11.45.3	23.1	$r=2$ $s=2$
8	N ; *i*	131.55.34.76	−0.42	+2. 3.08	+68.38.41.1	18.5	$r=2$ $s=1$
10	N ; *s*	72. 9. 0.18	+0.42	+ 6.20	+51.32.43.4	23.4	
12	N ; *s*	70.37.27.63	+3.78	+ 4.72	+50. 1.13.4	22.7	$r=2$ $s=2$
13	S ; *s*	65.31.28.93	+1.57	− 0.14	+44.55. 8.3	22.1	$r=1\text{-}2$ $s=1$
15	N ; *i*	126.25.32.70	+1.78	+1.37.05	+74. 9. 7.3	18.8	
17	N ; *i*	139.59.16.15	−2.10	+3.11.46	+60.33.51.8	17.3	$r=2$ $s=2\text{-}3$
20	N ; *i*	124.33.22.25	−2.20	+1.30.22	+76. 1.27.8	18.1	
23	N ; *i*	139.32.29.70	+1.05	+3. 6.30	+61. 0.41.5	18.6	$r=2$ $s=2$
24	N ; *s*	83.18. 7.42	+1.78	+ 17.36	+62.42. 7.0	19.6	
25	N ; *s*	95.15.11.05	+1.26	+ 31.00	+74.39.24.9	18.4	
26	S ; *s*	65.34.29.33	−1.15	− 0.10	+44.58. 9.5	18.6	$r=2$ $s=1$
28	N ; *s*	82. 6. 5.36	+0.42	+ 16.12	+61.30. 2.8	19.1	
29	N ; *s*	102.48.16.28	+0.94	+ 41.38	+82.12.35.3	23.3	$r=2$ $s=2$
31	N ; *i*	132.35.54.46	+0.84	+2. 7.60	+67.58.16.3	19.2	$r=2$ $s=1$
33	S ; *s*	64.11. 9.32	+0.10	− 1.42	+43.34.49.1	18.9	$r=2$ $s=2$
35	N ; *s*	98.22. 9.41	+0.84	+ 35.12	+77.46.24.2	21.2	
38	N ; *s*	82.49. 4.80	+0.73	+ 16.89	+62.12.59.2	23.2	

Equazioni normali: $42''.8 = 19.00\,E - 9.44\,f$ $\quad -15''.23 = -9.44\,E + 7.06\,f$

dalle quali: $E = 20^\circ\,36'\,21''.5$; errore prob. $\pm\,0''.5$ $\quad f = 2''.53$; errore prob. $\pm\,0''.84$.

Tab. VII. — **14 Settembre 1912** — Cerchio ad E.

a $20^h,1$ $t = 14°.0$ $p = 739^{mm}.47$ [18°.5] a $21^h.3$ $t = 13°.5$ $p = 739^{mm}.47$ [18°.3]

*		$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$	l	r	δ	E_n	*ANNOTAZIONI*
21	S ; *s*	187°.49′.55″.60	+1″.05	−1′.27″.86	−12°.49′. 1″.8	200°.37′.30″.6	$r = 2$ $s = 2$. Sereno: calma.
23	N ; *i*	139.33.37.91	+0.21	+3. 8.88	+61. 0.40.3	27.3	
26	S ; *s*	245.35.43.60	+1.05	— 0.10	+44.58.10.6	33.9	
27	S , *s*	234.16.24.91	—2.83	— 11.19	+33.38.39.1	31.8	
29	N ; *s*	282.49.24.34	+2.00	+ 41.96	+82.12.36.7	31.6	$r = 2$ $s = 2$
32	N ; *s*	247.48.23.19	+1.26	+ 2.05	+47.10.52.9	33.6	
34	N ; *i*	133. 5.49.35	+2.42	+2.12.61	+67.29.24.3	28.7	
36	S ; *s*	172.41.52.16	—0.73	—2.59.44	—27.58.38.8	30.8	
37	S ; *s*	168. 9.18.37	+0.21	—4. 5.83	—32.32.22.4	35.1	

Equazioni normali:

$$40''.40 = 9.00\,E + 0.45 f$$
$$10''.67 = 0.45\,E + 4.77 f$$

dalle quali:

$$E = 200°\,37'\,31''.4;\ \text{errore probab.}\ \pm 0''.5$$
$$f = +\,1''.82;\quad \text{"}\quad \text{"}\quad \pm 0''.67.$$

TAB. VIII. — 15 Settembre 1912 — Cerchio ad W.

a $19^h,0$ $t = 17^\circ.6$ $p = 733^{mm}.87$ [$19^\circ.2$] a $20^h,4$ $t = 16^\circ.0$ $p = 734^{mm}.19$ [$19^\circ.1$] a $21^h.3$ $t = 14^\circ.9$ $p = 734^{mm}.46$ [$19^\circ.0$]

*		$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$	l	r	δ	E_n	ANNOTAZIONI
2	S ; *s*	318°.30′.54″.91	+3″.15	+2′.53″.84	−27°.48′. 6″.3	290°.45′.45″.6	$r = 2$-3 $s = 2$. Sereno: calma.
4	N ; *i*	193.21.53.32	+0.42	−1.10.35	+82.34.51.1	52.3	$r = 2$ $s = 2$
8	N ; *i*	179.26.34.85	−0.31	−2. 3.01	+68.38.40.2	51.3	
10	N ; *s*	239.13.13.45	−2.41	− 6.16	+51.32.44.4	49.3	
11	S ; *s*	315.48. 7.26	−2.41	+2.29.27	−25. 4.46.3	47.8	
12	N ; *s*	240.44.44.03	−4.20	− 4.72	+50. 1.14.5	49.6	
13	S ; *s*	245.50.38.40	+1.68	+ 0.14	+44.55. 9.4	49.6	
19	S ; *s*	291.49.39.95	+0.94	+ 56.76	− 1. 4.53.0	44.7	
21	S ; *s*	303.33.20.51	−0.42	+1.26.71	−12.49. 1.8	45.0	
23	N ; *i*	171.49.38.27	−1.99	−3. 6.40	+61. 0.40.1	49.8	$r = 2$ $s = 3$
26	S ; *s*	245.47.39.94	−2.52	+ 0.10	+44.58.10.9	48.4	$r = 2$ $s = 2$
27	S ; *s*	257. 6.52.00	+1.47	+ 11.05	+33.38.39.3	43.8	$r = 2$ $s = 2$
29	N ; *s*	208.33.49.56	+3.46	− 41.43	+82.12.37.0	48.6	$r = 2$ $s = 2$
32	N ; *s*	243.34.57.58	+0.63	− 2.02	+47.10.53.1	49.3	$r = 2$ $s = 2$
34	N ; *i*	178.17.22.90	+0.21	−2.10.89	+67.29.24.0	48.2	
36	S ; *s*	318.41.21.62	+2.31	+3. 1.31	−27.58.38.9	46.3	
37	S ; *s*	323.13.57.95	+1.99	+4. 2.68	−32.32.22.5	40.1	$r = 3$ $s = 3$-4

Equazioni normali: $112''.70 = 17.00\,E - 1.17f$ $18''.44 = -1.17\,E + 8.57f$

dalle quali: $E = 290^\circ\,45'\,47''.8$; errore prob. $\pm 0''.3$ $f = +3''.09$; errore prob. $\pm 0''.49$.

TAB. IX. — **16 Settembre 1912** — Cerchio ad E.

a $19^h,0$ $t = 18^\circ.0$ $p = 737^{mm}.94$ [19°.6] a $20^h.1$ $t = 16^\circ.6$ $p = 739^{mm}.02$ [19°.5]

*		$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$	l	r	δ	E_n	ANNOTAZIONI
		° ′ ″	″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
1	S ; s	170.40.24.65	—0.21	—3.20.79	—30. 0.31.7	200.37.35.3	Sereno e calma.
2	S ; s	172.52.22.85	—0.21	—2.54.56	—27.48. 6.3	34.4	
4	N ; i	118. 1.26.66	+1.15	+1.10.69	+82.34.50.9	29.4	
8	N ; i	131.56.46.30	+0.10	+2. 3.54	+68.38.40.0	29.9	
10	N ; s	252.10.11.98	—1.05	+ 6.21	+51.32.44.5	32.6	
11	S ; s	175.35.15.94	+0.63	—2.29.94	—25. 4.46.4	33.0	
12	N ; s	250.38.40.20	+1.47	+ 4.75	+50. 1.14.6	31.8	
13	S ; s	245.32.38.04	+0.63	— 0.14	+44.55. 9.5	29.0	
17	N ; i	140. 0.16.54	+2.52	+3.12.39	+60.33.50.4	21.9	
18	S ; s	172.43. 2.18	+1.68	—2.56.93	—27.57.20.8	27.7	
19	S ; s	199.33.28.81	—0.31	— 57.03	— 1. 4.52.9	24.4	

Equazioni normali:

$$43''.40 = 11.00\,E + 1.67\,f$$
$$20''.52 = 1.67\,E + 6.58\,f$$

dalle quali:

$E = 200^\circ\,37'\,29''.6$; errore prob. $\pm 0''.8$

$f = +\,2''.20$; „ „ $\pm 1''.05$.

Riunisco qui i valori di f ottenuti dalle 7 sere d'osservazione:

f	err. prob.
$+ 3''.14$	$\pm 1''.48$
$+ 1.08$	0.78
$+ 2.84$	0.93
$+ 2.53$	0.84
$+ 1.82$	0.67
$+ 3.09$	0.49
$+ 2.20$	1.05

Da questi valori si ha infine il più probabile valore della flessione (1):

$$f = + 2''.43 \qquad \text{con errore prob.} \pm 0''.18.$$

I valori piuttosto forti degli errori probabili sia di E che di f — pur tenendo conto delle difficoltà che le determinazioni della flessione, eseguite con qualsiasi metodo, presentano sempre per le notevoli influenze di numerose circostanze, e tenendo anche conto che per lo più le immagini delle stelle vicine all'orizzonte erano poco buone — mi permettono, credo, di pensare che in parte sieno dovute alla poca stabilità relativa del supporto dei microscopi micrometrici nella combinazione realizzata nel Bamberg, rimanendo esso collegato al resto del corpo istrumentale e venendo influenzato dai movimenti, anche piccoli, fatti per la puntata della stella.

Questo fatto mi induce ancor più a ritenere necessario uno studio accurato sia del comportamento di detto supporto rispetto al cerchio, sia della graduazione del cerchio per poter trarre da questo piccolo cerchio meridiano così ben formato e così comodo il maggior utile possibile.

---

(1) Il prof. B. Viaro, dalla determinazione di latitudine fatta con 137 osservazioni al piccolo meridiano di Arcetri verso la fine del 1899, introdotto nel calcolo il termine $K \operatorname{sen} z$ per togliere l'andamento sistematico dei valori della latitudine rispetto alle distanze zenitali delle stelle, trovò $K = + 1'',60$ con errore probabile $\pm 0'',11$ (Cfr. fasc. 14 delle Pubblicazioni di Arcetri).

Una nuova causa di errore nella determinazione dei pesi atomici.

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI.

Nella mia Nota: *Osservazioni sulle tabelle internazionali dei pesi atomici* (1) io ho ricordato che il clorato di potassio può contenere delle piccolissime quantità di cloruro difficilissime a dosarsi; Guye e Ter-Gazarian (2) avevano infatti insistito su questo fatto. Essi fecero vedere nel 1906 che come causa d'errore possibile nella determinazione del peso atomico dell'argento era il fatto che il clorato di potassio trattiene anche dopo molte ricristallizzazioni delle piccole quantità di cloruro di potassio. Essi esaminarono il clorato di potassio di origine elettrolitica. Trovarono circa mgr. 0.27 di KCl in 1 gr. di $KClO^3$, cioè $\frac{2.7}{10000}$. Se il clorato potassico usato da Stas conteneva la stessa quantità di cloruro, osserva Guye, il peso atomico dell'argento, dedotto dai rapporti $KClO^3 : KCl$ e $Ag : KCl$, doveva essere abbassato a 107.879, numero quasi identico praticamente al valore 107.88 ora ammesso.

Dutoit e von Weisse (3) nel 1911 trovarono in tre campioni di clorato mgr. 0.012 — 0.021 — 0.003 di KCl in 1 gr. di clorato; cioè delle quantità minori di quelle indicate da Guye.

Ma una impurezza del clorato potassico che io credo forse più importante, perchè più diffusa, di quella di traccie di cloruro, si è la presenza costante di bromati. Questo fatto fu osservato recentemente del D[r] Francesco Nicola applicando la mia nuova, sensibilissima e caratteristica, reazione del bromo, all'esame del clorato potassico usato come medicamento. Tutti i clorati commerciali i più puri, compreso quello garantito come purissimo e privo di qualunque traccia di altre sostanze, contenevano più

(1) " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1912, vol. XLVII; " Chem. Zentralbl. " e " Journ. Chem. Soc. ".
(2) " C. R. ", 1906, t. 143, pag. 411.
(3) " Journ. de Chim. Phys. ", 1911, t. 9, p. 640.

o meno, del bromato. La presenza del bromato nel clorato di potassio fu accennata la prima volta da H. Klopstock (1). E. Pieszczek (2) confermò questo fatto su cinque campioni diversi di clorato potassico. Anzi in un campione di clorato trovò sino 0.26 % di *bromato*.

Con pochi grammi di clorato, trasformato previamente in cloruro per l'azione del calore, si può osservare subito la reazione del bromo trattando il residuo con acido cromico al 15-25 % e sospendendo nel matraccino ove si fa la reazione, una cartina inumidita col reattivo fucsinico, oppure col violetto d'Hofmann decolorato. Si può avere la reazione anche col trattare direttamente il clorato in polvere colla soluzione cromica, meglio con soluzione al 15 %, per evitare in parte la successiva decolorazione della cartina dovuta all'eccesso di cloro e di ossidi di cloro che in questo caso si sviluppano insieme al bromo.

Io ho confermato pienamente il fatto osservato dal Dr Nicola. Tutti i clorati da me esaminati contenevano del bromato; compreso anche quel clorato dichiarato e garantito purissimo, per analisi, e contenente: arsenico = 0; solfati = 0; nitrati = 0; cloruri = 0; metalli pesanti = 0 e terre alcalino-terrose = 0; (ma il bromato non vi è accennato). Questo clorato detto purissimo, fatto ricristallizzare contiene sempre del bromato e in quantità relativamente notevole. Come pure si trova del bromo anche nel *Kalium chlorid* garantito purissimo e fatto ricristallizzare.

Si possono riconoscere i bromati nei clorati anche nel modo molto semplice che ho indicato nella mia seconda nota (3), cioè sciogliendo 1-2 gr. di clorato nell'acqua, poi aggiungere alla soluzione fredda 1-2 goccie del reattivo fucsinico, o reattivo Schiff per le aldeidi. Se vi sono anche traccie di bromato, dopo pochi istanti si manifesta una bella colorazione rosso-violetta, e col violetto d'Hofmann decolorato pure col bisolfito, una bella colorazione azzurra o azzurro-violacea. Ho ricristallizzato il clorato

(1) " Chem. Zeit. ", t. 33, p. 21; " Chem. Zentralbl. ", 1909 I, p. 579.

(2) " Pharm. Zeit. ", t. 54, p. 324 e " Chem. Zentralbl. ", 1909, I, p. 2014. Il lavoro di Pieszczeck mi fu fatto conoscere dal Dr Nicola, che ringrazio.

(3) *Sulla diffusione del bromo in natura e sua ricerca anche nelle materie organiche*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1912, t. XLVII.

potassico dichiarato purissimo, e ricordato più sopra, e anche dopo la ricristallizzazione conteneva del bromato.

Per via colorimetrica si può, con approssimazione, determinare anche la quantità di bromato.

Anche due campioni di clorato sodico e di clorato di bario che ho in laboratorio contengono dei bromati.

È dunque costante la presenza del bromato ed è quindi costante l'errore che si ha pesando il KCl che rimane dal clorato, perchè contiene KBr. Questo errore aggiunto all'altro della presenza di traccie di cloruro potassico nel clorato fa sì che il rapporto sino ad ora trovato di Ag : KCl non possa essere esattissimo. Questa causa di errore, credo, era sino ad ora sfuggita ai chimici.

Non ho fatto delle determinazioni esatte, ma da alcuni saggi colorimetrici con soluzioni diluitissime di bromato potassico, mi sembra che l'errore dovuto alla presenza del bromato sia non inferiore a quello dovuto alla presenza del cloruro e talora anche di più.

Io credo che nel clorato potassico il più puro vi sia ancora circa $^{1\text{-}2}/_{10000}$ di bromato. Ma già $^{1}/_{10000}$ di KCl nel clorato innalza il peso atomico dell'argento di 0,0177. I due errori sommati non devono essere privi di qualche influenza.

Io ho dimostrato che tutti i prodotti chimici anche i più puri provenienti, direttamente o indirettamente, dai minerali di Stasfurt contengono più o meno dei bromuri o dei bromati.

Forse la diffusione del bromo in natura, quale l'ho io dimostrata, e il trovarsi questo elemento in quasi tutti i principali prodotti chimici, potrà avere qualche influenza, sia pure lieve, sull'esattezza dei pesi atomici di altri elementi oltre a quelli del cloro e dell'argento.

Questo nuovo fatto conferma quanto dissi nella mia Nota: *Osservazioni sulle tabelle internazionali dei pesi atomici*, cioè che: quando trattasi di variare i numeri delle tabelle dei pesi atomici nella seconda decimale e talora anche nella prima, bisogna usare molta prudenza (1).

---

(1) Ho visto con piacere che nell'ultimo Congresso Internazionale di Chimica tenutosi a New-York fu deliberato di sospendere le modificazioni annuali alle tabelle dei pesi atomici.

Stas nelle sue classiche memorie: *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques, sur les poids atomiques et leurs rapports mutuels* (1) afferma di avere depurato in varie maniere il cloruro di potassio, ma non è escluso che anche quel cloruro contenesse del bromuro, come lo contengono tutti i campioni da me esaminati. Anche per ripetute cristallizzazioni difficilmente si elimina tutto il bromuro. Io ho esaminato anche un *cloruro di sodio* detto *assolutamente puro*, e conteneva ancora non poco bromuro. Così può dirsi di altri composti che lo Stas ha adoperato.

Anche il *jodato di potassio* ch'egli ha preparato con tanta cura, credo che avrà contenuto del *bromato*, come lo contengono i campioni di jodato, anche purissimo, da me esaminati. Il jodato potassico anche il più puro quando è calcinato lascia un residuo di joduro che trattato al solito con soluzione al 15-25 % di acido cromico dà ben manifesta la reazione del bromo. Anche la soluzione di jodato, contenente del bromato, quando si tratta con poco reattivo fucsinico (per 5-10 cm^3 circa 1-2 goccie di reattivo) si manifesta la bella colorazione violacea. È molto probabile che il jodato potassico adoperato da Stas contenesse del bromato. Tornerò in seguito su questa reazione dei bromati in presenza di jodati.

È da ricordare ancora che il bromato d'argento è meno solubile nell'acqua che non il jodato d'argento.

È pure estremamente difficile ottenere del jodo, assolutamente privo di ogni traccia di bromo.

Ho pensato che non fosse privo d'importanza il far conoscere, specialmente ai chimici che si occupano della determinazione dei pesi atomici, questa nuova causa di errore quale è quella della presenza dei bromati nei clorati e nei jodati, e dei bromuri nei cloruri i più puri; la quale causa può avere influenza sui pesi atomici dei più importanti elementi, qualora si voglia spingere l'esattezza agli estremi limiti.

Torino, R. Università 1° dicembre 1912.

---

(1) " Mém. de l'Acad. Belg. ", 1865, t. XXXV e *Œuvres*, t. I, pp. 539-40.

Sui sistemi di ∞^1 superficie.

Nota di M. PIERI, a Parma.

Per mezzo di un algoritmo geometrico spettante all'analisi vettoriale intrinseca si stabiliscono alcune relazioni, che intercedono fra le linee di curvatura delle superficie d'un sistema semplicemente infinito e le linee trajettorie ortogonali di queste superficie nelle ipotesi più generali: relazioni di non dubbia importanza, e già parzialmente avvertite in qualche caso speciale. — Quanto alle molte conseguenze che ne derivano, e sembrano offrire abbondante materia di studio, toccheremo soltanto (da cose note in fuori) di alcune condizioni geometriche necessarie e sufficienti perché una famiglia di superficie appartenga ad un sistema triplo ortogonale (1).

§ **1. Ipotesi e notazioni.** — È data a piacere una famiglia $\}\chi\{$ di superficie in una porzione di spazio Σ cosí limitata, che per ciascun de' suoi punti passi una sola di quelle superficie. Siano P un punto, che supporremo variabile ad arbitrio in Σ, e $\mathbf{k}$ un vettore subordinato a P, con la stessa direzione della normale in P alla superficie che passa per questo punto e lunghezza uguale all'unità. Il vettore unitario $\mathbf{k}$ sarà dunque

(1) Per le notazioni adottate e le proposiz.i e formule vettoriali che qui s'invocano, ci riferiamo alle due operette di C. Burali-Forti e R. Marcolongo: " *Éléments de Calcul vectoriel* etc. " (Paris, Hermann, 1910: trad. Lattès) e " *Transformations linéaires* " (Pavia, Mattei e C., 1912: trad. Baridon): dove l'algoritmo vettoriale riceve, con molti incrementi, un assetto regolare abbastanza compiuto ed omogeneo. Verranno citate con le sigle *C. v.* e *T. l.*

funzione di P in Σ; o, come suol dirsi, verremo ad avere in Σ una certa " distribuzione vettoriale " $(P, \boldsymbol{k})$. Per egual modo possiamo subordinare a P due vettori unitarî $\boldsymbol{i}$ ed $\boldsymbol{j}$ paralleli alle due *direzioni principali* di quella superficie nel punto P ed orientati in guisa, che i tre vettori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (due a due ortogonali) diano luogo, in quest'ordine, ad una terna destrorsa.

Le tre funzioni o distribuzioni vettoriali $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ s'intenderanno soggette ad alcune ovvie restrizioni di continuità e derivabilità risp.° a P, che tralasciamo di enunciare. Chiameremo poi " linee $\mathcal{K}$ " — e cosí " linee $\mathcal{I}$ ", " linee $\mathcal{J}$ ", ecc. — le " linee di flusso " della distribuzione vettoriale $(P, \boldsymbol{k})$; vale a dire ogni linea per cui la tangente in ciascun punto sia parallela al vettore $\boldsymbol{k}$ — ovvero $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, ecc. — che corrisponde a quel punto. Le linee $\mathcal{K}$ si confonderanno pertanto con le *trajettorie ortogonali* delle ∞^1 superficie χ; mentre le linee $\mathcal{I}$, e al modo stesso le $\mathcal{J}$, su ciascuna di queste superficie saranno le *linee di curvatura* d'un medesimo sistema, e nello spazio Σ costituiranno, al par delle $\mathcal{K}$, una *congruenza di curve.*

In ordine ad un punto qualsivoglia P di Σ conveniamo altresí di indicare con r_1 e ρ_1 — o rispettivam.° con r_2 e ρ_2 — i *raggi di curvatura normale* e *geodetica*, che spettano in P alla linea di curvatura $\mathcal{I}$ — o rispettiv.° $\mathcal{J}$ — sulla superficie del dato sistema che passa per P. Quanto ai segni gioverà stabilire che i detti raggi sian misurati *a partir da P*: onde r_1 (e similmente r_2) riescirà positivo o negativo, secondo che l'orientazione che va dal punto P al centro di curvatura normale della $\mathcal{I}$ (o della $\mathcal{J}$) coincide o no col verso di $\boldsymbol{k}$: mentre ρ_1 (e similmente ρ_2) sarà positivo o negativo, secondo che l'orientazione da P al centro di curvatura geodetica della $\mathcal{I}$ (o della $\mathcal{J}$) — centro che cade, com'è ben noto, sulla tangente in P alla linea $\mathcal{J}$ (od $\mathcal{I}$) — è uguale o contrario al verso di $\boldsymbol{j}$ (o rispettivamente di $\boldsymbol{i}$). — Denoteremo poscia con R il raggio di 1ª curvatura in P della linea $\mathcal{K}$ uscente da P; con $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario parallelo alla normale principale di questa linea nello stesso punto P, orientato da P verso il centro di 1ª curvatura; con φ l'angolo dei due vettori $\boldsymbol{i}$ ed $\boldsymbol{n}$, ossia l'inclinazione della linea di curvatura $\mathcal{I}$ sul piano osculatore alla linea $\mathcal{K}$ in P.

§ 2. **Formule preliminari.** — Anzitutto le relazioni di ortogonalità:

$$(1)\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=0;\ \boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

Appresso, in quanto le linee $\mathcal{K}$ costituiscono una congruenza *ortotomica*, avremo qualunque sia P (*C. v.*, p. 78; *T. l.*, p. 122):

$$(2)\qquad \boldsymbol{k}\times \operatorname{rot}\boldsymbol{k}=0;$$

e in quanto le rette $P\boldsymbol{i}$ e $P\boldsymbol{j}$ sono tangenti alle due linee di curvatura in P:

$$(3)\qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}/r_1,\qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}/r_2;$$

mentre, per il solo fatto che $\boldsymbol{k}$ è vettore di lunghezza costante (*T. l.*, [2'] pag. 66, [1''] pag. 73):

$$(4)\qquad \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{k}=0,\qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{k}=(\operatorname{rot}\boldsymbol{k})\wedge\boldsymbol{k},$$

e, qualunque siasi il vettore $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{k}\times\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{x}=0$.

Inoltre:

$$(5)\qquad \boldsymbol{n}=\cos\varphi\,.\,\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi\,.\,\boldsymbol{j},$$

per la qual cosa (*C. v.*, [3] pag. 87):

$$(6)\qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{n}}{R}=\frac{1}{R}(\cos\varphi\,.\,\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi\,.\,\boldsymbol{j});$$

onde, in forza delle (1), (2), (4):

$$(7)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\boldsymbol{k}=\frac{1}{R}\,.\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{n}=\frac{1}{R}(\cos\varphi\,.\,\boldsymbol{j}-\operatorname{sen}\varphi\,.\,\boldsymbol{i}),\\ \boldsymbol{i}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{k}=-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R},\ \boldsymbol{j}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{k}=\frac{\cos\varphi}{R}. \end{cases}$$

Le curvature geodetiche ρ_1 e ρ_2 (§ 1), come projezioni delle

curvature assolute delle due linee $\mathcal{I}$ ed $\mathcal{J}$ uscenti da P sul piano Pij, saranno date dalle formule:

$$(8)\qquad \frac{1}{\rho_1} = j \times \frac{di}{dP} i, \quad \frac{1}{\rho_2} = i \times \frac{dj}{dP} j;$$

e se consideriamo che le curvature normali $1/r_1$ e $1/r_2$ son projezioni di quelle stesse curvature assolute sulla normale Pk (Teor.ª di Meunier) avremo ancora:

$$(9)\qquad \frac{1}{r_1} = k \times \frac{di}{dP} i, \quad \frac{1}{r_2} = k \times \frac{dj}{dP} j.$$

§ 3. Calcolo delle omografie vettoriali $\frac{dk}{dP}, \frac{di}{dP}, \frac{dj}{dP}$. — La rappresentazione di qual si voglia omografia vettor.ᵉ come somma di tre diadi (*T. l.* [7], pag. 19) permette di esprimere l'omogr. vett. $\frac{dk}{dP}$ sotto la forma generica:

$$\frac{dk}{dP} = \mathrm{H}\left(i, \frac{dk}{dP} i\right) + \mathrm{H}\left(j, \frac{dk}{dP} j\right) + \mathrm{H}\left(k, \frac{dk}{dP} k\right);$$

la quale — grazie alle relazioni (3), (4), (6) — si specifica subito nell'eguaglianza:

$$(10)\qquad \frac{dk}{dP} = -\frac{1}{r_1}\mathrm{H}(i, i) - \frac{1}{r_2}\mathrm{H}(j, j) + \frac{\cos\varphi}{R}\mathrm{H}(k, i) + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\mathrm{H}(k, j),$$

cui si può tosto associare anche l'altra:

$$(10')\qquad \mathrm{K}\frac{dk}{dP} = -\frac{1}{r_1}\mathrm{H}(i, i) + \frac{\cos\varphi}{R}\mathrm{H}(i, k) - \frac{1}{r_2}\mathrm{H}(j, j) + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\mathrm{H}(j, k).$$

Per egual modo si ottiene una conveniente espressione dell'omog. vett. $\frac{di}{dP}$ cercando il valore che assume nel caso nostro il trinomio:

$$\mathrm{H}\left(i, \frac{di}{dP} i\right) + \mathrm{H}\left(j, \frac{di}{dP} j\right) + \mathrm{H}\left(k, \frac{di}{dP} k\right).$$

Ora $\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{i}$. come vettore normale ad $\boldsymbol{i}$ (§ 2) equivale per certo ad $\boldsymbol{j} \times \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \times \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{k}$; onde, in virtù di (8) e (9):

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{i} = \frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{j} + \frac{1}{r_1}\boldsymbol{k}.$$

Similmente abbiamo, grazie alle (1) (*T. l.*, [1] pag. 32, [2] pag. 66) e presenti le (7), (3), (6):

$$\boldsymbol{j} \times \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \times \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \times \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \times \frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\rho_2},$$

$$\boldsymbol{k} \times \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \times \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \times \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \times \frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{j} = 0,$$

$$\boldsymbol{j} \times \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \times \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \left\{\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} - (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}) \wedge \boldsymbol{j}\right\} = -\boldsymbol{i} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{k} \times \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \times \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k} \times \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \times \frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\boldsymbol{k} = -\frac{\cos\varphi}{R};$$

per la qual cosa:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\rho_2}\boldsymbol{j}, \quad \frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{j} - \frac{\cos\varphi}{R}\boldsymbol{k}.$$

Dunque:

$$(11) \qquad \frac{d\boldsymbol{i}}{dP} = \frac{1}{\rho_1}\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) + \frac{1}{r_1}\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}) - \frac{1}{\rho_2}\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}) - \\ - \boldsymbol{i} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}\,.\,\mathrm{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}) - \frac{\cos\varphi}{R}\mathrm{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k});$$

$$(11') \quad \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{i}}{dP} = \frac{1}{\rho_1}\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}) - \frac{1}{\rho_2}\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}) - \boldsymbol{i} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}\,.\,\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) + \\ + \frac{1}{r_1}\mathrm{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}) - \frac{\cos\varphi}{R}\mathrm{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}).$$

Operando nello stesso modo circa $\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}$ si trova:

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{i} = -\frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{i}, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{j} = \frac{1}{\rho_2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{r_2}\boldsymbol{k},$$

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\boldsymbol{k};$$

e per cons.[a]:

$$(12)\qquad \frac{dj}{dP} = -\frac{1}{\rho_1}\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}) + \frac{1}{\rho_2}\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}) + \frac{1}{r_2}\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) + \\ + \boldsymbol{i}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}\,.\,\mathrm{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}) - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\mathrm{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}),$$

$$(12')\qquad \mathrm{K}\frac{dj}{dP} = -\frac{1}{\rho_1}\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}) + \frac{1}{\rho_2}\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{i}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}\,.\,\mathrm{H}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}) + \\ + \frac{1}{r_2}\mathrm{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}) - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\mathrm{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}).$$

Ne viene ad es. (*T. l.*, [1] pag. 70, [3] pag. 28) che:

$$(13)\qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{i} - \frac{1}{r_1}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{k};$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j} = \frac{1}{r_2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{\rho_2}\boldsymbol{k};$$

e per cons.:

$$(13')\qquad \boldsymbol{j}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i} = -\frac{1}{r_1},\quad \boldsymbol{k}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i} = \frac{1}{\rho_1},$$

$$\boldsymbol{i}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{j} = \frac{1}{r_2},\quad \boldsymbol{k}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\rho_2},$$

$$(14)\qquad \boldsymbol{j}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}.$$

§ **4. Torsione delle linee $\mathcal{K}$.** — Se con $\boldsymbol{b}$ indichiamo il vettore unitario della binormale in P alla linea $\mathcal{K}$ che passa per questo punto — orientato in guisa che la terna vettoriale $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ ne risulti destrorsa; se insomma poniamo (§ 2):

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}\wedge \boldsymbol{n} = \cos\varphi\,.\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\varphi\,.\,\boldsymbol{i},$$

la torsione $\frac{1}{T}$ delle linee $\mathcal{K}$ ne verrà data, per ciascun punto P, dalla formula (*C. v.*, (3) pag. 87):

$$\frac{1}{T} = \boldsymbol{n}\times \frac{d\boldsymbol{b}}{dP}\boldsymbol{k};$$

onde avremo subito:

$$\frac{1}{T} = (\cos\varphi \,.\, \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi \,.\, \boldsymbol{j}) \times$$

$$\times \left(\cos\varphi \,.\, \frac{dj}{dP}\boldsymbol{k} - \operatorname{sen}\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dP}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\varphi \,.\, \frac{di}{dP}\boldsymbol{k} - \cos\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dP}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{i}\right) =$$

$$= \cos^2\varphi \,.\, \boldsymbol{i} \times \frac{dj}{dP}\boldsymbol{k} - \operatorname{sen}^2\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dP}\boldsymbol{k} -$$

$$- \operatorname{sen}^2\varphi \,.\, \boldsymbol{j} \times \frac{di}{dP}\boldsymbol{k} - \cos^2\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dP}\boldsymbol{k}\,;$$

e ricordando i valori testè ottenuti per $\frac{di}{dP}\boldsymbol{k}$ e $\frac{dj}{dP}\boldsymbol{k}$:

$$\frac{1}{T} = \boldsymbol{i} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{i} - \frac{d\varphi}{dP}\boldsymbol{k}: \tag{15}$$

risultato che abbraccia una formula ben nota relativa al caso speciale delle famiglie di LAMÉ ([2]); caso corrispondente all'ipotesi $\boldsymbol{i} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{i} = 0$ (§ 8). Esso inoltre conferisce un significato geometrico speciale al prodotto $\boldsymbol{i} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{i}$: vale a dire (*T. l.*, pag. 65) se si conviene di rappresentare mediante $s_k, s_i, s_j, \ldots$ gli archi delle linee $\mathcal{K}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, ... misurati nel senso dei vettori tangenziali $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, ...:

$$\boldsymbol{i} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{i} = \frac{1}{T} + \frac{\partial\varphi}{\partial s_k}, \tag{15'}$$

§ 5. Condizioni d'esistenza per l'omogr. vettor. $\frac{dk}{dP}$.

— Se consideriamo ad es. l'espressione (10) dell'omogr. vettor. $\frac{dk}{dP}$; poiché, per le ipotesi fatte, il 2° membro è la derivata spaziale d'un certo vettore $\boldsymbol{k}$ — o, in altri termini, esso dee trasformar l'incremento generico dP nel differenziale esatto $d\boldsymbol{k}$ d'un vettore funzione di P — dovranno esser soddisfatte alcune condizioni, che si compendiano tutte nell'equazione funzionale (*T. l.*, pag. 85, 118):

$$\operatorname{Rot} \mathrm{K} \frac{dk}{dP} =_P 0.$$

([2]) Ved. p. es. BIANCHI, *Lezioni di Geom.ª differenziale*, 1ª ediz. (Pisa, Nistri, 1894), pag. 464.

Ne viene che, uguagliando a zero le Rot dei secondi membri delle formule (10'), (11') e (12'), dovremo ottenere delle equazioni certamente soddisfatte dai contrassegni o caratteri metrici del nostro sistema $\{\chi\}$ di superficie. Per esempio la condizione $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\frac{dk}{dP} =_P 0$ darà luogo a nove equazioni numeriche fra quei caratteri $r_1, r_2, \rho_1, \rho_2, R, T, \varphi$ e le loro derivate risp.^{te} ad s_k, s_i, s_j: equazioni che nascono applicando successivamente l'omogr.^{a} vett.^{e} nulla $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\frac{dk}{dP}$ ad $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, e poscia eguagliando a zero i prodotti scalari di ognuno dei tre vettori nulli cosí ottenuti per ognuno degli stessi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Ben s'intende come parecchie delle ventisette e più relazioni, che noi potremmo ricavare a questa maniera, risulteranno conseguenza delle rimanenti (o, in particolare, si risolveranno in pure identità letterali); altre ancora esprimon soltanto delle proprietà d'una generica superficie χ isolata dalle rimanenti. Restano in tutto sei relazioni indipendenti fra i caratteri r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 di quelle superficie da una parte, e gli elementi R, T e φ delle loro trajettorie ortogonali dall'altra.

In primo luogo avremo dunque l'equazione funzionale (*T. l.*, [2] pag. 79, [3] pag. 84):

$$0 = \mathrm{rot}\,\mathrm{K}\,\frac{dk}{dP} = -\frac{1}{r_1}\left\{\mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}) - \boldsymbol{i}\wedge\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\right\} - \left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_1}\right)\wedge$$

$$\wedge\,\mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + \frac{\cos\varphi}{R}\left\{\mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k}\wedge\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\right\} + \left(\mathrm{grad}\,\frac{\cos\varphi}{R}\right)\wedge$$

$$\wedge\,\mathrm{H}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}) - \frac{1}{r_2}\left\{\mathrm{H}(\boldsymbol{j}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{j}) - \boldsymbol{j}\wedge\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\right\} - \left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_2}\right)\wedge$$

$$\wedge\,\mathrm{H}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) + \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\left\{\mathrm{H}(\boldsymbol{j}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k}\wedge\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\right\} + \left(\mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\right)\wedge$$

$$\wedge\,\mathrm{H}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}),$$

equivalente alle tre equazioni vettoriali:

$$0 = -\frac{1}{r_1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{i} - \left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_1}\right)\wedge\boldsymbol{i} + \frac{\cos\varphi}{R}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{k} + \left(\mathrm{grad}\,\frac{\cos\varphi}{R}\right)\wedge$$

$$\wedge\,\boldsymbol{k} + \frac{1}{r_1}\,\boldsymbol{j}\wedge\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\,\boldsymbol{k}\wedge\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{i},$$

$$0=\frac{1}{r_1}\,\boldsymbol{i}\wedge \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{j}-\frac{\cos\varphi}{R}\,\boldsymbol{k}\wedge \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{j}-\frac{1}{r_2}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j}-\left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_2}\right)\wedge$$
$$\wedge\,\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}+\left(\mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\right)\wedge\boldsymbol{k}\,,$$

$$0=\frac{1}{r_1}\,\boldsymbol{i}\wedge \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{k}-\frac{\cos\varphi}{R}\,\boldsymbol{k}\wedge \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{k}+\frac{1}{r_2}\,\boldsymbol{j}\wedge \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{k}-$$
$$-\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\,\boldsymbol{k}\wedge \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{k}\,;$$

l'ultima delle quali ha il secondo membro identicamente nullo in forza delle (11′) e (12′). Le altre due si risolvono, giusta quel che abbiam detto or ora, nelle sei equazioni numeriche seguenti:

$$0=-\frac{1}{r_1}\,\boldsymbol{i}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}+\frac{\cos\varphi}{R}\,\boldsymbol{i}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}+\left(\mathrm{grad}\,\frac{\cos\varphi}{R}\right)\times\boldsymbol{j}+$$
$$+\frac{1}{r_2}\,\boldsymbol{k}\times\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\,\boldsymbol{j}\times\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{i}\,,$$

$$0=\frac{\cos\varphi}{R}\,\boldsymbol{j}\times\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{j}-\frac{1}{r_2}\,\boldsymbol{i}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j}+\left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_2}\right)\times\boldsymbol{k}+$$
$$+\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\,\boldsymbol{i}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}+\left(\mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\right)\times\boldsymbol{j}\,,$$

$$0=-\frac{1}{r_1}\,\boldsymbol{j}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}-\left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_1}\right)\times\boldsymbol{k}+\frac{\cos\varphi}{R}\,\boldsymbol{j}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}-$$
$$-\left(\mathrm{grad}\,\frac{\cos\varphi}{R}\right)\times\boldsymbol{i}-\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\,\boldsymbol{i}\times\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{i}\,,$$

$$0=-\frac{1}{r_1}\,\boldsymbol{k}\times\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{j}-\frac{\cos\varphi}{R}\,\boldsymbol{i}\times\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{j}-\frac{1}{r_2}\,\boldsymbol{j}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j}+$$
$$+\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\,\boldsymbol{j}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}-\left(\mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R}\right)\times\boldsymbol{i}\,,$$

$$0=-\frac{1}{r_1}\,\boldsymbol{k}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{i}+\left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_1}\right)\times\boldsymbol{j}-\frac{1}{r_2}\,\boldsymbol{i}\times\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{i}\,,$$
$$0=\frac{1}{r_1}\,\boldsymbol{j}\times\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{j}-\frac{1}{r_2}\,\boldsymbol{k}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j}-\left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_2}\right)\times\boldsymbol{i}\,.$$

Se ora facciamo valere i risultati precedenti, raccolti nelle

formule (1), (2), ..., (15'), le sei relazioni anzidette prenderanno la forma ordinaria:

$$(16)\qquad \left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{T}+\frac{\partial\varphi}{\partial s_k}\right)-\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{R^2}+\frac{\partial\left(\frac{\cos\varphi}{R}\right)}{\partial s_j}+\frac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\rho^2}=0\,,$$

$$(17)\qquad -\frac{\cos\varphi}{R}\,\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{r_2{}^2}+\frac{\partial(1/r_2)}{\partial s_k}-\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R^2}+\frac{\partial\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\right)}{\partial s_j}=0\,,$$

$$(18)\qquad \frac{1}{r_1{}^2}-\frac{\partial(1/r_1)}{\partial s_k}+\frac{\cos^2\varphi}{R^2}-\frac{\partial\left(\frac{\cos\varphi}{R}\right)}{\partial s_i}+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R\rho_1}=0\,,$$

$$(19)\qquad \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{T}+\frac{\partial\varphi}{\partial s_k}\right)-\frac{\cos\varphi}{R\rho_1}+\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{R^2}-\frac{\partial\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\right)}{\partial s_i}=0\,,$$

$$(20)\qquad -\frac{1}{r_1\rho_1}+\frac{\partial(1/r_1)}{\partial s_j}+\frac{1}{r_2\rho_1}=0\,,$$

$$(21)\qquad -\frac{1}{r_1\rho_2}+\frac{1}{r_2\rho_2}-\frac{\partial(1/r_2)}{\partial s_i}=0\,.$$

Le equazioni (20) e (21), ossia:

$$\frac{\partial(1/r_1)}{\partial s_j}=\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),\qquad \frac{\partial(1/r_2)}{\partial s_i}=-\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

si confondono con due notissime formule spettanti alla Geometria infinitesimale d'una superf.^{e} arbitraria riferita alle linee di curvatura [3].

§ 6. Condizioni d'esistenza per l'omog. vettor. $\frac{di}{dP}$.

— Il medesimo procedimento è da applicare alla formula (11). In primo luogo ne deduciamo:

$$0=\operatorname{rot}\mathrm{K}\frac{di}{dP}=\frac{1}{\rho_1}\left\{\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\operatorname{rot}\boldsymbol{i})-\boldsymbol{i}\wedge\mathrm{K}\frac{dj}{dP}\right\}+\left(\operatorname{grad}\frac{1}{\rho_1}\right)\wedge$$
$$\wedge\,\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i})-\frac{1}{\rho_2}\left\{\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\operatorname{rot}\boldsymbol{j})-\boldsymbol{j}\wedge\mathrm{K}\frac{dj}{dP}\right\}-\left(\operatorname{grad}\frac{1}{\rho_2}\right)\wedge$$
$$\wedge\,\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{j})-\boldsymbol{i}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{i}\left\{\mathrm{H}(\boldsymbol{j},\operatorname{rot}\boldsymbol{k})-\boldsymbol{k}\wedge\mathrm{K}\frac{dj}{dP}\right\}-$$

---

[3] Ved. p. es. loc. cit. in [2], pag. 144 e 225.

$$- (\text{grad}\, \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i}) \wedge \text{H}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) + \frac{1}{r_1} \left\{ \text{H}(\boldsymbol{k}, \text{rot}\, \boldsymbol{i}) - \boldsymbol{i} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \right\} +$$
$$+ \left(\text{grad} \frac{1}{r_1}\right) \wedge \text{H}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) - \frac{\cos\varphi}{R} \left\{ \text{H}(\boldsymbol{k}, \text{rot}\, \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \right\} -$$
$$- \left(\text{grad} \frac{\cos\varphi}{R}\right) \wedge \text{H}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})\,;$$

indi, operando con i due membri di quest'omografia su ciascuno dei tre vettori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$:

$$0 = -\frac{1}{\rho_1} \boldsymbol{i} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} \boldsymbol{i} + \frac{1}{\rho_2} \boldsymbol{j} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{k} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} \boldsymbol{i} -$$
$$- \frac{1}{r_1} \boldsymbol{i} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{i} + \frac{\cos\varphi}{R} \boldsymbol{k} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{i}\,,$$

$$0 = \frac{1}{\rho_1} \text{rot}\, \boldsymbol{i} + \left(\text{grad} \frac{1}{\rho_1}\right) \wedge \boldsymbol{i} - \frac{1}{\rho_2} \text{rot}\, \boldsymbol{j} - \left(\text{grad} \frac{1}{\rho_2}\right) \wedge \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i} \times$$
$$\times \text{rot}\, \boldsymbol{i} \,.\, \text{rot}\, \boldsymbol{k} - (\text{grad}\, \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i}) \wedge \boldsymbol{k} - \frac{1}{r_1} \boldsymbol{i} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{j} +$$
$$+ \frac{\cos\varphi}{R} \boldsymbol{k} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{j}\,,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_1} \boldsymbol{i} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} \boldsymbol{k} + \frac{1}{\rho_2} \boldsymbol{j} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{k} \wedge \text{K} \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} \boldsymbol{k} +$$
$$+ \frac{1}{r_1} \text{rot}\, \boldsymbol{i} + \left(\text{grad} \frac{1}{r_1}\right) \wedge \boldsymbol{i} - \frac{\cos\varphi}{R} \text{rot}\, \boldsymbol{k} - \left(\text{grad} \frac{\cos\varphi}{R}\right) \wedge \boldsymbol{k}\,.$$

Ora, di queste tre equazioni vettoriali la prima è identicam.^{e} soddisfatta, grazie alle (10′) e (12′). La seconda — moltiplicati ambo i membri successivamente per $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ e avuto riguardo alle (1), (2) — si scinde nelle tre relazioni numeriche:

$$0 = \frac{1}{\rho_1} \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i} - \frac{1}{\rho_2} \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{j} + \left(\text{grad} \frac{1}{\rho_2}\right) \times \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{i} \times$$
$$\times \text{rot}\, \boldsymbol{k} - (\text{grad}\, \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{j} - \frac{\cos\varphi}{R} \boldsymbol{j} \times \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{j}\,,$$

$$0 = \frac{1}{\rho_1} \boldsymbol{j} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i} + \left(\text{grad} \frac{1}{\rho_1}\right) \times \boldsymbol{k} - \frac{1}{\rho_2} \boldsymbol{j} \times \text{rot}\, \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{j} \times$$
$$\times \text{rot}\, \boldsymbol{k} + (\text{grad}\, \boldsymbol{i} \times \text{rot}\, \boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{i} + \frac{1}{r_1} \boldsymbol{k} \times \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{j} + \frac{\cos\varphi}{R} \boldsymbol{i} \times$$
$$\times \text{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{j}\,,$$

$$0 = \frac{1}{\rho_1} \boldsymbol{k} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{i} - \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\rho_1}\right) \times \boldsymbol{j} - \frac{1}{\rho_2} \boldsymbol{k} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{j} - \left(\operatorname{grad} \frac{1}{\rho_2}\right) \times$$
$$\times \boldsymbol{i} - \frac{1}{r_1} \boldsymbol{j} \times \mathrm{K} \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{j} :$$

che in virtù delle precedenti (3), (6), (7), (14), (15′) divengono:

$$(22) \qquad \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\right)\left(\frac{1}{T} + \frac{\partial\varphi}{\partial s_k}\right) - \frac{1}{r_2\rho_2} + \frac{\partial\,(1/\rho_2)}{\partial s_k} - \frac{\partial\left(\dfrac{1}{T}\right)}{\partial s_j} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_j\,\partial s_k} + \frac{\cos\varphi}{R r_2} = 0\,,$$

$$(23) \qquad -\frac{1}{r_1\rho_1} + \frac{\partial(1/\rho_1)}{\partial s_k} - \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\cos\varphi}{R}\right)\left(\frac{1}{T} + \frac{\partial\varphi}{\partial s_k}\right) + \frac{\partial\left(\dfrac{1}{T}\right)}{\partial s_i} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_i\,\partial s_k} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R r_1} = 0\,,$$

$$(24) \qquad \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{\partial(1/\rho_1)}{\partial s_j} + \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{\partial(1/\rho_2)}{\partial s_i} + \frac{1}{r_1 r_2} = 0\,;$$

mentre la terza, trattata nello stesso modo, riproduce le (16), (18), (20) del § prec. — La (24) è caso speciale d'una ben nota proposizione di Geom.ª infinitesimale sopra una superficie arbitraria ([4]).

§ **7. Relazioni fra i caratteri** $r_1, r_2, \rho_1, \rho_2, R, T, \varphi$ (§ 1). — Presentiamo qui sotto in un quadro, opportunamente aggruppate, le sei relazioni (16), (17), (18), (19), (22), (23), che sono oggetto della presente Nota:

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\right)}{\partial s_i} - \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)\left(\dfrac{1}{T} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial s_k}\right) = \dfrac{\cos\varphi}{R}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{R} - \dfrac{1}{\rho_1}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial\left(\dfrac{\cos\varphi}{R}\right)}{\partial s_j} - \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)\left(\dfrac{1}{T} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial s_k}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\left(\dfrac{\cos\varphi}{R} - \dfrac{1}{\rho_2}\right), \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(\dfrac{\cos\varphi}{R}\right)}{\partial s_i} + \dfrac{\partial(1/r_1)}{\partial s_k} = \dfrac{\cos^2\varphi}{R^2} + \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{R\rho_1} + \dfrac{1}{r_1^2}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial\left(\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\right)}{\partial s_j} + \dfrac{\partial(1/r_2)}{\partial s_k} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R^2} + \dfrac{\cos\varphi}{R\rho_2} + \dfrac{1}{r_2^2}\,, \end{cases}$$

([4]) Ved. p. es. loc. cit. in ([2]), pag. 148.

$$
(C)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_i\,\partial s_k}-\left(\frac{\cos\varphi}{R}+\frac{1}{\rho_2}\right)\left(\frac{1}{T}+\frac{\partial\varphi}{\partial s_k}\right)+\frac{\partial(1/\rho_1)}{\partial s_k}+\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s_i}=\\
&\qquad=\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\right),\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_j\,\partial s_k}-\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}+\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{T}+\frac{\partial\varphi}{\partial s_k}\right)-\frac{\partial(1/\rho_2)}{\partial s_k}+\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial s_j}=\\
&\qquad=-\frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{\cos\varphi}{R}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Osservate che la sostituzione $\begin{pmatrix} j, & -i \\ i, & j \end{pmatrix}$, che muta la terna vettoriale destrorsa $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ in un'altra consimile $(\boldsymbol{j}, -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k})$, e che — in forza delle eguaglianze (6), (7), (8), (9) — trae seco la sostituzione:

$$
\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi, & -\cos\varphi, & -\rho_2, & \rho_1, & r_2, & r_1 \\ \cos\varphi, & \operatorname{sen}\varphi, & \rho_1, & \rho_2, & r_1, & r_2 \end{pmatrix},
$$

ha per effetto di trasformare l'equazione (11) nella (12), la (20) nella (21) e la (24) in sè stessa, e di convertire la prima di ognuno dei gruppi (A), (B), (C) nella seconda. Di qui nasce che le condizioni d'esistenza per l'omog. vett. $\frac{dj}{dP}$ non ci potrebbero fornire alcun'altra relazione diversa dalle precedenti (16) ... (24).

Le (A), sottratte membro a membro, ne porgono la relazione:

$$
(A')\qquad \frac{\partial\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\right)}{\partial s_i}-\frac{\partial\left(\frac{\cos\varphi}{R}\right)}{\partial s_j}+\frac{\cos\varphi}{R\rho_1}-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R\rho_2}=0,
$$

indipendente da r_1, r_2 e T. Questa è nota nel caso speciale che le linee $\mathcal{K}$ (trajettorie ortogonali delle nostre superf. χ) sian *cerchi* (5).

§ 8. **Intorno alle famiglie di Lamé.** — Se la data famiglia $\{\chi\}$ (§ 1) fa parte d'un sistema triplo ortogonale di

(5) Loc. cit. in (2), pag. 325.

superficie, allora — grazie al teorema del DUPIN [6] — le due congruenze descritte dalle linee di curvatura $\mathcal{I}$ ed $\mathcal{J}$ delle ∞^1 superf. χ saranno necessariamente ortotomiche: onde, accanto alla (2) sussisteranno le due uguaglianze analoghe (§ 1):

$$\boldsymbol{i} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{i} = 0\,, \qquad \boldsymbol{j} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{j} = 0\,.$$

Viceversa, da queste due condizioni supposte verificate in $\}\chi\{$ — anzi da una qualunque di esse, grazie alla relazione $\boldsymbol{i} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{j}$ che dimostrammo al § 3 — consegue *ipso facto* l'esistenza di altre due famiglie di superficie rispettivam.e ortogonali alle due congruenze $\{\mathcal{I}\{$ ed $\}\mathcal{J}\{$ e per cons.a ortogonali fra loro ed a $\}\chi\{$. Ne viene che l'annullarsi d'uno qualunque dei prodotti eguali $\boldsymbol{i} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{i}$ ed $\boldsymbol{j} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{j}$ è condizione necessaria e sufficiente perché il dato sistema $\}\chi\{$ di superficie sia una famiglia di LAMÉ. Ora una tal condizione, attraverso la (15′), si trasforma subito in quest'altra:

" *Il sussistere dell'eguaglianza* $\dfrac{1}{T} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial s_k}$ *è condizione sufficiente perché il sistema* $\}\chi\{$ (§ 1) *sia una famiglia di* LAMÉ " [7].

Dalle (A) emerge altresí che ciascuna delle equazioni;

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\right)}{\partial s_i} &= \frac{\cos\varphi}{R}\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R} - \frac{1}{\rho_1}\right), \\ \frac{\partial\left(\frac{\cos\varphi}{R}\right)}{\partial s_j} &= \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}\left(\frac{\cos\varphi}{R} - \frac{1}{\rho_2}\right), \end{aligned}\right.$$

esprime, di per sè sola, che $\}\chi\{$ è una famiglia di LAMÉ, oppure una famiglia di *sfere* $(r_1 = r_2)$. Ma quest'ultima restrizione è superflua, come vedremo fra poco.

§ 9. Corrispondenza fra due superf.e χ.

— Essendo χ e χ' due superficie d'un sistema generico $\}\chi\{$ infinitamente

---

[6] Una dimostrazione vettoriale assai semplice di questo teorema è proposta da R. MARCOLONGO in " Enseignem. Mathém. ", XIVe année (1912), pag. 38.

[7] Che sia necessaria è ben noto: ved. p. es. loc. cit. in [2], p. 464.

vicine fra loro e segate nei punti P e P' da una medesima linea $\mathcal{K}$ (§ 1); si può ritenere il segmento rettilineo PP' come normale a χ in P, indi chiamare ad es. ϵ la sua lunghezza infinitesima: che sarà una certa funzione numerica di P, definita su tutta la superf.^e^ χ. E poiché nulla impedisce il subordinare ad ogni superf.^e^ χ del nostro sistema una superf.^e^ χ' come sopra, giusta una legge determinata (non importa quale) potremo intender senz'altro che detta funzione infinitesima ϵ sia data per tutti i punti P di Σ. Allora la corrispondenza fra i punti P e P' sarà compiutamente definita dalla relazione:

$$P' = P + \epsilon \boldsymbol{k} ;$$

e gli intorni di due punti omologhi P e P' n'esciranno riferiti fra loro mercé l'omogr.^a^ vettoriale (*T. l.*, [4] pag. 77):

$$\frac{dP'}{dP} = 1 + \epsilon \frac{dk}{dP} + \mathrm{H}\,(\mathrm{grad}_P\, \epsilon,\ \boldsymbol{k}). \tag{25}$$

Detti $\boldsymbol{i}'$ e $\boldsymbol{j}'$ i vettori corrispondenti ad $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, avremo dunque:

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i} + \epsilon \frac{dk}{dP} \boldsymbol{i} + (\mathrm{grad}\ \epsilon) \times \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{k} ;$$

e questo vettore, in quanto obbligato a giacere sul piano tangente a χ' in P', dovrà esser normale a ciò che diviene $\boldsymbol{k}$ in virtù dello spostamento $dP = \epsilon \boldsymbol{k}$; dunque al vettore:

$$\boldsymbol{k} + \epsilon \frac{dk}{dP} \boldsymbol{k} + \text{termini in } \epsilon^2, \epsilon^3, \ldots$$

Ma una tal condizione, cioè:

$$0 = \left\{ \boldsymbol{i} + \epsilon \frac{dk}{dP} \boldsymbol{i} + (\mathrm{grad}\ \epsilon) \times \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{k} \right\} \times$$
$$\times \left(\boldsymbol{k} + \epsilon \frac{dk}{dP} \boldsymbol{k} + \text{termini in } \epsilon^2, \epsilon^3, \ldots \right),$$

riducesi tosto a:

$$0 = \epsilon \,.\, \boldsymbol{i} \times \frac{dk}{dP} \boldsymbol{k} + (\mathrm{grad}\,\epsilon) \times \boldsymbol{i} + \text{infinitesimi d'ordine superiore};$$

per la qual cosa abbiamo:

$$\epsilon . \boldsymbol{i} \times \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} \boldsymbol{k} + (\text{grad}\, \epsilon) \times \boldsymbol{i} = 0 ,$$

o sotto altra forma ((6) § 2):

$$(26) \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dP} \boldsymbol{i} = - \frac{\cos \varphi}{R} , \text{ e al modo stesso } \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dP} \boldsymbol{j} = - \frac{\text{sen}\, \varphi}{R} .$$

Appresso consideriamo sopra una superf. χ le *linee di equidistanza*, lungo ognuna delle quali è costante il segmento infinitesimo PP'; e sia p. es.:

$$\cos \omega . \boldsymbol{i} + \text{sen}\, \omega . \boldsymbol{j}$$

il vettore unitario della tangente a queste linee. Ora poiché per ipotesi

$$\frac{d\epsilon}{dP} (\cos \omega . \boldsymbol{i} + \text{sen}\, \omega . \boldsymbol{j}) = 0 ,$$

avremo dalle (26):

$$\cos \omega . \cos \varphi + \text{sen}\, \omega . \text{sen}\, \varphi = 0 ;$$

onde il noto teorema: " La linea di equidistanza che passa per P taglia ad angolo retto il piano osculatore in P alla linea $\mathcal{K}$ dello stesso punto „ ([8]). Possiamo anche dire, grazie alle (2), (6), (7) § 2, che le linee di equidistanza sono le " linee vorticose „ della distribuzione vettoriale (P, $\boldsymbol{k}$).

Affinché la (25) definisca una *similitudine* fra gli intorni di P e P' sulle due superf. χ e χ', sarà necessario e sufficiente che, preso

$$dP = \cos \theta . \boldsymbol{i} + \text{sen}\, \theta . \boldsymbol{j} ,$$

il valore assoluto dello spostamento omologo dP' risulti indipendente da θ. Ora, poiché dalla (25) risulta, in virtù delle (3) § 2:

$$(dP')^2 = 1 - \frac{2\epsilon}{r_1} \cos^2 \theta - \frac{2\epsilon}{r_2} \text{sen}^2\, \theta + \text{termini del } 2^\circ \text{ ordine in } \epsilon ,$$

([8]) Ved. G. MORERA, *Sui sistemi di superficie e le loro trajettorie ortogonali*, " Rend. Istit. Lombardo „, vol. XIX_2 (marzo 1886).

si può tosto concludere che: " *Se* $\}\chi\{$ *è una famiglia di sfere o di piani* ($r_1 = r_2$) *ed allora soltanto, le trajettorie ortogonali* $\mathcal{K}$ *descriveranno su due superficie arbitrarie del sistema una rappresentazione conforme* " (Nel caso d'una famiglia di piani questa similitudine è addirittura un'eguaglianza metrica).

Di qui, per corollario, la nota proposizione che: " Ogni famiglia $\}\chi\{$ di piani o sfere appartiene sempre ad infiniti sistemi tripli ortogonali di superficie ". Tolti invero sopra una di quelle sfere, ad arbitrio, due sistemi ortogonali di linee, la superficie occupata dalle linee $\mathcal{K}$ che incontrano una stessa linea del primo (o secondo) sistema sarà ortogonale a tutte le sfere χ, e ortogonale a qualunque superficie occupata dalle linee $\mathcal{K}$ che incontrano una medesima linea del secondo (o primo) sistema. — Ne viene che:

" *Ciascuna delle eguaglianze* (α) *del* § 7 *esprime una condizione necessaria e sufficiente perché il dato sistema* $\}\chi\{$ *di* ∞^1 *superficie sia una famiglia di* LAMÉ " (9).

§ **10. Equazioni di Lamé.** — Nell'ipotesi $\boldsymbol{i} \times \mathrm{rot}\, \boldsymbol{i} = 0$ (§ 8) le nove equazioni (16), ... (24) (§ 5) si convertono facilmente nelle nove equazioni che intercedono fra i sei raggi principali di curvatura del sistema triplo ortogonale includente $\}\chi\{$ e le loro derivate rispetto agli archi delle linee di curvatura (10). Qui giova indicare, secondo l'uso, con $\}\chi_1\{$, $\}\chi_2\{$, $\}\chi_3\{$ le tre famiglie di superf.^{e} rispettivamente ortogonali alle congruenze $\}\mathcal{I}\{$, $\}\mathcal{J}\{$, $\}\mathcal{K}\{$ — onde $\}\chi_3\{ = \}\chi\{$ — e con $r_{2.3}$ per es. il raggio di curvatura principale della superf. χ_2 secondo la direzione della linea di curvatura comune a χ_2 e χ_1, lungo la quale varia soltanto χ_3. Avremo allora, come subito si vede:

$$r_1 = r_{3.1}, \quad r_2 = r_{3.2}, \quad \rho_1 = r_{2.1}, \quad \rho_2 = r_{1.2}, \quad R = r_{1.3} \cos\varphi = r_{2.3} \operatorname{sen}\varphi ;$$

---

(9) Ognuna di queste (α), al pari della $\frac{1}{T} + \frac{\partial\varphi}{\partial s_k} = 0$ (§ 8), è dunque atta a sostituire una nota equazione a derivate parziali del 3° ordine, mercé la quale si definiscon per solito le famiglie di Lamé riferite a coordinate cartesiane. Ved. p. es. G. DARBOUX, " *Leçons sur les systèmes ortogonaux* etc. ", t. 1^r (Paris, 1898), pag. 20.

(10) Ved. LAMÉ, " *Leçons sur les coordonnées curvilignes* " (Paris, 1855), pag. 79 e seg.^{i}; oppure G. DARBOUX, loc. cit. in (9), pag. 192.

e però dalle (22), (19), (20), (23), (21), (16), (24), (17), (18) — fattovi $\frac{1}{T}+\frac{\partial\varphi}{\partial s_k}=0$ — si ottengono ordinatamente le eguaglianze:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial(1/r_{1.2})}{\partial s_k}=\frac{1}{r_{3.2}}\left(\frac{1}{r_{1.2}}-\frac{1}{r_{1.3}}\right), \quad \frac{\partial(1/r_{2.3})}{\partial s_i}=\frac{1}{r_{1.3}}\left(\frac{1}{r_{2.3}}-\frac{1}{r_{2.1}}\right), \\ \frac{\partial(1/r_{3.1})}{\partial s_j}=\frac{1}{r_{2.1}}\left(\frac{1}{r_{3.1}}-\frac{1}{r_{3.2}}\right); \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial(1/r_{2.1})}{\partial s_k}=\frac{1}{r_{3.1}}\left(\frac{1}{r_{2.1}}-\frac{1}{r_{2.3}}\right), \quad \frac{\partial(1/r_{3.2})}{\partial s_i}=\frac{1}{r_{1.2}}\left(\frac{1}{r_{3.2}}-\frac{1}{r_{3.1}}\right), \\ \frac{\partial(1/r_{1.3})}{\partial s_j}=\frac{1}{r_{2.3}}\left(\frac{1}{r_{1.3}}-\frac{1}{r_{1.2}}\right); \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial(1/r_{1.2})}{\partial s_i}+\frac{\partial(1/r_{2.1})}{\partial s_j}=\frac{1}{r^2_{1.2}}+\frac{1}{r^2_{2.1}}+\frac{1}{r_{3.1}\,r_{3.2}}, \\ \frac{\partial(1/r_{2.3})}{\partial s_j}+\frac{\partial(1/r_{3.2})}{\partial s_k}=\frac{1}{r^2_{2.3}}+\frac{1}{r^2_{3.2}}+\frac{1}{r_{1.2}\,r_{1.3}}, \\ \frac{\partial(1/r_{3.1})}{\partial s_k}+\frac{\partial(1/r_{1.3})}{\partial s_i}=\frac{1}{r^2_{3.1}}+\frac{1}{r^2_{1.3}}+\frac{1}{r_{2.3}\,r_{2.1}}: \end{array}\right.$$

che sono appunto le equazioni di Lamé, potendosi leggere s_1, s_2, s_3 dov'è scritto s_i, s_j, s_k; ecc. — Le relazioni (16), ..., (24) — e con esse le (A), (B), (C) — possono dunque aversi come una generalizzazione di codeste equazioni fondamentali.

Agosto 1912.

Sopra alcuni operatori differenziali omografici.

Nota del Dott. ANGELO PENSA

1. Se α, β sono omografie, funzioni del punto P, variabile in un campo continuo a tre dimensioni [1], ed a è un vettore costante, allora i *numeri* e *vettori*

$$I_1\left(\alpha\,.\,\frac{d(\beta a)}{dP}\right),\quad I_1\left(\alpha\,.\,\frac{d\beta}{dP}\,a\right),\quad 2V\left(\alpha\,.\,\frac{d(\beta a)}{dP}\right),\quad 2V\left(\alpha\,.\,\frac{d\beta}{dP}\,a\right)$$

[1] Per campi piani, le formole che daremo, subiscono modificazioni che facilmente si deducono da quanto il prof. M. Bottasso ha esposto nella sua Memoria: *Omografie vettoriali nel piano* (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, 1912).

sono funzioni lineari di $\boldsymbol{a}$, e quindi, in virtù di un noto teorema (*T. l.*, Intr. au Chap. II, n. 1, pag. 55) (1), essi possono essere messi sotto la forma:

$$\Upsilon \boldsymbol{a},$$

ove Υ è un conveniente operatore, per ciascuna delle quattro espressioni, funzione di α e β soltanto.

2. Ci proponiamo di trovare l'operatore Υ nei quattro casi considerati.

Dimostreremo perciò il seguente primo gruppo di formole (di cui le prime quattro risolvono il problema proposto):

$$(1)\qquad I_1\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta\boldsymbol{a})}{dP}\right) = \{\operatorname{grad}(\mathrm{K}\beta \,.\, \mathrm{K}\alpha) - \mathrm{K}\beta \operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha\} \times \boldsymbol{a},$$

$$(2)\qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta\boldsymbol{a})}{dP}\right) = \{\operatorname{Rot}(\alpha\beta) - (\operatorname{Rot}\alpha)\beta\}\boldsymbol{a},$$

$$(3)\qquad I_1\left(\alpha \,.\, \frac{d\beta}{dP}\boldsymbol{a}\right) = [\alpha \operatorname{grad}\beta + 2\mathrm{V}\{\operatorname{Rot}(\alpha\beta) - (\operatorname{Rot}\alpha)\beta\}] \times \boldsymbol{a},$$

$$(4)\qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha \,.\, \frac{d\beta}{dP}\boldsymbol{a}\right) = [-(\operatorname{Rot}\mathrm{K}\beta)\mathrm{K}\alpha - \mathrm{C}\{\operatorname{Rot}(\alpha\beta) - (\operatorname{Rot}\alpha)\beta\}]\boldsymbol{a},$$

$$(5)\qquad I_1\left(\alpha \,.\, \mathrm{K}\frac{d(\beta\boldsymbol{a})}{dP}\right) = \{\operatorname{grad}(\mathrm{K}\beta.\mathrm{K}\alpha) - \mathrm{K}\beta\operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha + 2(\mathrm{K}\operatorname{Rot}\beta)\mathrm{V}\alpha\} \times \boldsymbol{a},$$

$$(6)\qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha \,.\, \mathrm{K}\frac{d(\beta\boldsymbol{a})}{dP}\right) = \{\operatorname{Rot}(\alpha\beta) - (\operatorname{Rot}\alpha)\beta - \mathrm{C}\,\mathrm{K}\alpha\operatorname{Rot}\beta\}\boldsymbol{a}.$$

Dim. (1). — Se nella seconda delle [3] del n. 41 di *T. l.* si pone $\boldsymbol{u} = \beta\boldsymbol{a}$, si ha:

$$\begin{aligned} I_1\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta\boldsymbol{a})}{dP}\right) &= \operatorname{div}(\alpha\beta\boldsymbol{a}) - \operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha \times \beta\boldsymbol{a} = &&\left\{\begin{matrix} T.\,l., \text{ n. } 38, [3] \\ \text{» } \text{ n. } 15, [1] \end{matrix}\right\} \text{(2)} \\ &= \operatorname{grad}\mathrm{K}(\alpha\beta) \times \boldsymbol{a} - \mathrm{K}\beta \operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha \times \boldsymbol{a} = &&\{T.\,l., \text{n. } 16, [1]\} \\ &= \{\operatorname{grad}(\mathrm{K}\beta \,.\, \mathrm{K}\alpha) - \mathrm{K}\beta \,.\operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha\} \times \boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

---

(1) Con l'abbreviazione *T. l.* indichiamo il volume: ***Transformations linéaires*** di C. Burali-Forti e R. Marcolongo, primo della serie dal titolo: *Analyse vectorielle générale* (Mattei e C., Pavia, 1912).

(2) Queste indicazioni dicono che per passare dal risultato scritto di fianco, al successivo, occorre applicare la formola [3] del n. 38 e la [1] del n. 15 di *T. l.* Similmente per le indicazioni analoghe che verranno in seguito.

DIM. (2). — Nella prima delle [3] del n. 41, di *T. l.*, si ponga $\boldsymbol{u} = \beta \boldsymbol{a}$. Si avrà:

$$2V\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta \boldsymbol{a})}{dP}\right) = \text{rot}\,(\alpha\beta\boldsymbol{a}) - (\text{Rot}\,\alpha)\beta\boldsymbol{a} = \qquad \} \textit{T. l.}, \text{n. } 38, [4] \{$$
$$= \}\, \text{Rot}(\alpha\beta) - (\text{Rot}\,\alpha)\,\beta \,\{\, \boldsymbol{a} \,.$$

DIM. (3). — Dalla prima delle [1′] del n. 11 di *T. l.* si ha, essendo $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ tre vettori di un sistema ortogonale destrorso:

$$I_1\left(\alpha \,.\, \frac{d\beta}{dP}\,\boldsymbol{a}\right) = \boldsymbol{i} \times \alpha\left(\frac{d\beta}{dP}\,\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{i} + \ldots = \qquad \} \textit{T. l.}, \text{n. } 36, [1''] \{$$

$$= \boldsymbol{i} \times \alpha\,\frac{d(\beta\boldsymbol{i})}{dP}\,\boldsymbol{a} + \ldots = \qquad \} \textit{T. l.}, \text{n. } 9, [1], [2] \{$$

$$= \boldsymbol{i} \times K\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta\boldsymbol{i})}{dP}\right)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{i} \times 2V\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta\boldsymbol{i})}{dP}\right) \wedge \boldsymbol{a} + \ldots = \qquad \} \textit{T. l.}, \text{n. } 16, [1] \{$$

$$= \boldsymbol{i} \times K\,\frac{d(\beta\boldsymbol{i})}{dP} \,.\, K\alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{i} \wedge 2V\left(\alpha\,\frac{d(\beta\boldsymbol{i})}{dP}\right) \times \boldsymbol{a} + \ldots = \qquad \} \textit{T. l.}, \text{n. } 15, [1] \{$$

$$= \frac{d(\beta\boldsymbol{i})}{dP}\,\boldsymbol{i} \times K\alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{i} \wedge 2V\left(\alpha\,\frac{d(\beta\boldsymbol{i})}{dP}\right) \times \boldsymbol{a} + \ldots = \qquad \left\{ \begin{matrix} \text{per la (2); (}^1\text{)} \\ \textit{T. l.}, \text{n. } 38, [3''] \end{matrix} \right\}$$

$$= \text{grad}\,\beta \times K\alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{i} \wedge \{\, \text{Rot}\,(\alpha\beta) - (\text{Rot}\,\alpha)\,\beta \,\}\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{a} + \ldots = \qquad \left\{ \begin{matrix} \textit{T. l.}, \text{n. } 11, [2'] \\ \text{"} \quad \text{n. } 15, [1] \end{matrix} \right\}$$

$$= [\alpha\,\text{grad}\,\beta + 2V \,\}\, \text{Rot}\,(\alpha\beta) - (\text{Rot}\,\alpha)\,\beta \,\}] \times \boldsymbol{a}.$$

DIM. (4). — Dalla formola [2] del n. 8 di *T. l.* si ha, indicando con $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ due vettori qualunque:

$$2V\left(\alpha \,.\, \frac{d\beta}{dP}\,\boldsymbol{a}\right) \times \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \times \left(\alpha\,\frac{d\beta}{dP}\,\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \times \left(\alpha\,\frac{d\beta}{dP}\,\boldsymbol{a}\right)\boldsymbol{y} = \qquad \} \textit{T. l.}, \text{n. } 36, [1''] \{$$

$$= \boldsymbol{y} \times \alpha\,\frac{d(\beta\boldsymbol{x})}{dP}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x} \times \alpha\,\frac{d(\beta\boldsymbol{y})}{dP}\,\boldsymbol{a} = \qquad \} \textit{T. l.}, \text{n. } 15, [1] \{$$

$$= \boldsymbol{a} \times K\left[\alpha \,.\, \frac{d(\beta\boldsymbol{x})}{dP}\right]\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a} \times K\left[\alpha \,.\, \frac{d(\beta\boldsymbol{y})}{dP}\right]\boldsymbol{x} = \qquad \} \textit{T. l.}, \text{n. } 9, [1], [2] \{$$

(1) Cioè per la formola (2) qui dimostrata. Similmente per analoghe indicazioni che verranno in seguito.

$$= a \times \left[\alpha \,.\, \frac{d(\beta x)}{dP}\, y - \alpha \,.\, \frac{d(\beta y)}{dP}\, x\right] -$$

$$- a \times \left\{ 2V\left[\alpha \,.\, \frac{d(\beta x)}{dP}\right] \wedge y - 2V\left[\alpha \,.\, \frac{d(\beta y)}{dP}\right] \wedge x \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T.\,l., \text{ n. } 36, [1''] \\ \quad " \quad \text{n. } 38, [4'] \end{array} \right\}$$

$$= - a \times \alpha\, \mathrm{KRotK}\beta\, (x \wedge y) -$$

$$- \left\{ 2V\left[\alpha \,.\, \frac{d(\beta x)}{dP}\right] \wedge y - 2V\left[\alpha \,.\, \frac{d(\beta y)}{dP}\right] \wedge x \right\} \times a =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{per la } (2); \\ T.\,l., \text{ n. } 15, [1] \\ \quad " \quad \text{n. } 17, [5] \end{array} \right\}$$

$$= - (x \wedge y) \times (\mathrm{Rot\,K}\beta) \,.\, \mathrm{K}\alpha a - \{([\mathrm{Rot}(\alpha\beta) - (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\beta]\, x) \wedge y -$$

$$- [(\mathrm{Rot}\,(\alpha\beta) - (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\beta]\, y) \wedge x \} \times a = \quad \{ T.\,l., \text{ n. } 19, [1'] \}$$

$$= - (x \wedge y) \times (\mathrm{Rot\,K}\beta) \,.\, \mathrm{K}\alpha a -$$

$$- \mathrm{CK}\, [\mathrm{Rot}\,(\alpha\beta) - (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\beta] (x \wedge y) \times a = \quad \{ T.\,l., \text{ n. } 15, [1] \}$$

$$= \{ - (\mathrm{Rot\,K}\beta) \,.\, \mathrm{K}\alpha a - \mathrm{C}\, [\mathrm{Rot}\,(\alpha\beta) - (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\beta]\, a \} \times x \wedge y \,.$$

Ed essendo x ed y due vettori arbitrarii, sarà:

$$2V\left(\alpha \,.\, \frac{d\beta}{dP}\, a\right) = \{ - (\mathrm{Rot\,K}\beta) \,.\, \mathrm{K}\alpha - \mathrm{C}\, [\mathrm{Rot}\,(\alpha\beta) - (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\beta] \}\, a \,.$$

Dim. (5). — Applicando l'identità:

$$\mathrm{K}\gamma = \gamma - 2\mathrm{V}\gamma \wedge \qquad \{ T.\,l., \text{ n. } 9, [1], [2] \}$$

ove si ponga $\frac{d(\beta a)}{dP}$ al posto di γ, si ottiene $\mathrm{K}\,\frac{d(\beta a)}{dP}$; e quindi:

$$\mathrm{I}_1\left(\alpha \,.\, \mathrm{K}\,\frac{d(\beta a)}{dP}\right) = \mathrm{I}_1 \left\{ \alpha\, \frac{d(\beta a)}{dP} - \alpha \,.\, 2\mathrm{V}\left(\frac{d(\beta a)}{dP}\right) \wedge \right\} = \left\{ \begin{array}{l} T.\,l., \text{ n. } 37, [1] \\ \quad " \quad \text{n. } 38, [4] \end{array} \right\}$$

$$= \mathrm{I}_1\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta a)}{dP}\right) - \mathrm{I}_1 \{ \alpha \,.\, (\mathrm{Rot}\beta\, a) \wedge \} = \quad \{ T.\,l., \text{ n. } 25, [1] \}$$

$$= \mathrm{I}_1\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta a)}{dP}\right) - \mathrm{I}_1 \{ (\mathrm{Rot}\beta\, a) \wedge \alpha \} = \quad \{ T.\,l., \text{ n. } 23, [1] \}$$

$$= \mathrm{I}_1\left(\alpha \,.\, \frac{d(\beta a)}{dP}\right) + 2\, (\mathrm{Rot}\beta\, a) \times \mathrm{V}\alpha = \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per la } (1); \\ T.\,l., \text{ n. } 15, [1] \end{array} \right\}$$

$$= \{ \mathrm{grad}\, (\mathrm{K}\beta \,.\, \mathrm{K}\alpha) - \mathrm{K}\beta\, \mathrm{grad}\mathrm{K}\alpha + 2(\mathrm{K\,Rot}\,\beta)\, \mathrm{V}\alpha \} \times a.$$

Dim. (6). — Calcolando $K \frac{d(\beta a)}{dP}$ come nella precedente dimostrazione, avremo:

$$2V\left(\alpha . K \frac{d(\beta a)}{dP}\right) = 2V \left\{ \alpha \frac{d(\beta a)}{dP} - \alpha . (\text{Rot}\beta a) \wedge \right\} = \quad \left\{ \begin{array}{l} T. l., \text{ n. } 17, [2] \\ \text{ ,, n. } 16, [1] \\ \text{ ,, n. } 12, [2] \end{array} \right\}$$

$$= 2V\left(\alpha . \frac{d(\beta a)}{dP}\right) - 2V\{(\text{Rot}\beta a) \wedge K\alpha\} = \quad \{ T. l., \text{ n. } 23, [2] \}$$

$$= 2V\left(\alpha . \frac{d(\beta a)}{dP}\right) - CK\alpha . \text{Rot}\beta\, a = \quad \{ \text{per la } (2) \}$$

$$= \{ \text{Rot}(\alpha\beta) - (\text{Rot}\,\alpha)\,\beta - CK\alpha . \text{Rot}\,\beta \}\, a .$$

3. Dalle formole (1), ... (6) ora dimostrate si possono ricavare immediatamente le seguenti altre sei, che si prestano anch'esse, come le prime, a numerose applicazioni.

$$(1') \quad I_1 \left(\frac{d(\alpha a)}{dP} . \beta \right) = \{ \text{grad}(K\alpha . K\beta) - K\alpha . \text{grad}K\beta \} \times a ,$$

$$(2') \quad 2V\left(\frac{d(\alpha a)}{dP} . \beta \right) = -\{ \text{Rot}(K\beta . \alpha) - (\text{Rot}\,K\beta) . \alpha - C\beta\,\text{Rot}\,\alpha \}\, a ,$$

$$(3') \quad I_1 \left(\frac{d\alpha}{dP}\, a . \beta \right) = [\beta\, \text{grad}\,\alpha + 2V \{ \text{Rot}(\beta\alpha) - (\text{Rot}\beta)\,\alpha \}] \times a ,$$

$$(4') \quad 2V\left(\frac{d\alpha}{dP}\, a . \beta \right) = [(\text{Rot}\,\alpha)\,\beta + C\{ \text{Rot}(K\beta . K\alpha) - (\text{Rot}\,K\beta)\,K\alpha \}]\, a ,$$

$$(5') \quad I_1 \left(K \frac{d(\alpha a)}{dP} . \beta \right) = \{ \text{grad}(K\alpha . K\beta) - K\alpha . \text{grad}K\beta + 2(K\,\text{Rot}\,\alpha)\,V\beta \} \times a ,$$

$$(6') \quad 2V\left(K \frac{d(\alpha a)}{dP} . \beta \right) = -\{ \text{Rot}(K\beta . \alpha) - (\text{Rot}\,K\beta)\,\alpha \}\, a .$$

Dim. (1'). — Dalla (1), per la [1] del n. 25 di *T. l.*, segue:

$$I_1\left(\frac{d(\alpha a)}{dP} . \beta \right) = I_1\left(\beta . \frac{d(\alpha a)}{dP} \right) = \{ \text{grad}(K\alpha . K\beta) - K\alpha\, \text{grad}\, K\beta \} \times a .$$

Dim. (2'). — Siccome

$$V\gamma = -VK\gamma \qquad \{ T. l., \text{ n. } 17, [2] \}$$

così, per la [1] del n. 16 di *T. l.*, sarà:

$$2V\left(\frac{d(\alpha \boldsymbol{a})}{dP}.\beta\right) = -2V\left\{K\beta . K\frac{d(\alpha \boldsymbol{a})}{dP}\right\} = \quad \text{\} per la (6) \{}$$

$$= -\{\mathrm{Rot}(K\beta . \alpha) - (\mathrm{Rot}\, K\beta)\,\alpha - C\,\mathrm{Rot}\alpha\}\,\boldsymbol{a}.$$

Dim. (3′). — Per la [1] del n. 25 di *T. l.*, e per la (3), qui dimostrata, si ha:

$$I_1\left(\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{a}.\beta\right) = I_1\left(\beta . \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{a}\right) =$$

$$= [\beta\,\mathrm{grad}\,\alpha + 2V\{\mathrm{Rot}(\beta\alpha) - (\mathrm{Rot}\,\beta)\,\alpha\}] \times \boldsymbol{a}.$$

Dim. (4′). — Per la formola [2] del n. 17 e per la [1] del n. 14 di *T. l.*, si ha:

$$2V\left(\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{a}.\beta\right) = -2V\left\{K\beta . K\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{a}\right\} = \quad \text{\} T. l., n. 35, [4] \{}$$

$$= -2V\left\{K\beta . \frac{d\,K\alpha}{dP}\boldsymbol{a}\right\} = \quad \text{\} per la (4) \{}$$

$$= [(\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\beta + C\{\mathrm{Rot}(K\beta . K\alpha) - (\mathrm{Rot}\,K\beta)\,K\alpha\}]\,\boldsymbol{a}.$$

Dim. (5′). — La formola (5), per la [1] del n. 25 di *T. l.*, ci dà:

$$I_1\left(K\frac{d(\alpha \boldsymbol{a})}{dP}.\beta\right) = I_1\left(\beta . K\frac{d(\alpha \boldsymbol{a})}{dP}\right) =$$

$$= \{\mathrm{grad}(K\alpha . K\beta) - K\alpha\,\mathrm{grad}K\beta + 2(K\,\mathrm{Rot}\alpha)\,V\beta\} \times \boldsymbol{a}.$$

Dim. (6′). — Per la [2] del n. 17 di *T. l.*, e per la [1] del n. 16, si ha:

$$2V\left(K\frac{d(\alpha \boldsymbol{a})}{dP}.\beta\right) = -2V\left\{K\beta . \frac{d(\alpha \boldsymbol{a})}{dP}\right\} = \quad \text{\} per la (2) \{}$$

$$= -\{\mathrm{Rot}(K\beta . \alpha) - (\mathrm{Rot}\,K\beta)\,\alpha\}\,\boldsymbol{a}.$$

Torino, Novembre 1912.

Equazione differenziale delle congruenze W.

Nota di GUSTAVO SANNIA

I.

1. Detti X, Y, Z i coseni direttori di una retta r con assegnato verso positivo ed x, y, z le coordinate di un suo punto, le sei quantità

$$(1) \qquad X, Y, Z, l = yZ - zY, \; m = zX - xZ, \; n = xY - yX,$$

legate dalle relazioni

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

$$(3) \qquad Xl + Ym + Zn = 0,$$

sono le *coordinate radiali* di r. Se esse sono funzioni di due parametri u, v, la retta r genera una congruenza.

È noto che " affinchè la congruenza sia W (cioè sia tale che sulle due falde della sua superficie focale si corrispondano le *asintotiche*) è necessario e sufficiente che le (1) soddisfino una medesima equazione alle derivate parziali del tipo

$$(4) \qquad \alpha_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \alpha \varphi = 0 \text{ ''}.$$

Questo teorema del Darboux (*) permette di constatare se una data congruenza è W o pur no, ma non si presta alla ricerca delle congruenze W. In questa *Nota* trasformo opportunamente il teorema per ottenere l'equazione differenziale delle congruenze W e l'equazione differenziale delle congruenze W contenute in un *complesso*. Infine dimostro che una nota proprietà dei complessi *lineari* è caratteristica per essi.

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 345.

2. La trasformazione consiste essenzialmente nel sostituire alle coordinate radiali certe altre coordinate che di poco ne differiscono.

Osservo perciò che, fissate le funzioni $X\, Y\, Z$ soddisfacenti la (2), la relazione (3) risulta soddisfatta se vi si pone

$$(5) \qquad l = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}, \quad m = a\frac{\partial Y}{\partial u} + b\frac{\partial Y}{\partial v}, \quad n = a\frac{\partial Z}{\partial u} + b\frac{\partial Z}{\partial v},$$

ove a e b sono funzioni qualunque di u, v. Viceversa, se l, m, n sono tre funzioni di u, v soddisfacenti la (3), è possibile porle, ed in un sol modo, sotto la forma (5) (*), purchè la matrice

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

abbia la caratteristica *due*, cioè purchè u, v sieno parametri essenziali per X, Y, Z.

Dunque per individuare una congruenza basta assegnare le cinque funzioni di u, v.

$$(7) \qquad X, Y, Z, a, b,$$

delle quali le prime tre sono legate dalla relazione (2) e le rimanenti sono affatto indipendenti tra loro e dalle precedenti (**).

(*) Calcolando le a, b mediante le equazioni (5) che, per le (2) e (3), si riducono a due indipendenti al più.

(**) Ho già dimostrato l'utilità di queste coordinate (7) nella Nota: *Nuovo metodo per lo studio delle congruenze e dei complessi di raggi.* " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", t. XXXIII, 1912. Veramente in essa ho adoperato, in luogo delle a, b, certe altre funzioni A, B; ma queste non ne differiscono sostanzialmente, in quanto che le A, B sono combinazioni lineari delle a, b, e viceversa. Precisamente:

$$(a) \qquad a = \frac{FB - GA}{EG - F^2}, \qquad b = \frac{FA - EB}{EG - F^2},$$
$$A = -Ea - Fb, \qquad B = -Fa - Gb.$$

I coefficienti E, F, G sono formati con le derivate prime di X, Y, Z, come è espresso dalla (8).

Però vanno escluse le stelle improprie e le congruenze i cui raggi si appoggiano ad una curva all'infinito, poichè per esse la matrice (6) ha una caratteristica minore di 2. Ma queste congruenze non hanno interesse nella presente ricerca, perchè una almeno delle loro falde focali degenera in una curva o in un punto.

È utile osservare che, per ottenere mediante le funzioni (7) tutte le congruenze possibili, non è necessario far variare tutte queste funzioni, ma basta tener fisse le funzioni X, Y, Z e poi far variare in tutti i modi possibili le rimanenti funzioni a, b.

3. Posto

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{8}$$

è noto (*) che X, Y, Z sono tre soluzioni del sistema

$$\left\{\begin{aligned} \xi(\varphi) &\equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\varphi = 0\,, \\ \eta(\varphi) &\equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + F\varphi = 0\,, \\ \zeta(\varphi) &\equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \left\{ {22 \atop 1} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left\{ {22 \atop 2} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\varphi = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

ove i coefficienti $\left\{ {rs \atop t} \right\}$ sono i ben noti simboli di CHRISTOFFEL formati con i coefficienti della forma (8) e con le loro derivate prime.

Ora è facile vedere che, se l'equazione differenziale (4) è soddisfatta dalle funzioni X, Y, Z, essa è necessariamente una combinazione lineare delle (9).

Infatti, se X, Y, Z sono soluzioni delle (4) e (9), saranno anche soluzioni dell'equazione che si deduce da esse eliminando le derivate seconde:

$$\begin{aligned} &\left[\alpha_{11}\left\{ {11 \atop 1} \right\} + \alpha_{12}\left\{ {12 \atop 1} \right\} + \alpha_{22}\left\{ {22 \atop 1} \right\} + \alpha_1\right] \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \\ &+ \left[\alpha_{11}\left\{ {11 \atop 2} \right\} + \alpha_{12}\left\{ {12 \atop 2} \right\} + \alpha_{22}\left\{ {22 \atop 2} \right\} + \alpha_2\right] \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \\ &+ (\alpha - E\alpha_{11} - F\alpha_{12} - G\alpha_{22})\,\varphi = 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

(*) Cfr. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, 2ª ed., vol. I, § 72.

Ora, essendo

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z \end{vmatrix}^2 = EG - F^2 \neq 0 ,$$

poichè la forma (8) è *definita*, ne segue che son necessariamente nulli i coefficienti della (10), e però che la (4) è una combinazione lineare delle (9):

$$(12)\qquad \alpha_{11}\,\xi(\varphi) + \alpha_{12}\,\eta(\varphi) + \alpha_{22}\,\zeta(\varphi) = 0.$$

Ciò posto, affinchè la congruenza definita dalle (7) sia W, occorre e basta, pel teorema di DARBOUX, che la (12) sia soddisfatta anche dalle rimanenti coordinate radiali l, m, n; affinchè ciò accada è necessario e sufficiente che sia

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \xi(l) & \eta(l) & \zeta(l) \\ \xi(m) & \eta(m) & \zeta(m) \\ \xi(n) & \eta(n) & \zeta(n) \end{vmatrix} = 0.$$

Or dobbiamo eliminare le funzioni l, m, n ed' introdurre le a, b.

Dalla prima delle (5) si ha

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + a\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v}$$

ed eliminando le derivate seconde mediante le prime due equazioni (9) (nelle quali si ponga $\varphi = X$), si ha

$$(14)\qquad \frac{\partial l}{\partial u} = \left[\frac{\partial a}{\partial u} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} a + \left\{ {12 \atop 1} \right\} b\right]\frac{\partial X}{\partial u} + \\ + \left[\frac{\partial b}{\partial u} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} a + \left\{ {12 \atop 2} \right\} b\right]\frac{\partial X}{\partial v} - (Ea + Fb)\,X;$$

analogamente si trova che

$$(15)\qquad \frac{\partial l}{\partial v} = \left[\frac{\partial a}{\partial v} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} a + \left\{ {22 \atop 1} \right\} b\right]\frac{\partial X}{\partial u} + \\ + \left[\frac{\partial b}{\partial v} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} a + \left\{ {22 \atop 2} \right\} b\right]\frac{\partial X}{\partial v} - (Fa + Gb)\,X.$$

Derivando la (14) rispetto ad u, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial u^2} = &\left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} + 2\left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial a}{\partial u} + 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial b}{\partial u} + \right.\\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {11 \atop 1} \right\} + \left\{ {11 \atop 1} \right\}^2 + \left\{ {11 \atop 2} \right\}\left\{ {12 \atop 1} \right\} - E \right] a + \\ &\left. + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {12 \atop 1} \right\} + \left\{ {11 \atop 1} \right\}\left\{ {12 \atop 1} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}\left\{ {12 \atop 1} \right\} - F \right] b \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \\ &+ \left\{ \frac{\partial^2 b}{\partial u^2} + 2\left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial a}{\partial u} + 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial b}{\partial u} + \right.\\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {11 \atop 2} \right\} + \left\{ {11 \atop 1} \right\}\left\{ {11 \atop 2} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \right] a + \\ &\left. + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {12 \atop 2} \right\} + \left\{ {11 \atop 2} \right\}\left\{ {12 \atop 1} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}^2 \right] b \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - \\ &- \left\{ 2E \frac{\partial a}{\partial u} + 2F \frac{\partial b}{\partial u} + \left[\frac{\partial E}{\partial u} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} E + \left\{ {11 \atop 2} \right\} F \right] a + \right.\\ &\left. + \left[\frac{\partial F}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} E + \left\{ {12 \atop 2} \right\} F \right] b \right\} X.\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori di $\frac{\partial l}{\partial u}$, $\frac{\partial l}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 l}{\partial u^2}$ in $\Xi(l)$ e tenendo presenti le identità (*)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {12 \atop 2} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}^2 - \left\{ {11 \atop 1} \right\}\left\{ {12 \atop 2} \right\} + \left\{ {11 \atop 2} \right\}\left\{ {12 \atop 1} \right\} - \left\{ {11 \atop 2} \right\}\left\{ {22 \atop 2} \right\} + E = \frac{\partial}{\partial v}\left\{ {11 \atop 2} \right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {12 \atop 1} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}\left\{ {12 \atop 1} \right\} - \left\{ {11 \atop 2} \right\}\left\{ {22 \atop 1} \right\} - F = \frac{\partial}{\partial v}\left\{ {11 \atop 1} \right\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} E + \left(\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \right) F - \left\{ {11 \atop 2} \right\} G = \frac{\partial E}{\partial v},$$

si trova

$$\begin{aligned}\Xi(l) = &\left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial a}{\partial u} - \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial a}{\partial v} + 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial b}{\partial u} + a \frac{\partial}{\partial u}\left\{ {11 \atop 1} \right\} + \right.\\ &\left. + b \frac{\partial}{\partial v}\left\{ {11 \atop 1} \right\} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \frac{\partial^2 b}{\partial u^2} + 2\left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial a}{\partial u} + \left(2\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \right) \frac{\partial b}{\partial u} - \right.\\ &\left. - \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial b}{\partial v} + a \frac{\partial}{\partial u}\left\{ {11 \atop 2} \right\} + b \frac{\partial}{\partial v}\left\{ {11 \atop 2} \right\} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - \\ &- \left(2E \frac{\partial a}{\partial u} + 2F \frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial u} a + \frac{\partial E}{\partial v} b \right) X.\end{aligned}$$

(*) Ciascuna delle prime due esprime che la forma differenziale quadratica (8) ha la curvatura 1; la terza è una delle due formole di CODAZZI applicata alla sfera (2), il cui elemento lineare è definito dalla (8). (Confrontare BIANCHI, loc. cit., §§ 37 e 56

Analogamente si calcolano $\eta(l)$, $\zeta(l)$. Insomma si hanno le formole:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi(l) &= c_{11}\frac{\partial X}{\partial u} + c_{12}\frac{\partial X}{\partial v} + c_{13}X, \\ \eta(l) &= c_{21}\frac{\partial X}{\partial u} + c_{22}\frac{\partial X}{\partial v} + c_{23}X, \\ \zeta(l) &= c_{31}\frac{\partial X}{\partial u} + c_{32}\frac{\partial X}{\partial v} + c_{33}X, \end{aligned}\right.$$

e le analoghe in m, Y ed in n, Z, dove

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} c_{11} = {} & \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial v} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial u} + \\ & + a\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + b\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}, \\ c_{21} = {} & \frac{\partial^2 a}{\partial u\partial v} + \left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial a}{\partial v} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial v} + \\ & + a\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + b\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \\ c_{31} = {} & \frac{\partial^2 a}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial u} + \left(2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial a}{\partial v} + 2\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial v} + \\ & + a\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + b\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}, \end{aligned}\right.$$

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} c_{12} = {} & \frac{\partial^2 b}{\partial u^2} + 2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial u} + \left(2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial b}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial v} + \\ & + a\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + b\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \\ c_{22} = {} & \frac{\partial^2 b}{\partial u\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial v} + \left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial b}{\partial u} + \\ & + a\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + b\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \\ c_{32} = {} & \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial v} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial v} + \\ & + a\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + b\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}, \end{aligned}\right.$$

$$
(19)\quad \begin{cases} c_{13} = 2E\dfrac{\partial a}{\partial u} + 2F\dfrac{\partial b}{\partial u} + a\dfrac{\partial E}{\partial u} + b\dfrac{\partial E}{\partial v}, \\[2mm] c_{23} = F\dfrac{\partial a}{\partial u} + E\dfrac{\partial a}{\partial v} + G\dfrac{\partial b}{\partial u} + F\dfrac{\partial b}{\partial v} + a\dfrac{\partial F}{\partial u} + b\dfrac{\partial F}{\partial v}, \\[2mm] c_{33} = 2F\dfrac{\partial a}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial b}{\partial v} + a\dfrac{\partial G}{\partial u} + b\dfrac{\partial G}{\partial v} \quad (^*). \end{cases}
$$

In virtù delle (16) e delle analoghe in m, n, il determinante primo membro della (13) è il prodotto del determinante (non nullo) che comparisce nel primo membro della (11) pel determinante formato con le c_{rs}; dunque l'equazione (13) si riduce a

$$
(20)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 0 .
$$

La (20) *è la condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza definita dalle coordinate* (7) *sia* W.

4. Il determinante (20) è un polinomio nelle funzioni a, b e nelle loro derivate parziali prime e seconde, ed è inoltre lineare nelle derivate seconde di ciascuna funzione; i coefficienti son formati con quelli della forma (8) e con le loro derivate.

Fissate ad arbitrio tre funzioni X, Y, Z di u, v soddisfacenti la (2), risulta individuata la forma (8) e quindi l'equazione (20): *ad ogni coppia di funzioni* a, b *soddisfacenti la* (20) *corrisponde una congruenza* W *e viceversa*; *dunque la* (20) *è l'equazione differenziale delle congruenze* W.

(*) Le c_{13}, $2c_{23}$, c_{33} sono i coefficienti della forma differenziale

$$- 2\mu = c_{13}\,du^2 + 2c_{23}\,du\,dv + c_{33}\,dv^2.$$

μ rappresenta il *momento* di due raggi infinitamente vicini (u, v), $(u + du, v + dv)$ della congruenza. Infatti μ è dato dalla formola (cfr. la Nota citata dei " Rend. di Palermo ", § 6)

$$
-\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} A - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} B\right) du^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} - 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} A - 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} B\right) du\,dv + \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} A - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} B\right) dv^2;
$$

sostituendo alle A, B le a, b mediante le (a), si cade nella formola precedente.

5. Cerchiamo in particolare le congruenze *W normali*. La condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni (7) individuino una congruenza normale è che le a, b abbiano la forma

$$(21) \qquad a = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\partial t}{\partial v}, \qquad b = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\partial t}{\partial u},$$

essendo t una funzione arbitraria di u, v, che rappresenta la distanza del piano tangente di una superficie S ortogonale ai raggi dall'origine; sicchè

$$X, Y, Z, t$$

sono le *coordinate tangenziali* (di WEINGARTEN) della superficie S (*).

Per le (21), le c_{rs} diventano funzioni lineari delle derivate prime, seconde e terze di t, che non trascriveremo per brevità. Sostituendole nella (20), si ha un'equazione alle derivate parziali del terzo ordine, che *è l'equazione differenziale delle congruenze* W *normali* (o *delle superficie* W ad esse ortogonali).

II.

6. Le coordinate (7) possono servire anche nello studio dei complessi (i cui raggi determinino ∞^2 direzioni), ma in tal caso esse saranno funzioni di tre parametri u, v, w. Però questi non saranno essenziali per X, Y, Z, quindi sarà lecito supporre senz'altro che queste dipendano dai soli parametri u, v. Insomma un complesso si può ritenere rappresentato da cinque funzioni

$$(22) \qquad X(u, v), \ Y(u, v), \ Z(u, v), \ a(u, v, w), \ b(u, v, w),$$

(*) Per tutto ciò cfr. la Nota citata dei " Rend. di Palermo ". Ivi si trovano le formole

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{EB - FA}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{FB - GA}{\sqrt{EG - F^2}}$$

che, per le (a), equivalgono alle (21).

di cui le prime tre soddisfino la relazione (1). E, fissate le prime tre, si passerà da un complesso ad un altro facendo variare soltanto le altre due a, b.

Una equazione fra u, v, w determinerà una congruenza nel complesso. In questa equazione entrerà certamente w, se la congruenza non è *cilindrica* (cioè se le direzioni dei suoi raggi non sono soltanto ∞^1) e perciò la si potrà supporre risoluta rispetto a w:

$$w = w(u, v).$$

Le funzioni (7) che definiscono questa congruenza saranno

$$X(u, v), \quad Y(u, v), \quad Z(u, v), \quad \bar{a}(u, v), \quad \bar{b}(u, v) \tag{23}$$

ove

$$\bar{a}(u, v) = a(u, v, w(u, v)), \quad \bar{b}(u, v) = b(u, v, w(u, v)). \tag{24}$$

Ciò vale in particolare per ogni congruenza W eventualmente contenuta nel complesso, perchè tali congruenze non sono cilindriche.

7. Per le (24), si ha:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial u} = \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial v} = \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 a}{\partial u \partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial^2 a}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial a}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \text{ ecc.};$$

quindi, se si costruiscono le funzioni $\bar{c}_{rs}$ formate con le (23) come le c_{rs} sono formate con le (7), si trova:

$$\left\{\begin{aligned}
\bar{c}_{11} &= \frac{\partial a}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial w^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + a_{11} \frac{\partial w}{\partial u} + b_{11} \frac{\partial w}{\partial v} + c_{11}, \\
\bar{c}_{21} &= \frac{\partial a}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 a}{\partial w^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} + a_{21} \frac{\partial w}{\partial u} + b_{21} \frac{\partial w}{\partial v} + c_{21}, \\
\bar{c}_{31} &= \frac{\partial a}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial w^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + a_{31} \frac{\partial w}{\partial u} + b_{31} \frac{\partial w}{\partial v} + c_{31},
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= \frac{\partial b}{\partial w}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial w^2}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+a_{12}\frac{\partial w}{\partial u}+b_{12}\frac{\partial w}{\partial v}+c_{12}\,,\\
\bar{c}_{22} &= \frac{\partial b}{\partial w}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 b}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial w}{\partial v}+a_{22}\frac{\partial w}{\partial u}+b_{22}\frac{\partial w}{\partial v}+c_{22}\,,\\
\bar{c}_{32} &= \frac{\partial b}{\partial w}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+a_{32}\frac{\partial w}{\partial u}+b_{32}\frac{\partial w}{\partial v}+c_{32}\,,
\end{aligned}\right.$$

$$(27)\quad \bar{c}_{13}=a_{13}\frac{\partial w}{\partial u}+c_{13}\,,\qquad \bar{c}_{23}=a_{23}\frac{\partial w}{\partial u}+b_{23}\frac{\partial w}{\partial v}+c_{23}\,,$$

$$\bar{c}_{33}=b_{33}\frac{\partial w}{\partial v}+c_{33}\,,$$

ove si è posto per semplicità

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
a_{11} &= 2\frac{\partial^2 a}{\partial u\partial w}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial w}+2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial w}\,,\qquad b_{11}=-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial w}\,.\\
a_{21} &= \frac{\partial^2 a}{\partial v\partial w}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial w}\,,\qquad b_{21}=\frac{\partial^2 a}{\partial u\partial w}+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial a}{\partial w}+\\
&\qquad\qquad+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial w}\,,\\
a_{31} &= -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial w}\,,\qquad b_{31}=2\frac{\partial^2 a}{\partial v\partial w}+\left(2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial a}{\partial w}+\\
&\qquad\qquad+2\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial w}\,.
\end{aligned}\right.$$

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
a_{12} &= 2\frac{\partial^2 b}{\partial u\partial w}+\left(2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial b}{\partial w}+2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial w}\,,\\
&\qquad\qquad b_{12}=-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial w}\,,\\
a_{22} &= \frac{\partial^2 b}{\partial v\partial w}+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial b}{\partial w}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial w}\,,\\
&\qquad\qquad b_{22}=\frac{\partial^2 b}{\partial u\partial w}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial w}\,,\\
a_{32} &= -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial w}\,;\qquad b_{32}=2\frac{\partial^2 b}{\partial v\partial w}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial b}{\partial w}+2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a}{\partial w}\,,
\end{aligned}\right.$$

$$(30)\quad a_{23}=F\frac{\partial a}{\partial w}+G\frac{\partial b}{\partial w}\,,\qquad b_{23}=E\frac{\partial a}{\partial w}+F\frac{\partial b}{\partial w}\,,$$

$$a_{13}=2b_{23}\,.\qquad b_{33}=2a_{23}\,.$$

Se le funzioni $\bar{c}_{rs}$ soddisfano la condizione (§ 3):

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} \end{vmatrix} = 0 ,$$

la congruenza definita dalle (23) sarà una congruenza W contenuta nel complesso definito dalle (22). Il primo membro dipende dalla funzione w e dalle sue derivate parziali prime e seconde, ed è lineare nelle derivate seconde, come è facile vedere.

Dunque: *la determinazione delle congruenze* W *contenute in un complesso dipende dall'integrazione di un'equazione alle derivate parziali del second'ordine* (31), *lineare nelle derivate seconde*, cioè del tipo

$$L \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + M \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + N \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + R = 0 ,$$

ove L, M, N, R sono funzioni determinate di $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$.

III.

8. È noto che *ogni congruenza contenuta in un complesso lineare è* W.

Or noi vogliamo dimostrare che *questa proprietà caratterizza i complessi lineari*. Anzi dimostreremo contemporaneamente il teorema noto ed il suo reciproco, cercando tutti i complessi tali che le congruenze in essi contenute sieno tutte W. Dopo i risultati precedenti si sarebbe tentati di affrontare la ricerca giovandosi della equazione (31); però in tal modo ci si imbatte in calcoli laboriosi.

Ritorniamo invece alle ordinarie coordinate radiali (1). Anzi, osservando che, per la (2), le prime tre non possono essere tutte nulle, possiamo anche assumere come coordinate di una retta generica del complesso i rapporti:

$$(32) \quad x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}, \quad 1, \quad u_1 = \frac{l}{Z}, \quad u_2 = \frac{m}{Z}, \quad u_3 = \frac{n}{Z}.$$

Definiremo il complesso, assegnando le espressioni delle coordinate x, y in funzione delle rimanenti:

$$(33) \qquad x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3).$$

Però, in virtù della (3), queste funzioni dovranno soddisfare la relazione

$$(34) \qquad u_1 x + u_2 y + u_3 = 0.$$

Per fissare una congruenza contenuta nel complesso, basta assumere per u_1, u_2, u_3 tre funzioni di due nuovi parametri u, v. Ora affinchè tutte le congruenze contenute nel complesso sieno W occorre e basta (pel teorema di DARBOUX), che, *per ogni scelta delle funzioni* u_1, u_2, u_3 di u, v, le coordinate (32) soddisfino una medesima equazione del tipo (4). Ma fra le (4) vi è la funzione costante 1, quindi l'equazione a cui dovranno soddisfare le rimanenti x, y, u_1, u_2, u_3 sarà del tipo

$$\alpha_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \alpha_{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \alpha_{22}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0.$$

Affinchè ciò si verifichi è necessario e sufficiente che sia

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} & \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial v^2} & \frac{\partial u_2}{\partial u} & \frac{\partial u_2}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 u_3}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 u_3}{\partial v^2} & \frac{\partial u_3}{\partial u} & \frac{\partial u_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Essendo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial u}, \ldots\ldots \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \sum_{ik} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\partial u_k}\frac{\partial u_i}{\partial u}\frac{\partial u_k}{\partial u} + \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial^2 u_i}{\partial u^2}, \ldots\ldots \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

l'equazione precedente può semplificarsi, sottraendo dalle prime due righe del determinante opportune combinazioni lineari delle rimanenti:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial u} \frac{\partial u_k}{\partial u} & \sum_{i,k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial u} \frac{\partial u_k}{\partial v} & \sum_{i,k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial v} \frac{\partial u_k}{\partial v} & 0 & 0 \\ \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial u} & \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial v} & \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial v} \frac{\partial u_k}{\partial v} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} & \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial v^2} & \frac{\partial u_2}{\partial u} & \frac{\partial u_2}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 u_3}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 u_3}{\partial v^2} & \frac{\partial u_3}{\partial u} & \frac{\partial u_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Applicando il teorema di LAPLACE alle prime due righe del determinante, si riconosce subito che esso è la somma di nove termini, ciascuno dei quali contiene una delle nove derivate seconde di u_1, u_2, u_3, e che i coefficienti di questi termini sono prodotti di due determinanti di second'ordine estratti rispettivamente dalle due matrici:

$$(36) \quad \begin{Vmatrix} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial u} \frac{\partial u_k}{\partial u} & \sum_{i,k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial u} \frac{\partial u_k}{\partial v} & \sum_{i,k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial v} \frac{\partial u_k}{\partial v} \\ \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial u} \frac{\partial u_k}{\partial u} & \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial u} \frac{\partial u_k}{\partial v} & \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial u_i}{\partial v} \frac{\partial u_k}{\partial v} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_2}{\partial u} & \frac{\partial u_3}{\partial u} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v} & \frac{\partial u_2}{\partial v} & \frac{\partial u_3}{\partial v} \end{Vmatrix}.$$

Or questi coefficienti debbono essere tutti nulli, poichè la (35) dev'essere soddisfatta qualunque sieno le funzioni u_1, u_2, u_3, quindi debbono essere tutti nulli i minori di second'ordine della matrice (36), e però anche quelli dell'altra:

$$(37) \quad \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_3^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_3} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial u_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u_3^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_3} & \frac{\partial^2 y}{\partial u_2 \partial u_3} \end{Vmatrix}.$$

Viceversa, se ciò si verifica, la (35) è soddisfatta identicamente.

Ciò equivale a dire che le coppie di derivate seconde omologhe

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k}$$

delle funzioni x, y debbono soddisfare una medesima relazione del tipo

$$(38) \qquad \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

ove α e β sono funzioni convenienti delle variabili u_1, u_2, u_3 e non ambedue nulle.

In particolare dev'essere (per $i = k = 3$)

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial u_3^2} + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial u_3^2} = 0;$$

ma dalla (34) si ha pure

$$u_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u_3^2} + u_2 \frac{\partial^2 y}{\partial u_3^2} = 0;$$

dunque dev'essere: o

$$\frac{\alpha}{u_1} = \frac{\beta}{u_2}$$

oppure

$$(39) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u_3^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u_3^2} = 0.$$

Nella prima ipotesi, la (38) diventerebbe

$$(40) \qquad u_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} + u_2 \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

ma la (34) dà

$$\frac{\partial x}{\partial u_3} + u_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_3} + u_2 \frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_3} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u_3} + u_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial u_3} + u_2 \frac{\partial^2 y}{\partial u_2 \partial u_3} = 0,$$

quindi sarebbe

$$\frac{\partial x}{\partial u_3} = \frac{\partial y}{\partial u_3} = 0 ,$$

ossia x ed y sarebbero indipendenti da u_3. E ciò è impossibile, per la (34).

Dunque non può sussistere che la seconda ipotesi (39). Essa esprime che le funzioni x, y debbono essere del tipo

$$x = u_3 x' + x'', \qquad y = u_3 y' + y'' \tag{41}$$

con x', x'', y', y'' funzioni delle sole u_1, u_2.

Sostituendo nella (38), si ha che queste quattro funzioni debbono soddisfare le condizioni seguenti:

$$\left(\alpha \frac{\partial^2 x'}{\partial u_i \partial u_k} + \beta \frac{\partial^2 y'}{\partial u_i \partial u_k}\right) u_3 + \left(\alpha \frac{\partial^2 x''}{\partial u_i \partial u_k} + \beta \frac{\partial^2 y''}{\partial u_i \partial u_k}\right) = 0 , \quad (i, k = 1, 2) \tag{42}$$

$$\alpha \frac{\partial x'}{\partial u_i} + \beta \frac{\partial y'}{\partial u_i} = 0 , \qquad (i = 1, 2) . \tag{43}$$

Qui le funzioni α e β entrano solo col loro rapporto il quale, per le (43), dev'essere indipendente da u_3; quindi si può supporre che α e β sieno funzioni delle sole u_1, u_2. Allora le condizioni (42) si scindono nelle altre:

$$\alpha \frac{\partial^2 x'}{\partial u_i \partial u_k} + \beta \frac{\partial^2 y'}{\partial u_i \partial u_k} = 0 , \qquad \alpha \frac{\partial^2 x''}{\partial u_i \partial u_k} + \beta \frac{\partial^2 y''}{\partial u_i \partial u_k} = 0 , \quad (i, k = 1, 2). \tag{44}$$

Inoltre la (34) si scinde in

$$u_1 x' + u_2 y' + 1 = 0 , \qquad u_1 x'' + u_2 y'' = 0 . \tag{45}$$

Derivando la (43) rispetto ad u_k e tenendo presente la prima delle (44), si ha

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_k} \frac{\partial x'}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta}{\partial u_k} \frac{\partial y'}{\partial u_i} = 0 , \qquad (i, k = 1, 2) . \tag{46}$$

Or non è possibile che sia

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \frac{\partial y'}{\partial u_i} = 0$$

per ambedue i valori dell' indice i, chè in tal caso x', y' sarebbero costanti e la prima delle (45) non potrebbe sussistere identicamente. Dunque per la coesistenza delle (43) e (46), occorre che sia

$$\beta \frac{\partial \alpha}{\partial u_k} - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial u_k} = 0 . \qquad (k = 1, 2)$$

cioè che il rapporto di α e β sia costante. Potremo allora supporre che α e β sieno costanti, sicchè le (43), integrate, daranno

$$\alpha x' + \beta y' + \zeta = 0, \quad \alpha x'' + \beta y'' + \xi u_1 + \eta u_2 + \gamma,$$

con γ, ξ, η, ζ costanti arbitrarie.

Aggiungendo la seconda equazione alla prima moltiplicata per u_3, si ha, per le (41),

$$\alpha x + \beta y + \zeta u_3 + \xi u_1 + \eta u_2 + \gamma = 0$$

o, per le (32),

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \xi l + \eta m + \zeta n = 0.$$

Ciò prova che il complesso considerato è un complesso lineare generico.

Torino, 29 novembre 1912.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza dell'8 Dicembre 1912.

PRESIDENZA DEL SENATORE COMM. GIUSEPPE CARLE
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Renier, Pizzi, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Socio Einaudi.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 24 novembre 1912.

Il Presidente comunica il decesso avvenuto il 14 novembre scorso del Socio corrispondente della Sezione di archeologia ed etnografia Roberto Knight Mowat.

Il Socio Ruffini prende la parola sullo scritto del Dottor R. Helssig, Bibliotecario della Universitaria di Lipsia, *Nochmals der Erwerb des Codex Utinensis durch Gustav Hänel* (" estr. dal " Zentralblatt für Bibliothekswesen ", 1912) che, inviato dall'Autore alla nostra Accademia, gli fu trasmesso a cura della Segreteria. Egli riferisce di averne data comunicazione al Socio corrispondente Patetta, in adempimento dell'invito avutone dalla Presidenza. Il Prof. Patetta crede che non sia più affatto il caso di ribattere le ragioni contenute in tale replica; perchè esse non fanno che ribadire argomenti ormai confutati, come quando l' Helssig insiste nel sostenere che i doganieri a cui si riferisce Haenel fossero gli Austriaci e non gli Italiani, oppure si fondano sopra argomenti nuovi sì, ma non meritevoli di es-

sero neppure rilevati, come quando l'HELSSIG sostiene l'eventuale priorità dell'Austria sull'Italia nella rivendicazione del Codice in ragione del suo possesso di Aquileia. Il prof. PATETTA dichiara che il nuovo scritto dell'HELSSIG lasciò assolutamente immutate le sue convinzioni e conclusioni.

Di queste dichiarazioni fatte a nome del prof. PATETTA dal Socio RUFFINI, l'Accademia prende atto approvandole.

Lo stesso Socio RUFFINI presenta la traduzione inglese del suo volume sulla libertà religiosa, *Religious Liberty translated by* J. PARKER HEYES *with a preface by* J. B. BURY (London, Williams and Norgate), e illustra ampiamente le aggiunte che la arricchiscono in confronto con la edizione italiana.

Il Socio DE SANCTIS offre per la inserzione negli *Atti* una nota del Dott. ANGELO TACCONE intitolata: *Per la data e per l'esegesi dell'Olimpica VI di Pindaro.*

Il Socio RENIER legge anche a nome del Socio SFORZA la relazione intorno alla memoria di GIACOMO SURRA: *Indagini sul carattere e sull'arte di Giuseppe Giusti.* La Classe, approvata la relazione e presa cognizione del lavoro del SURRA, ne delibera con voto unanime la stampa nelle *Memorie Accademiche.*

LETTURE

L'opera scientifica di Giorgio Giorgi nel diritto italiano.

Nota del Socio G. P. CHIRONI.

I.

Nel movimento odierno degli studi giuridici è notevole la parte che vi ebbe e vi mantiene la dottrina italiana: fatto che rilevato com'è dagli studiosi stranieri, dev'essere a noi legittima e lusinghiera cagion di conforto. E furono le meditate ricerche su speciali istituti del diritto privato che segnalarono lo schiudersi di questa nuova fioritura delle università nostre; ricerche eccitate, a dir vero, e sapientemente guidate dall'opera di quegli insigni maestri che recando nella scuola di diritto il ricco e vigoroso processo d'indagine che a inusitate magnificenze avea in Germania sollevata la dottrina romanistica, determinarono il rinnovamento della coltura e dell'intelletto giuridico italiano. Fu la nuova scuola di diritto romano la fonte sacra e viva della educazione giuridica nostra: fu l'insegnamento dei maggiori, e con animo reverente il pensiero si rivolge a Filippo Serafini, a Nicola De Crescenzio, a Francesco Schupfer, che versando nella dottrina paesana ricca delle nobili tradizioni dei giuristi di " diritto comune „ la scienza e meglio che la scienza il rigoroso metodo scientifico germanico, trasmutarono la scuola da professionistica ch'era. in alta fattrice di scienza giuridica. Che impulso fu quello, e qual effetto subitaneo e quasi magico, ne venne! Fu quel che potremmo dire " l'istinto della romanità „ che operò in noi, eccitando ed aiutando la coscienza nostra, percossa dal nuovo lume, a risollevarsi in modo degno delle antiche altezze: o fu virtù propria del " diritto romano „, di questo diritto universale in quanto esprime ciò ch'è azione giuridica umana, di questo vincitor dei tempi, misura costante di quegli impulsi onde la coscienza giuridica par che naturalmente e in modo immutabile e immanente si componga?

L'una e l'altra causa dànno ragione del magnifico fenomeno prodotto. Nel momento in cui l'azione rinnovatrice incominciava, la scuola italiana di diritto privato si moveva solo come obbedendo alla legge d'inerzia, incerta di sè, della sua alta finalità, e dei mezzi idonei a conseguirla: e diciamo della scuola del diritto privato, poichè questo come il più generale, il più comun diritto, constituiva da solo più che la base della coltura giuridica, la coltura giuridica stessa: e il diritto pubblico, attraverso l'azione quasi millenaria della feudalità e della monarchia assoluta, finiva d'adagiarsi nella concezione fondamentale della dottrina francese, che poneva in opposizione al diritto dell'individuo la prevalenza superiore e pressochè intera della ragion di Stato. Incerta dunque di sè movea i suoi passi la scuola di diritto privato: e nazionale non sentiva più di essere, o non lo sentiva interamente, dopo che i repentini mutamenti avvenuti nelle concezioni giuridiche, nel modo di esprimerle e di formarle in legge, l'aveano sviata dal pacifico e sicuro svolgersi dei principi e dei sistemi tradizionali: certo, l'invasione francese molte cose operò, nuove idee determinò, e fu gran bene pel risveglio intero della coscienza nostra: ma anche un grande rivolgimento indusse nella legislazione. Vero, che la sopraffazione non fu profonda sempre nella sostanza, poichè avea pur essa a sostrato suo la grande tradizione romanistica: ma servì di modello alle codificazioni onde fu oppressa in molte parti la tradizione giuridica paesana, e l'oppressione in vario grado si produsse nei codici che s'erano dati gli stati italiani. In due nobilissime regioni imperava sì il codice civile generale austriaco, e dalle università di Pavia e di Padova uomini eminenti (è giusta gratitudine rammentarlo) educavano i giovani intelletti alle ricerche ed alle costruzioni sistematiche della dottrina germanica: ma lo sforzo era pressochè sterile: e la divulgazione dei trattati di ragion romana comune, non sortì frutti adeguati, per la naturale resistenza dell'anima giuridica italiana insorta a difesa della nazionalità del diritto.

Curioso fenomeno, e pur così pieno di ammaestramenti! Nello studio del diritto penale s'incontravano la critica indagatrice e l'operosità ricostruttiva della dottrina italiana e della tedesca, che dai lavori italiani era anzi come soverchiata; e in altri campi riservati alle più alte speculazioni dello spirito, negli studi filosofici, i grandi sistemi usciti dalla scienza germa-

nica movevano le menti italiane, e alimentavano l'opera sovrana di ANTONIO ROSMINI: ma quella parte del diritto più strettamente legata alla coscienza individuale, esprimente tutto l'*io* personale giuridico, e formante il " carattere „ dell'uomo e della persona, il diritto *civile* insomma, rimaneva quasi ostilmente chiuso di fronte al meraviglioso rifiorire della coltura romanistica, procedente dal vitale impulso degli studi del SAVIGNY. La stessa scuola napoletana, dove la nobiltà delle tradizioni e le speciali attitudini degli ingegni eccitavano gli studi di filosofia giuridica, e davano cittadinanza, e ampia diffusione, alle ricerche storiche di THIBAUT e di GANS ed alle magistrali monografie del SAVIGNY, non consentiva che nella compagine della vita giuridica nazionale penetrasse alcuna delle correnti nuove che dalle ricche scaturigini del diritto comune la dottrina germanica avea saputo dedurre nel diritto e nella vita.

Ma conquistata l'indipendenza nazionale, e fermato dinanzi al mondo lo Stato italiano, la terza Italia, si destò come d'un tratto il bisogno, e più che il bisogno, la grande idea di comporre in unità la coscienza giuridica del paese politicamente rifatto. E. cosa mirabile pur a noi stessi, gli studi del diritto romano condotti con le ricerche, le dottrine, i sistemi organici nuovi, rifiorirono di un tratto: e non furono intesi come fine a sè, come vana archeologia giuridica; ma la pienezza di lor luce conversero sulla materia del diritto privato, dirigendo l'analisi profonda dei concetti, determinando la complessità dei rapporti, ravvivando con la scienza tutta la preziosa materia fornita dai commentari delle leggi francesi, tradotti e adattati alle legislazioni locali. Così la scienza germanica ridava a noi il possesso del metodo esegetico che aveva trionfato nella scuola nostra, e che nei funesti tempi della decadenza avea emigrato in Francia prima, in Germania da ultimo; e col metodo restituiva l'ardore degli studi storici, intesi a ricomporre nell'antica virtù il nostro diritto comune, nutrimento vigoroso e vero di eterna sapienza giuridica. Onde avvenne, che dagli studi romanistici rinnovati, la coscienza giuridica italiana riebbe l'esser suo; e conforme in ciò al genio di nostra gente, compose in giusta armonia la scienza del diritto con la suppellettile preziosa che la tecnica dei commentari dava alla dottrina giuridica: e in questa dottrina tradizionale mise una vita, una luce propria, restituì ai concetti la duttilità,

l'adattabilità onde possono estendersi senza sforzo alle mutate condizioni, ai mutati rapporti. Così avvenne che il diritto romano rinnovato come studio, potè operare l'unità della coscienza giuridica italiana, potè fondere in un solo diritto nazionale i diritti locali degli antichi stati; a quel modo che già il travaglio paziente degli eruditi del quattrocento, restaurando la latinità, incamminò la letteratura a diventare italiana da solo toscana ch'era, la scuola romanistica operò promovendo la formazione della scienza italiana di diritto privato. Con quel giusto senso di equilibrio che è nello spirito latino, misurò il valor delle teorie e delle ardite astrazioni, al valor della vita, alla realtà dei rapporti umani: fece devolvere la ricca corrente della " costruzione „ giuridica nel ricco materiale apprestato dalla pratica: e quella perdette ogni eccesso di astrazione inutilmente soverchia, e questa acquistando nuova scioltezza di movimenti, si elevò nel valor suo. Tale la originalità della giovine scienza italiana, formata non solo di sapiente eclettismo, ma di original natura: ritornando al culto dell'antico diritto comune attraverso la scienza germanica, che in verità vi avea attinto tutta la ricchezza sua, riannodò il filo della tradizione giuridica paesana, che dal sovrapporsi della legislazione francese era rimasto interrotto.

II.

Or tra coloro che più e meglio instaurarono questa nostra scienza giuridica nazionale, convien segnalare con devoto animo Giorgio Giorgi. Il suo lavoro sulle " obbligazioni „ è il primo che accenni alla novità del metodo ed alla nuova finalità riformatrice: e quel ch'era solo accenno, per quanto valido, nella prima stampa, divenne alta confermazione nelle molte ristampe che dell'insigne monografia chiese il continuo accrescersi dell'estimazione di studiosi e di pratici. Ottimi lavori francesi aveano già preceduto la trattazione speciale del vitale argomento: ma un'alta e sapiente originalità distingue l'opera dell'insigne giurista italiano: non è commentario il suo: è elaborazione organicamente condotta sul contenuto dell'obbligazione, fonte massima di relazioni giuridiche. Scienza e pratica del diritto vi sono ammirabilmente congiunte, e come s'accordano a ricercare e fermare i concetti su cui tutta l'opera magistrale

s'eleva, così le danno armonia di partizioni, giusta ricchezza d'indagini e di applicazioni speciali che ben la finiscono in ogni parte sua: e come di ottimo stromento, vi è sempre fatto ricorso vivo e continuo all'opera dei nostri dottori di diritto comune. Onde alla pratica viene un nutrimento nuovo; riman tutta ravvivata al contatto informatore della concezione scientifica. Nè altro è il carattere originale dell'opera dei nostri antichi, qual si rileva così nei grandi trattati come nei brevi responsi.

Questo singolar pregio che tanto eleva la monografia delle " obbligazioni „ dà pur grande valore all'altra sulle " persone giuridiche „. E nell'una e nell'altra si segnala un fenomeno comune, che dà ragion sicura della novità asserita al movimento giuridico nazionale, e della originalità sua nel comporre in armonica unità la scienza e l'arte del diritto: la giusta ampiezza data, secondo la lor natura, ai " concetti „ analizzati e fermati, e quindi la maggior comprensione attribuita al diritto privato, per la universalità che lo distingue.

E come questo elemento nuovo di analisi e di composizione informa tutta l'opera di Giorgio Giorgi! Il diritto privato, tra il modo di constituirsi e di operare della sovranità statale e l'insegnamento ch'era venuto dagli ordinamenti e dalla dottrina francese passata a noi, avea sempre in contrasto, e sempre nel contrasto rimaneva inferiore, il diritto pubblico: questo, come ragion del sovrano, lo sorverchiava, e lo premeva: e non è così antica nella letteratura e nella vita giuridica italiana l'affermazione del diritto di Stato sopra il codice civile. Ma il nuovo e originale atteggiamento degli studi nostri, a tanta esagerazione pose giusto rimedio: la tradizione italica, non significava contrapposizione permanente, irreducibile tra la ragion pubblica e la privata, sebbene all'interesse della collettività assegnasse la necessaria prevalenza di fronte a quello individuale: il diritto è uno nelle concezioni generali sue, e solo muta di comprensione e di estensione a seconda del mezzo in cui opera, dei rapporti che questo suscita e determina, della diversa funzione che ne viene ai pubblici poteri e che la legge deve provvidamente regolare. E questo avvenne: che al diritto privato, com'era già l'insegnamento antico, si convenne nuovamente l'ufficio di diritto generale: ritornò esso sede legittima dei concetti componenti l'universal diritto: e sede legittima, perchè all'azione, alla volontà umana esso si

riferisce direttamente, e l'uomo, la " persona „ è centro di ogni rapporto, qualunque sia l'ambiente nel quale l'attività sua si manifesta: è ad imagine sua che il diritto compone quelle figure che pur mancando di natural consistenza, sono insignite di capacità giuridica. Così avvenne, che la ragion pubblica mutuò dalla privata concezioni fondamentali, partizioni e terminologia molta, e in pari tempo si restituì alla ragion pubblica il reggimento di rapporti male attribuiti alla privata: e che i rapporti complessi, dove l'uno e l'altro diritto fossero in concorso, vennero studiati e determinati, misurandovi la giusta partecipazione di ognuno: con riconoscimento, dove lo imponesse la necessità delle cose, della prevalenza spettante alla ragion pubblica senza ingiusto sacrificio della privata.

Queste concezioni fondamentali, questo metodo di studio scientifico e di pratica bene accorta, son presentati e si muovono con ricchezza profonda di dottrina, con lucidezza di analisi, con saggia acutezza di applicazione nell'opera dell' insigne giurista nostro. Nel trattato delle obbligazioni, il nascere e l'esplicarsi di rapporti dove è il diritto privato oppure il pubblico che prevale, o dove s'incontrano entrambi e con vario grado; nel trattato delle persone giuridiche, l'azion di esse giuridicamente distinta a seconda del fine cui è volta, e del modo col quale in conseguenza vi si riflettono gli ordinamenti di diritto privato o di diritto pubblico: nei due grandi lavori, tutti questi fenomeni di special gravità e delicatezza grande per l'analisi e la posizione dei concetti e la disamina dei rapporti, son ricercati, discussi, determinati con sottilissima sagacia, con squisitezza di fattura, e con quel senso di misura ch'è il pregio vero e singolare d'ogni lavoro che abbia degno posto nella letteratura giuridica.

Ond'è che all'opera di Giorgio Giorgi, per cui tanto s'arricchì e s'elevò la letteratura nostra, e che con viva e potente efficacia concorse alla formazione dell'alta coltura ed al retto avviamento della pratica giuridica, gli studiosi tutti che ne traggono lume e profitto, ed il paese che n'è altamente onorato, debbono grata e devota ricordanza.

Per la data e per l'esegesi dell'Olimpica VI di Pindaro.

Nota del Prof. ANGELO TACCONE.

Sulla data della vittoria d'Agesia, e conseguentemente dell'ode *Olimp.* VI perchè nulla ci fa sospettare un considerevole indugio da parte del poeta, si è molto discusso. Gli scolii dicono semplicemente che non si sa a quale Olimpiade debbasi attribuire. Tanto il GASPAR nel suo eccellente *Essai de Chronologie Pindarique* (1) quanto il FRACCAROLI nell'acuto e importantissimo articolo *La Cronologia di Pindaro* (2) partono entrambi (3) dal presupposto che l'epinicio sia stato scritto senza dubbio in Grecia: quindi non nell'anno della vittoria di Jerone col celete Ferenico cantata da Pindaro nell'*Olimp.* I, poichè in quell'anno Pindaro era di sicuro in Sicilia come dal principio dell'*Olimp.* I (v. 16 *οἷα παίζομεν*) resulta. Però siccome per il Gaspar quella vittoria fu la stessa che celebrò Bacchilide nel 476 con l'epinicio V, così il Gaspar pone l'ode per Agesia al 472 o al 468 (sforzandosi poi di dimostrare preferibile l'ultima datazione); il Fraccaroli invece, il quale — e ben a ragione qui — sostiene trattarsi di vittoria diversa, dell'anno 472, mette il successo d'Agesia al 476 o al 468, e s'adopera poi a far prevalere il 476. Ma le ragioni addotte dai due valorosi a sostegno della data più antica o della più recente, sebbene acute, non persuadono a pieno in nessuno dei due casi. Il Fraccaroli combatte egregiamente parecchie delle argomentazioni addotte a favor di una data bassa, ma di argomenti positivi non adduce che questi due (il primo dei quali già in *Pind.* p. 232 nota): i vv. 92 sgg. i quali insistono non soltanto sopra la dignità regia di Jerone ma pur sopra la ierofantia, sembrano molto

(1) Bruxelles 1900 pp. 137 sgg.

(2) " Riv. di Filol. e d'Istr. Class. „ XXIX 1901 fasc. 3 pp. 20 sg. dell'estr.

(3) Mi limito a citare questi due insigni pindaristi perchè sono gli ultimi che abbiano ampiamente trattato la quistione.

più acconci ove s'intendano come un richiamo a fatti recenti, alla recente successione di Jerone: la difesa di Pindaro contro lo scherno di βοιωτία ὗς, poco comprensibile a tutta prima in un periodo nel quale il poeta aveva già consolidato a pieno la sua fama, la si può intendere nel 476, nel momento cioè acuto della inimicizia con Simonide e Bacchilide i quali possono aver rimesso fuori quell'ingiurioso appellativo nei riguardi di Pindaro. Come si vede, le argomentazioni non mancano d'una certa seduzione, ma sono a pieno soggettive. Per altra parte il Gaspar a persuadere la data del 468 si fa forte in particolar modo delle due seguenti prove. Quelle allusioni contenute nel carme pindarico le quali fanno comprendere come Agesia in Siracusa non si trovasse del tutto a suo agio, del tutto al sicuro, ed in ispecie quella dei vv. 100-1, sembrano convenire assai meglio che ad altro periodo al 468, ad un'epoca cioè in cui la malattia incurabile di Jerone inspirando già gravissimi timori d'una catastrofe, Agesia non si doveva trovare precisamente sopra un letto di rose. Ancora: nel 468 Jerone ebbe finalmente quella vittoria olimpica col cocchio, il massimo onore agonale, auguratagli da Pindaro già nella chiusa dell'*Olimp.* I; e la gran vittoria fu cantata da Bacchilide. Non hanno, dice il Gaspar, i vv. 92-6 così laudativi per Jerone, l'aria di — come diremo? — quasi rinfacciare garbatamente al signore di Siracusa il non troppo corretto modo di agire verso colui che già quattro splendidi carmi gli aveva dedicato e in certo modo aveva con abilità messo le mani innanzi per l'occasione finalmente giunta? La seconda argomentazione è, come si vede, a pieno soggettiva e non abbisogna di confutazione: la prima è più speciosa che convincente. Poniamo pure che sia vero quanto osserva il Gaspar: che cioè le allusioni pindariche meglio si attaglino al 468: ma non potevano però bene riferirsi pure ad altri periodi di impopolarità del tiranno e de' suoi amici?

Il Gaspar, il quale pur preferendo per la vittoria di Agesia il 468 ammette tuttavia da principio una certa possibilità per il 472, tenta ancora di dimostrare la pochissima probabilità del 472 osservando che, siccome non si può ragionevolmente mettere in dubbio che alla celebrazione del proprio trionfo agonistico avvenuta in Stimfalo Agesia fosse presente, così ne risulta che la data del 472 sarebbe assurda: poichè non è sup-

ponibile che coi noti guai attraversati da Jerone in quell'anno, uno dei suoi più fidi collaboratori, indovino e generale prestantissimo, proprio allora fosse assente, anzi lontano da Siracusa. Ma anche questa argomentazione è più speciosa che vera: o non aveva Jerone altri generali e indovini a suo servizio?

Non sembra dunque sinora che una delle tre date 476, 472, 468, abbia a favor suo alcuna argomentazione decisiva.

Ma, quel che più importa, il presupposto, tanto del Gaspar quanto del Fraccaroli, della composizione in Grecia dell'epinicio per Agesia non è punto sicuro. Quale è invero la sua base?

Diversa per i due esimii pindaristi. Il Fraccaroli trova questa base nei vv. 84 sgg., là dove il poeta dice *ματρομάτωρ ἐμὰ Στυμφαλίς, εὐανθὴς Μετώπα, | πλάξιππον ἃ Θήβαν ἔτικτεν, τᾶς ἐρατεινὸν ὕδωρ | πίομαι, ἀνδράσιν αἰχματαῖσι πλέκων | ποικίλον ὕμνον.* Egli riferisce cioè, come fanno i più (il Fennell e il Gildersleeve ad es., per ricordare due valentissimi), il *τᾶς* a *Θήβα.* E interpreta il bere *l'amabile acqua di Tebe*, come resulta dalla versione poichè altrove non parla di questo luogo, in senso letterale. Sicchè Pindaro dal v. 82 in poi vorrebbe dire: Io sento una nuova potente inspirazione al canto da ciò, che da Stimfalo fu l'avola mia materna Metopa, madre di Tebe, nella qual Tebe io dimorerò mentre canto per Agesia. Poichè dunque io sono di Tebe, eccita, o Enea, i compagni a cantare di Era Partenia, adorata specialmente in Stimfalo, che mi viene ad importare quasi come divinità della patria mia, ecc. ecc. Ma questa interpretazione è, a mio modo di vedere, ben lungi dall'esser sicura. Intanto il pensiero essenziale al senso del contesto qual è? La parentela di Pindaro con Agesia ed il conseguente interessamento del poeta al carme presente. Ma quella parentela resulta già a sufficienza affermata dalle parole *ματρομάτωρ ἐμὰ Στυμφαλίς, εὐανθὴς Μετώπα, πλάξιππον ἃ Θήβαν ἔτικτεν*: e quindi a sufficienza pure lo speciale interesse di Pindaro a questo carme. Alle parole ora citate potrebbe seguire pertanto l'esortazione *ὄτρυνον κτλ.* senza che il senso ne avesse a soffrire. Bisogna ora vedere se le parole *τᾶς ἐρατεινὸν ὕδωρ πίομαι* fino al punto non siano suscettibili di altra interpretazione o, posto che siano, se la migliore abbia a ritenersi quella del Fraccaroli. Che sian suscettibili di altre interpretazioni è facilissimo provare. Intanto si può spiegare *πίομαι* non quale

futuro ma quale presente (cfr. Ibico fr. 17 Bergk[4], Kühner-Blass *Ausführl. Gramm. der griech. Sprache* II[3] p. 519): e allora *τᾶς ἐρατ. ὕδωρ κτλ.* significherebbe semplicemente *della quale bevo* (= *sono solito bere*) *l'amabile acqua io che intreccio* ecc. ossia *della quale sono cittadino io che.....* La interpretazione è possibile e logicissima, tanto che venne seguita e propugnata da Hugo Jurenka in un suo acuto lavoretto *Zur Kritik und Erklärung der sechsten olympischen Ode des Pindar* 'Zeitschr. f. die österr. Gymn.' 1893 fasc. 12 p. 11. E non v'è nessun argomento che la possa far apparire peggiore di quella del Fraccaroli. E allora dove se ne va la determinazione del luogo in cui Pindaro avrebbe composto il carme? Ma v'ha — io credo — di meglio. V'ha una interpretazione con la quale il nesso tra i vv. 82-7 e i segg., a cominciare da *ὄτρυνον*, nesso che con le spiegazioni del Fraccaroli e del Jurenka rimane il medesimo, diviene più pieno, più ricco. Si può riferire cioè il *τᾶς* del v. 85 non già a *Θήβα*, sì bene a *Μετώπα*, e spiegare le parole *τᾶς ἐρατ. ὕδ. πίομαι κτλ.* in senso figurato. È una interpretazione già propugnata da alcuni scoliasti antichi e riuscita poi, tra i moderni, simpatica al Mezger: dopo venne — a torto, io penso — abbandonata. Leggiamo a p. 186 del Drachmann (1): Schol. BDEQ 145 b: *πλάξιππον ἃ Θήβαν ἔτικτε· τᾶς ἐρατεινὸν ὕδωρ· ταύτης οὖν, τῆς Μετώπης· λέγει δὲ νῦν τοῦ ὁμωνύμου ποταμοῦ τῇ ἡρωίδι.* E Schol. A 147 a: *πίομαι· οὐ λέγει κυρίως ὅτι πίομαι τὸ ἀπὸ τῆς Μετώπης ὕδωρ, ἀλλὰ οἷον γεύσομαι αὐτῆς διὰ τὸν ὕμνον καὶ ταύτην εἰς τὸν ὕμνον συλλήψομαι.* Dunque conforme a codesta interpretazione si avrebbe, dal v. 84 in poi: *Da Stimfalo fu l'avola mia materna, la florida Metopa, che partorì Tebe agitatrice di cavalli* [e ciò basterebbe a spiegar la nuova inspirazione di Pindaro parente di Agesia], *e di essa l'amabile acqua io berrò, io voglio bere, mentre vo intrecciando a pugnaci prodi un vario cantico.* Dove la frase *e di essa l'amabile acqua io berrò*, appropriata in quanto Metopa fu, secondo gli scoliasti, una corrente, un fiumiciattolo arcadico, è poi da intendere in senso figurato *e ad essa io mi inspirerò* col trapasso ideologico dalla corrente d'acqua alla Ninfa eponima, figlia del

(1) *Scholia vetera in Pindari carmina*: I. *Scholia in Olympionicas.* Lipsiae 1903.

Ladone, sposa dell'Asopo e madre di Tebe. Dalla Ninfa all'acqua o al luogo corrispondente si passa in Pindaro, è noto, senza che verbo alcuno accenni alla transizione. Esempio luminoso i vv. 28-9 di quest'ode medesima. Or si badi: con la interpretazione qui da me sostenuta non è forse vero che il nesso con la prima delle esortazioni da Pindaro rivolte ad Enea diviene molto più stretto, più intimo, più palpabile? Pindaro vuol che, cominciando come di regola dagli dei, Enea induca per prima cosa i compagni ad inneggiar Era Partenia. Ma Era Partenia aveva speciale culto in Stimfalo, la città di Metopa. Questa adorazione di Era Partenia, oltrecchè servire ad altri scopi, resulta pertanto pure un motivo che può apparir suggerito dalla menzione di Metopa, che almeno con la menzione di Metopa si accorda a pieno. Ed ancora, la interpretazione da me sostenuta delle parole *τᾶς ἐρ. ὑδ. π.* s'accorda perfettamente con l'intonazione di quella parte del carme che precede immediatamente al v. 82. Già insisteva là il poeta in maniera specialissima su cose arcadiche non più mitiche (chè arcadico è pure il mito), ed anzi sopra un culto, il culto di Hermes Cillenio: la continuità nell'ordine delle idee è, così come intendo io, perfetta.

Non sembra dunque che la base del Fraccaroli debba reggere. Ma veniamo al Gaspar.

Il Gaspar, del quale non so a che riferisca il *τᾶς* di cui dicemmo perchè su tal punto non si sofferma, trae argomento a creder certa la composizione dell'ode in Sicilia da una congettura proposta dal Jurenka in un suo articolo *Novae lectiones Pindaricae* ' Wiener Studien ' XV (1893) pp. 5 sgg. O meglio, non da una congettura — chè allora la cosa perderebbe non solo ogni efficacia, ma pur ogni parvenza d'efficacia — ma da una possibile differente lettura del v. 92: e cioè *εἶπον δ' ἐμὲ μνᾶσθαι* invece di *εἶπον δὲ μεμνᾶσθαι*. Con questa lezione sarebbe introdotto il ricordo che Pindaro ha della Sicilia, quindi la composizione del carme certamente fuori della Sicilia, quindi la limitazione, circa la data della vittoria di Agesia, alle Olimpiadi 77 e 78 per il Gaspar, all'ultima per noi che crediamo sicura la dimostrazione data dal Fraccaroli della presenza di Pindaro in Sicilia nel 472. Ma quel modo di leggere non persuade punto. Anzitutto *μνάομαι* nel senso di *ricordarsi*, certo nei poemi omerici, è a pieno estraneo al linguaggio pindarico:

nè vale, si comprende bene, che il Bergk l'abbia per congettura ristabilito in *Pitia* IX 88. Poi l'indubbio parallelismo tra l'esortazione di *εἶπον* (*εἶπον* imperativo, non indicativo: nè è necessario correggere *εἰπόν*: cfr. gl'imperativi siracusani *ἄνελον, λάβον*: del resto nulla vieta di riferirlo ad *εἶπα*) e quella di *ὄτρυνον* predispone evidentemente a preferire, ove sia possibile — come di fatto è — senza alcuna violenza al testo, pure il parallelismo nella struttura delle proposizioni rispettivamente dipendenti da quei due imperativi. Ma leggendo al v. 92 come si suole — osserva il Jurenka — troppa personalità verrebbe data al coro, mentre, secondo che si espresse con molta vivezza Alfredo Croiset, *La poésie de Pindare* Paris 1895[3] p. 100, *la personne des choreutes grecs n'a pas plus d'existence dramatique que n'en a aujourd'hui, dans un opéra, celle des musiciens composant l'orchestre.* Si potrebbe subito obiettare al Jurenka che qui si tratta di una semplice finzione, di una semplice figura, ma che in realtà l'esortazione Pindaro la rivolge a se stesso. Però possiamo anche prender la palla al balzo ed osservare: ciò che vi scandalizza al v. 92 non vi tocca pur l'animo dunque al v. 87 (*ὄτρυνον*)? Vero è che il Jurenka, mostrando poi di non attribuire alla precedente osservazione gran peso e lasciandola cadere, si mette poi in un altro ordine di idee, insiste più assai sopra un'altra argomentazione, negando che Enea fosse, secondo insegnano gli Scoliasti, il *χοροδιδάσκαλος* e gli *ἑταῖροι* del v. 87 i coreuti. E il suo pensiero su questo punto egli determina meglio nell'altro già più sopra citato articolo della ' Zeitschr. f. öst. Gymn. ' alle pp. 5-6. Enea, ad avviso del Jurenka, sarebbe stato (1) un parente di Agesia, forse il capo degli Jamidi in Stimfalo, che avrebbe dato la commissione dell'inno a Pindaro e celebrato in Stimfalo la vittoria a sue spese: gli *ἑταῖροι* sarebbero stati gli ospiti. E allora che succede? Non insistiamo su ciò che pur è evidente, che cioè uno dei motivi principali se non il principale onde il Jurenka venne per-

(1) Qui il Jurenka segue una ipotesi prima messa innanzi da Goffredo Hermann e rafforzata poi dal Mezger con l'osservazione che il nome di Enea doveva essere abbastanza frequente fra gli Jamidi come apparirebbe da Pausania VI 6, 4.

suaso a sostituire alla lezione comune la sua nel v. 92 fu appunto il desiderio di togliere personalità al coro: lo mostra la stessa sua obiezione, con relativa citazione del Croiset, cui accennammo. Ma sorvoliamo pure; ed ammettiamo che, escluso che Enea e gli *ἑταῖροι* fossero capocoro e coreuti, il Jurenka siasi indotto a leggere diversamente al v. 92 soltanto per la persuasione che nei vv. 92 sgg. il poeta continui a preoccuparsi di sè solo e non d'altri come — ad avviso del pindarista egregio — già fin dal v. 82. Restano sempre, naturalmente, le obiezioni di forma che mettemmo innanzi più sopra. Ma vediamo poi che senso verrebbe fuori dai vv. 87 sgg. Dopo i versi precedenti il cui senso è a un di presso: *Io sento mentre canto per Agesia una nuova potente inspirazione da ciò, che da Stimfalo fu l'avola mia materna Metopa, madre di Tebe, ed io sono cittadino di Tebe*, dopo cioè un solenne annunzio di un — come dirò? — rinvigorimento della sua vena poetica che in lui avviene al pensiero della parentela con Agesia, che cosa è logico aspettarci da Pindaro? Certo un passo di viva, movimentata poesia che si proponga di raggiungere due scopi, di mettere cioè bene in luce la figura di Pindaro, e di mostrare la partecipazione sua, anche più intensa che per lo innanzi, alle glorie mitiche e attuali di Agesia. Orbene, negata ad Enea la qualità di maestro del coro e agli *ἑταῖροι* quella di coreuti, noi vedremmo ai vv. 87 sgg. Pindaro che si preoccupa freddamente del contegno che l'amfitrione dovrebbe tenere coi suoi ospiti. E che contegno! È una vera lezione — riuscita Dio sa come! — sui doveri, sto per dire, del padron di casa verso i convitati. Volgendosi verso di loro con bel garbo, questo amfitrione li inviterebbe prima ad invocare Era Partenia, poi a riconoscere che il canto di Pindaro è veramente come si deve e aggiungerebbe infine che Pindaro, da quella gran garbata persona ch'è pur lui, non s'è contentato mica di occuparsi di Stimfalo e dei miti più o meno ad essa inerenti, ma si è ricordato pure di Siracusa e di Jerone. Diamine! Un perfetto uomo di mondo non fa mica delle ommissioni che possan far sospettare in lui un villan rifatto! Non vi sembra di vederlo questo compitissimo padron di casa che dopo avervi fatto pregare la benedizion divina sul pranzo che sta per offrirvi, vi viene stuzzicando a riconoscere che vi ha ammannito della roba di prim'ordine e a un certo punto vi fa

capire o vi dice addirittura chiaro che le portate non sono finite ancora, che non s'è dimenticato nulla per imbandirvi un banchetto *comme il faut*? Via, non strapazziamo Pindaro in tal maniera! Quando mai Pindaro è stato un freddurista di professione? Senza contare, scherzi a parte, che non si capirebbe proprio il perchè gli *ἑταῖροι*, se non son coreuti, dovrebbero *cantare* Era Partenia! Non è invece chiaro come la luce del sole il bell'impeto che viene ai vv. 87 sgg. ammettendo che Enea fosse il capocoro e gli *ἑταῖροι* i coreuti e tenendo al v. 92 la lezione comune? Dopo il solenne annunzio dei versi precedenti, in piena coerenza con essi, Pindaro: Si veneri dunque — prorompe rivolgendosi al capocoro e in sostanza a sè medesimo — in primo luogo la divinità (e la divinità prescelta è in pieno accordo con il contesto precedente, tanto più ove s'intendan le ultime parole secondo che io più sopra ho proposto); e si mostri poi se io sia davvero un grande poeta (e la prova è conseguita meravigliosamente con lo splendido svolgimento del mito): nè si dimentichi infine, dopo la glorificazione di Agesia come cittadino di Stimfalo, quella di lui qual siracusano. Dove poi col magnifico elogio soggiunto di Jerone Pindaro due scopi consegue: per una parte, di far crescere nella estimazione della gente di Stimfalo Agesia rappresentandolo come supremamente diletto ad un principe di tal potenza quale Jerone: per l'altra di cattivare ognora più a se stesso l'animo del re siracusano. Niente variazioni di lettura dunque al v. 92: ed Enea e gli *ἑταῖροι* si credano appunto i membri del coro. Che se ad Enea vogliasi pur attribuire la parte affidatagli dal Jurenka, ma senza togliergli punto quella che gli attribuiscono gli scoliasti, a questo davvero nulla si oppone: chè anzi forse, come bene osserva il Fraccaroli a p. 238 n. 1, da questa doppia qualità di Enea riuscirà meglio chiarito il v. 91.

Cade pertanto anche il sostegno cui si appoggia il Gaspar per dimostrare composta in Grecia l'*Olimp.* VI.

Ricapitolando adunque, risulta dalla nostra ricerca: 1° che le argomentazioni del Gaspar e del Fraccaroli (ed essi riassumono, rappresentano poi nella questione il pensiero di tutti i pindaristi) non riuscirebbero perentorie neanche ammettendo provati i loro presupposti; 2° che questi presupposti per contro non sono veri. Talchè in conclusione circa la data dell'*Olimp.* VI

non si potrà, a rigore di stretta critica, affermare se non che questo carme potè appartenere al 476 o al 472 o al 468, le tre ricorrenze dei ludi olimpici comprese nel regno di Jerone.

Poichè altre argomentazioni le quali vennero poste innanzi per circoscrivere quei limiti di tempo, non hanno alcuna seria base. Nè occorre tutte ricordarle e tutte confutarle: basterà una breve esemplificazione, in quanto esse sono tutte a un di presso della medesima portata. Il Boehmer (1) vorrebbe la data del 468 fondandosi sulle parole dei vv. 96-7 *ἀδύλογοι δέ νιν* [*scil.* *Ἱέρωνα*] *λύραι μολπαί τε γινώσκοντι.* Siccome, egli dice, era poco probabile che Pindaro potesse esprimersi a questo modo poco dopo i ludi olimpici del 476 in quanto solo in quell'anno Simonide e Bacchilide andarono in Sicilia, così resta scartata ogni probabilità pel 476. Il 472 non è da prendersi in conto poi perchè pel Boehmer nel 472 Pindaro era in Sicilia e l'ode per Agesia egli la crede composta in Grecia: dunque non resta che il 468. Ma intanto la prima argomentazione (le altre son già ribattute da quante sopra dicemmo) è a pieno soggettiva: o perchè non poteva Pindaro verso il finire del 476 esprimersi a quel modo? Non aveva già allora probabilmente Bacchilide composta per Jerone la splendida ode V? E Pindaro stesso secondo ogni verisimiglianza la *Pitia* III per esaltare le vittorie col celete del 482 e del 478? E che sappiamo noi se Simonide, il quale molti anni prima già aveva conosciuto le corti della Sicilia e della Magna Grecia, non avesse in qualche modo già glorificato prima d'allora ne' suoi versi Jerone? E non vi furono poi forse altri poeti a cantar Jerone? Poeti siciliani anche, tra cui grandissimo Epicarmo?

Altri insiste sull'appellativo di *Etneo* dato a Zeus al v. 96: dunque, si osserva, era già stata fondata Etna: dunque siamo dopo il 476. Ma anche nella *Pitia* III, che al 476 non è posteriore, Jerone è l'ospite *Etneo.* Non con la città, ma col monte, sul quale a Zeus prestavasi culto, ha in ambo i casi l'epiteto relazione.

Ma è tempo di chiudere questa disquisizione che troppo lunga potrà forse già essere apparsa poste le sue conclusioni

(1) *Pindars Sicilische Oden nebst den Epizephyrischen* Bonn 1891 p. 107.

— almeno nei rispetti della data del carme — soltanto negative: gli è che giova tuttavia qualche volta prender la penna in mano anche pel modesto, ma non inutile ufficio, di scalzare una qualche ipotesi la quale pian piano, insensibilmente, sia arrivata al punto di passare per dato di fatto dimostrato e sicuro.

Peccato che il prezioso frammento ossirinchese non contenga, per l'abituale ommissione dei cataloghi d'olimpionici, l'indicazione dei vincitori con l'ἀπήνη! Due parolette sarebbero bastate a risparmiarci fatica e a levarci la curiosità!

Relazione intorno alla Memoria di Giacomo SURRA: *Indagini sul carattere e sull'arte di Giuseppe Giusti.*

Recenti pubblicazioni, tra le quali singolarmente cospicua quella dell'*Epistolario* giustiano curata da Ferdinando Martini, rendono oggi più agevole che un tempo l'addentrarsi nell'anima del Giusti e l'apprezzarne l'arte in rapporto col carattere. Ciò intese fare (ed è studio che si può dire quasi del tutto nuovo) il prof. Giacomo Surra, esperto in ricerche di simil genere, come specialmente dimostrano le sue indagini sul Foscolo e sul Tommaseo, tenute in conto dalla critica seria.

Nella prima parte della Memoria il Giusti è studiato principalmente dal lato della sincerità. Uno studio senza prevenzioni delle lettere di lui ci fa accorti di contraddizioni e bugie, che male depongono rispetto alla sincerità sua. Malgrado certe dichiarazioni personali, l'indole del Giusti fu scarsamente affettiva, e le circostanze dell'ambiente famigliare riuscirono poco propizie, se non affatto contrarie, allo sviluppo di affetti delicati. — Analoga impressione, anzi peggiore, del carattere del Giusti si ritrae dallo studio de' suoi amori. Il poeta si burla, in privato, dell'amore e delle donne; ma s'atteggia in pubblico a sentimentale. Leggerezza, grossolanità e doppiezza caratterizzano gli amori di lui. La condotta scorretta con la Piacentini e la commedia sentimentale recitata con la Rossi rivelano un carattere privo di delicatezza e di sincerità e alieno, in generale, da quei

sentimenti di cui volle farsi bello. — Nè sembra abbia sentito l'amicizia più vivamente dell'amore. L'amicizia col Capponi e col Manzoni modificano alquanto le abitudini di pensiero e di sentimento del Giusti; ma egli ha largamente sfruttato il primo ed ha cercato in varî modi d'ingraziarsi il secondo, non tanto per affetto e simpatia quanto per tornaconto morale.

La scarsa affettività del Giusti come figlio, come amante, come amico non implica necessariamente la debolezza del sentimento religioso e patriottico. Il poeta fu sinceramente religioso. Sebbene spregiudicato, da giovine, in materia di chiesa e di fede, potè in seguito facilmente adattarsi al sentire del Capponi e del Manzoni. Ugualmente sincera e più chiaramente manifesta è l'espressione del suo patriottismo, onde il pregio della sua poesia civile. Come uomo politico, può meritare il biasimo che gli fu dato dai contemporanei; ma il suo patriottismo è nel sentimento, non nell'azione o professione politica. L'indole del poeta appare in ultimo quasi trasfigurata dal sentimento patriottico. Il cambiamento è documentato dalle ultime lettere e poesie o frammenti di poesie, dove il poeta riesce a tratti commovente e simpatico, e fa quasi dimenticare l'insincerità e mediocrità di altri suoi sentimenti. Questi sentimenti ritenuti lungo tempo per sinceri hanno contribuito a conservar la fama del poeta anche come lirico. Ma il difetto morale si riverbera nell'arte; quindi si spiega la deficenza, in generale, della sua poesia non satirica.

Nella seconda parte dello scritto, che intimamente si rialleccia alla prima, è studiata l'arte del Giusti.

Il Giusti non sembra destinato a risorgere dalla mezza stima che lo circonda come scrittore. Se anche risorgesse, non riscuoterebbe più le lodi esagerate di una volta. L'entusiasmo per la lingua fu la causa principale di quelle esagerazioni, che sorpresero lo stesso poeta. Parecchie altre cause estrinseche apparecchiarono la fortuna del Giusti, cioè: lo zelo degli amici, il momento politico, l'autorità del Manzoni circa la questione linguistica, e forse anche la mediocrità stessa del poeta, che lo rese accessibile al pubblico a preferenza di poeti più degni di lui. Ma non mancano le cause intrinseche che giustificano in parte quella fortuna, come sarebbero: la verità della rappresentazione satirica, la felicità della caricatura, il disegno originale di certe

creazioni, la finitezza di alcuni particolari, l'arguzia di qualche motto diventato comune. Si tratta di pregi, in prevalenza, formali, pei quali, del resto, il Giusti non è superiore ai poeti vernacoli, anzi è inferiore, per es., al Porta ed al Belli.

Resta al Giusti incontestato il merito della poesia civile. Ma poeta civile, e lirico e satirico insieme, fu un altro poeta dialettale a lui contemporaneo, il Brofferio; eppure la sua fama non varcò i limiti del Piemonte, mentre quella del Giusti, che è stato, in fondo, il poeta regionale della Toscana, si estese a tutta la nazione. Ciò avvenne esclusivamente in grazia della lingua, non perchè il Giusti valga di più come poeta. Nè si può dire ch'egli sia stato veramente popolare, mentre furono senza dubbio popolari nelle loro provincie i poeti dialettali. La poesia del Giusti penetrò nel ceto medio, non fu generalmente accessibile al popolo.

Quantunque la sua fama si estendesse presto per tutta la nazione, la sostanza della poesia giustiana è provinciale, non nazionale. La paesanità del Giusti è la toscanità, non l'italianità. La visione e rappresentazione poetica di lui appaiono talora più anguste che in certi poeti dialettali. Quest'angustia è la condizione essenziale dell'arte giustiana.

Non si nega al Giusti l'originalità; ma la scarsa cultura di lui, i pochi studi e tardivi, pregiudicarono la sua produzione: onde la mancanza di varietà nelle sue poesie, la superficialità generica, la psicologia più arguta che profonda. Il poeta, scrivendo, si lascia prendere dalla preoccupazione del linguaio, perchè di rado è trascinato dalla forza del pensiero, e quando tenta d'apparir profondo, cade in oscurità ed astrattezze e fa sentir lo stento.

Vuolsi riconoscere che il poeta non fu dotato d'una gran mente. A chi obietta ch'egli ebbe buon senso e misura, si risponde che non bastano a far la grandezza d'un poeta; anzi il riverbero eccessivo di queste qualità nella produzione artistica è spesso la causa della mediocrità dell'arte giustiana. Più e meglio avrebbe forse fatto il Giusti, se alla trasformazione psicologica degli ultimi anni avesse potuto tener dietro un'arte nuova. Ma la morte lo impedì. Ciò che resta di lui è più spesso documento dell'ingegno, che non di quelle qualità morali che principalmente assicurano la lunga vita nei posteri.

Queste, per sommi capi, le risultanze critiche del Surra, che a noi sembrano ben ponderate e sicure, sì da lasciar traccia nella storia delle lettere nostre.

Non è, quindi, senza compiacimento che ne proponiamo la pubblicazione nelle *Memorie* accademiche.

GIOVANNI SFORZA,
RODOLFO RENIER, *relatore*.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Dicembre 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

L'Istituto fisico internazionale Solvay a Bruxelles ha inviato il suo Statuto ed un avviso relativo ai sussidi per ricerche fisiche da accordarsi in questo primo anno.

Il Socio Grassi presenta in omaggio il 2° vol. degli Atti del Congresso internazionale di Applicazioni elettriche tenutosi in Torino dal 10 al 16 settembre 1911.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le seguenti Note, rispettivamente dai Soci Fusari, Naccari e Grassi:

S. Dezani, *Contributo allo Studio della Pepsina*, nota II;
E. Perucca, *Analisi di vibrazioni luminose debolmente ellittiche*;
G. Lignana, *Nota sulla misura del lavoro d'isteresi magnetica*.

Il Socio Somigliana legge, anche a nome del collega Peano, la Relazione sulla Memoria del Dr. Sannia, *Caratteristiche multiple di un'equazione alle derivate parziali in due variabili indipendenti*. Accogliendo la proposta della Commissione, la Classe unanime delibera la stampa di quella Memoria nei volumi accademici.

LETTURE

Contributo allo Studio della Pepsina.

Nota II del Dott. S. DEZANI.

In precedenti miei lavori io ho riferito come la tesi sostenuta dalla Schoumow-Simanowski, da Nencki e Sieber e dal Pekelharing — essere la pepsina una sostanza proteica — abbia pure avuto la sua conferma nelle analisi di preparati attivissimi da me ottenuti. Che se altri autori — fondandosi sul fatto d'aver potuto ottenere soluzioni attive di questo enzima le quali non davano più le reazioni delle sostanze albuminoidee — ne hanno negata la natura proteica, a questa negazione non si può dare peso alcuno per le ragioni che già ho svolte in altri miei studî e che qui credo inutile ripetere (1).

Ma, accertata la natura della pepsina, molte altre questioni che vi si connettono rimangono tuttavia in parte o del tutto insolute.

Anzitutto; a quale categoria di sostanze proteiche la pepsina appartiene? — Noi non possiamo più oggi accettare la concezione del Nencki che nella molecola pepsinica distingueva un centro primario (formato da un nucleo-proteide, da un albumoso, da lecitina e da acido cloridrico) e vari centri secondari (formati dai prodotti di scomposizione di quei corpi). Poichè gli studi del Pekelharing hanno escluso che il coagulo che si ottiene per riscaldamento dal succo gastrico naturale sia costituito da un nucleo-proteide, non contenendo esso fosforo: l'assenza poi di questo elemento dai preparati di pepsina ottenuta dal succo gastrico naturale del cane (2) e dal succo espresso dalla mu-

(1) Dezani, *Il saggio della pepsina secondo la farmacopea ufficiale italiana*, " Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino „, vol. XV. — Id., *Contributo allo studio della pepsina*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XLV.

(2) Pekelharing, " Zeitschr. f. physiol. Chem. „, XXXV, pag. 8.

cosa gastrica del maiale (1) ci attesta pure la mancanza di lecitina o di composti analoghi.

Tuttavia la complessità della molecola pepsinica è accertata da altre ricerche. Il Pekelharing nella pepsina ha riscontrato basi puriniche e pentosio; io vi ho notata la presenza di basi essoniche, di leucina, di tirosina e traccie di altri amidoacidi (2). Questi dati tuttavia non ci permettono ancora di assegnare un posto alla pepsina nei gruppi vari dei proteici.

In secondo luogo: la molecola pepsinica deve ritenersi formata solo da C, N, H ed O, oppure entrano in essa ancora altri elementi? — Le analisi della Schoumow, del Nencki, e le prime del Pekelharing danno sempre un contenuto in Zolfo, Cloro e Fosforo; corpi tutti che essi considerano come parti costitutive della molecola pepsinica. Di questi elementi attrassero la maggiore attenzione il Fosforo ed il Cloro (3). Del Fosforo già dissi come sia stata possibile la eliminazione, poichè si ottengono pepsine attive le quali non contengono più quest'elemento.

Più dibattuta è stata la questione della presenza del Cloro, che taluni negarono e che altri invece vollero ritenere come parte integrante, anzi caratteristica, della pepsina. Se tuttavia si considerano attentamente gli argomenti addotti dai vari autori a dimostrazione del loro asserto, si nota facilmente che essi non reggono al vaglio della critica.

Il Friedenthal (4), in opposizione alla Schoumow, afferma che nel succo gastrico tutto quanto l'acido cloridrico esiste allo stato libero, poichè il punto di congelamento di un succo gastrico avente un'acidità = a 0,577 $^0/_0$ di HCl è esattamente quello di una soluzione di HCl al 0,577 $^0/_0$. Nota però il Nencki che il peso molecolare della pepsina deve essere assai elevato e che quanto più il peso molecolare di una sostanza è elevato tanto

(1) Giacosa e Dezani, *Studî sulla secrezione stomacale*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XLIV.

(2) Pekelharing, " Zeitschrift für physiol. Chem. ", XXII, pag. 234. — Dezani, Loc. cit.

(3) Pekelharing, loc. cit. — Nencki und Sieber, " Zeitschr. f. physiol. Chem. ", XXXII, pag. 291. — Schoumow-Simanowski, " Arch. f. exper. Pathol. und Pharmak. ", XXXIII, pag. 336.

(4) Citato dal Nencki nel suo lavoro.

più piccola è la depressione da essa provocata. In paragone della forte depressione dovuta all'HCl libero quella dovuta alla pepsina diventa assai piccola. Il succo gastrico del cane contiene in media un residuo solido del 0,30 %: ammesso che questo residuo sia formato tutto da pepsina e che questa possa legare a sè l'1 % di HCl, il residuo non conterrebbe più di gr. 0,003 di HCl %. Ora, come già si disse, il succo studiato dal Friedenthal conteneva gr. 0,577 % di HCl, per cui la parte che poteva essere legata alla pepsina, rappresentava solamente la $^{5}/_{1000}$ parte dell'HCl totale; quantità troppo piccola per potere esercitare un'azione sul punto di congelamento. Il metodo scelto dal Friedenthal per decidere se la pepsina contenga o no Cloro non può quindi ritenersi dimostrativo.

Ma, a mio giudizio, non possono ritenersi maggiormente dimostrativi neppure i metodi scelti dagli assertori del contenuto in Cloro della molecola pepsinica. Anzitutto si fa notare subito la grande differenza nella percentuale assegnata dagli autori a questo elemento. Nella pepsina ottenuta dal succo gastrico del cane per azione del freddo la Schoumow trovò un contenuto del 2,31 % di Cloro: in quella ottenuta dal Nencki per azione della dialisi e del freddo la percentuale del Cloro si abbassa a 0,475. Gli stessi prodotti lavati con alcool fino a scomparsa della reazione del Cl nel filtrato danno un contenuto dell'1,010 % alla Schoumow e solamente del 0,188 al Nencki. Queste grandi differenze avrebbero ben legittimato il dubbio che fossero dovute alla diversa purezza del preparato; tuttavia il Nencki afferma che la quantità di Cloro trovata da lui è troppo grande per essere addossata a cloruri non allontanati dai ripetuti lavaggi.

Secondariamente si nota che questi prodotti erano inattivi; ed evidentemente la prima causa della loro inattività deve cercarsi nell'azione dell'alcool. Pare a me che solamente nel caso in cui i suddetti autori avessero adoperati per i lavaggi liquidi o soluzioni capaci di asportare il Cloro, ma innocui per l'enzima, e solamente nel caso che il prodotto in conseguenza dell'allontanamento del Cloro fosse divenuto inattivo, essi sarebbero stati autorizzati a considerare quest'elemento come parte caratteristica e necessaria della molecola pepsinica.

Questa considerazione non deve essere sfuggita al Pekelharing se egli cercò evitare questo scoglio, purificando bensì

i suoi preparati, ma ponendo mente a non alterarne l'attività. — L'autore discioglieva la pepsina ottenuta per mezzo della dialisi o del solfato ammonico nell'acido ossalico all'1 % e la riprecipitava da questa soluzione per mezzo della dialisi. Il precipitato ridisciolto in acido ossalico digeriva rapidamente la fibrina. Ne dedusse l'autore che se il Cloro trovato nella pepsina preparata dalle soluzioni cloridriche dipendesse dal non completo allontanamento dell'acido cloridrico, si sarebbe dovuto aspettare che la pepsina ottenuta dalla soluzione ossalica non contenesse più Cloro: invece questo era ancora presente. Tuttavia il Pekelharing non ha dosato questo Cloro residuale, nè ci dice perciò se la percentuale di questo elemento fosse diminuita e di quanto, nè si preoccupò di vedere se con altri mezzi fosse possibile liberarne il preparato.

Le considerazioni che io sono venuto svolgendo e l'aver io ottenuto preparati di pepsina attivi quanto e più di quelli ottenuti dagli altri autori — preparati i quali già senza aver subito alcun processo di purificazione contenevano pochissimo Cloro — legittimarono in me il dubbio che questo elemento nella pepsina non sia contenuto che come impurezza, e mi spinsero a tentare di risolvere definitivamente la questione.

Farò osservare subito che la via da me scelta per raggiungere la meta si presentava assai più facile che quella battuta dagli altri autori. Essi partivano dal succo gastrico naturale del cane, il quale è sempre assai ricco di HCl: data l'affinità che le sostanze proteiche dimostrano per gli acidi e per le basi, si comprende facilmente come la pepsina preparata dal succo gastrico naturale leghi a sè una certa quantità di acido cloridrico, che poi difficilmente potrà abbandonare.

Io ho preso invece le mosse dal succo espresso dalla mucosa gastrica del maiale col metodo in uso nel nostro Laboratorio (1): questo succo non contiene o tutt'al più contiene solo traccie di acido cloridrico, ed il precipitato che esso — liberato dalla mucina — dà per azione dell'alcool dimostra un contenuto in Cloro assai più basso di quello riscontrato dagli altri autori (da 0.136 a 0,289 %).

(1) GIACOSA e DEZANI, loc. cit.

I Prova.

Gr. 5 di pepsina greggia preparata in Laboratorio (1) vengono disciolti alla temperatura di + 40° in 150 cm³ di acido fosforico al 2 %. Si filtra e il filtrato, previa aggiunta di qualche goccia di fenolftaleina, si tratta con acqua di calce fino ad aversi colorazione leggermente rosea, che poi si fa nuovamente scomparire con qualche goccia di acido fosforico (2). — Si lascia depositare, si decanta il liquido sovrastante, si lava più volte il precipitato con acqua distillata e lo si raccoglie su filtro (3). Esso viene allora ridisciolto in 500 cm³ di acido acetico (2 %) alla temperatura di + 40°; la dissoluzione avvenendo però assai lentamente, la si facilita con qualche goccia di acido nitrico diluito: si filtra ed il filtrato si sottopone alla dialisi: questa si fa per 20 ore in acqua comune corrente, per 4 ore in acqua distillata. Il liquido viene in seguito tolto dai tubi dializzatori e addizionato di 5 volumi d'alcool a 96°. Si ottiene dapprima un semplice inalbamento: dopo qualche minuto si separano però dei fiocchi bianchi, voluminosi, leggieri. Si centrifuga rapidamente, si raccoglie il precipitato su piccolo filtro alla pompa, lo si lava con poco alcool e lo si pone a seccare nel vuoto sull'acido solforico.

Il precipitato, che appena raccolto sul filtro era perfettamente bianco, durante l'essiccamento si colorò in giallo bruno. Prodotto ottenuto gr. 0,52.

Proprietà. — La sostanza finemente polverizzata si presenta come una polvere giallo-chiara. Quasi insolubile in acqua, si scioglie invece con facilità nell'HCl della digestione dando un liquido leggermente opalescente. La soluzione al 0,2 % dà già bene le reazioni delle sostanze proteiche (reazione del biureto, del Millon, xantoproteica): essa viene pure precipitata dal cloruro mercurico, dall'acetato di piombo, dal ferrocianuro potas-

(1) Giacosa e Dezani, loc. cit.

(2) È superfluo ricordare che questo e tutti gli altri reattivi impiegati erano esenti da Cloro.

(3) Come è noto, il precipitato di fosfato calcico che si forma nel liquido trascina meccanicamente con sè l'enzima (Brücke).

sico + acido acetico, dall'acido fosfowolframico, dall'acido picrico: scaldata all'ebollizione si intorbida leggermente. Bruciata sul filo di platino con ossido di rame non dà colorazione alcuna. (I preparati ottenuti dalla Schoumow svelavano con questa reazione la presenza del Cloro).

Attività. 1°) Per la determinazione dell'attività opero nel modo seguente. Sciolgo gr. 0,010 di pepsina (pesati alla bilancia di precisione) in 10 cm³ di acido cloridrico della digestione (Titolo della soluzione 1 : 1000) — 1 cm³ di questa soluzione viene diluita con acido cloridrico al volume di 500 cm³ (Titolo 1:500.000 — Sol. A) — 1 cm³ si diluisce invece al volume di 1000 cm³ (Titolo della soluzione 1 : 1.000.000 — Sol. B).

I Prova. — In N. 3 tubi da saggio pongo:

N. 1. — 5 cm³ di acido cloridrico 0,25 % + gr. 0,5 di fibrina
N. 2. — „ di soluzione pepsina A + „ „
N. 3. — „ „ „ B + „ „

Dopo 18 ore di permanenza dei tubi alla temperatura di + 40° si ha digestione completa nella prova N. 2, quasi completa nella N. 3, nella N. 1 la fibrina appare solamente rigonfiata.

2°) Nella seguente esperienza alla fibrina si sostituisce l'albumina d'uovo coagulata e passata ad un setaccio avente 81 fori per cm².

In N. 3 tubi da saggio pongo:

N. 1. — 5 cm³ di ac. cloridrico 0,25 % + gr. 0,5 di albumina
N. 2. — „ di soluz. pepsina A + „ „
N. 3. — „ „ „ B + „ „

Dopo 16 ore si nota che nella prova N. 2 la soluzione dell'albumina è completa; nella N. 3 il volume dell'albumina indisciolta è solamente la metà del volume dell'albumina indisciolta nella prova N. 1. I filtrati delle tre prove si comportano come segue:

	Reazione del biureto	Reazione xantoproteica	Azione del solfato ammonico
Prova N. 1.	incerta	negativa	nessun precipitato
„ N. 2.	positiva	positiva	precipitato
„ N. 3.	positiva	positiva	precipitato

Dosaggio del Cloro. — Il dosaggio del Cloro si fa col metodo alla calce del Liebig.

Gr. 0,4242 di *pepsina greggia* seccata a + 105° danno gr. 0.0050 di cloruro di argento, pari a gr. 0,289 % di Cloro.

Gr. 0,2970 di *pepsina purificata* come sopra, e seccata a + 105° danno gr. 0,0010 di AgCl, pari a gr. 0,083 % di Cloro.

Il preparato da me ottenuto, pur mantenendosi attivissimo, ha dunque perduto il 71 % del Cloro che prima conteneva.

II Prova.

Sciolgo gr. 10 di pepsina greggia a + 40° in 250 cm³ di acido fosforico al 2 %. A questa soluzione si aggiunge acqua di calce e si opera come nella prova precedente. Il precipitato di fosfato tricalcico si scioglie, invece che nell'acido acetico, nell'acido nitrico all'1 %: la soluzione nitrica si pone a dializzare nell'acqua corrente durante 24 ore.

Tolto il liquido dai tubi dializzatori, lo si addiziona di acetato basico di piombo fino a che non si ha più precipitato; si neutralizza il liquido con ammoniaca diluita e si filtra. Si lava bene il precipitato con acqua e lo si tratta a piccole porzioni in mortaio con 250 cm³ di soluzione satura a freddo di acido ossalico; si filtra ed il filtrato si pone nuovamente a dializzare. La dialisi si fa per 20 ore in acqua comune corrente e per altre 4 in acqua distillata. Al liquido si aggiungono allora 10 volumi di alcool; si centrifuga, si raccoglie il precipitato su filtro, lo si lava con poco alcool e si secca nel vuoto sull'acido solforico. Prodotto ottenuto gr. 0,45.

Proprietà. — Il preparato dopo polverizzazione costituisce una polvere perfettamente bianca. Nel resto si comporta esattamente come la pepsina della prova I. Anche l'attività proteolitica risulta esser la stessa.

Dosaggio del Cloro. — Gr. 0,3682 di *pepsina greggia* seccata a + 105° danno gr. 0,003 di AgCl pari a gr. 0,200 % di Cloro.

Gr. 0,2835 di *pepsina purificata* come sopra danno solamente traccie di AgCl, che non si sono potute dosare.

La conclusione di queste esperienze è assai semplice: *La pepsina non contiene Cloro nella sua molecola.*

Dal Laboratorio di Materia medica e Jatrochimica
dell'Università di Torino.

Analisi di vibrazioni luminose debolmente ellittiche.

Nota del Prof. ELIGIO PERUCCA.

(Con una Tavola).

Tra i vari metodi di analisi di una vibrazione luminosa debolmente ellittica, il più preciso, se non il più comodo, è quello indicato dal Brace [1].

Con questo metodo si misura l'azimut ψ dell'asse maggiore, e il rapporto tg φ dell'asse minore all'asse maggiore dell'ellisse. L'analisi della vibrazione è allora completa, e sotto questa forma essa è specialmente adatta allo studio del dicroismo circolare. Ma poichè i due lavori del Brace non dànno molto chiara idea dell'apparecchio e del modo di usarlo, io esporrò uno studio sperimentale del compensatore di Brace (misura di φ) [2].

Precederà uno studio sul polarizzatore a penombra di Lippich usato per la misura di ψ.

Fissiamo subito i segni di ψ e di φ: ψ sarà contato a partire dall'azimut del piano di polarizzazione dell'analizzatore quando i campi del polarizzatore di Lippich compaiono egualmente illuminati e tra analizzatore e polarizzatore non è interposto nessun corpo; ψ sarà >0 per angoli che ruotano in senso inverso a quello delle lancette dell'orologio. Così per un corpo levogiro sarà $\psi > 0$; per un corpo destrogiro sarà $\psi < 0$. Stabiliremo che sia $\varphi > 0$ quando l'ellisse in istudio è sinistrorsa; $\varphi < 0$ quando l'ellisse è destrorsa (rotazione delle lancette dell'orologio).

---

[1] Brace, *A half Shade elliptical polariser and compensator*, "Phys. Rev.", *18*, p. 70, 1904; *19*, p. 218, 1904.

[2] Il compensatore di Brace è stato già usato, p. es. nei seguenti lavori: Mc. Dowell, *Dicroismo circolare di soluzioni naturalmente attive*, "Phys. Rev.", *20*, p. 163, 1905. — Bruhat, *Dicroismo circolare di un corpo organico*, "C. R.", *153*, p. 248, 1911. Ma quest'ultimo lavoro è forzatamente schematico, data l'indole del periodico; il lavoro di Mc. Dowell contiene un cenno sul metodo di Brace.

Misura di ψ.

Il metodo più semplice per la misura di ψ è quello di usare un polarizzatore e un analizzatore semplici. Si fa la lettura di estinzione quando i nicol sono incrociati. S'introduce il corpo producente l'ellisse in istudio e si cerca il nuovo azimut dell'analizzatore che dà il minimo di luce. La differenza delle due letture dà ψ. Ma già per ellissi il cui rapporto degli assi è tg 2° — tg 3°, le letture riescono faticose e poco precise. Non è possibile ottenere ψ con un'approssimazione maggiore di 8'-10'. Se poi l'intensità della sorgente luminosa è oscillante, come è il caso della luce dell'arco, allora le osservazioni riescono penosissime e ancor più discordanti.

Nel fatto questo metodo semplice di misura di ψ non è stato mai usato in lavori di qualche precisione, ma si è ricorso sempre ad altri metodi.

Viene subito in mente di sostituire al semplice polarizzatore un polarizzatore a penombra di Lippich. Le osservazioni risultano infatti molto più concordanti; così ad es., con un Lippich a tre campi si ha facilmente ψ a meno di 1' anche per $\varphi = 4°$. Per $\varphi = 6°$ si ottiene ψ a meno di 6' come media di parecchie osservazioni. Per $\varphi > 6°$ anche questo metodo perde rapidamente ogni precisione.

Noi supporremo sempre $\varphi < 6°$.

Ma quest'uso del polarizzatore di Lippich non è legittimo, come a prima vista potrebbe sembrare, neanco quando il corpo in istudio presenti soltanto il dicroismo circolare e nessuna birifrangenza. In questo caso l'ellisse ha la stessa forma, qualunque sia l'azimut del corpo in istudio. Ciò non è più vero se il corpo è anche birifrangente, ed in particolare le ellissi trasmesse nel campo centrale e nei campi laterali del polarizzatore non possono essere ritenute eguali neppure approssimativamente.

Fermiamoci al primo caso. Siano $OA = a$, $OB = b$ (fig. 1) le ampiezze delle vibrazioni trasmesse dal polarizzatore di Lippich rispettivamente nel campo centrale e nei campi laterali. L'angolo $AOB = \omega$ è l'angolo del polarizzatore a penombra. Indichiamo con ϵ l'angolo che fa il piano di polarizzazione dell'ana-

lizzatore colla vibrazione trasmessa dal campo centrale del polarizzatore. Se nessun corpo è interposto tra i nicol, si avrà eguaglianza d'illuminazione dei tre campi quando ϵ soddisfa alla

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\omega - \epsilon)}{\operatorname{sen}\epsilon}$$

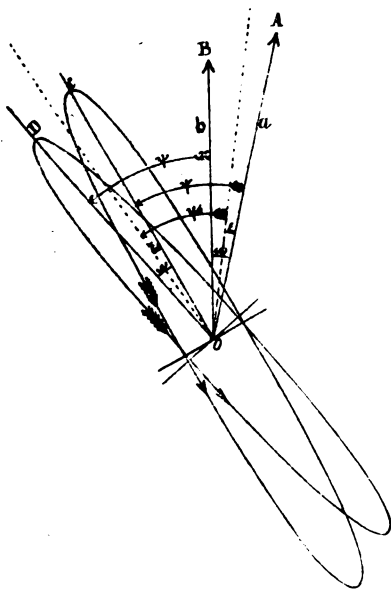



Fig. 1.

Si noti che è $a > b$, perchè la luce che attraversa i piccoli nicol del Lippich è in piccola parte riflessa ed in piccola parte estinta. Dunque è $\epsilon < \frac{\omega}{2}$.

Ad es. in un polarizzatore a tre campi coi tre prismi di nicol a sezione rettangolare e a facce oblique era:

per $\omega = 5^\circ 23' \pm 2'$, $\quad \epsilon = 2^\circ 28' \pm 2'$, quindi $\frac{\omega}{2} - \epsilon = 14'$.

Risulta allora dalla (1):

$$\frac{a}{b} = 1.18.$$

In un polarizzatore a tre campi, con tre prismi di Thomson era:

$$\text{per } \omega = 4^\circ 10' 40'' \pm 30'', \quad \epsilon = 1^\circ 58' 10'' \pm 30''.$$

$$\text{quindi } \frac{\omega}{2} - \epsilon = 7' 10''$$

e dalla (1) si ha allora

$$\frac{a}{b} = 1.12.$$

Si introduca ora, tra analizzatore e polarizzatore, il corpo circolarmente dicroico. Esso trasforma le due vibrazioni rettilinee *OA*, *OB* in due vibrazioni ellittiche *C* e *D* (fig. 1) aventi rapporto degli assi eguale in valore e segno. Inoltre gli assi maggiori sono ruotati dello stesso angolo ψ rispetto alle vibrazioni rettilinee corrispondenti. Questo angolo ψ è poi l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione per effetto del corpo circolarmente dicroico.

Dimostreremo che, per ottenere nuovamente l'eguaglianza d'illuminazione dei tre campi del polarizzatore, si deve ruotare l'analizzatore di un angolo ψ_1 diverso da ψ; la differenza $\psi_1 - \psi$ è un errore sistematico introdotto nella misura di ψ, quando si voglia usare il polarizzatore di Lippich nello studio d'una vibrazione anche debolmente ellittica.

Indichiamo con ϵ_1 l'angolo che il piano di polarizzazione dell'analizzatore fa con l'asse maggiore *OC* dell'ellisse del campo centrale. Poichè è $\epsilon_1 - \epsilon = \psi_1 - \psi$, basterà dimostrare che è $\epsilon_1 \neq \epsilon$.

Infatti ϵ è dato dalla (1) e ϵ_1 è dato da un'equazione che esprime l'eguaglianza di ampiezza delle vibrazioni nei campi centrale e laterali del Lippich, dopo che esse abbiano attraversato il corpo dicroico e l'analizzatore. Questa equazione è:

$$\text{(2)} \qquad \xi_a^2 \operatorname{sen}^2 \epsilon_1 + \eta_a^2 \cos^2 \epsilon_1 = \xi_b^2 \operatorname{sen}^2 (\omega - \epsilon_1) + \eta_b^2 \cos^2 (\omega - \epsilon_1)$$

dove ξ_a, η_a sono gli assi dell'ellisse del campo centrale; ξ_b, η_b sono le cose analoghe pei campi laterali. Si hanno quindi le relazioni:

$$\text{(3)} \qquad \eta_a : \xi_a = \eta_b : \xi_b = \operatorname{tg} \varphi \qquad \frac{\eta_a^2 + \xi_a^2}{\eta_b^2 + \xi_b^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

dalle quali si ha facilmente

$$(4) \qquad \frac{\xi_a}{\xi_b} = \frac{\eta_a}{\eta_b} = \frac{a}{b}.$$

Se la (2) fosse soddisfatta da $\epsilon_1 = \epsilon$ si avrebbe anche, per la (1),

$$(5) \qquad \frac{\text{sen}(\omega - \epsilon_1)}{\text{sen}\,\epsilon_1} = \frac{a}{b}.$$

Mediante le (3), (4), (5), la (2) si scrive successivamente:

$$(6) \qquad \left[\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right] \text{sen}^2\epsilon_1 + 1 = \left[\frac{\xi^2{}_b\xi^2{}_a}{\eta^2{}_a\xi^2{}_a} - \frac{\eta^2{}_b}{\eta^2{}_a}\right] \text{sen}^2(\omega - \epsilon_1) + \frac{\eta^2{}_b}{\eta^2{}_a}$$

$$\left[\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right] + \frac{1}{\text{sen}^2\epsilon_1} = \left[\frac{b^2}{a^2}\,\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - \frac{b^2}{a^2}\right] \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\,\frac{1}{\text{sen}^2\epsilon_1}$$

$$\left[\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right] + \frac{1}{\text{sen}^2\epsilon_1} = \left(\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right) + \frac{b^2}{a^2}\,\frac{1}{\text{sen}^2\epsilon_1}$$

e infine

$$1 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{ossia } a = b.$$

Dunque *condizione necessaria* (e si vede subito che è anche sufficiente) *perchè sia* $\epsilon_1 = \epsilon$, *e quindi* $\psi_1 = \psi$, *che cioè sia legittimo l'uso del polarizzatore di Lippich per la misura dell'azimut dell'asse maggiore di una vibrazione debolmente ellittica, nello studio del dicroismo circolare, è che l'intensità luminosa trasmessa dal polarizzatore sia la stessa nei tre campi:*

$$a = b \quad \text{e quindi} \quad \frac{\omega}{2} = \epsilon.$$

Per farci un'idea della grandezza dell'errore $\psi_1 - \psi$, osserviamo che, mediante la (3) e la (4), dunque senza nessuna ipotesi sulla ϵ_1, la (2) si scrive:

$$\left[\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right] \text{sen}^2\epsilon_1 + 1 = \left[\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right] \frac{b^2}{a^2}\, \text{sen}^2(\omega - \epsilon_1) + \frac{b^2}{a^2}$$

ovvero, per la (1),

$$\left[\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right] \text{sen}^2\epsilon_1 + 1 = \left[\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right] \frac{\text{sen}^2\epsilon}{\text{sen}^2(\omega - \epsilon)}\, \text{sen}^2(\omega - \epsilon_1) + \frac{\text{sen}^2\epsilon}{\text{sen}^2(\omega - \epsilon)}.$$

Questa può scriversi, raccogliendo $\left(\frac{1}{tg^2\varphi} - 1\right)$ e togliendo i denominatori:

$$\left[\frac{1}{tg^2\varphi} - 1\right]\left[sen^2\epsilon_1 sen^2(\omega-\epsilon) - sen^2\epsilon\, sen^2(\omega-\epsilon_1)\right] = sen^2\epsilon - sen^2(\omega-\epsilon).$$

Svolgendo e riducendo si giunge infine alla formula:

$$(7) \quad sen(\epsilon - \epsilon_1) = \frac{tg^2\varphi}{(1-tg^2\varphi)} \cdot \frac{sen(\omega-2\epsilon)}{[sen\,\omega\, sen(\epsilon_1+\epsilon) - 2\cos\omega\, sen\,\epsilon_1\, sen\,\epsilon]}$$

che è valida anche in segno, quando si suppongano ω, ϵ_1, ed ϵ positivi. Tale errore non dipende dal segno di φ.

Questa formula dà modo di calcolare logaritmicamente [1], mediante approssimazioni successive, i valori di $\epsilon - \epsilon_1$, che la soddisfano, in funzione di φ, ω, ed ϵ.

Così per $\omega = 5°23'$ $\epsilon = 2°28'$ $\varphi = 5°$

si ha $\epsilon - \epsilon_1 = + 52'$

cioè l'angolo ψ_1 misurato è di 52' inferiore all'effettivo!

Si calcola che per $\omega = 5°23'$, $\varphi = 5°$, deve essere

$$\frac{\omega}{2} - \epsilon < 1'30'' \text{ circa},$$

perchè risulti $|\epsilon - \epsilon_1| \lesssim 1'$ circa.

Dell'errore segnalato ho ritenuto utile una conferma sperimentale.

Una laminetta di vetro, tagliata con cura da un vetrino copri-oggetto da microscopio, a bordi netti e paralleli, veniva posta davanti al polarizzatore. Le dimensioni di essa erano tali da coprire esattamente il solo campo centrale del polarizzatore. A causa della leggera inclinazione dei due piccoli prismi del Lippich, si può ottenere facilmente che i bordi della lamina siano del tutto invisibili. Una montatura conveniente permetteva

[1] In tal caso ricorderemo che $\frac{tg^2\varphi}{1 - tg^2\varphi} = \frac{sen^2\varphi}{\cos 2\varphi}$.

di inclinare più o meno la lamina, o di toglierla del tutto. Si aveva così modo di variare l'intensità luminosa del solo campo centrale. Mediante due lamine egualmente inclinate, coprenti i campi laterali, si poteva ottenere un indebolimento di luce in questi due campi soltanto. Così si poteva far variare $\frac{\omega}{2} - \epsilon$ di parecchi primi.

Per ottenere le ellissi non è conveniente usare un corpo circolarmente dicroico perchè occorrerebbe allora fare delle esperienze con luci fortemente assorbite. È molto meglio ottenere le ellissi ponendo tra polarizzatore e analizzatore delle lamine di mica, di vario spessore, a 45° rispetto alla bisettrice dell'angolo ω. È chiaro che in tal caso le vibrazioni trasmesse dalla mica nei tre campi del Lippich hanno egual rapporto degli assi. Questo rapporto degli assi, che si può ritenere con grande approssimazione eguale al rapporto degli assi dell'ellisse trasmessa dalla mica a 45°, veniva misurato col compensatore di Brace.

Nella tabella che segue sono riportati i risultati delle esperienze. Nella terza colonna sono gli azimut ψ_1 ottenuti facendo la differenza tra le lettere di eguaglianza di luminosità dei tre campi quando è introdotta la mica e quando non v'è. Quando è $\frac{\omega}{2} - \epsilon = 0$, è $\psi_1 = \psi$, dunque l'azimut vero è quello che si legge nelle linee $\frac{\omega}{2} - \epsilon = 0$. Si noti che dovrebbe risultare $\psi_1 = 0$ per $\frac{\omega}{2} - \epsilon = 0$. Nel fatto solo nelle ultime esperienze è risultato notevolmente $\neq 0$. Nell'ultima colonna sono i valori di $\epsilon_1 - \epsilon$ calcolati mediante la (7).

$\lambda = 589.3$ Na $\omega = 4^\circ 10' 40'' \pm 30''$ $\frac{\omega}{2} = 2^\circ 5' 20''$

$\lvert\varphi\rvert$	$\frac{\omega}{2} - \epsilon$	ψ_1	$\psi_1 - \psi = \epsilon_1 - \epsilon$	$\epsilon_1 - \epsilon$ calcolato
4° 55′	+ 10′ 0″ ± 30″	— 52′ ± 2′	— 54′ ± 4′	— 1° 6′
	+ 7′ 10″ ± 30″	— 40′ ± 1′	— 42′ ± 3′	— 46′
	0′ 0″ ± 20″	ψ = + 1′ 40″ ± 2′	0	0
	— 7′ 20″ ± 30″	+ 44′ ± 2′	+ 42′ ± 4′	+ 46′
3° 10′	+ 10′ 0″ ± 30″	— 15′ ± 30″	— 15′ 30″ ± 1′	— 21′
	+ 7′ 10″ ± 30″	— 9′ 30″ ± 30″	— 10′ 0″ ± 1′	— 14′
	+ 1′ 20″ ± 30″	— 2′ 20″ ± 30″	— 2° 50″ ± 1′	— 3′ 30″
	+ 0′ 10″ ± 30″	ψ = + 0′ 30″ ± 30″	0	0
	— 3° 50″ ± 30″	+ 5′ 30″ ± 40″	+ 5′ 0″ ± 1′	+ 6′
2° 24′	+ 10′ 0″ ± 30″	— 10′ 40″ ± 30″	— 12′ 20″ ± 1′	— 13′
	+ 7′ 10″ ± 30″	— 6′ 0″ ± 30″	— 7′ 40″ ± 1′	— 8′
	0′ 0″ ± 20″	ψ + 1′ 40″ ± 30″	0	0
	— 6′ 10″ ± 30″	+ 7′ 40″ ± 30″	+ 6′ 0″ ± 1′	+ 8′
1° 38′	+ 10′ 0″ ± 30″	— 12′ 10″ ± 30″	— 6′ 0″ ± 1′	— 6′
	+ 7′ 10″ ± 30″	— 9′ 20″ ± 30″	— 3′ 10″ ± 1′	— 4′ 30″
	0′ 0″ ± 30″	ψ = — 6′ 10″ ± 30″	0	0
	— 2′ 40″ ± 30″	— 4′ 50″ ± 30″	+ 1′ 20″ ± 1′	+ 1′ 30″

L'accordo è soddisfacente, tenuto conto della rapida variazione di $\epsilon_1 - \epsilon$ al variare di $\frac{\omega}{2} - \epsilon$.

L'errore sistematico segnalato non è dunque per nulla trascurabile. Esso però diminuisce rapidamente con φ. La formula (7) è infatti del secondo ordine rispetto a $\operatorname{tg}\varphi$. Tale errore è trascurabile per $|\varphi| < 1^\circ$ o soltanto per $|\varphi| < 30'$ secondo il valore di $\frac{\omega}{2} - \epsilon$.

Il modo stesso con cui sono condotte queste esperienze dice come si debba procedere per evitare questo errore: basterà coprire il solo campo centrale del polarizzatore mediante una laminetta riduttrice di luce, regolata in modo che sia $\left|\frac{\omega}{2} - \epsilon\right| = 0, \pm 1'$. Come già si è notato, è relativamente facile ottenere una laminetta i cui bordi non compaiano affatto nel campo d'osservazione, in modo che il polarizzatore non perda nulla della sua sensibilità.

Rimane ancora il caso più generale: sia per servirsi del sensibilissimo compensatore di Brace per la misura di φ, che per altre ragioni, può occorrere la misura di ψ, anche quando la vibrazione in istudio è resa ellittica da un corpo birifrangente (1).

Ma in questo caso l'uso del polarizzatore di Lippich diventa impossibile; le vibrazioni dei campi centrale e laterale sono trasformate dal corpo birifrangente in vibrazioni ellittiche di forma diversa, e i risultati delle misure sarebbero del tutto illusori.

Per evitare ciò si può usare un polarizzatore semplice, e montare il sistema dei piccoli prismi del Lippich, davanti all'analizzatore in modo che giri con esso. In tal caso la vibrazione trasmessa dal polarizzatore viene trasformata nell'ellisse da studiare e viene poi esaminata con un analizzatore a penombra.

Come si è ottenuta la formula (2), così ora, in modo analogo, si giungerebbe alla formula:

$$(8) \qquad \operatorname{sen}^2\epsilon + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\epsilon = \left[\operatorname{sen}^2(\omega - \epsilon) + \frac{b^2}{a^2}\cos^2(\omega - \epsilon)\right]\cos^2\omega \ (^2)$$

(1) Si suppone sempre $|\varphi| < 6^\circ$.

(2) Si trascura la piccola parte di luce perduta per riflessione, nei campi laterali. Si potrebbe tenerne conto scrivendo al posto di $\cos^2\omega$, $\cos^2(\omega + \eta)$ con η molto piccolo. Questa piccola correzione non modifica le conclusioni a cui giungeremo.

dove a e b indicano gli assi dell'ellisse in istudio, ω è l'angolo dell'analizzatore a penombra, ϵ è l'angolo dell'asse minore dell'ellisse colla vibrazione C trasmessa dall'analizzatore (Fig. 2).

La (8) mostra che l'angolo ϵ è funzione di $\frac{b}{a}$ cioè dell'ellitticità della vibrazione in istudio. Ma questa volta l'errore così introdotto nella misura di ω è trascurabile.

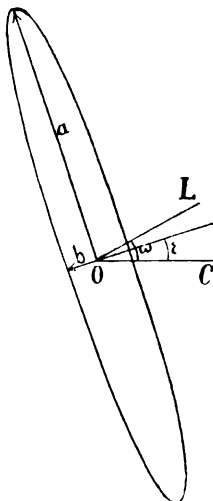



Fig. 2.

Infatti il valore di ϵ per $\frac{b}{a} = 0$ è dato dalla (8) dove si faccia $\frac{b}{a} = 0$:

$$\operatorname{sen}^2\epsilon = \operatorname{sen}^2(\omega - \epsilon)\cos^2\omega . \tag{9}$$

Il valore ϵ_1 che soddisfa alla (8) quando sia $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi \neq 0$ è dato invece dalla:

$$\operatorname{sen}^2\epsilon_1 + \operatorname{tg}^2\varphi\cos^2\epsilon_1 = [\operatorname{sen}^2(\omega - \epsilon_1) + \operatorname{tg}^2\varphi\cos^2(\omega - \epsilon_1)]\cos^2\omega$$

ovvero, con facili trasformazioni,

$$\frac{\operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{sen}^2\omega}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \cos^2\omega \operatorname{sen}^2(\omega - \epsilon_1) - \operatorname{sen}^2\epsilon_1 .$$

Si sottragga da questa la (9), si raccolga $\cos^2\omega$, si applichino le formule della somma o differenza dei quadrati di due seni, si giunge così facilmente alla:

$$\frac{tg^2\varphi \,sen^2\omega}{1-tg^2\varphi} = \cos^2\omega \,sen(2\omega-\epsilon_1-\epsilon)\,sen(\epsilon-\epsilon_1) - sen(\epsilon_1+\epsilon)\,sen(\epsilon_1-\epsilon)$$

da cui

$$(10)\quad sen(\epsilon-\epsilon_1) = \frac{tg^2\varphi}{1-tg^2\varphi}\,\frac{sen^2\omega}{[\cos^2\omega \,sen(2\omega-\epsilon_1-\epsilon)+sen(\epsilon_1+\epsilon)]}\,.$$

Questa formula è analoga alla (7), ma dà per $(\epsilon-\epsilon_1)$ valori molto piccoli. L'esperienza conferma; così per

$$\omega = 4^\circ 48' \qquad \epsilon = 2^\circ 9' \qquad \lambda = 589.3 \text{ Na.}$$

per valori di φ varianti da 0° a 5°, l'esperienza ha dato per $\epsilon-\epsilon_1$ valori dell'ordine degli errori di osservazione. La (10) dà in questi casi:

$$\epsilon-\epsilon_1 < 1'.$$

Dunque, a differenza di ciò che si è osservato per il polarizzatore a penombra di Lippich, *un analizzatore a penombra del tipo Lippich è senz'altro adatto anche alla misura dell'azimut dell'asse maggiore di un'ellisse.*

Al suo uso si oppone qualche difficoltà d'indole fotometrica facilmente sormontabile, e, almeno nei polarimetri ora in uso, la impossibilità di trasformare l'analizzatore in un apparecchio a penombra, mediante l'applicazione del sistema dei piccoli prismi del Lippich, tolto al polarizzatore.

Sono iniziate esperienze su di un apparecchio a penombra che, specialmente in questi studi, presenta notevoli vantaggi sull'apparecchio di Lippich, senza perderne i pregi.

Misura di φ (*Compensatore di Brace*).

Si ponga tra i nicol incrociati e precisamente prima dell'analizzatore un sistema di due sottilissime lamine di mica L_1 ed L_2. La prima, L_1, copre metà del campo luminoso ed ha uno spessore di 1,3 μ circa. Il ritardo relativo dei due raggi ordi-

nario e straordinario è allora di circa $\frac{1}{100}$ λ. La seconda lamina L_2 copre tutto il campo ed ha uno spessore più che doppio: 3,2 μ circa; ritardo: $\frac{1}{40}$ λ circa. La L_1 è posta a 45° rispetto al piano di polarizzazione dell'analizzatore, ed è fissa; la L_2, che diremo lamina compensatrice, è montata su di un cerchio graduato che dia 1′ [1].

Nel cannocchiale del polarimetro, il campo luminoso apparirà diviso in due parti: l'una coperta da tutte e due le lamine, l'altra coperta soltanto da L_2. In generale l'intensità luminosa dei due campi sarà diversa, ma, ruotando L_2, si trovano quattro azimut in un giro completo, per i quali si ha eguaglianza d'illuminazione. Allora piccole rotazioni di L_2 fanno variare rapidamente l'intensità relativa dei due campi. Si è in possesso di un apparecchio a penombra: il compensatore di Brace. Occorrerà dunque, per avere il massimo di sensibilità, che il cannocchiale di osservazione sia aggiustato quasi sul margine della mica L_1, che questo margine sia molto netto, evanescente; che l'illuminazione del campo sia uniforme.

Le sottilissime laminette di mica che occorrono per costruire questo apparecchio si incollano, mediante balsamo del Canadà, tra due vetrini copriogetto da microscopio, accuratamente scelti. Ho trovato vantaggioso formare L_1 mediante una laminetta di qualche mm² coprente la parte centrale del campo. Si ottiene così un apparecchio a penombra con un campo centrale e uno periferico; così è più agevole il confronto d'illuminazione, ed è inoltre molto più facile ottenere una lamina di mica così sottile (1,3 μ circa), omogenea e di dimensioni sufficienti.

Un calcolo piuttosto noioso, ma non difficile, mostra che, quando i due campi sono egualmente illuminati, giungono da essi all'analizzatore delle vibrazioni ellittiche molto schiacciate ($\varphi < 1°$), di forma quasi eguale, e quasi egualmente disposte, ma per l'uno dei due campi le ellissi sono destrorse; per l'altro, sinistrorse.

[1] Cfr. Brace, lav. cit., "Phys. Rev.", *19*, p. 226, 1904.

Supponiamo ora di sostituire alla vibrazione rettilinea incidente sul sistema L_1 ed L_2 la vibrazione debolmente ellittica in istudio, in modo però che *il suo asse maggiore conservi l'azimut della vibrazione rettilinea precedente, cioè sia nel piano di polarizzazione dell'analizzatore.*

Delle due ellissi dei campi centrale e laterale del compensatore, l'una diventerà più schiacciata, l'altra invece s'allargherà, e all'osservatore risulterà una notevole differenza d'illuminazione dei due campi. Si riottiene l'eguaglianza ruotando di un certo angolo α la lamina L_2. Da ciò il nome di lamina compensatrice alla L_2, e di compensatore all'apparecchio.

L'angolo α è funzione di φ, e la ricerca della funzione $\varphi = \varphi(\alpha)$ darebbe modo di trovare φ per ogni valore di α. Ma poichè teoricamente il problema è impossibile, occorre tarare l'apparecchio.

Dico impossibile perchè troppo forte è l'errore che si commette nella misura dello spessore delle lamine di mica, e anche maggiore quello dovuto all'incertezza degl'indici di rifrazione della mica, che variano da campione a campione.

Quando sarà tarato l'apparecchio, si capisce come vanno condotte le esperienze: 1° Si misura ψ mediante un polarizzatore a penombra usato opportunamente $\left(\frac{\omega}{2} = \epsilon\right)$. 2° Tolto il sistema dei piccoli prismi del Lippich, quindi tolta la penombra, si fa in modo che l'asse maggiore dell'ellisse in istudio coincida con l'asse maggiore dell'ellisse, che sarebbe trasmessa dalla lamina L_1, in altre parole: sia nel piano di polarizzazione dell'analizzatore. Ciò si ottiene ruotando l'analizzatore e tutto il compensatore rigidamente uniti, mentre il polarizzatore è a penombra, fino ad ottenere ψ, poi si toglie il sistema dei piccoli prismi di Lippich, badando a non muovere il grande prisma; dopo si ruota ancora l'analizzatore (e con esso il compensatore) di un angolo $\frac{\omega}{2}$, in senso opportuno; infine si inserisce il compensatore. Si potrebbe anche riportare l'analizzatore a posto, dopo aver misurato ψ; inserire il compensatore, togliere la penombra e ruotare il polarizzatore di $-\psi \pm \frac{\omega}{2}$, il segno di $\frac{\omega}{2}$ dovendo essere scelto opportunamente. In questo caso è bene ruotare di questo stesso angolo anche il corpo in istudio. 3° Si misura α.

La 2ª di queste operazioni e la taratura del compensatore rendono molto faticoso l'uso di questo apparecchio che ha il pregio di una grandissima sensibilità (si ottiene φ a meno di 1', come vedremo in seguito). In generale i polarimetri ora esistenti non si prestano a queste esperienze. Un nuovo tipo di polarimetro, che invece si presta molto bene, sarà descritto in uno dei prossimi numeri del *Zeitschrift für Instrumentenkunde*.

Taratura del compensatore. — Occorre far incidere sul compensatore delle ellissi di cui si conosca φ, ed orientate in modo che il loro asse maggiore sia nel piano di polarizzazione dell'analizzatore. Ciò si ottiene ponendo prima del compensatore un parallelepipedo di Fresnel [1] il cui piano di simmetria sia parallelo (o perpendicolare) al piano di polarizzazione dell'analizzatore.

Il polarizzatore B deve essere montato su di un cerchio graduato H, e spostabile perpendicolarmente al raggio luminoso mediante la cremagliera R. Il compensatore si deve poter togliere e mettere nella stessa posizione, tra i nicol. Lo stesso si dica pei due parallelepipedi di Fresnel P_1 e P_2 posti l'uno prima del polarizzatore B, l'altro dopo. Tre buone cerniere C_1, C_2, C_3 con un dente d'arresto sono sufficienti (fig. 3).

Ecco come si procede:

1° Si incrociano analizzatore e polarizzatore.

2° Si solleva il polarizzatore B mediante la cremagliera R e s'inseriscono P_1 e P_2. Perchè la disposizione sia esatta, i piani di simmetria di P_1 e di P_2 dovranno coincidere, dovranno contenere la vibrazione trasmessa da B ed essere perpendicolari alla vibrazione che passa attraverso l'analizzatore A. Infine i parallelepipedi, e in ispecial modo P_2, devono avere le facce perpendicolari al raggio luminoso. Se tutte queste condizioni sono verificate, e i parallelepipedi non sono guasti, si osserverà una striscia di Landolt molto netta al centro del campo; questa striscia, caratteristica dei nicol incrociati, si deve conservare anche quando, tolti i parallelepipedi, si riabbassi il polarizzatore.

---

[1] Una mica $\frac{1}{4}\cdot\lambda$ sarebbe d'uso più comodo, ma bisognerebbe allora limitarsi ad osservazioni con luce di una sola lunghezza d'onda.

3° Tolti i parallelepipedi, si introduce il compensatore su cui sia montata soltanto la lamina L_1, la si dispone a 45° e la si fissa stabilmente perchè non sarà più toccata. Poi s'introduce la lamina compensatrice L_2, montata sul cerchio graduato I, e la si ruota fino ad ottenere eguaglianza di illuminazione dei due campi. La lettura corrispondente al cerchio graduato I darà lo zero del compensatore e sarà l'azimut da cui vanno contati, in valore e segno, gli angoli α. A questo punto si è in possesso di un mezzo sensibilissimo per vedere

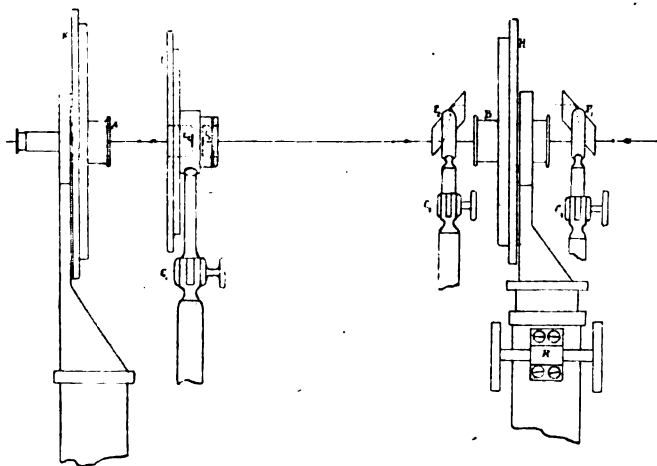



Fig. 3.

se l'operazione 2ª è stata ben eseguita: basterà introdurre nuovamente i parallelepipedi e innalzare B; l'eguaglianza di luminosità dei due campi del compensatore deve essere conservata.

4° Introdotti il compensatore e i parallepipedi, si ruoti il polarizzatore B di piccoli angoli, che si leggeranno al cerchio H; allora la vibrazione trasmessa dal $\frac{1}{4}\lambda P_2$ non è più rettilinea, ma è un ellisse il cui rapporto degli assi è dato dalla tg dell'angolo di cui si è ruotato B. Tale angolo sarà dunque φ. Inoltre l'ellisse così prodotta ha l'asse maggiore costantemente nel piano di polarizzazione dell'analizzatore. L'eguaglianza di luminosità dei due campi del compensatore non è conservata; per ristabilirla occorre ruotare L_2 dell'angolo α. Mediante i

valori di φ (che possono essere positivi o negativi) [1] e i corrispondenti valori di α, si costruirà la curva di taratura del compensatore.

Variazione della taratura con λ. — La dispersione delle due lamine di mica essendo la stessa, sembrerebbe che l'eguaglianza d'illuminazione si dovesse conservare per qualunque lunghezza d'onda [2]; in tal caso basterebbe tarare l'apparecchio con una sola luce, la più comoda, per es., la $\lambda = 589.3$ Na o la $\lambda = 610.4$ Li. Ma nel fatto, soltanto lo zero del compensatore ($\varphi = 0$) è invariabile al variare di λ, o, almeno, le sue variazioni sono molto piccole.

Per rendersi ragione della variabilità della taratura al variare di λ, si pensi che se le due lamine sono ad esempio di ordine: $\frac{1}{100}\lambda$ la L_1, e $\frac{1}{40}\lambda$ la L_2 per $\lambda = 589.3$ Na; tali lamine saranno di ordine $\frac{1}{100}\lambda.\kappa$, $\frac{1}{40}\lambda.\kappa$ per un'altra lunghezza d'onda. Dunque la variazione della lunghezza d'onda ha per effetto una variazione degli ordini delle due lamine, in modo che il loro rapporto rimanga costante. Ora, come risulta dai lavori del Brace, all'aumentare dello spessore delle lamine, anche rimanendo costante il loro rapporto, varia l'angolo α corrispondente a un certo valore di φ. Ad es., per gli ordini $\frac{1}{1000}\lambda$, $\frac{1}{400}\lambda$, il φ massimo che si possa compensare ($\alpha = 45^\circ$ circa) è molto piccolo, $<1^\circ$; per gli ordini $\frac{1}{100}\lambda$, $\frac{1}{40}\lambda$, il φ massimo ($\alpha = 45^\circ$ circa) è invece circa 6°.

Ho fatto la taratura del compensatore per varie lunghezze d'onda. Come si vede dalle curve riportate, non è possibile, neppure in una prima approssimazione, di supporre la taratura indipendente da λ.

La tav. I è costruita portando sulle ascisse le lunghezze d'onda, sulle ordinate la differenza tra il valore di α per la

(1) Per ciò si tenga presente che la vibrazione che avviene nel piano di simmetria del parallelepipedo è accelerata di $\frac{1}{4}\lambda$ (v., p. es., Bouasse, *Cours de Physique*, V, pag. 224).

(2) Cfr. Brace, lav. cit., " Phys. Rev. ", *19*, p. 230, 1904.

luce usata. e il valore di α per $\lambda = 589.3$, a parità di φ. Le curve di questa tavola sono specialmente utili, quando si facessero esperienze con luce di una lunghezza d'onda non compresa tra quelle della tav. II. La tav. II dà φ in funzione di α. Si nota subito la mancanza di simmetria delle curve rispetto al punto $\varphi=0$. L'apparecchio da me usato serve per ellissi per cui è $|\varphi| < 6^\circ$. Le curve riportate servono per $-4^\circ < \varphi + 6^\circ$. Se si ruota la lamina L_1 di 90° si ottengono curve che servono per $-6 < \varphi + 4^\circ$. Ciò si deduce teoricamente e l'esperienza conferma.

Soltanto per brevi tratti, prossimi al punto $\varphi = 0$, si possono ritenere le curve della tav. II coincidenti con delle rette, cioè α proporzionale a φ.

Precisione del metodo. — Si è già detto dell'errore che si commette nella misura di ψ con un apparecchio a penombra. L'errore probabile della media di parecchie letture è di $\pm 20''$ per $\varphi < 2^\circ$; è di $\pm 40''$ per $2^\circ < \varphi < 3^\circ$; è di $\pm 1'$ per $3^\circ < \varphi < 4^\circ$; infine è di $\pm 3'$ per $\varphi = 5^\circ$.

Per $\varphi > 5^\circ$ questo errore probabile sale rapidamente. Esso varia debolmente anche col variare dell'angolo ω della penombra.

Mediante l'uso della fotografia si ottiene una precisione un po' maggiore, ma a grande scapito della rapidità.

Le cause di errore nella misura di φ sono principalmente le seguenti:

1° Errore nella misura di ψ.

2° Mancanza di precisione nella montatura del parallelepipedo P_2.

3° Inesattezza del parallelepipedo come $\frac{1}{4}\lambda$.

La prima causa d'errore ha un effetto del tutto trascurabile. Si può dimostrare ciò sperimentalmente incollando dopo il polarizzatore una lamina di mica posta a 45° circa. Per ottenere l'eguaglianza al compensatore, occorrerà ruotare L_2 di un certo angolo α. Si faccia ora ruotare il polarizzatore e con esso la lamina incollatavi. Così inciderà sul compensatore una ellisse di forma invariabile ($\varphi =$ cost), ma il cui asse maggiore non giace sempre nel piano di polarizzazione dell'analizzatore. Ebbene questa rotazione deve essere di circa 2° perchè faccia comparire una differenza sensibile di luminosità tra i due

campi del compensatore: dunque: *un errore di parecchi primi nella misura di ψ non ha influenza sensibile nella misura di φ* anche quando questa misura sia fatta con un metodo preciso come quello del Brace (φ a meno di 1′ come vedremo tra poco). È invece molto grave la seconda causa d'errore. Per eliminarla occorre scomodare a bella posta il parallelepipedo P_2 e rimetterlo con cura a posto; fare così diverse tarature e adottare la media. Le curve riportate si riferiscono ad una delle tarature da me fatte. Per le altre tarature ho ottenuto curve tra loro discoste di quantità di pochissimo superiori agli errori d'osservazione. Si noti che, finchè ci si limita a valori di φ per i quali la curva di taratura può confondersi con una retta, la cura maggiore dev'essere quella di montare P_2 ben perpendicolare al raggio luminoso. Se poi il piano di simmetria del parallelepipedo non coincide col piano di polarizzazione dell'analizzatore, lo zero del compensatore non è più quello che si aveva quando non era inserito il parallelepipedo. Per misurare α bisogna partire da questo nuovo zero del compensatore. È facile accorgersi che allora la retta in cui si confonde la taratura non fa che scorrere su sè stessa.

Passiamo alla terza causa d'errore.

Il parallelepipedo può non essere $\frac{1}{4}\lambda$ neanco per $\lambda = 589.3$ Na per cattiva costruzione o per birifrangenza accidentale. Tanto l'una che l'altra di queste cause si eliminano verificando la taratura con un altro, o, meglio, con altri parallelepipedi.

Supposto che il parallelepipedo sia $\frac{1}{4}\lambda$ esatto per la luce gialla del sodio, esso non lo è che con grande approssimazione per le altre lunghezze d'onda. Ma viene il dubbio che neanco questa grande approssimazione sia sufficiente, tenuto conto della grande sensibilità del metodo di Brace.

Le equazioni dell'ellisse trasmessa dal parallelepipedo sono:

$$(11) \qquad x = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t \qquad y = \operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} t - m \frac{\pi}{2} \right)$$

x è la vibrazione nel piano di simmetria, accelerata di $m \cdot \frac{\pi}{2}$; φ_i è l'angolo di cui si è ruotato il polarizzatore, e coincide coll'angolo φ del rapporto degli assi $\operatorname{tg}\varphi$ solo quando è $m = 1$.

I valori di m sono [1]:

per $\lambda = 396.6$ H $m = 1.0149$

per $\lambda = 589.3$ D $m = 1$ (il parallelep. è $\frac{1}{4}\lambda$ esatto)

per $\lambda = 687.0$ B $m = 1.0062$

Quindi agli estremi dello spettro le (9) si scrivono, approssimativamente:

estremo rosso

$$x = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}t \quad y = \operatorname{tg}\varphi_i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2.180}\right) = -\operatorname{tg}\varphi_i \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 30'\right) \tag{12}$$

estremo violetto

$$x = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}t \quad y = -\operatorname{tg}\varphi_i \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 1^\circ\right).$$

Ora l'ellisse:

$$x = a\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t - \alpha\right) \qquad y = b\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t - \beta\right)$$

ha l'azimut ψ dell'asse maggiore (contato a partire dall'asse x), e il rapporto $\operatorname{tg}\varphi$ degli assi, dati dalle formule:

$$\operatorname{tg}2\psi = \frac{2ab}{a^2 - b^2}\cos(\alpha - \beta) \qquad \operatorname{sen}2\varphi = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

le quali valgono in valore e segno, quando sia $a > b$; a, b, α, β tutti positivi; il senso del giro che porta l'asse x sull'asse y sia sinistrorso; infine per φ e ψ valgano le convenzioni fatte a pag. 3.

Queste formule, applicate alle (12), si scrivono:

estremo rosso:

$$\operatorname{tg}2\psi = -\operatorname{tg}2\varphi_i \operatorname{sen}30' \qquad \operatorname{sen}2\varphi = \operatorname{sen}2\varphi_i \cos 30'$$

estremo violetto:

$$\operatorname{tg}2\psi = -\operatorname{tg}2\varphi_i \operatorname{sen}1^\circ \qquad \operatorname{sen}2\varphi = \operatorname{sen}2\varphi_i \cos 1^\circ$$

[1] Vedi BILLET, *Traité d'optique*, II. p. 29.

le quali dànno:

estremo rosso:

per $\varphi_i = 1^\circ$	$2\psi = -1'$	$2\varphi = 2^\circ - 1/5''$
per $\varphi_i = 2^\circ$	$2\psi = -2'$	$2\varphi = 4^\circ - 1/2''$
per $\varphi_i = 3^\circ$	$2\psi = -3'$	$2\varphi = 6^\circ - 1''$

estremo violetto:

per $\varphi_i = 1^\circ$	$2\psi = -\ 2'$	$2\varphi = \ 2^\circ - 1''$
per $\varphi_i = 2^\circ$	$2\psi = -\ 4'$	$2\varphi = \ 4^\circ - 2''$
per $\varphi_i = 3^\circ$	$2\psi = -\ 6'10''$	$2\varphi = \ 6^\circ - 3''$
per $\varphi_i = 6^\circ$	$2\psi = -12'40''$	$2\varphi = 12^\circ - 6''$

Abbiamo già notato che un errore di parecchi primi nella direzione dell'asse maggiore non porta errore alcuno nella misura di φ. Osserviamo ora che *la media di alcune letture al cerchio del compensatore è affetta da un errore probabile che va da* 3′ (luci gialle e verdi, $-3^\circ 30' < \varphi < 5^\circ$) *a* 6′ (luci violette e rosso-cupo, $\varphi < -3^\circ 30'$, $\varphi > 5^\circ$). Dalla tav. II si vede facilmente che questo errore probabile porta *una incertezza di* 1′ *nella misura di* φ. Dunque il parallelepipedo di Fresnel è un ottimo $\frac{1}{4}\lambda$, più che sufficiente in queste esperienze.

Infine notiamo che si è cercata la sensibilità del metodo di Brace anche con esperienze dirette: ruotata la lamina L_2 di un certo angolo α, inseriti i parallelepipedi, si ruotava il cerchio H del polarizzatore fino ad ottenere eguaglianza di luminosità dei due campi. La media di qualche lettura così fatta al cerchio H ebbe sempre un errore probabile $< 1'$.

Ancora: posta dopo il polarizzatore una lamina di mica a 45° se ne misurava l'ellisse trasmessa. Ruotando ora la lamina di 90° l'ellisse trasmessa doveva mutare di segno e non di rapporto degli assi. Ecco i risultati delle esperienze fatte con diverse lamine di mica:

	a $+45^\circ$		a -45°
$\varphi =$	$+3^\circ 9'$	$\varphi =$	$-3^\circ 10'$
	$+2^\circ 55'$		$-2^\circ 58'$
	$+2^\circ 25'$		$+2^\circ 23'$

Infine riferisco un'altra bella conferma della precisione del metodo di Brace: Una lamina di mica a 45° ha dato $\varphi = 4^\circ 53'$.

Ho calcolato e poi misurato le ellissi trasmesse da questa lamina quando sia posta a 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°. Ecco i risultati:

	φ calcolato	φ osservato
a 5°	50′40″	50′
a 10°	1°39′50″	1°39′
a 15°	2°26′10″	2°25′30″
a 20°	3° 7′40″	3° 8′
a 25°	3°43′50″	3°43′
a 30°	4°13′20″	4°14′
a 35°	4°35′ 0″	4°35′
a 45°	4°53′	

Dunque il metodo di Brace, in compenso delle molte cure che esige, offre una sensibilità di gran lunga superiore a ogni altro metodo.

Sulla misura del lavoro d'isteresi magnetica.

Nota dell'Ing. GIUSEPPE LIGNANA

Le proprietà magnetiche delle lamiere usate nella costruzione del macchinario elettrico vengono ordinariamente determinate con due serie di esperienze.

Col metodo classico del galvanometro balistico si determina la curva normale di magnetizzazione e poi per punti si determinano vari cicli di magnetizzazione nei limiti dei valori della induzione che interessano le costruzioni elettromeccaniche; questi vari cicli vengono in seguito planimetrati, e l'area stessa del ciclo $\left(\int_{-I}^{+I} H dI \text{ oppure } \int \frac{H d\mathfrak{B}}{4\pi}\right)$ ci dà una misura del lavoro di isteresi speso in un ciclo e per cm³ di ferro. In base a questi risultati si può calcolare il coefficiente della formula empirica dello Steinmetz.

Altre prove si eseguiscono ancora sui lamierini mediante il wattometro, assoggettandoli ad una magnetizzazione alternata; queste prove eseguite a varie frequenze permettono anche di separare le perdite d'isteresi da quelle per correnti parassite.

Dal complesso di tutto questo studio sperimentale si hanno così le proprietà del materiale magnetico che viene usato nella costruzione del macchinario.

I metodi sperimentali ricordati sono di assai lunga e laboriosa esecuzione: il rilievo per punti dei cicli d'isteresi richiede numerose letture; il ciclo in seguito deve essere disegnato con cura e poi planimetrato, e se si vuole ottenere una discreta approssimazione le operazioni sperimentali sono numerose e richiedono assai tempo.

Nelle prove a corrente alternata col wattometro molte volte s'incontrano difficoltà specialmente se il provino ha piccole dimensioni, causa la scarsa sensibilità degli ordinari wattometri.

Scopo di questa nota è l'indicare un metodo rapido che rimedia a questi inconvenienti. Il tracciamento del ciclo e la relativa planimetrazione possono essere eliminati coll'uso di un elettrodinamometro balistico: anche all'inconveniente della limitata sensibilità del wattometro nelle prove a corrente alternata si può rimediare in molti casi con un'opportuna inserzione della spirale voltometrica come verrà indicato in seguito.

Elettrodinamometro balistico. — La teoria di questo strumento si può sviluppare facilmente in modo analogo a quella del galvanometro balistico mettendo a base della trattazione le stesse ipotesi che valgono per il galvanometro. Se i_1 ed i_2 sono le correnti nella spirale fissa e nella mobile e sono due correnti distinte (wattometro balistico, o meglio detto ergometro perchè ci misura il lavoro e non la potenza), l'impulso che si ottiene allo strumento sarà legato alla i_1 ed i_2 dalla relazione

$$\int_0^\tau i_1 i_2 \, dt = K\alpha$$

naturalmente s'intende che al tempo 0 almeno una delle correnti è nulla e che alla fine del tempo τ una delle correnti ritorna ad annullarsi (τ è la durata del periodo variabile delle correnti), e che il movimento della spirale mobile si inizia appunto dopo il tempo τ.

A rigore si dovrebbe aggiungere un termine proporzionale ad $H\int_0^\tau i_2 \, dt = Hq$ per tener conto che la spirale mobile tro-

vandosi nel campo magnetico terrestre ed essendo attraversata da una scarica, il cui valore è appunto $\int_0^\tau i_2\,dt$, dà luogo ad una coppia che si somma o si sottrae alla coppia dovuta al prodotto delle due correnti; in altri termini si può dire che all'elettrodinamometro balistico si sovrappone anche un galvanometro balistico in quanto la spirale mobile si trova in un campo magnetico costante che è il campo magnetico terrestre.

L'effetto di questa coppia verrà eliminato facendo la media fra due deviazioni in cui si faccia avvenire questa scarica in versi contrari.

Applicazione del wattometro balistico alla determinazione del lavoro d'isteresi. — Abbiasi un nucleo di lamierini

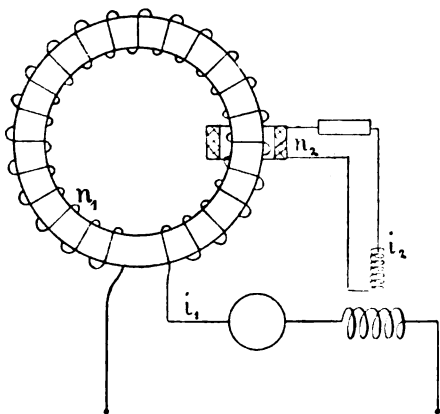



Fig. 1.

a forma di toro e su di esso avvolte due spirali indipendenti rispettivamente di n_1 e n_2 spire.

Nel circuito delle n_1 spire si mette in serie la spirale fissa del wattometro ed un amperometro per determinare il valore della corrente i_1. La spirale mobile del wattometro, con una conveniente resistenza, viene unita alle n_2 spire. Finchè la corrente i_1 è costante il wattometro starà nella sua posizione di zero, ma se si fa subire una variazione alla corrente i_1, per esempio introducendo una resistenza nel circuito della corrente i_1, si avrà un impulso al wattometro balistico per effetto della cor-

rente i_2 indotta dalla variazione del flusso concatenato colle n_2 spire.

Se mediante uno dei dispositivi ben noti (tasto d'inversione o un complesso di due reostati accoppiati) si inverte la corrente magnetizzante i_1, anche il campo magnetizzante s'invertirà passando dal valore $+H$ corrispondente ad una certa corrente i_1, al valore $-H$ simmetrico corrispondente alla corrente $-i_1$. Contemporaneamente il valore dell'induzione magnetica B passerà dal suo valore positivo al valore negativo uguale ed il materiale percorrerà il primo ramo del ciclo d'isteresi. Contemporaneamente a questa variazione di induzione nel circuito secondario delle n_2 spire viene indotta una corrente secondaria i_2, e se il periodo T di oscillazione propria del wattometro balistico è sufficientemente grande di fronte alla durata τ del periodo variabile delle correnti potremo ritenere che

$$\int_0^\tau i_1 i_2 \, dt = K\alpha \,. \tag{1}$$

Applicando il teorema della circuitazione elettromagnetica alla linea media del toro magnetico si potrà scrivere

$$4\pi n_1 i_1 = HL \tag{2}$$

essendo L la lunghezza della linea media del toro da cui

$$i_1 = \frac{HL}{4\pi n_1} \,:$$

indicando con i_2 la corrente nel secondario di resistenza R e con e_2 la f. e. m. indotta nelle n_2 spire si ha

$$e_2 = n_2 S \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = R i_2 \tag{3}$$

dove con S si indica la sezione del toro e con $\mathfrak{B}$ l'induzione magnetica nel nucleo: da questa si ricava

$$i_2 = \frac{n_2 S}{R} \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \,:$$

sostituendo i valori così ottenuti di i_1 e i_2 nella (1) si ha:

$$K\alpha = \int_0^\tau i_1 i_2 \, dt = \frac{V}{R} \frac{n_2}{n_1} \int_{+\mathfrak{B}}^{-\mathfrak{B}} \frac{H d\mathfrak{B}}{4\pi}$$

ove $SL = V$ è il volume del toro. Variando $n_2 R$ si potranno avere diverse deviazioni sempre corrispondenti ad uno stesso $\int \frac{H d\mathfrak{B}}{4\pi}$ esteso agli stessi limiti; si può cioè variare la sensibilità del metodo.

L' $\int_{+B}^{-B} \frac{H d\mathfrak{B}}{4\pi}$ ci dà la metà del lavoro d'isteresi spettante al ciclo completo ed è rappresentato (fig. 2) dall'area CBF diminuita dall'area ACD.

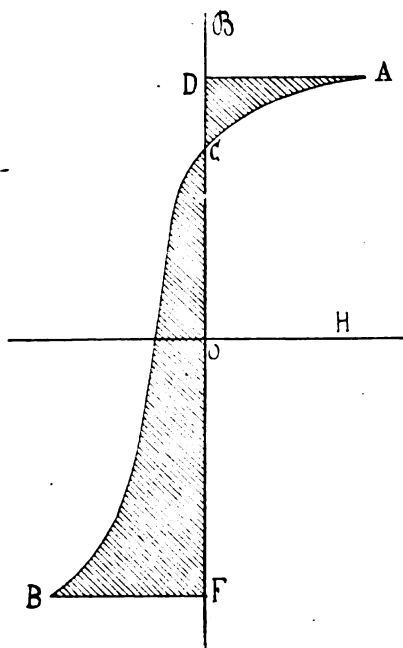



Fig. 2.

Realmente si constata col wattometro balistico che se l'equipaggio mobile non ha grande momento d'inerzia, per cui si è lontani dalle condizioni teoriche che la scarica $\int_0^T i_2 dt$ succeda tutta prima che s'inizi il moto, l'equipaggio mobile dà prima un impulso in un verso per poi deviare definitivamente in verso opposto.

Si potrebbe anche pensare di realizzare l'integrazione fra i limiti $+\mathfrak{B}$ e $+\mathfrak{B}$ facendo compiere al materiale un ciclo intero d'isteresi: si dovrebbe cioè procedere dopo l'inversione del

campo ad una seconda inversione per ristabilire il valore primitivo di H: operando in tal modo non si può avere la certezza che il ciclo descritto sia simmetrico perchè la corrente magnetizzante negativa facilmente non avrebbe il tempo di raggiungere il suo valore massimo.

La deviazione dell' elettrodinamometro balistico sarebbe sempre proporzionale al lavoro d' isteresi, ma questo non dovrebbe essere attribuito al ciclo d' isteresi simmetrico di cui s'intende di parlare.

La teoria considerata e le formule scritte non sono esatte, ma presentano vari punti deboli. La formula (2) è esatta fino a che si considera il regime permanente della corrente magnetizzante i_1; quando si considera invece il periodo variabile della corrente, siccome il campo è variabile e di conseguenza varia l'induzione nel nucleo, bisognerà tener conto che a produrre il campo H concorreranno anche le correnti indotte dalla variazione di flusso e che sono necessariamente concatenate col circuito magnetico. Pertanto dovremo tener conto che nel periodo variabile anche la corrente i_2 darà luogo ad una eccitazione $n_2 i_2$. Inoltre il nucleo essendo formato di lamierini, questi saranno sede di correnti parassite che eserciteranno una azione sul nucleo stesso. Il complesso però di queste correnti parassite lo potremo assimilare per i suoi effetti magnetici ad un'unica corrente localizzata alla periferia della sezione del toro e di valore che indicheremo con y.

Sia la corrente i_2 che la y equivalente al complesso delle correnti parassite per la legge di Lenz tendono ad opporsi alla variazione di flusso, e quindi quando il materiale percorre il tratto AC del ciclo sia la i_2 che la y hanno lo stesso verso della i_1, quando il materiale comincia a percorrere il ramo CB del ciclo sia la i_2 che la y conservano la stessa direzione mentre la i_1 si è invertita. Si potrà anche dire che per il primo tratto AC del ciclo, siccome le variazioni di flusso sono piccole, la i_2 e la y non devono alterare sensibilmente il valore del campo prodotto dalla corrente i_1; dove potrà farsi più sentito l'effetto sarà nel tratto CB del ciclo dove la variazione del flusso è notevole. Questa osservazione non ha però gran valore, perchè bisognerà anche considerare il tempo in cui avvengono queste due variazioni di flusso, e certamente la corrente impiegherà un

tempo maggiore a passare dal suo valore zero al valore negativo massimo, che non a passare dal suo valore massimo al valore nullo.

Pertanto l'equazione (2) dovrà essere scritta in modo generale e sarà

$$(2') \qquad 4\pi\,(n_1 i_1 + n_2 i_2 + y) = HL\,.$$

da cui

$$(\alpha) \qquad i_1 = \frac{HL}{4\pi n_1} - \frac{n_2}{n_1}\, i_2 - \frac{1}{n_1}\, y\,.$$

Nemmeno non è esatta l'equazione (3) da cui si è dedotto il valore i_2; se con $\mathfrak{B}$ si indica il valore della induzione effettiva risultante nel nucleo, la formula sarebbe esatta se la spirale secondaria delle n_2 spire non desse luogo ad un flusso disperso fuori del nucleo, ma siccome esiste un flusso disperso di queste n_2 spire, ed inoltre la spirale mobile del wattometro ha necessariamente un coefficiente di selfinduzione, l'equazione (3) dovrà essere scritta nel seguente modo

$$(3') \qquad e_2 = -\, n_2 S\,\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = R i_2 + \mathfrak{L}_2\,\frac{di_2}{dt}$$

essendo L_2 il coefficiente di selfinduzione della spirale mobile del wattometro aumentato del coefficiente di selfinduzione spettante al flusso disperso delle n_2 spire del secondario: dalla (3') deduciamo

$$(\beta) \qquad i_2 = -\,\frac{n_2 S}{R}\,\frac{d\mathfrak{B}}{dt} - \frac{\mathfrak{L}_2}{R}\,\frac{di_2}{dt}\,,$$

le equazioni (α) e (β) ci dànno modo di scrivere l'equazione generale

$$(\gamma) \qquad \int i_1 i_2\, dt = -\,\frac{n_2}{n_1}\,\frac{V}{R}\int\frac{H d\mathfrak{B}}{4\pi} - \frac{n_2}{n_1}\,\frac{1}{R}\int e_2 i_2\, dt - \frac{n_2}{n_1}\,\frac{1}{R}\int e_2' y dt -$$
$$-\,\frac{\mathfrak{L}_2}{R}\,\frac{L}{4\pi n_1}\int H di_2 + \frac{\mathfrak{L}_2}{R}\,\frac{n_2}{n_1}\int i_2 di_2 + \frac{\mathfrak{L}_2}{R}\,\frac{1}{n_1}\int y di_2$$

dove $e_2 = -\, n_2 S\,\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ è la f. e. m. indotta nel secondario, $e_2' = -\, S\,\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ è la f. e. m. indotta che dà luogo alla corrente parassita y.

L'integrazione definita fra i limiti di tempo 0 e τ prima considerati ci dà modo di vedere da quali elementi dipende la elongazione dell'elettrodinamometro balistico.

Esaminiamo separatamente i vari termini che compaiono al secondo membro della γ.

Il primo termine integrato fra i limiti $+H$ e $-H$, $+\mathfrak{B}$ e $-\mathfrak{B}$, che corrispondono al tempo iniziale e finale, ci rappresenta metà del lavoro d'isteresi competente al ciclo intero.

Il secondo termine $\int_0^\tau e_2 i_2 dt$ è il lavoro della corrente nel secondario cioè l'effetto joule nel secondario. Tale termine è assolutamente trascurabile nel caso considerato dell'elettrodinamometro balistico, causa la grande resistenza del circuito stesso.

Il terzo termine $\int e_2' y dt$ è il lavoro della corrente parassita. Ora quando si esperimenta su nuclei laminati e si inverte solo la magnetizzazione, questo lavoro è assolutamente trascurabile di fronte al lavoro d'isteresi.

Gli altri termini della (γ) contengono il fattore $\frac{\mathfrak{L}_2}{R}$ e sarebbero nulli se $\mathfrak{L}_2$ fosse nullo.

Il quinto termine $\frac{n_2}{n_1} \frac{\mathfrak{L}_2}{R} \int i_2 di_2$ siccome si considera il periodo variabile, l'integrazione va estesa fra il limite iniziale $i_2 = 0$ e finale $i_2 = 0$, ed evidentemente il termine si annulla esattamente qualunque sia il valore di $\mathfrak{L}_2$. Questo termine ci rappresenta l'energia intrinseca della corrente secondaria che è nulla all'inizio e al termine del periodo variabile.

Il sesto termine $\frac{1}{n_1} \frac{\mathfrak{L}_2}{R} \int y\, di_2$ integrato fra i limiti che si considerano sarebbe nullo se y ed i_2 fossero proporzionali. Per la corrente y equivalente al complesso delle correnti parassite si potrà dire che avendo considerato l'induzione risultante nel nucleo il circuito della corrente y non presenta selfinduzione; la i_2 invece ha luogo in un circuito con selfinduzione per cui la y e la i_2 non sono proporzionali in ogni singolo istante. Ma la legge della loro variazione sarà diversa.

Col diminuire di $\mathfrak{L}_2$ di fronte ad R la y tende a diventare proporzionale alla i_2 per cui al limite di $\mathfrak{L}_2 = 0$ l'$\int y\, di_2$ ci rappresenta l'energia intrinseca della corrente parassita che è nulla sia al tempo zero che al tempo τ.

Il 4° termine $\frac{\mathfrak{L}_2}{R}\frac{L}{4\pi n_1}\int H di_2$ lo si può porre sotto altra forma. Considerando che $\frac{4\pi n_2^2 S}{L} = \mathfrak{L}_2'$ sarebbe il vero coefficiente di selfinduzione delle n_2 spire secondarie qualora fossero avvolte con continuità sul toro e non localizzate, e osservando che $n_2 SH$ è il flusso di H che si concatena colle n_2 spire, e che potremo indicare con φ_H, il 4° termine risulta uguale a

$$\frac{\mathfrak{L}_2}{R}\frac{n_2}{n_1}\frac{1}{\mathfrak{L}_2'}\int \varphi_H \, di_2 .$$

Se invece di $\int \varphi_H \, di_2$ vi fosse $\int d(\varphi_H \, i_2)$, questo ci rappresenterebbe la variazione totale di energia della corrente secondaria in quanto si trova nel campo magnetico H, e ai limiti di integrazione che si considerano, la variazione totale di energia sarebbe nulla, perchè l'energia della corrente i_2 nel campo H al tempo zero è nulla perchè è nulla la corrente i_2, poi va crescendo per diminuire in seguito ed annullarsi al tempo τ in cui si annulla la corrente indotta; da ciò ne viene di conseguenza che

$$\int_{i_2=0}^{i_2=0} \varphi_H \, di_2 = - \int_{+\varphi_1}^{-\varphi_1} i_2 \, d\varphi_H ;$$

pertanto questo termine avrà un valore che teoricamente non è nullo e sarà certamente piccolo se si fa la resistenza R del circuito secondario molto grande.

Prima di procedere alla misura converrà verificare sperimentalmente se realmente i termini correttivi che compaiono nella (1) siano trascurabili, se cioè si ha l'esatta proporzionalità fra la deviazione ed il numero delle spire. Assume una speciale importanza la verifica che la deviazione sia proporzionale al rapporto $\frac{n_2}{R}$. Negli esperimenti eseguiti e che riferirò, ho ottenuto un'assoluta costanza nella deviazione mantenendo costante il rapporto $\frac{n_2}{R}$ ed invertendo la corrente magnetizzante fra valori costanti.

Avendo così verificato le buone condizioni delle esperienze, volli anche rendermi conto sperimentale dell'influenza di $\mathfrak{L}_2$, perciò ho diminuito il più possibile la resistenza, e mettendo in serie nel circuito del secondario un campione di induttanza,

determinando la impulsione balistica e ripetendo la determinazione togliendo l'induttanza e sostituendola con una resistenza Ohmica uguale a quella del campione di induttanza, ho trovato delle differenze nelle deviazioni che raggiungono appena 1,5 % quando il campione d'induttanza era di 1 Henry.

Con altri campioni d'induttanza minore non ho constatato alcuna differenza nelle elongazioni dell'elettrodinamometro.

Siccome l'induttanza della spirale mobile dell'elettrodinamometro è di 0,01 Henry, anzi un po' minore, e la resistenza R nei vari esperimenti è sempre stata elevata ($R = 5000$ Ohm. per i cicli minori, $R = 20000$ Ohm. per i cicli maggiori), l'influenza dei termini contenente $\mathfrak{L}_2$ e dell'effetto joule della corrente i_2 e della corrente parassita è assolutamente trascurabile quando si proceda agli esperimenti con un elettrodinamometro di conveniente sensibilità.

L'equazione (γ) ci dice anche che la misura si può eseguire con un ordinario wattometro colla spirale amperometrica in serie sul circuito magnetizzante alimentato da una corrente alternata, e colla spirale voltometrica alimentata dal secondario di n_2 spire.

I limiti d'integrazione della (γ) cambiano perchè nel caso della corrente alternata e del wattometro dovremo calcolare

$$\frac{1}{T}\int_0^T i_1 i_2 \, dt.$$

In un ordinario wattometro sempre si trova soddisfatta la condizione che il circuito voltometrico presenti una reattanza trascurabile di fronte alla resistenza, ed allora il 4°, 5° e 6° termine della (γ) sono trascurabili.

Il primo termine integrato fra i limiti che spettano al caso della corrente alternata ci rappresenta il lavoro speso per isteresi nell'unità di tempo, cioè la potenza consumata nel lavoro d'isteresi.

Il secondo termine l'effetto joule nel secondario sarà in genere trascurabile data la grande resistenza del secondario.

Il terzo termine della (γ) ci rappresenta la potenza dissipata nelle correnti parassite, che nel caso delle correnti alternate non è più trascurabile e sappiamo che cresce in proporzione al quadrato della frequenza.

Questa speciale inserzione del wattometro potrà presentare talora dei vantaggi sulla ordinaria inserzione della spirale voltometrica sulla tensione primaria, perchè così non si misura l'effetto joule del primario ed essenzialmente perchè si potrà aumentare la sensibilità dello strumento variando convenientemente il numero di spire del secondario. Quest'ultimo vantaggio non lo si avrà in pratica quando si operi su trasformatori industriali allo scopo di determinare le perdite a vuoto, poichè il circuito voltometrico del wattometro non deve essere assoggettato a tensioni maggiori di quelle per cui fu costrutto. Il vantaggio sarà notevole invece qualora si eseguiscono esperienze di laboratorio su piccoli nuclei dove la tensione applicata al primario è piccola e notevolmente minore della tensione a cui può essere assoggettato il circuito voltometrico del wattometro; in tal caso aumentando il numero di spire secondario sarà possibile portare la tensione del circuito voltometrico al suo valore normale con vantaggio della sensibilità del metodo.

A corrente alternata questa inserzione speciale del circuito voltometrico equivale ad alimentarlo invece che colla tensione applicata con una f. e. m. proporzionale ed in fase colla f. e. m. del primario, ed evidentemente le due inserzioni si equivalgono tranne che non si misura, con questa nuova inserzione, l'effetto joule del primario.

Esperienze e risultati ottenuti. — I primi tentativi vennero eseguiti coll'elettrodinamometro del Weber, che però, se è uno strumento perfetto per ricerche con correnti continue, non si presta bene alle esperienze suddette, sia per la scarsa sensibilità che obbliga ad avere un rilevante numero di spire secondarie o una resistenza R non molto grande, sia perchè la spirale fissa è avvolta su una intelaiatura metallica, e siccome viene usato con correnti variabili, le correnti indotte nella massa metallica certamente devono esercitare un'azione sull'equipaggio mobile.

Ho dovuto quindi far costrurre dal meccanico del Laboratorio di Elettrotecnica del R. Politecnico di Torino un elettrodinamometro montato su supporti isolanti, e dopo varie modificazioni per aumentarne la sensibilità questo strumento è riescito ottimamente per lo scopo dell'applicazione che volevo

fare. La spirale mobile è circolare di 49 mm. di diametro, avvolta su di un leggero supporto di celluloide. Colla sospensione presenta una resistenza di 171 Ohm. ed un coefficiente di self. di circa 0,01 Henry. La bobinetta porta una traversa orizzontale che serve da porta pesi onde variare il momento d'inerzia dell'equipaggio mobile e quindi la durata di oscillazione. La sospensione che nei primi tentativi era bifilare, naturalmente con fili metallici per poter mandare la corrente nella spirale mobile, venne infine sostituita con una sospensione unifilare fatta con un nastrino di bronzo alla parte superiore e con una spiralina molto fina e lunga alla parte inferiore. La sospensione bifilare presenta l'inconveniente che aumentando il momento d'inerzia, coll'aggiungere dei pesetti, la coppia direttrice della sospensione cresce e quindi lo strumento diminuisce eccessivamente di sensibilità. Nel caso della sospensione unifilare la coppia direttrice è indipendente dal peso e quindi la sensibilità diminuisce solo proporzionalmente all'aumento della durata d'oscillazione.

La forma circolare della spirale mobile trova la sua ragione nel fatto che la forma circolare confrontata colla quadrata e rettangolare, a parità di lunghezza di filo impiegato a fare il solenoide, presenta la massima superficie totale e quindi massimo momento magnetico come è conveniente per avere una buona sensibilità.

La durata di una oscillazione completa dell'equipaggio mobile senza pesetti aggiunti è di circa 11″, durata troppo breve per le presenti misure. Aggiungendo convenienti pesi fu portato il periodo a 21″.

La spirale fissa dell'elettrodinamometro è fatta con filo di 0,7 mm. di diametro avvolto su due bobine di legno duro stagionato di cm. 23 di diametro esterno. La gola di ogni bobina è rettangolare di cm. 6,5 per cm. 2 di profondità. Le due bobine in serie hanno una resistenza di circa 60 Ohm.

Taratura e sensibilità. – Data la natura dello strumento per cui si può applicare la teoria del galvanometro balistico, la sua costante balistica si potrebbe determinare ricorrendo alla relazione che passa fra la costante balistica K e la costante reometrica k.

$$K = \frac{T}{\pi} k e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{actg} \frac{\pi}{\lambda}}$$

dove λ è il decremento logaritmico e T il periodo di oscillazione. Lo smorzamento nell'elettrodinamometro descritto è piccolissimo per cui si potrebbe anche semplificare la formula.

Più rapidamente si può procedere nel seguente modo notando che la relazione

$$\int_0^\tau i_1 \, i_2 \, dt = K\alpha$$

si semplifica se supponiamo di mantenere costante la corrente i_1 nella spirale fissa e diventa cioè

$$i_1 \int_0^\tau i_2 \, dt = K\alpha$$

l' $\int_0^\tau i_2 \, dt$ potrà esserci dato da una scarica di un condensatore campione caricato ad una differenza di potenziale nota. Occorre notare che procedendo a questo modo siccome la spirale mobile si trova oltrechè nel campo della spirale fissa anche nel campo magnetico terrestre, sarà necessario fare le letture destra e sinistra e prenderne la media, e questo lo si ottiene invertendo il verso della scarica.

Se si esprime la corrente i_1 in amper, la capacità in Farad e la tensione di carica del condensatore in volt, la costante balistica risulta espressa in amper Coulomb per unità di deviazione alla scala. Per esprimerla in unità CGS elettromagnetiche dovrà essere moltiplicata per 10^{-2}.

La costante dello strumento usato era

$$K = 1{,}634 \;\; 10^{-3} \, (CGS)$$

per millimetro di scala alla distanza di m. 2 circa colla durata di oscillazione di 20″ e 55/100.

Lo schema generale adottato per questi esperimenti è indicato nella fig. 3. Invece di usare un invertitore ho adoperato il metodo d'invertire gradualmente, per quanto rapidamente, la corrente per mezzo del sistema dei due reostati indicati in B, come vogliono molti autori moderni, eliminando così l'effetto della perturbazione dovuta alla scintilla dell'invertitore.

Il nucleo A su cui ho sperimentato era formato di 70 lamierini di 0.5 mm. di spessore, di diametro esterno 30 cm. ed in-

terno 26 cm. In C è indicato l'amperometro a corrente continua collo zero a metà scala onde poter determinare la corrente magnetizzante e così calcolare il valore massimo del campo per ogni ciclo. La corrente indotta nelle n_2 spire del secondario, mediante un tasto a due vie T, poteva essere inviata ad un galvanometro balistico G per determinare il valore della induzione magnetica, oppure all'elettrodinamometro E per determinare il lavoro d'isteresi.

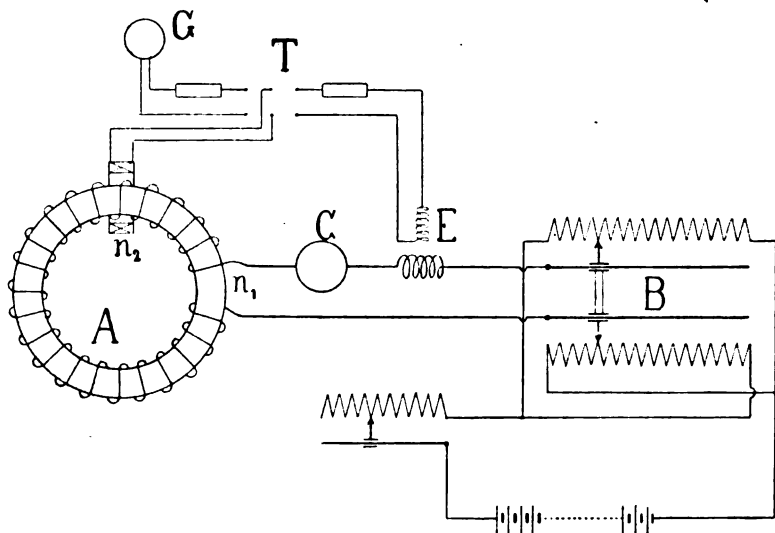



Fig. 3.

I risultati ottenuti vennero anche confrontati con quelli ottenuti coi metodi soliti e vennero riscontrati coincidenti nei limiti degli errori dovuti alla sensibilità dei vari metodi.

Nella tabella sono riferiti questi risultati e nell'ultima colonna venne calcolato il coefficiente della formula empirica dello Steinmetz ammesso l'esponente 1,6 per l'induzione. Per cicli con piccoli valori dell'induzione massima la perdita risulta un po' maggiore e poi nei limiti d'induzione che si usano in pratica il coefficiente di Steinmetz si mantiene costante, e accenna a crescere col crescere dei valori della induzione massima. Questi risultati sono concordi con quelli generalmente noti e trovati da altri autori.

H	B	Erg. per ciclo	η Coefficiente di Steinmetz
1.0	2600	436	0.00150
1.18	3400	659	0.00150
1.37	4400	878	0.00130
1.64	5400	1194	0.00127
1.92	6150	1404	0.00131
2.26	6950	1832	0.00131
2.28	6980	1870	0.00132
2.74	7750	2280	0.00137
2.83	7900	2362	0.00137
3.20	8500	2672	0.00140
3.62	9050	2938	0.00139
4.08	9630	3300	0.00139
4.41	10000	3508	0.00139
4.69	10200	3644	0.00141

La formula adottata per il calcolo del lavoro d'isteresi è la formula semplice che risulta dalla teoria elementare e cioè

$$\int_{-\mathfrak{B}}^{+\mathfrak{B}} \frac{H d\mathfrak{B}}{4\pi} = 2 \frac{R}{V} \frac{n_1}{n_2} K\alpha .$$

Termino l'esposizione di questo metodo di misura rivolgendo un vivo ringraziamento al Prof. Comm. Guido Grassi che benevolmente con la sua nota competenza in materia volle essermi largo di preziosi consigli.

Dal Laboratorio di Elettrotecnica
del R. Politecnico di Torino.

Relazione sulla Memoria del Dr. G. Sannia: *Caratteristiche multiple di un'equazione alle derivate parziali in due variabili indipendenti.*

La teoria delle caratteristiche di un'equazione a derivate parziali in due variabili indipendenti è fondamentale per lo studio dei teoremi d'esistenza relativi. Finora erano stati studiati in particolare da Goursat ed E. Levi, il caso delle caratteristiche semplici e qualche punto della teoria delle caratteristiche doppie. Tuttavia sembra fondamentale per lo studio del problema di Cauchy nel campo reale e per l'esame dei casi in cui l'integrazione di un'equazione a derivate parziali è ridotta alla integrazione di equazioni alle derivate ordinarie, uno studio completo delle caratteristiche multiple. A questo studio il Dr. Sannia porta un notevole contributo esaminando le caratteristiche triple e quadruple. Egli ne ha fatto una classificazione completa esaminando anche qualche tipo generale di caratteristiche multiple ed ha superato in questa classificazione gravi difficoltà tecniche per il rapidissimo complicarsi dei calcoli.

Il lavoro si chiude con un teorema, specialmente importante per la teoria delle equazioni differenziali nel campo complesso, il quale dimostra che per alcune notevoli classi di caratteristiche triple e quadruple, continuano a valere i risultati ottenuti da Goursat, che cioè per tali caratteristiche passano infinite superficie soluzioni ed è possibile assegnarne il grado di indeterminazione.

Il lavoro del Dr. Sannia non esaurisce la quistione proposta, ma vi porta un tal contributo di notevoli risultati da renderlo ben degno di comparire nelle *Memorie* accademiche.

G. Peano,
C. Somigliana, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 22 Dicembre 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: RENIER, D'ERCOLE, SFORZA, EINAUDI, BAUDI DI VESME e DE SANCTIS Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci STAMPINI e BRONDI.

È letto ed approvato l' atto verbale dell'adunanza antecedente, 8 dicembre 1912.

Si dà comunicazione della circolare del Comitato Nobel del parlamento norvegese concernente il premio Nobel per la pace.

Il Socio RENIER presenta per l' inserzione negli *Atti* una nota del prof. Carlo CALCATERRA, intitolata: *Risposta a un quesito frugoniano*.

Pure per gli *Atti* il Socio DE SANCTIS offre un saggio di Augusto ROSTAGNI su *L'idillio VIII di Teocrito nella sua tradizione e nel suo carattere* e alcune sue *Note di epigrafia romana*.

LETTURE

Risposta a un quesito frugoniano.

Nota del Prof. CARLO CALCATERRA.

Giorgio Rossi, perspicace indagatore di problemi storici e letterari, che nel campo degli studi frugoniani ha lasciato parecchie orme, pubblicando nel 1908 due lettere indirizzate da Comante Eginetico al senatore Casali di Bologna (1), sottopose alla critica un quesito, che, quantunque a tutta prima possa sembrare ristretto entro brevi confini, nondimeno ha nella storia letteraria del secolo decimottavo non piccola importanza. Dopo di aver per mezzo di una lettera del 23 gennaio 1767 offerto al lettore un buon documento per meglio chiarire le occasioni in cui fu composto e diffuso nei circoli letterari del settecento il celebre sonetto *Annibale sulle Alpi*, il Rossi presentò agli studiosi della poesia di Comante Eginetico un'epistola del 17 febbraio 1767, ragguardevole per le notizie che da essa si possono trarre sull'opposizione " alla maniera frugoniana, la quale in quel " tempo per vie diverse già nettamente si designava nella lette- " ratura italiana ".

In questa lettera Carlo Innocenzo Frugoni, dopo aver espresso la propria gratitudine per le lodi benigne con cui i letterati bolognesi avevan accolto il " sonetto cartaginese ", mostra con aperte parole di voler trarre dagli elogi degli ammiratori conforto e sollievo per tutte le amarezze che gli davano i " partigiani " di Giuseppe Baretti, e, in special modo, ostenta di non voler far caso delle maldicenze, con cui screditava ogni giorno la sua opera un giovine poeta, il quale aspirava a togliergli lo scettro di " principe dei lirici " (2) e a lui sostituirsi come maestro di una " nuova scuola ".

(1) *Il libro e la stampa*, 1908, anno II (N. S.), fasc. 4-5 (Milano, 1908), pp. 126-130.

(2) Era questa una delle molte frasi encomiastiche, con cui il Frugoni veniva allora salutato non soltanto nei carteggi, ma anche per le stampe.

Il passo è cosí significativo che merita di esser interamente riprodotto.

" Troppo onore si è fatto da voi, dall'immortale signor " Dott. Franceschin Zanotti, dal celebre Canonico Monti, da tutta " quella dotta assemblea al mio Cartaginese sonetto. Debbo es- " serne contento, quando sí egregi maestri e giudici se ne son " contentati. Avvi tuttavia oggi una schiera di partigiani del " furioso Scannabue che diversamente sentono. Avvi ancora una " nuova scuola, che un giovane pretende aprire e che per trovar " seguaci non fa che screditar le cose mie, ed altamente dire " che la vera poesia si vuol da lui all' ingannata Italia inse- " gnare. Io, contentissimo dei favorevoli giudicj di Bologna e " d'altre erudite e veggenti città, niun pensier mi prendo di ciò " e sieguo il mio cammino tranquillamente ".

A questa lettera il Rossi premetteva il seguente richiamo: " Il Frugoni, mentre non esita a designar nettamente tra i suoi " avversari Giuseppe Baretti, qualificato come *furioso*, passa in- " vece sotto silenzio il nome del *giovane* poeta che osava riz- " zarglisi di fronte. Chi sarà costui? ".

La domanda del Rossi è finora rimasta senza risposta (1). Oscuro in molte parti è ancora lo svolgimento di quel vasto fenomeno che fu il *Frugonianesimo* e, come è facile comprendere, nessuno può perigliarsi a risolvere con avventatezza quesiti che tuttora attendono luce da speciali ricerche. Ad ogni modo, nell'odierna condizione degli studi frugoniani, non è affatto impossibile dar risposta all'interrogazione rivolta dal Rossi agli studiosi del secolo decimottavo. Anzi, se a tutta prima può sembrare che all'interrogazione del Rossi non possa esser data che una risposta ipotetica e mal certa, al contrario il quesito trova facile e sicura soluzione quando venga posto in relazione con le vicende della letteratura fiorita in Parma poco prima della morte del Frugoni.

L'*Atene d'Italia* stava allora per raggiungere il massimo

(1) La domanda fu recentemente ripetuta da Giorgio Rossi con le medesime parole nel volume *Varietà letterarie* (Bologna, Zanichelli, 1912), dove egli ha ristampato lo scritto, di cui qui si parla, con il titolo " *Il sonetto Cartaginese* dell'abate Frugoni " (pp. 422-427). Anche nelle annotazioni finali (pp. 453-454) non è data nessuna risposta al quesito.

splendore. Ormai " detersa dallo squallore „ (1) delle diuturne guerre, in cui era stata coinvolta nella prima metà del secolo decimottavo, irradiata dalla " luce de' Gigli d'oro „, come allora gracchiavan gli adulatori (2), la gloriosa *Crisopoli* era divenuta uno de' piú nobili centri di cultura. Nello stato di cui Guglielmo Du Tillot con illuminata saviezza teneva il governo, non solerano stati rinnovati gli studi, ma ricevevan ogni giorno favore e incremento le lettere e le arti. Nella nuova Università l' " egidarmata Dea „, a dir del poeta genovese (3), incitava gli ingegni a " studi novelli „, per liberare il " fertil campo „ delle leggi dalle " ingrate vepri „, di cui era " ad arte ingombro „, e per farvi " biondeggiare ricca giovenil messe „. Nell'Accademia di Belle Arti maestri e discepoli andavan a gara nello studiar gli antichi capolavori e nel preparare nuove opere artistiche, per accrescere la magnificenza della città. Spettacoli sontuosi apprestavansi con regal munificenza di stagione in stagione. Giardini, vie, palazzi suscitavan l'ammirazione di tutti coloro, i quali visitavan la piccola capitale, che Filippo di Borbone (4) e Guglielmo Du Tillot avevan restaurata e abbellita. Perciò il Frugoni, poeta ufficiale della corte borbonica, non mentiva interamente quando cantava:

Fioriscon l'Arti e le Scienze. I marmi
Anima il ferro: ne' colori industri
Vita prendon le tele: ombre e passeggi
Al pubblico piacer nascenti ammira
L'estranio passeggier: le piazze e i tetti
Veston nuova beltà, che in essi emenda
Gran parte omai dello squallor vetusto.
Spiran grandezza i doni. Illustra ed empie
Del suo splendor Spettacoli e Teatri
Regal Magnificenza. Ecco ormai sola
Parma la patria delle Grazie farsi (5).

---

(1) Le parole sono del Frugoni, VII, p. 307 (Parma, Stamp. Reale, 1779).

(2) Ivi, p. 306. Riguardo alla munificenza di Filippo di Borbone e al mecenatismo di Guglielmo Du Tillot, v. Bertana, *In Arcadia* (Napoli, Perrella, 1909), p. 262.

(3) Ivi, p. 364. Il restauramento fu però compiuto nel 1768 (v. Pezzana, *Memorie degli scrittori e dei letterati parmigiani*, VII, p. 555).

(4) Morí il 18 luglio 1765 e gli successe Ferdinando di Borbone.

(5) Op. cit., VII, p. 317.

Le piú severe discipline letterarie e scientifiche, in corte e fuori di corte, avevan insigni rappresentanti, non solo italiani, ma anche stranieri. Dava lustro e decoro agli studi di filosofia un uomo di profonda dottrina, come l'abate Stefano di Condillac, che il Frugoni con fervido entusiasmo piú di una volta ne' suoi canti ci mostra pensoso sulle " vigilate carte „ (1) dinanzi " alla dotta lucerna „ (2) nell'atto di indagar con " instancabile vigor di mente „ eterni problemi. Promoveva le ricerche erudite un coltissimo " custode delle memorie antiche „, quale Paolo Maria Paciaudi, fondatore della Biblioteca Parmense (3), sagace conoscitore di " Greci metalli e Greci marmi, lodato scopritor di cose „

> che la fatale invida man degli anni
> spinse sotterra e in alta notte involse (4).

Rifioriva l'arte oratoria per opera di quel solerte ed energico padre Adeodato (Domenico Carlo Maria Turchi), che in quasi tutte le maggiori città d'Italia già aveva fatto sentire il fascino della sua eloquenza rutilante e che, promesso ad alte sorti, tanta efficacia, non sempre benefica, doveva poi esercitare sulla corte e sugli uomini del ducato. Patrocinava gli studi scientifici e le scienze militari il severo cav. Augusto Guido Guinement de Kéralio, che gli storici, unanimi, ci descrivon " come uomo di probità grande e di molte lettere, amante del " ritiro e bene addentro nelle ricerche matematiche „ (5). Rimettevan in onore le scienze matematiche e le scienze fisiche i PP. Francesco Jacquier, Tommaso Le Sœur (6) e Francesco

(1) Ivi, p. 343.

(2) Ivi, p. 346.

(3) Ivi, p. 306. Son del 1762 i versi in cui il Frugoni canta il Paciaudi come *illustre Conditor e buon Custode* della Biblioteca ch'egli stava arricchendo *di mille e mille peregrin volumi*. E son del 1768 i versi a Guglielmo Du Tillot, in cui non meno diffusamente canta la bellezza della nuova Biblioteca. Questa fu poi inaugurata nel 1769, quando il Frugoni già era scomparso.

(4) Ivi, p. 306.

(5) Il Kéralio lasciò Parma, per ritornare in Francia, nel 1769. Per le varie discipline che egli insegnò a Ferdinando di Borbone v. Pezzana, op. cit., p. 551. Per l'efficacia del suo insegnamento v. Pezzana, p. 556, n. 2.

(6) Ivi, pp. 555-56. Intorno ai PP. Jacquier e Le Sœur v. anche Algarotti (Op., Palese, Venezia), X, p. 366. Il *dottissimo Padre Jacquier* fu anche

Venini (1), assai reputati in quel tempo per la loro vasta dottrina e per la serietà della loro opera. Incitavan i giovani a operare con tenacia e con profitto amorevoli ed esperti consiglieri, quali Prospero Manara, Jacopo Antonio Sanvitale, Aurelio Bernieri, Guid'Ascanio Scutellari, che, pur non essendo ingegni sovrani, non eran ultimi nel culto sincero delle lettere.

L'efficacia di questo rinnovamento degli studi, com'è naturale, era sentita sopra tutto tra i giovani, molti dei quali, con serietà di intendimenti e con fermezza di propositi, arricchivan ogni giorno le loro menti di soda cultura. Tra questi primeggiavano due poeti, che con proficui esercizi e con attente letture avevan cercato di porre salde basi alla propria educazione spirituale: Carlo Castone della Torre di Rezzonico e Angelo Mazza. Ambedue avevan incominciato a poetare imitando il Frugoni, che per le giovani generazioni era nella lirica del tempo l'affascinante seduttore e l'irresistibile corruttore. Se non che, mentre il Rezzonico, pur avendo, secondo l'ultima moda, nutrito il proprio spirito di molte pretensioni filosofiche, sempre rimase in fondo un ammiratore fervente del poeta genovese (2), d'altra parte Angelo

cantato da Luigi Godard " *per un suo ragionamento recitato in Arcadia sopra i Fenomeni delle conchiglie esotiche* „ (V. *Rime degli Arcadi*, T. XIV). — Nel 1768 si recò anche a Parma, chiamato da Guglielmo Du Tillot, Claudio Francesco Saverio Millot, storico francese, allora famoso. Rimase a Parma, finché il Marchese di Felino tenne il potere.

(1) Il padre somasco Francesco Venini fu chiamato a Parma " tra i " maestri destinati a insegnar le scienze a Don Ferdinando „. Fu quindi nominato Direttore della *Casa d'educazione dei Paggi*, e, quando questa fu unita al *Collegio dei Nobili*, egli fu nominato professore di " matematica sublime „ all'Università. Fu allontanato dall'Università di Parma, insieme col P. Soave e con l'Amoretti, dopo la caduta di Guglielmo Du Tillot (cfr. Cerati, *Opuscoli*, T. I, f. 32; Pezzana, op cit., p. 555; Gaetano Capasso, *Il Collegio dei Nobili di Parma*. Memorie storiche pubblicate nel terzo centenario della sua fondazione. Parma, Battei, 1901, pp. 171-172).

(2) Si ricordi che egli raccolse l'opera frugoniana (Parma, Stamperia Reale, 1779) e che si servì di essa per svolgere le sue teorie circa il rinnovamento della poesia italiana. Ad ogni modo la sincera devozione per il maestro non impedí al Rezzonico di sentire alcuni difetti della poesia frugoniana. Perciò egli una volta scrisse al Bettinelli che avrebbe " tolto l'impegno di dire in sei versi ciò che dice Frugoni in venti „. Si veda intorno a lui il bel saggio pubblicato dal Bertana nel vol. *In Arcadia* (p. 255-319).

Mazza, dopo aver piú volte ne' primi suoi tentativi poetici lodato ed esaltato come maestro il Frugoni, a lui pensò di contrapporsi, affermando, or apertamente, or velatamente, di volerne scuotere tra i giovani la signoria artistica. Il giovine poeta, di cui lagnasi il Frugoni nella lettera del 17 febbraio 1767, pubblicata da Giorgio Rossi, è precisamente Angelo Mazza.

Degl'intendimenti con cui egli, dopo il 1764, propose a sé stesso di spodestare nella lirica il poeta genovese, ci restano perspicui documenti e prove irrefragabili.

Uscito dal Collegio di Reggio nel 1761, dopo aver dato non spregevoli saggi di lirica frugoniana (1), Angelo Mazza, come è risaputo, intraprese studi superiori a Padova e nell'estate del 1762 pubblicò a Parma un frugonianissimo *Poemetto per l'ordine dello Spirito Santo conferito a Ferdinando I* (2). Quindi nel 1763, dopo aver con molta passione studiata la lingua inglese (3), tradusse in versi sciolti il poema di Marco Akenside (4) *I piaceri dell'immaginazione* e, pubblicandolo nel 1764 a Padova con la data di Parigi, lo dedicò con un'epistola ultrafrugoniana

(1) Il Frugoni nel 1761 e nel 1762 molto incoraggiò Angelo Mazza a proseguire nella via delle lettere. Della stima in cui Comante tenne allora Angelo Mazza, serbiamo notevoli prove nelle *Rime per la monacazione di Luigia Del Bono* (v. Op. del Frugoni, T. II, pp. 136-37) e in una lettera del 5 dicembre 1762, indirizzata dal Frugoni alla Marchesa Anna Malaspina della Bastia, nella quale i versi di Angelo Mazza son detti *sempre leggiadrissimi* (Autografoteca Campori, Modena, *Lettere di C. I. Frugoni a varii*, cod. cartaceo del sec. XVIII, C. 172-73).

(2) V. *Opere di Angelo Mazza*, Parma, Giuseppe Paganino, vol. III, p. 147. Cfr. anche Pezzana, Op. cit., p. 414.

(3) Da giovine studiò senza dubbio con ardore la lingua e la letteratura inglese. Poi trascurò questo studio (V. ALBERTO RONDANI, *Saggi di critiche letterarie*, Firenze, tip. della *Gazzetta d'Italia*, 1881, pp. 107-08).

(4) Medico e poeta inglese (1721-1770). — Intorno a questa traduzione di Angelo Mazza vedi anche *Opere edite e postume di Ugo Foscolo* (Saggi di critica storico-letteraria tradotti dall'inglese, raccolti e ordinati da F. S. Orlandini e da E. Mayer, vol. II, Firenze, Le Monnier, 1882). Nel *Saggio sullo stato della letteratura italiana nel primo ventennio del secolo decimo nono* (Traduzione dall'inglese di M. Pegna) si possono leggere interessanti giudizi sull'arte di Angelo Mazza (pp. 203-205). Per questi giudizi vedi EUGENIO DONADONI, *Ugo Foscolo pensatore, critico, poeta* (Palermo, Sandron), pp. 425-426.

al poeta genovese (1). Questa dedica, mentre costituisce anche oggi il piú alto omaggio che il Mazza abbia tributato al Frugoni come discepolo a maestro, d'altra parte rappresenta la cagione immediata del suo raffreddamento verso la poesia frugoniana. Come è noto, Giuseppe Baretti, al quale assai improvvidamente il Mazza aveva accennato nell'epistola dedicatoria, fustigò con fierissimi colpi tanto il giovine traduttore, quanto il vecchio poeta genovese (2). Il Frugoni, che già prima aveva provato profondo turbamento dinanzi alle critiche sanguinose del Baretti, per questo nuovo assalto diede in ismanie (3); e, poiché in Parma, come ci attesta il Pezzana, Aristarco Scannabue trovava molti fautori, i quali a lor volta gridavan " cattivo, tenebroso, irreligioso, inintelligibile „ il libro del Mazza, Comante Eginetico eccitò in tutti i modi il giovine poeta a rivedere " il pelo di buona ragione „ al Baretti nella ristampa del poema dell'Akenside che " il Mazza aveva già preparata con " giunte e che voleasi fare dal Comino in Padova e dal Gra- " ziosi in Venezia „ (4). Il Mazza, tanto dinanzi al Frugoni quanto dinanzi a' suoi parenti e a' suoi amici, fece le sembianze di non curarsi di queste censure. Anzi, in contrapposizione alle invettive del Frugoni, amò ostentare certa olimpica indifferenza, come appare da questa lettera che il 15 settembre 1764 egli indirizzò da Padova al fratello Andrea: " il povero uomo (C. I. Fru- " goni) è debole e l'amor proprio lo fa veder torto. Egli non " s'è accorto per anco che le censure di simil conio sono il

(1) Vedi quest' importante epistola a p. 69 del vol. III delle *Opere* di Angelo Mazza (ed. cit.). La ragione per cui il Mazza dedicò la traduzione del citato poema al Frugoni ci è svelata da alcune lettere ch'egli diresse al fratello Andrea. In una del 7 aprile 1764, dopo aver raccomandato al fratello di far rilegare alcune copie della traduzione e di mandarne una a Guglielmo Du Tillot e una al Frugoni, dice: " Voglia il cielo che Frugoni " s'adoperi per me di modo che mi s'agevoli la strada a qualche fortuna! „. In un'altra del 14 aprile 1764, sempre con il medesimo scopo, scrive al fratello: " Per l'amor del Cielo consegnate a tempo la dovuta copia al " Frugoni: voi sapete quanto e' sia bisbetico „.

(2) V. *Frusta letteraria*, num. XIX.

(3) Per l'atteggiamento assunto dal Frugoni di fronte al Baretti v. il saggio pubblicato da GIORGIO ROSSI nella rivista *Il Libro e la Stampa*, 1909, pp. 50-62.

(4) PEZZANA, Op. cit., pp. 416-17.

" miglior risalto delle opere di qualche merito. Il libro è cat-
" tivo e tutti i migliori lo lodano, è tenebroso, irreligioso, inin-
" telligibile e tutti lo comprano. Oh quanti pazzi sotto il ciel
" si dànno! „ (1). Ma in realtà, come ci attesta il Pezzana, che conobbe a fondo tutta la vita e tutta l'opera di Angelo Mazza, egli " sin dal primo istante „ fu cosí " ferito dentro pelle dalla " frusta d'Aristarco „, che, " abbandonata la vecchia Scuola Fru- " goniana, si volse alla nuova del Cesarotti „ (2).

Da questo punto comincia il contrasto spirituale tra Angelo Mazza e C. I. Frugoni. Dopo aver ardentemente ammirato ed entusiasticamente imitato il poeta genovese, Angelo Mazza istintivamente provò dinanzi all'opera di Comante Eginetico quel disgusto, dirò meglio, quella nausea, che sempre consegue all'abuso di qualunque esagerazione letteraria. Da principio non palesò apertamente questo intimo sentimento e continuò per ragioni di convenienza a bruciar grani d'incenso all' " incomparabile „ Comante. Ma ben presto non poté impedire che il suo risentimento si acuisse, perché gli parve che l'ingombrante fama del Frugoni contrastasse il passo all'incipiente sua gloria

(1) Angelo Mazza con queste parole allude al grande smercio che ebbe la prima edizione del poema tradotto. Il Pezzana, nella *bibliografia* di Angelo Mazza, ci attesta che " nei soli primi sei giorni se ne vendettero in " Padova ottanta copie „ e che in breve tempo esso " divenne alquanto " raro „ (Op. cit., p. 474). La lettera, che qui abbiamo citata, fu già riprodotta da A. F. Rossi nell'opuscolo *Angelo Mazza e i suoi tempi* (Parma, Bianchi, 1905, p. 35) e fu commentata da Emilio Bertana nell'ottimo studio *Intorno al Frugoni* (*In Arcadia*, Napoli, Perrella, 1909, p. 339).

(2) *Memorie*, cit., VII, p. 417. Anche Filippo Bellini nell'opuscolo, oggi rarissimo, intitolato: *Cenni intorno alla vita ed alle opere di Angelo Mazza* (Parma, Ferrari, 1845), si esprime poco diversamente dal Pezzana. Ecco come il Bellini parla dell'atteggiamento che il Mazza assunse, dopo aver tradotto il poema dell'Akenside: " Le giudiciose censure de' suoi critici e " gli ottimi avvertimenti di scienziati ingenui amici, tra cui il Gozzi, il " Cesarotti ed il Vallisnieri, piú che le sconvenevoli invettive del mordace " Baretti, a cambiar lo mossero la vecchia *Frugoniana scuola* colla nuova " del Cesarotti, imitante l'Inglese, essa pure abbandonata da lui, allorché " colle luminose guide di Dante, Petrarca ed altri illustri classici, cercò " di aprirsi novella via nell'Italiano Parnaso „ (p. 5). — A sua volta Alberto Rondani, parlando dell'opera giovanile del Mazza, non si discostò dal Pezzana e dal Bellini, affermando che, dopo aver ricevuto le frustate del Baretti, Angelo Mazza " lasciò la scuola frugoniana e s'avvicinò a quella del Cesa- " rotti, o piuttosto cominciò a farsi parte per sé stesso „ (Op. cit., p. 108).

letteraria. Ciò appare chiaramente dalla lettera che egli, l'8 giugno 1765, dopo aver letto due componimenti del Frugoni, inviò da Padova al fratello Andrea: " Ho letti i componimenti " frugoniani per il Principe Ferdinando (1) e per Condillac (2). " Il primo è affatto indegno di quella celebre penna; il secondo " è bello, benché comune, finché non oltrepassa i confini della " poesia pastorale, ma appena che s' innoltra (*sic*) nel campo " metafisico, fa vedere un uomo timido, che cammina fra l'ombre " senza guida e corre rischio d'incespicare e di cadere ad ogni " passo. Spero che il mio Poema non verrà eclissato dal con- " fronto di questi due pezzi, che non hanno altro merito che " il nome d'un gran Poeta ". L'emulazione è qui innegabile; ma essa si rivelò ancor piú viva non appena il poema, al quale accenna il Mazza nella sua lettera, comparve in pubblico insieme con un componimento del Frugoni, che cantava il medesimo argomento, e diede direttamente ai lettori l'occasione di mettere il giovane poeta parmense di fronte al vecchio e stanco Comante. La raccolta in cui i loro componimenti si trovarono uniti fu pubblicata *Per le felicissime nozze del N. U. Marino Zorzi e della N. D. Contarina Barbarigo*. Ad essa il Frugoni offerse un lunghissimo carme in versi sciolti, il quale per l'inane prolissità dèlla retorica encomiastica e per la vuota ridondanza dei vaticini convenzionali, non trovò molta grazia presso i lettori (3); il Mazza diede un poemetto di quattrocento quaranta versi sciolti, il quale per gli ostentati atteggiamenti gladiatorii del

(1) È il *Canto in ossequioso festeggiamento per la preservatrice inoculazione del Vaiolo saggiamente ordinata nell'augusta persona di Ferdinando di Borbone dal celebre medico Teodoro Tronchin*, ecc., ecc. Fu pubblicato a Parma nel 1765 dalla Stamperia Monti (in 4°); ma era stato composto fin dal 1764. Cfr. *Relation de l'inoculation de S. A. R. Ferdinand Prince héréditaire de Parme âgé de treize ans*, Paris, Lottin, 1764. Cfr. anche Pezzana, Op. cit., p. 552, e *Opere* del Frugoni, IV, p. 385 (ma quivi correggi la data). Vedi poi l'articolo del prof. Alfredo Frassi, *Di una variolazione principesca nel 1764*, in *Aurea Parma*, fasc. 1° e 2°, anno I, 1912, p. 67.

(2) Vedi il canto in versi sciolti intitolato *Auronte* e dedicato " all'emi- " nente filosofo Abate de Condillac, precettore del R. Principe Ereditario " di Parma Ferdinando di Borbone " (*Opere* del Frugoni, ed. cit., T. VII, p. 339).

(3) Questo carme intitolato *Il genio dei versi sciolti* può anche esser letto nel T. VII delle *Opere* del Frugoni, pp. 175-87.

pensiero e per l'immaginoso bagliore dello stile (1) riscosse cosí unanimi applausi che " due giorni dopo fu ristampato da solo, " benché si fossero dispensate ottocento copie della prima edi- " zione ". Questo fatto dispiacque profondamente al Frugoni (2), il quale, come ci dice il principal biografo di Angelo Mazza, " già ombrava del giovane poeta incominciante ad oscurare l'an- " tica fama di lui ". I confronti, che si fecero in quell'occasione tra i due poemetti, tanto inasprirono il poeta genovese, che egli pensò di attutirne l'efficacia, diffondendo per Parma le critiche piú acerbe intorno ai versi del Mazza. L'eco di queste maligne censure non tardò a giungere fino ad Angelo Mazza, il quale, apponendosi al vero circa l'atteggiamento assunto dal Frugoni per causa dei raffronti che a Padova e a Venezia erano stati fatti tra i due componimenti, cosí espresse il proprio rammarico al fido fratello Andrea.

Carissimo fratello,

Padova, 22 novembre 1765.

Comeché non dovessi palesare il mio sentimento sopra una materia che interessa di troppo l'amor proprio, nullamanco trasando ogni riguardo, perché scrivo a un fratello che è troppo filosofo per non dare il suo alla ragione. Io vi dirò dunque, che credo io pure abbiano le critiche dei miei Patrioti su del mio Poema la stessa fonte che voi loro attribuite; e Dio non voglia che Frugoni non sia la forza motrice di tutta la macchina della censura. Non è già che Frugoni debba temere di me pel primato poetico. No, no certamente; io non penso, né posso pensare cosí senza incorrer la taccia di stolto; egli ha di già stabilita la sua fama sopra una base di merito, dirò cosí, quadrangolare, che non crolla per urto di paragone, ma *la novità, ch'io tento, di poetare, potrebbe essere importuna al geloso animo di lui,* che vorría primeggiare in ogni

(1) Puoi vederne alcuni saggi anche nel vol. III delle *Opere* del Mazza, pp. 157 64.

(2) Lo stesso Angelo Mazza inviò a Parma notizia dell'esito poco lusinghiero ottenuto dal poemetto del Frugoni. Il 28 settembre 1765 scriveva da Venezia all'abate Andrea: " La Signora Catina Barbarigo..... invia col " presente corriere a Frugoni il mio componimento ristampato, unitamente " alla raccolta, ov'è inserito il di lui Poema, che a dirvi schiettamente il " vero, non ha ottenuto gran fama ". Ma, come appare dalla lettera inviata dal Mazza al fratello Andrea il 22 novembre 1765, dalla stessa Caterina Barbarigo il Frugoni ricevette notizia del gran successo conseguito dai versi del giovine poeta. Questo successo in particolar modo destò le sue gelosie.

ideabile maniera di poesia. L'esser egli voto di sapere (benché ricchissimo di fantasia sorprendente) dà risalto al mio scrivere, che ha per quadro la scienza e per contorno ed organo l'immaginazione. Egli dunque, provveduto de' soli materiali della grossolana e superficiale natura, è costretto di riandare sé stesso trattando piú d'una volta un argomento, e per conseguenza ripetersi nella sostanza delle immagini, ancora che si modifichi nell'espressione. Un chiaro esempio di quanto io dico sono i suoi versi per nozze. In essi non si sentono che antenati, che sono fuori del tema, eroi futuri che non interessano, perché lontani ed incerti: oppure non si leggono sciorinate che quelle tantafere lascive, che riescono insipide, rintuzzate dall'abuso e dalla nojosa ripetizione. So ch'egli è stato malcontento della sorte nell'occasione degli sponsali *Barbarigo* e *Zorzi*. Il lunghissimo suo sciolto ha ristuccate tutte le orecchie poetiche inondandole d'innumerabili nomi patrizii, vincitori di guerre, prudentissimi nel governo, tutti vestiti in abito pastorale. L'avete voi letto? L'Eccellentissima Signora Caterina, a cui ho indiritti i miei versi, ha scritto a Frugoni l'incontro grande che quelli hanno conseguito in questa parte. Dalla sua risposta alla Dama ho rilevato quanto vi sono venuto fin qui esponendo. Chi mi accusa di troppo immaginoso e calzante ha ragione. Chi di seicentista e plagiario s'inganna a partito. Anche l'incomparabile Stellini (1), della cui grand'anima vorrei farmi io emanazione, ha toccata la medesima corda prima che stampassi il Poema. Pure all'età mia estima perdonabili que' voli che già da sé stessi dànno indizio di minorarsi col sopraggiunger dell'età temperatrice dell'invasata gioventù. Ma delle stravaganze vote e scipite del seicento non avvi pur ombra. L'*irradiate sbarre del tempo che fronteggia il nulla,* ecc., costà può parer di quella scuola; ma chi conosce la verità filosofica della sentenza loda l'arte poetica, che la disastrae (*sic*) e falla visibile e palpabile con immagine di analogia. Infine l'ignoranza delle cose trattate è uno specchio che rappresenta tutto informe e sconcio e ripugnante perché infatti ripugna quanto ne opprime per la sproporzione.

Antonio Costa (2) o Cerati (3) sarà l'accusatore del plagio. Abbiano la degnazione codesti signori di indicarmi i passi rubati, ch'io l'impa-

---

(1) Per le relazioni di Angelo Mazza con Jacopo Stellini vedi PEZZANA, op. cit., pp. 415 e 418.

(2) V. *Opere* del MAZZA, ed. cit., T. V, p. 165.

(3) Fu fervente ammiratore del Frugoni e nel 1776 pronunciò in Padova un entusiastico discorso commemorativo del poeta genovese [V. *Elogio dell'Abate Carlo Innocenzo Frugoni fatto dal Conte Antonio Cerati di Parma*, riprodotto nell'ediz. lucchese delle opere di Comante (BONSIGNORI, 1779-80) e ristampato negli *Elogi italiani* del RUBBI, T. III]. Intorno ad Antonio Cerrati vedi poi le molte notizie che si trovano nella cit. op. del PEZZANA, VII.

rerò volentieri. Le mie luminose speranze seguono tuttora. Ma bisogna aspettar l'opportunità. Del resto sono pressoché sicuro della mia sorte. Di questo ne parleremo a bocca alla mia venuta in patria, che sarà sulla metà di carnevale (1).

Questa lettera chiaramente dimostra come l'emulazione, che il Mazza, per ragioni di convenienza, e il Frugoni, per un mal celato orgoglio, tentavan di non palesare, venisse accrescendo le diffidenze tra i due poeti. Vero è che Angelo Mazza, sapendo d'esser insistentemente rimproverato di vanità e d'albagia da' suoi malevoli, i quali eran numerosissimi in Parma, da prima, per non dar esca a nuove maldicenze, affermò accortamente che egli non voleva affatto soppiantare il Frugoni nel " primato poetico ", ma intendeva soltanto " tentare " per via diversa nuovo cammino. Se non che queste cautele non eran affatto tali da dissipare le ombre, che ormai eran sorte tra i due poeti. Nelle circospette dichiarazioni di Angelo Mazza era una tacita condanna dell'opera frugoniana, e Comante Eginetico, che non era privo di perspicacia, l'intese. Non andò quindi molto tempo che le reciproche diffidenze si mutarono in sorda contesa. Da una parte il poeta genovese con i suoi ciechi partigiani; dall'altra il poeta parmense con i suoi ardenti fautori. Fu così impegnato nell'ombra un ingannevole e disleale conflitto, la cui arma principale fu una lama a doppio taglio, vale a dire una vicendevole e velenosa denigrazione. Senza dubbio tanto il poeta genovese quanto il poeta parmense in pubblico cercarono sovente di salvar le apparenze (2). Ma in realtà la tensione degli

(1) Vedi questo importantissimo documento nelle note del PEZZANA, ivi, p. 419 e seg.

(2) È prova di ciò il freddo brindisi composto nel 1766 da Angelo Mazza per un commensale, che volle parlare alla tavola del march. Piazza dopo l'ultimo ritorno di Comante da Genova, dove questi aveva difeso in versi una causa della nipote Caterina Tassorello Cambiaso (Vedi questo brindisi a p. 478 del T. IX delle *Opere* del Frugoni e vedi la pungente risposta di Comante a p. 480). Per la causa patrocinata dal Frugoni vedi poi T. IX, pp. 40-45 e vedi il mio opuscolo *Lettere di C. I. Frugoni a P. M. Paciaudi* (Napoli, " Cultura Moderna ", p. 19). Per le altre cause, difese in versi dal Frugoni dinanzi al Senato di Genova nel 1752, nel 1754 e nel 1762, v. T. IX, pp. 51-81 e pp. 46-50; vedi le *Memorie della vita del Frugoni* dettate dal REZZONICO (I, pp. XXXVI, LII e LVIII) e vedi il mio saggio *L'amicizia di C. I. Frugoni e Alfonso Varano*, pp. 39-44.

animi divenne cosí acuta, che difficilmente l'uno lasciò sfuggire l'occasione di criticare e vilipendere l'opera dell'altro (1). Questo è il motivo per cui Comante il 14 febbraio 1767 scriveva al conte Casali che quel *giovane*, il quale pretendeva " aprir nuova " scuola (Angelo Mazza), per trovar seguaci „ non faceva " che " screditar le cose sue ed altamente dire che la vera poesia si " voleva da lui all' ingannata Italia insegnare „. Certo è che storicamente Angelo Mazza non iniziò affatto una " nuova scuola „ e non donò " all'ingannata Italia la vera poesia „. Ma ciò non toglie che egli abbia creduto di poter iniziare un rinnovamento, superando l'opera del Frugoni, e abbia sperato di poter additare ai giovani italiani vie piú alte di quelle percorse dal poeta genovese. Avviene sovente che gli artisti si prefiggano uno scopo e si illudano di poterlo conseguire anche quando la materia non risponde all' intenzion dell'arte. Questo accadde precisamente ad Angelo Mazza, che pur non essendo affatto un " poeta poltrone „, come il Baretti compiacevasi di definir ogni verseggiatore frugoniano, nondimeno non poté mai sottrarsi interamente all'efficacia estetica del Frugonianesimo. Ingegno nutrito di soda cultura, attento a tutte le manifestazioni del filosofismo poetico, che dilagava in versi sciolti e in versi rimati, illuso che con i carmi " di senno armati „ e circonfusi di nebulosità trascendentali si aprisse nella storia della lirica una nuova èra. Angelo Mazza, seguendo i preconcetti estetici, allora dominanti, che dividevan forma e contenuto come fossero abito e corpo, credette che le manchevolezze artistiche della poesia del Frugoni derivassero non da pervertimenti estetici e da vizi formali, ma dalla deficienza di un saldo contenuto scientifico e filosofico.

(1) Anche dopo la morte del Frugoni, Angelo Mazza mosse critiche acerbe all'opera di Comante, né sempre a torto. Qual conto egli facesse del poeta genovese, chiaramente si deduce da questa lettera, che il 23 ottobre 1790 inviò al fratello: " Vi ringrazio della notizia sull'*Idumea*, dalla " quale comprendo che in nessuna maniera puossi con proprietà chiamar " *Davide Idumeo*, né la di lui cetra *Idumea*, quantunque molti, e fra gli " altri Frugoni niente scrupoloso, abbiano usato parecchie volte tale espres- " sione „. — Devo la trascrizione di questa lettera e di alcune altre da me citate all'egregio mio amico prof. Arnaldo Barilli, al quale qui rendo grazie sincere, augurando che egli voglia un giorno mettere a profitto degli studiosi la profonda conoscenza ch' egli ha dell'opera edita ed inedita di Angelo Mazza.

Perciò egli nelle sue lettere, mentre spesso afferma di ammirare la poesia del Frugoni per la vaghezza dei colori e per il bagliore dello stile, d'altra parte non nasconde di giudicarla assai severamente per la pochezza di idee filosofiche e per l'intima povertà di pensiero scientifico, che traspare da ogni pagina. Errore del Frugoni e de' primi suoi seguaci, a suo avviso, era stato quello di nascondere sotto un vestito sfarzoso un poverissimo corpo. Ebbene la nuova scuola, di cui egli sarebbe stato iniziatore e corifeo, alle esterne eleganze avrebbe aggiunto gravità di sapere scientifico e sublimità di idee trascendentali (1). Cosí le due muse della " nuova " scuola, *scienza* e *immaginazione*, non solo avrebbero di per sé stesse messo in rilievo la vacuità della poesia del Frugoni, ma anche avrebbero fornito tutti gli elementi necessari per il rinnovamento della lirica italiana.

Se non che, ciò affermando, egli non s'avvedeva che artisticamente non sarebbe stato un novatore, perché, pur contemperando il verboso filosofismo del suo tempo con gli splendori fittizi dell'immaginosa poesia cesarottiana, rispetto alla forma nulla di veramente nuovo avrebbe creato. Innestando la forma frugoniana al *filosofismo* sdottoreggiante, al quale Comante stesso, per ottemperare alle nuove esigenze del secolo, bruciò, prima di morire, alcuni grani d'incenso (2), e contemperando il suo canto " di dottrina armato " (3) e pervaso di " idee platoniche " con l'immaginoso splendore della lirica cesarottiana e con le peregrine lusinghe della poesia inglese (4), Angelo Mazza era riserbato a rappresentar nella storia letteraria del secolo decimottavo uno stadio progressivo del Frugonianesimo, ma non un nuovo mondo poetico.

Melchiorre Cesarotti, che, piangendo la morte di Comante Eginetico, aveva lamentato che " poche faville " poetiche ancor rimanessero accese in Italia (5), ben poteva con non minor intem-

(1) Sullo *spirito filosofico* e sulla *poesia filosofeggiante* del secolo XVIII vedi i due primi saggi del vol. *In Arcadia* di Emilio Bertana (ed. cit.).

(2) Si ricordino gli sciolti al Condillac.

(3) La frase è del Mazza. Vedi il sonetto proemiale all'*Armonia*.

(4) Per l'anglomania del Mazza vedi il cap. XII dell'importantissima opera di Arturo Graf, *L'Anglomania e l'influsso inglese in Italia nel sec. XVIII* (Torino, Loescher, 1911).

(5) V. *Opere*, XXXVII, p. 222.

peranza salutare nel frugoniano suo discepolo, Angelo Mazza, un miracolo dell' " Arte Febea „, animato da cosí forte " emanazione della natura Apollinea „, come " non era mai piú stata in alcuno antico o moderno Lirico „. La storia, pur rendendo omaggio all'alacre ingegno del cantore dell'*Armonia* (1), giudicò che se il suo avversario, Vincenzo Monti, con evidente esagerazione aveva salutato Comante Eginetico " padre incorrotto „, non a tutti i torti aveva però sentenziato che i " corrotti figli „ erano stati troppo " prodighi d'ampolle e di parole „. Nell'estremo svolgimento di quel complesso fenomeno che fu il Frugonianesimo, tre poeti, che in fondo non si apprezzarono e che alla storia consegnarono opere di diverso valore estetico, Angelo Mazza, Carlo Castone della Torre di Rezzonico e Vincenzo Monti (2), per il frugoniano amore delle *ampolle* e delle *parole*, da loro dimostrato in giovinezza e piú oltre, devono esser oggi piú di una volta avvicinati dalla critica (3).

(1) V. *Opere* del Mazza, III, p. 5 e seg. — Angelo Mazza per i suoi versi sull'*Armonia* ricevette il soprannome di *Armonide Elideo*, quando il 10 settembre 1772 fu con voti unanimi aggregato all'Arcadia. Per le sue contese con G. B. Fontana, che lo vituperò sotto il nome di *Limone Deriadeo* (anagramma di *Armonide Elideo*) vedi il mio studio sulla *Ciaccheide di C. I. Frugoni, Aurelio Bernieri e Guid'Ascanio Scutellari* (Biblioteca storica, letteraria e artistica della Rivista " Aurea Parma „, I, 1912). Vedi anche questo studio per le relazioni del Frugoni con Orazio Mazza (*Ciacco*), padre di Angelo.

(2) Per le contese che Angelo Mazza ebbe col Monti, v. Pezzana, op. cit.; A. F. Rossi, op. cit.; Achille Monti, *Vincenzo Monti, Ricerche storiche e letterarie*; Achille Neri, *Angelo Mazza e Vincenzo Monti*. Cfr. anche " Giorn. stor. d. lett. ital. „, VIII, 460, X, 454. Per le rivalità, in amore e in poesia, tra il Mazza e il Rezzonico, vedi Pezzana e Bertana, op. cit. — Per le relazioni del Rezzonico col Monti vedi Bertana, op. cit., p. 322, nota.

(3) Con ciò non vogliamo affatto affermare che Vincenzo Monti, indiscutibilmente superiore, come artista, tanto al Mazza quanto al Rezzonico, sia stato in tutto e per tutto un frugoniano. Vogliamo accennare a quanto Vincenzo Monti, sopra tutto in gioventú, dovette al poeta genovese. Cfr. a questo proposito lo scritto di Leonardo Cambini, *Primi saggi poetici di Vincenzo Monti* (in " Giorn. stor. d. lett. ital. „, 1909, LIII, p. 69) e l'articolo di Attilio Butti, *Rileggendo la prima ode di Vincenzo Monti* (ivi, 1910, LV, p. 104). Vedasi poi l'ottimo commento alle *Poesie di Vincenzo Monti*, pubblicato da Alfonso Bertoldi, presso l'editore Sansoni (Firenze, 1910).

L'idillio VIII di Teocrito nella sua tradizione e nel suo carattere.

Nota di AUGUSTO ROSTAGNI.

I.

Chi prenda ad esaminare la tradizione manoscritta della raccolta teocritea non può certamente concepire alcun sospetto riguardo all'autenticità dell'idillio che nella vulgata reca il numero VIII. Infatti e per il testo e per gli argomenti e gli scolî esso si trova nelle medesime condizioni che i componimenti di cui nessuno ha mai dubitato.

Come è noto, con la scorta de' codici e alla luce di acute induzioni e di raffronti, noi possiamo risalire sino al 1° secolo avanti l'era volgare (1). Ma le incertezze incominciano appunto allorchè ci si volga allo studio delle antiche raccolte, al quando e al come esse si siano formate. La insufficienza degli elementi ha permesso ai dotti le più diverse e contrarie supposizioni (2). Noi, fondandoci su questi elementi, possiamo affermare, non esserci nessun indizio, assolutamente nessuno, che l'idillio di cui trattiamo sia mai provenuto da altra fonte, che quelli cui si accompagna. Anzi, precisamente i carmi I, III-XIII presentano una tradizione lor propria e concorde, e dovettero abbastanza per tempo costituire un gruppo distinto (3). Qui cessano le nostre

(1) Cfr. U. v. WILAMOWITZ-MOELLENDORF *Die Textgeschichte der griechischen Bukoliker* " Philologische Untersuchungen „ XVIII Berlin 1906 pp. 106 sgg.

(2) Cfr. AHRENS " Philologus „ XXXIII (1874) pp. 385-404, 577-609; BIRT *Das antike Buchwesen* Berlin 1882 pp. 397 sgg.; HILLER *Beiträge zur Textgeschichte d. griech. Bukol.* Leipzig 1888; BUCK *De scholiis theocriteis vetustioribus* Argentorati 1886 c. II; BETHE *De Theocriti editionibus antiquissimis commentatio* Rostock 1896.

(3) Così nei codd. Q P. Le sigle che adoperiamo, sono, salvo diversa dichiarazione, quelle del Wilamowitz nell'edizione Oxoniense *Bucolici graeci*[2]. Cfr. del WILAMOWITZ l'opera sopra citata pp. 6 sgg.

conoscenze: che essi si riunissero a quel modo da raccolte anteriori e diverse o di diversi autori non è lecito affermare. E affatto infondata appare l'opinione dell'Ahrens, per molto tempo ritenuta verisimile (1), e dalla quale derivava una posizione sospetta agli idilli VIII e IX, che la più antica raccolta (erste Sammlung) abbracciasse i numeri I-IX, redattore, a tempo di Augusto, quel Teone di cui abbiamo notizia negli scolî per un *ὑπόμνημα εἰς Θεόκριτον* (2). Testimonianza di questa raccolta sussisterebbe in alcuni versi che, si sostiene, ne erano l'epilogo (opera di Artemidoro, padre di Teone, come introduzione ne era l'epigramma, del medesimo grammatico, conservatoci dagli scolî e dall'*Antologia Palatina* IX 205), e che vennero poi per isbaglio incorporati con l'idillio IX (vv. 28-30). Fatto sta che quei versi non possono esser considerati epilogo della supposta raccolta, se non in seguito a gravi violenze al testo, ammissibili solo e a pena quando la raccolta avesse da altra parte una qualche probabilità (3). Invece l'Ahrens stesso non si nascose che i codici contenenti solo gl'idilli I-IX sono tutti di tarda età e di scarsissimo valore, e, d'altronde, è per lo meno strano che una silloge annunziata con l'epigramma:

Βουκολικαὶ μοῖσαι σποράδες ποκά, νῦν δ' ἅμα πᾶσαι
ἐντὶ μιᾶς μάνδρας, ἐντὶ μιᾶς ἀγέλας,

comprendesse solo nove componimenti, e, tra questi, il II (il quale non ha carattere bucolico, ma è un *μῖμος γυναικεῖος*); che una silloge, la quale, secondo l'Ahrens, doveva contenere cose di varî autori, si limitasse a sette componimenti teocritei e a due di altri autori, lasciati ultimi appunto perchè non teocritei (4). Nè maggiore apparenza di verità hanno le ragioni

---

(1) Cfr. AHRENS l. c. p. 386 e LEGRAND *Étude sur Théocrite* Paris 1898 pp. 9 sgg.

(2) Cfr. cod. Paris. Reg. 2630 e SUIDA *s. v.* Ἀπίων.

(3) Cfr. BÜCHELER " Jahrbücher für klassische Philologie „ LXXXI (1860) p. 344 e LEGRAND o. c. pp. 9 sgg.

(4) L'epigramma di Artemidoro è indizio di un'antica raccolta, ma questa doveva contenere molto più che l'Ahrens non pensi. Cfr. WILAMOWITZ o. c. pp. 124 sgg. Il fatto poi che si trattava di una *ἄθροισις*, non implica, secondo me, necessariamente, mancasse una collezione teocritea anteriore, se anche di questa non sopravviva indizio.

metriche, escogitate all'uopo; l'essere, ad esempio, i componimenti I-IX i più provvisti di dieresi bucoliche; chè evidentemente Artemidoro, o chi altri si fosse, nella sua scelta era guidato dal carattere bucolico dei carmi, non da ragioni metriche sottili, che potevano essere, io credo, a quel tempo difficilmente percepite, pure da un greco, senza intenzionale ricerca, e che, di più, non vanno immuni da eccezioni. L'unico risultato, cui ad una critica spregiudicata e prudente sia dato di giungere, si è che, nella più antica edizione della quale perseguiamo le traccie, l'idillio VIII non doveva mancare ed aveva il posto che gli è rimasto nei migliori manoscritti (1).

L'essere appartenuto ad una tale edizione, sia pure poco il valore di questo fatto, è un titolo di autenticità (2).

(1) Cfr. WILAMOWITZ o. c. pp. 106 sgg.

(2) Quanto alla presenza ed alla vicinanza di un idillio quale il IX, essa non solo non pregiudica, ciò che si potrebbe a tutta prima pensare, ma torna a sostegno della tradizione. Si tratta di un componimento che non ha unità organica e che non può in alcun modo essere considerato opera d'arte compiuta. È il giudizio da tempo assodato tra i dotti: quello che, nonostante quanto contrariamente scrisse il Wilamowitz (o. c. pp. 202-9), ritengo incontestabile, — comunque poi si vogliano spiegare le varie parti giustapposte, chè trattarne non è ora il mio assunto (cfr. *Theocriti idyllia*. Comment. crit. atque exeg. instr. AD. TH. ARM. FRITZSCHE. Ed. alt. Lipsiae 1870 pp. 299 sgg.). Il poeta più inviso alle Muse avrebbe fatto molti versi assai peggiori ed altri parimenti stentati, ma in ogni modo cosa più consistente ed eguale. L'idillio provenne dalle cure postume di un grammatico, il quale, non volendo dispersi certi notevoli frammenti bucolici, nè d'altra parte conservarli isolati, ciò che sarebbe stato contrario all'usanza degli antichi editori, li rielaborò e cucì con robaccia propria, tanto da dare aspetto di continuità all'insieme: sia quello stesso grammatico raccoglitore che innestò qua e là negli idilli alcuni versi allo scopo di meglio spiegare e la distribuzione delle parti tra i personaggi, ed il principiare dei canti, sia altri ancora. L'ufficio pietoso non è naturale fosse reso, almeno nell'intenzione del raccoglitore, che a reliquie teocritee, dal momento che il risultato dell'operazione venne ad essere incluso nella serie degli idilli più teocritei, nella serie più antica che ci sia dato rintracciare. Insomma trattandosi di frammenti, che sono entrati a far parte di una raccolta teocritea, non mi par giusto pensare essi fossero di altro poeta, quand'anche quella raccolta potesse, facciamo il caso, aver incluso un eccellente componimento di un eccellente imitatore del Siracusano. Ma codesto caso diventa a sua volta assai strano, la presenza dei frammenti denotando in chi fece la silloge intenzione di darci quanto conoscesse della poesia bucolica di quel determinato autore.

II.

Resta a cercare per altra via qualche lume sull'età dell'idillio e, possibilmente, sulla persona dell'autore.

Le citazioni esplicite come di opera teocritea non mettono conto, perchè appartengono a bassa epoca, al pari, del resto, di ciò che accade per gli altri idillî (1). Le imitazioni, sebbene elemento più infido e di aiuto parziale, in quanto gli imitatori non ci dicono se a Teocrito o ad altri si inspirino, tuttavia, o m'inganno, serviranno meglio al nostro intento (2).

Non è il caso di rivolgerci a Virgilio, il quale, se molto e molto derivò dall'idillio VIII, non ci conduce oltre l'età delle raccolte di cui abbiamo parlato. Invece, ricordo del nostro carme è lecito, a mio avviso, scoprire già assai vicino all'epoca del poeta siracusano, particolarmente in un epigramma, d'indole bucolica, di Mnasalca di Sicione, conservatoci dall'*Antologia Palatina* IX 324.

Si tengano presenti i distici elegiaci della gara poetica di Dafni e Menalca, quelle invocazioni dei giovani alla natura che li circonda, invocazioni entusiastiche che hanno tutta l'aria di motivi popolari:

v. 33 *ἄγκεα καὶ ποταμοί, θεῖον γένος.....*

v. 41 *παντᾶι ἔαρ, παντᾶι δὲ νομοί, παντᾶι δὲ γάλακτος*

---

(1) Sono riunite come *Testimonia veterum* dall'Ahrens nella sua edizione critica *Bucolicorum graecorum reliquiae* Lipsiae 1855-9 vol. I pp. 63-71.

(2) Il catalogo delle imitazioni dato dall'Ahrens nell'edizione citata è naturalmente incompleto e tien conto quasi sempre solo di Virgilio e di scrittori della decadenza, Quinto Smirneo, Nonno, Niceta Eugeniano. Certo l'influsso di Teocrito su altri, contemporanei o prossimi, è più incerto, meno evidente, e riguarda non tanto la forma, quanto lo spirito della poesia: tolti i bucolici veri e proprî, rimangono molti, lirici in genere, a mezzo ignorati, di cui parte ci conserva l'*Antologia Palatina*.

e si veda ora:

Ἁ σῦριγξ, τί τοι ὧδε παρ' Ἀφρογένειαν ὄρουσας;
τίπτ' ἀπὸ ποιμενίου χείλεος ὧδε πάρει;
οὔ τοι πρῶνες ἔθ' ὧδ' οὔτ' ἄγκεα - παντᾶι ἔρωτες
καὶ πόθος· ἁ δ' ἀγρία Μοῦσ' ἐν ὄρει νέμεται (1).

La corrispondenza per sè stessa, s'intende, è minima, ma assai caratteristica, e ad insistervi m'inducono varie ragioni, varî fatti, che prenderò ad esporre (2).

Quanto alle forme doriche esse sono di Mnasalca stesso; invece ciò che sorprende è quel nominativo in luogo del vocativo, accompagnato per di più dall'articolo, uso assai raro e tutto famigliare a Teocrito (cfr. IV 45, 46 V 100, 110, 147 VIII (!) 67) (3); poi *ἀπὸ ποιμενίου χείλεος* ricorda per l'immagine Teocrito I 129 *σύριγγα περὶ χεῖλος ἑλικτάν* (il riscontro è fatto dallo Stadtmueller, il quale, notiamo, non vi è indotto da un intento speciale); *ἐν ὄρει* occorre negli idilli più volte, e più volte il motivo di pascolare pei monti *νέμειν, νέμεσθαι, νομεύειν κατ' ὄρος, ἀν' ὤρεα, κατ' ὤρεα μακρά.....*

Questi richiami, possibili nel breve spazio di un epigramma, acquistano a lor volta probabilità, quando si venga all'esame della rimanente opera poetica di Mnasalca. Son pochi epigrammi, contenuti tutti nell'*Antologia Palatina* (d'altro non abbiamo che quello riferito da Ateneo *Dipnos.* IV p. 163 *a*), e, ciò nonostante, abbastanza frequenti vi han luogo analogie e di concetto e di parola col poeta bucolico.

Molto. manifestamente, proviene dal comune patrimonio omerico, al quale, se Teocrito attinge a larga mano, non meno attinge, in proporzione, Mnasalca; tuttavia, qualcosa di più sin-

(1) Da molti si legge *πάντα δ'*, dal Mähly, dal Reitzenstein e da altri *παντᾶι*. Si tratta di una variante comune, la quale, del resto, ricorre anche nel luogo di Teocrito e quasi sempre (cfr. I 55, XXI 53). — Lo Stadtmueller volle correggere *νέμεται* in *μενετά*, ma il cod. Plan. dà *νέμεται*, il cod. Palat. per errore *μένεται*.

(2) Il Reitzenstein *Epigramm und Skolion* Giessen 1893 p. 190 n. 1, trattando della forma epigrammatica dei distici elegiaci nell'id. VIII, avvertì l'allusione e la disse incerta, senza tentare un'apposita indagine, che sarebbe sconfinata dal suo proposito.

(3) Abbastanza frequente senza l'articolo. Cfr. Kühner-Gerth³ *Ausf. Gramm. der griech. Spr.* 357, 2.

tomatico rimane, e, certo, l'impressione generale è che ed immagini e frasi, qua e là, si trovino suggerite, anche inconsapevolmente, per abitudine presa, dallo studio amoroso e costante degli idilli (1).

Cosa tutt'altro che difficile a credere. Mnasalca era nativo di Platea, forse demo di Sicione (2), e continuò, ben lo sappiamo, la tradizione di quella poesia bucolica nel Peloponneso, di cui era stata principale rappresentante, fra la fine del 4° ed il principio del 3° secolo, Anite di Tegea, e che le recenti ricerche hanno messo alquanto in luce (3). Ma, vivendo nella seconda metà del 3° secolo (4), quando la poesia bucolica, degenerazione della teocritea, cadeva nell'erotico e nel sentimentale, par giusto egli avesse famigliare il Siracusano e a lui si tenesse singolarmente fedele. Infatti, caratteri prevalenti della sua musa appaiono la serenità e la misura, un certo tono virile ed una delicatezza nelle rappresentazioni della campagna (5), che gli sono le più care, non disgiunta da nobiltà.

---

(1) Trascelgo ad esempio:

Mnas *Anth. Palat.*:	Theocr.:
VII 192 *πτερύγεσσι λιγυφθόγγοισιν ἀείσεις*	Ep. IV 9 *λιγυφθόγγοισιν ἀοιδαῖς... ἀχεῦσιν*
κεκλιμένον σκιερὰν ὑπὸ φυλλάδα	XII 8 *...σκιερὴν δ' ὑπὸ φηγόν*
VII 194 *μέλαθρον μολπᾶς ἴαχ' ὑπ' εὐκελάδου*	XVIII 8 *ὑπὸ δ' ἴαχε δῶμ' ὑμεναίωι*
IX 70 *τραυλὰ μινυρομένα*	Ep. IV 10-1 *ποικιλότραυλα μέλη... μινυρίσμασιν ἀνταχεῦσιν*
IX 333 *κράναν τ' αἰγείροισι κατάσκιον*	VII 8 *αἴγειροι εὔσκιον ἄλσος ὕφαινον*

(2) Cfr. Ateneo *Dipnos.* IV p. 163 *a* e *Anthol. Palat.* XIII 21.

(3) Cfr. l'opera già citata del Reitzenstein pp. 123 sgg. e Knaack *Bukolik* in Pauly-Wissowa " Real-Encycl. „ III coll. 998 sgg.

(4) Un epigramma irrisorio sulla sua morte (*Anthol. Palat.* XIII 21) è opera di Teodorida, del quale abbiamo anche un epigramma sulla morte di Euforione di Calcide (*Anthol. Palat.* VII 406). Se anche e l'uno e l'altro epigramma, come sembra, fingano semplicemente, con intento satirico, morti non avvenute, dobbiamo in ogni caso ricondurci ad Euforione. Di questo poeta, per conseguenza, risultano suppergiù contemporanei e Mnasalca e Teodorida: Euforione visse circa fra il 260 ed il 190 (cfr. Beloch *Griechische Geschichte* III 2 pp. 493-4, dove viene dimostrata erronea, per la nascita, la data di Suida *s. v.* *Εὐφορίων*: 275).

(5) Così anche Susemihl *Gesch. der griech. Lit. in der Alexandrinerzeit* Leipzig 1891-2 II p. 540.

Ora, è mirabile come con questo si accordi il concetto stesso espresso nel nostro epigramma, e come dal tutto si spieghi ed illumini il riscontro sopra osservato.

Il poeta, con profondo senso di amarezza, vede una zampogna, l'emblema del canto bucolico, consacrata in un tempio ad Afrodite, e nota come non domini ivi la più bella e libera natura ch'egli ama, ma dappertutto *ἔρωτες καὶ πόθος*, non più la ingenua semplicità, ma il sentimentalismo erotico: la sua musa, *ἁ δ' ἀγρία Μοῦσα*, ama aggirarsi pei monti! Nulla di strano che, ad indicar sotto forma di immagine plastica il bello della libera natura misconosciuto e viziato, gli venissero a mente quelle che alla natura erano invocazioni entusiastiche, e che, nel suo concetto, stavano a rappresentare, come canti ben noti di Teocrito, il sano ideale della poesia bucolica; nulla di strano, dico, che gli venissero a mente, e ch'ei se ne servisse a doppio senso (sarebbe cosa abbastanza comune presso un poeta alessandrino), come di una allusione, come di un *παίγνιον*.

Che tutte queste siano pure combinazioni io non m'induco a credere. Certo, ove si ammetta il richiamo, esso è di tal fatta da non lasciar dubbio sull'anteriorità dell'uno piuttosto che dell'altro componimento: onde l'idillio VIII verrebbe per prima cosa riportato all'età di Teocrito (cioè, a qualche tempo almeno prima della seconda metà del 3° secolo); che di Teocrito si tratti, sarebbe reso probabile dal concetto espresso nell'epigramma, dall'indole poetica di Mnasalca, dallo studio che questi tradisce del poeta siracusano.

Per contro, non stimo possa condurre ad alcuna conclusione l'imitazione, da alcuno sostenuta, per parte di Callimaco *Epigr.* LII Wilam. (*Anthol. Palat.* XII 230) dell'ultimo distico del canto elegiaco (vv. 59-60). Perchè, chi esamini i vari componimenti, non potrà non riconoscere che l'epigramma callimacheo già tutto deriva e da Bacchilide *fr.* 25 Bergk⁴ e da Asclepiade di Samo *Anthol. Palat.* V 167 (cfr. particolarmente Call. *οὐράνιε Ζεῦ· καὶ σύ ποτ' ἠράσθης· οὐκέτι μακρὰ λέγω* e Ascl. *Ζεῦ φίλε, σιγήσω* (1) · *χαὐτὸς ἐρᾶν ἔμαθες*) (2). Ma piuttosto, e la volgarità

(1) *σιγήσω* em. Hermann; *σίγησον* codd. Stadtmueller.

(2) Il non ammettere l'imitazione non vieta però di credere, come io credo, che l'epigramma di Callimaco riguardi la persona di Teocrito, sia

del motivo e, ancor meglio, armonia di concetti e consonanza d'immagini, secondo esporrò diffusamente, mi fanno ritenere con lo Hermann gli ultimi due distici del canto una interpolazione.

III.

Sta ora a vedere se, e per avventura in quali parti, l'idillio presenti qualcosa di alieno dall'arte di Teocrito, dal modo di concepire e di atteggiare le immagini ed i sentimenti ch'è proprio di questo poeta: se ragioni serie e sufficienti di pensiero, di stile, di metro contrastino ad una tradizione che risultò salda e costante al pari che per gli idilli più sicuramente autentici.

Bisogna anzitutto considerare che siamo innanzi al mondo della leggenda, a quel mondo che l'autore del *Ciclope*, dell'*Epicedio di Dafni*, dei *Bucoliasti Dafni e Dameta*, trattava come mezzo ad esprimere la vita del sentimento (1). Il carattere popolare del carme è espresso a chiare note dallo *ὥς φαντί* (v. 2) e, più, dal modo onde vengono rappresentati i due giovani, onde son fatti parlare e cantare. Il dialogo stesso non viene introdotto subito *ex abrupto*, come per i personaggi ignoti nei carmi rustici (III, IV, V, X); invece compare anche qui la cornice, cioè lo sfondo leggendario, come sempre per i personaggi ben noti della tradizione pastorale (I, VI, XI): una differenza costante e degna di essere avvertita.

La materia mitologica, se non ha importanza in sè stessa ed è un semplice motivo esteriore, tuttavia, vieta al poeta il crudo realismo, le parole e le immagini acri di cui è maestro, e lo induce all'espressione di sentimenti più miti, più delicati, con pari effetto ed eccellenza d'arte. Insomma, quando Teocrito vuol dare sfogo alla parte delicata della sua fantasia di poeta, ricorre alla forma della leggenda: e vediamo che non riesce allora nè meno vero, nè meno umano. Perciò, in idilli bucolici di tal sorta

---

un *παίγνιον* basato sulla coincidenza di nomi e di cose. Cfr. la citata edizione del Fritzsche, nell'argomento, p. 258, e a v. 56[h]: inoltre Ribbeck "Preuss. Jahrbb." XXXII (1873) p. 85 e *Theokrits Gedichte* erklärt von H. Fritzsche III. Aufl. besorgt von E. Hiller Leipzig 1881 ai vv. 59-60.

(1) Fu, se non cronologicamente, almeno nel processo intellettuale del poeta, il passaggio dalla dotta poesia etiologica degli alessandrini al mimo.

considero errore imperdonabile quello di desiderare la petulanza e l'acrimonia degli idilli bucolici mimici. La mitezza, la grazia non si confanno ai pastori ed ai caprai quali sono Lacone e Comata, ma, certo, vanno a pennello ai pastori ed ai caprai della vecchia musa popolare, ai Dafni, ai Dameta, ai Menalca (1).

Dafni è anche qui il prediletto dalla musa popolare, il cantore divino e famoso per la sua bellezza (cfr. I 141, VIII 73), colto dal poeta in un momento della adolescenza, mentre intona sul pendio de' monti, in gara con un compagno, inni soavi. Posta la situazione, non abbiamo ragione di credere che Teocrito l'avrebbe svolta diversamente. Anzi, l'idillio VI mostra com'egli si indugiasse con compiacenza ad illustrare la bella giovinezza di Dafni; Menalca nell'un carme è introdotto per lo stesso motivo che Dameta nell'altro, per la necessità delle parti, ed è parimenti ricavato dalla antica tradizione pastorale (2); la soavità de' canti, l'atteggiamento dei due giovani, che, nemici da commedia, non sanno stare a lungo sul tono della sfida, la pittura della loro anima adolescente, son cose che troviamo già tutte in potenza negli idillî I e VI ed in parte anche nel VII. In potenza, dico, e con questo noto, non solo la conformità col genio poetico del Siracusano, ma anche il nuovo ed originale svolgimento sotto il quale l'opera d'arte si presenta: che poi è per l'appunto ciò che si vuole.

Squisita la pittura dell'animo giovanile; raro il senso di quel momento delicatissimo della vita. Codesti giovani che sono ancora, più che ad altro, affezionati ai loro greggi ed ai luoghi abituali, e che l'amore cantano più per udita dire che per viva impressione personale, nella loro indole sempre ingenua e scontrosa muti di fronte alle lodi troppo spinte di procace fanciulla; codesti giovani non hanno certo che fare con le convenzionali figure di *παιδικά* degli idillî XXIX e XXX, frutto lezioso, ma-

(1) Non insisterei su queste verità abbastanza trasparenti, se non fossero state ad ogni passo stranamente misconosciute.

(2) Cfr. la narrazione di Clearco in ATENEO *Dipnos.* XIV p. 619 *c d.* È possibile Menalca sia ricavato da Ermesianatte, come suggeriscono gli scolii, ma questo non prova nulla riguardo l'autenticità (cfr. WILAMOWITZ o. c. p. 122). O Teocrito non attingeva al patrimonio comune di leggende ed a scrittori passati e contemporanei?

nierato della topica sentimentale alessandrina, bensì offrono riscontro con quanto di assai più vero occorre in alcuni idilli bucolici (1). E, proprio Teocrito non avrebbe conosciuto gli adolescenti meglio di come mostra conoscerli nei due *αἰολικά*, dove le cose e il genere stesso richiedevano quell'artificialità abbigliata e molle? Certo, se l'idillio VIII, tutto improntato alla conoscenza del reale, si scosta dalla maniera amorosa del tempo, non conosciamo poeta che se ne sia scostato, nell'ambiente alessandrino, al pari di Teocrito. Già nell'*Ila* un soffio di sentimento disperde ogni convenzionalismo e fa dimenticare le relazioni erotiche dei personaggi. Il Dafni e il Dameta che nell'idillio VI, raccolte insieme le greggie, seduti ad una fonte, cantano a gara ed, ambedue invitti, si dànno l'un l'altro un bacio per la gioia e per l'affetto reciproco, sono virtualmente la stessa cosa che il Dafni ed il Menalca dell'idillio VIII: giocondi, si sfidano con studiata acerbità e non cessano di amarsi, finchè, dopo il successo impari, l'uno spicca salti di giubilo e batte le mani, l'altro si rabbuia e si rode di stizza.

Dunque non si tratta qui di una analisi psicologica soverchiamente minuta, di un'analisi più profonda (quale a ragione desterebbe sospetto), nè i canti hanno carattere tutto intimo e soggettivo: è un quadro vivace, dove, secondo le tendenze di Teocrito, dei sentimenti si coglie piuttosto la parte esteriore, visibile, attiva. L'idillio reca forse l'impronta di una sentimentalità eccessiva, di una mollezza blanda ed affettata, di una rappresentazione falsa? Pur nei limiti che abbiamo fissato, pur illuminata dalla leggenda e dalla giovinezza, è la vita rude del pastore questa che ci compare innanzi, e con gli elementi ideali armonicamente si contemperano quelli reali (cfr. particolarmente v. 15, vv. 24-5, vv. 69-70, v. 87 sgg. e ricorda la chiusa dell'idillio I): amabile, sana visione di un artista che, in epoca di generale esaurimento poetico, non ha smarrito il tono vivo e sicuro, e vi trasfonde tutte le grazie dell'esuberante natura ellenica con brio e limpidezza davvero ariostesca.

(1) Il Wilamowitz o. c. p. 122 scrive: " Ein Dichter hat es (id. VIII) gemacht, der die knospenden Knabenseelen viel wahrer und reiner verstand als der Verfasser der mehr als halb konventionellen *παιδικά* mit ihrer fauligen und nicht einmal heissen Sinnlichkeit ".

IV.

Sopra, noi abbiamo ammesso senz'altro l'unità organica del carme, la quale è invero quant'altra mai incontestabile. I vari tentativi ch'ebber luogo via via per intendere o l'una o l'altra parte aggiunta posteriormente e l'opera risultante da elementi raccogliticci, mancano di fondamento, e provengono, in ultima analisi, dal non essersi fatta un'idea chiara dell'idillio, nè delle relazioni che legano e concetti e parole. Relazioni, le quali, a chi le osservi, sono tali da rivelare l'artista e la concezione solida, non il compilatore e la compilazione.

La sfida formale, lanciata con presunzione giovanile da Menalca all'amico, è una sfida ad oltranza, che non deve limitarsi ad una prova sola:

v. 7 *φαμί τυ νικασεῖν ὅσσον ϑέλω αὐτὸς ἀείδων* (1).

Dunque è nell'intenzione del poeta di darci dei canti a più che una ripresa: di qui la doppia serie che infatti abbiamo.

Ecco intanto un disegno originale, che non comprendo come mai si sarebbe proposto chi avesse voluto imitare Teocrito (almeno, negli idilli che di quest'ultimo conosciamo), e, tanto meno, come sarebbe provenuto da una giustapposizione di parti disgregate.

Si osserva: molto meglio, se precedessero i canti in esametri e seguissero, come sforzo ulteriore, quelli in distici elegiaci (2). E chi lo assicura? Già obbiettava giustamente il Koechly, esser difficile dire " utrum in distichorum singulorum breviore sed repetita, an in exametri carminis longiore sed una responsione, maior aut ars sit aut difficultas „ (3). D'altronde, par giusto pretendere qui la verisimiglianza nel metro, che gli è proprio quella di cui Teocrito sempre, da buon alessandrino,

---

(1) Cfr. KOECHLY *Carminum theocriteorum in strophas suas restitutorum specimen* Ind. lect. Turici 1858 p. 20 e BÜCHELER " Jahrbücher für klassische Philologie „ LXXXI (1860) p. 350, contro lo HERMANN, il quale *Opusc.* V p. 87 aveva cercato di dimostrare la parte elegiaca estranea al resto del carme.

(2) Cfr. HERMANN l. c. e KATTEIN *Theocriti idylliis VIII et IX cur abroganda sit fides theocritea* Parisiis 1901 p. 48.

(3) Cfr. l. c. p. 16.

meno si preoccupa? Se i canti sono superiori per arte alle forze di giovani imberbi, certo, più che a qualsiasi altro bucoliasta, essi si convengono a Dafni ed a Menalca, e in una sfida annunziata sin da principio come straordinaria e solenne; poi, badando a questo, sappiamo bene che nessun capraio mai, nessun pastore, si espresse in versi così bene architettati, come pur fanno Comata e Lacone (1).

Di fatto, i distici elegiaci, per quanto poco Teocrito pensi alla rispondenza del verso col concetto, hanno una ragione ritmica: come altrove l'*ἐφύμνιον* (e, in generale, il ritornello nella poesia popolare) divide i canti in determinate misure e segna il ripetersi di certi motivi (idd. I, II), non altrimenti le strofe distiche servono qui a rendere più evidente, più esatta, più simmetrica la studiata ripercussione dei pensieri e delle frasi.

Piuttosto, ecco anche in questo una novità, la quale, se non ha nulla di strano in sè stessa, pure, sarebbe verisimilmente stata introdotta da un imitatore di Teocrito, quando il maestro aveva diffuso ed imposto al genere la forma dell'esametro? (2). Lasciando da parte un momento le ragioni che per avventura a credere diverso ci fossero, e di stile e di lingua, da noi non ancora discusse, dinanzi a questo semplice fatto, dovremmo pensare l'idillio o di Teocrito stesso, o a lui anteriore, o di poeta che non fosse suo imitatore. Ed ora, ognun vede come le due ultime ipotesi cadrebbero, data la coincidenza di immagini, di frasi, di parole con gli idillî sicuramente teocritei, e nessuno rassegnandosi a pensare Teocrito imitatore egli a tal punto di altro poeta da sembrar tutto quello.

In queste idee io mi confermo, quando considero da chi Teocrito pur procedeva. Filita, Ermesianatte nelle rappresentazioni della natura pastorale (che, secondo ci mostrano i frammenti, essi dovevano aver care), adoperarono, costantemente a quanto sembra, il metro elegiaco. Ancora. Questi canti di due distici ciascuno, nella loro spontaneità, manifestano una note-

(1) Cfr. Rannow "Wochenschrift f. klass. Philol." XIX (1902) col. 1281.

(2) Questo avrebbero dovuto spiegare quanti trovarono nell'idillio VIII un imitatore di Teocrito così ben travestito. Che fosse una bizzarria non è probabile in chi poneva tanta cura ad assumere la maniera di Teocrito.

vole coincidenza con gli epigrammi bucolici di cui parlammo sopra (1), e, se anche non si possa affermare in modo assoluto che rappresentino il passaggio dalla bucolica epigrammatica a quella teocritea, il poeta siracusano dovè tuttavia inspirarsi alla scuola del Peloponneso, non foss'altro. per la sua amicizia con Nicia di Mileto (2).

Tornando alla questione dell'unità, anche il legame ritmico che corre fra la parte elegiaca e la esametrica depone più per l'artista che per il compilatore. Gli esametri hanno essi stessi una ripartizione strofica distica, e, come nella prima parte ogni cantore intona sei distici (3), così quattro nella seconda: dall'una all'altra parte non è che un lieve ed indovinato cambiamento di tono.

Nuova incongruenza. Menalca nella parte esametrica vien rappresentato come pastore di pecore soltanto (vv. 2, 9), nella parte elegiaca di pecore e capre ad un tempo (vv. 45, 49) (4). Ma se a v. 2 abbiamo semplicemente *μᾶλα νέμων*. gli è che *μᾶλα* è parola generica, e se a v. 9 *ποιμὴν εἰροπόκων οἴων*, gli è che non occorre. anzi riuscirebbe ridicola, una ulteriore specificazione. E infatti, a provare l'intimo collegamento delle parti, anche nel canto elegiaco una volta vengono menzionate solo le *ἀμνάδες* (v. 35).

Piuttosto merita considerazione quello che altri osservano, non più riguardo all'unità, ma riguardo all'autenticità. non corrispondere all'uso di Teocrito un *ποιμήν* che sia pastore di pecore insieme e di capre (5). La distinzione che Teocrito mantiene

(1) Cfr. REITZENSTEIN o. c. p. 189.

(2) L'idillio lo si potrebbe allora ritenere uno dei primi di Teocrito, del che non mancherà qualche altro indizio. — L'osservazione del LEGRAND o. c. p. 156 n. 2, che gli epigrammi peloponnesiaci hanno poco che fare con la bucolica. in quanto trattano di *ὁδῖται* e non di pastori. è insufficiente: in Teocrito non mancano immagini di *ὁδῖται* (cfr. VII 11, XII 8 9 e altrove). e questo. se mai, anche sta a provare la relazione cui accennavo.

(3) Non tenendo conto dell'ultima strofe. sulla quale vedasi in seguito.

(4) Così MEINEKE *Bucolici graeci*³ Berolini 1856 a q. l. e HERMANN l. c.

(5) BRINKER *De Theocriti vita carminibusque subditiciis* Rostochii 1884 p. 27 e KATTEIN l. c. pp. 52 sgg.

fra *βοῦται, ποιμένες, αἰπόλοι* (cfr. I 80) (1), non la credo così assoluta come si vuole che fosse, tranne certo fra la prima categoria e le altre due. Anzitutto è da osservare che *ποιμήν* presso Omero (*ι* 239-44), nel *Ciclope* di Euripide, nell'*Anthol. Palat.* VII 55 (*γάλακτι δὲ ποιμένες αἰγῶν ἔρραναν* [*τάφον*]) ed altrove sta bensì per pastore di pecore soprattutto, ma non escluse le capre. Che presso Teocrito accadesse diversamente? Se negli idilli in cui compaiono dei *ποιμένες* (I 7, 15 V 90, 138, 143.....), accennandosi ai greggi, ci si parla solo di pecore, non è necessariamente implicito che mancassero capre: già nello stesso idillio VIII abbiamo visto il più delle volte parlarsi solo delle prime, come della parte maggiore e più nobile, ed Omero e gli altri solo di rado ed a caso ricorrono a quella specificazione. Ecco anche indizî di altra natura. Nell'idillio XI, sebbene a v. 12 figurino solo *ὄιες*, Polifemo a v. 34 adopera una espressione generica *βοτὰ χίλια βόσκω*, a bella posta, credo, in quanto egli vanta così la propria ricchezza; similmente nell'idillio VI il Ciclope *ποιμήν* (vv. 6, 10) si ode gridar dietro per ischerno, da Galatea, *αἰπόλος*: l'epiteto non avrebbe alcun significato, se non trovasse riscontro nella realtà, se il Ciclope non pascesse anche capre, e non si sentisse degradato, chiamandolo essa dalla parte meno nobile del gregge (2).

Passiamo ad un'altra questione.

Esponemmo già il nostro avviso sulle figure dei due giovani e sull'arte con cui esse vengono rappresentate. A quello, che volli fondato sull'esatto e coerente esame delle singole parti, delle singole frasi e dei singoli versi nei loro rapporti, non resta che richiamarci, se a proposito appunto del carattere di Dafni e di Menalca si è voluto vedere la più grave sconnessione dell'idillio (3). I due adolescenti, si osserva, nel canto elegiaco

(1) Veramente a I 80 i codici concordi leggono *ἦνθον τοὶ βοῦται, τοὶ ποιμένες αἰπόλοι ἦνθον*, e solo la vulgata *ᾡπόλοι*. Perciò si vide in *ποιμένες αἰπόλοι* la spiegazione al caso dell'idillio VIII: una classe speciale, superiore al semplice pecoraio ed al semplice capraio (cfr. Bücheler l. c. p. 350 n. 1), denominata, per brevità, anche *ποιμένες*.

(2) Quanto alle altre denominazioni, *ποιμήν* = *νομεύς*, le vedremo appresso.

(3) Cfr. Hermann l. c. p. 87, Brinker l. c. p. 30 e Kattein l. c. pp. 48 sgg.

mostrano di conoscere a fondo l'amore, l'uno per Milone (v. 47), l'altro per la *καλὰ παῖς* (v. 43); invece nel canto in esametri non si preoccupano che dei loro greggi e non osano rispondere agli inviti di una procace fanciulla; nella parte narrativa (particolarmente v. 3) e nel canto esametrico (v. 64) essi appaiono in età immatura, provetti nel canto elegiaco; il giovane che ama la *καλὰ παῖς* non è certo quel medesimo che abbassa gli occhi dinanzi alla *σύνοφρυς κόρα* (v. 72).

Si badi. Dafni e Menalca sono ambedue adolescenti (v. 3), non giunti peranco alla piena pubertà, *ἀνάβω*, tanto che il secondo, come scrive il Bücheler (1), ha ben ragione di dirsi contro il terribile lupo *μικκός* (v. 64). L'uno ingenuamente si mostra ancora soggetto al padre ed alla madre e timoroso di castigo (v. 15), l'altro, lo sfidato, la fa già più da padrone (v. 14); ambedue, per la vivacità e l'ironia con cui si apostrofano (vivacità ed ironia saviamente contenute così da non cadere nel rozzo, nel villano del mimo), appaiono pronti e svegli. I loro canti — a cantare ed a suonare la zampogna sono ambedue espertissimi (v. 4) — i loro canti, che si ripercuotono festevolmente come l'eco l'uno dell'altro, hanno l'apparenza di motivi popolari (2), che il cantore atteggi secondo l'occasione e secondo il sentimento proprio. Dafni e Menalca li volgono ad esprimere l'affetto e la cura per i greggi (tanto nel canto elegiaco vv. 33-40, che nell'esametrico vv. 63-80), ed il bene che rispettivamente si vogliono (vv. 35, 39, 55); poi a dar sfogo alla prima vaga impressione d'amore, d'un amore, che, come osservavo, essi conoscono più per udita dire, come materia di canti e d'istorie, che non per seria esperienza, e che veggono impersonato, l'uno in un fanciullo, l'altro nella *καλὰ παῖς*. Tanto poco sentito quest'amore, e nel canto elegiaco e, parimenti, nell'esametrico, che, quasi, ad esso prevale il pensiero dei pascoli e del gregge (*παντᾶι ἔαρ..... ἔνθ' ὄις.....*), e che ben presto, con trapasso ch'io sento sublime,

(1) Cfr. l. c. p. 351.

(2) E tali, se non erano in realtà, dovevano essere, io penso, nell'intenzione dell'artista. Che i canti venivano, sino ad un certo punto, preparati, dice espressamente Teocrito: VII 50 *ὅρη φίλος, εἴ τοι ἀρέσκει τοῦθ' ὅτι πρᾶν ἐν ὄρει τὸ μελύδριον ἐξεπόνασα*. Tanto più in canti amebei era necessario prendere lo spunto da motivi comuni.

l'uno dei giovani, il più nobile ed affettuoso, Dafni, ne smette il tema per correr dietro all'idea deliziosa di poter sempre sedere accanto al compagno, guardando le greggie, le quali pascano insieme, e cantando, cantando gaiamente al mar di Sicilia (1).

---

(1) Seguo la lezione dei codd. *σύννομα μᾶλα*, lasciando da parte le congetture del Graefe e del Meineke *σύννομε καλέ*. E, ben s'intende, riferisco l'apostrofe a Menalca, come fanno alcuni fra i critici moderni (ad es. il Wilamowitz. nella citata *Textgeschichte* p. 123) e come gli scoli antichi (cfr. il II vol. dei *Bucolici* dell'Ahrens a q. l.). Diversamente — cioè, per riferire, secondo a tutta prima sembra più spontaneo e corrispondente, l'apostrofe a Milone — bisognerebbe supporre la caduta di una stanza, cosicchè questa che discutiamo venisse ad esser sulla bocca, non di Dafni, ma del suo competitore, l'amante del fanciullo; e bisognerebbe anche, per studio di chiarezza (non bastando il *τύ* di v. 55) ricorrere all'accennata correzione *σύννομε καλέ*, se non, con altri, a *σύννομε Μίλων*. La caduta della stanza, per sè stessa ammissibilissima, porterebbe quasi necessariamente (ciò che da alcuni si considera un vantaggio, da me un danno) ad accogliere autentici gli ultimi due distici elegiaci, perchè ristabilirebbe così la proporzione delle parti. I quali distici, per contro (giusta espongo più innanzi), furono introdotti appunto da chi non comprese i vv. 53-6, e, vedendovi — ciò che genericamente è vero — accenno ad un fanciullo, sentì la mancanza di una risposta da parte del cantor della donna. — Chè, d'altronde, non bisogna nei canti amebei pretendere un parallelismo assoluto. Chi osservi la lezione del testo, e colga lo spunto, onde la nostra strofe muove (vedi sopra), e, particolarmente, l'impeto lirico ed immaginoso, cui essa strofe si abbandona, non potrà non presentire qualcosa di nuovo. Teocrito, sappiamo, non solo concede tale innovazione di motivi, ma anche -- ed è questo il caso — la fa corrispondere al diverso valore dei contendenti (cfr. Wilamowitz o. c. p. 123, n. 1). Dafni, che alla fine riuscirà vittorioso per la suprema inspirazione del suo canto, sorprende qui con l'impensata felicità e confonde l'avversario: perciò, ecco, si passa alla seconda serie, in esametri. Il motivo d'amore non era per nulla fondamentale, non era l'essenza di tutta la tenzone: tanto nell'idillio teocriteo V, quanto nelle egloghe virgiliane, esso costituisce solo una parte, ha luogo solo saltuariamente. Si potrebbe osservare che l'innovazione spetta, se mai, al primo dei due contendenti: questo sì in linea generale, e se non ci fosse di fatto quel nesso, su cui ho insistito. — Ancora. L'espressione di v. 55 è senza dubbio espressione erotica; ma, in ogni caso, essa si conforma ai tratti calmamente passionali sotto cui il poeta bucolico ci rappresenta qui (e nell'id. VI: cfr. particol. v. 42) codesti divini figli della leggenda, ed, in genere, si conforma alla natura della sua fantasia. Se gli amori di cui cantano Dafni e Menalca hanno carattere di convenzionalità (e così sempre, anche

Così, fra tanto, è da intendere anche il distacco, in apparenza brusco, da v. 52 a v. 53, e non solo non mi sembra necessario, ma erroneo, supporre, come fanno i più degli editori, la caduta di una strofa intermedia, perchè il pensiero dell'indifferenza per le ricchezze di Creso, posposte alla gioia di un amico, *μή μοι γᾶν Πέλοπος* (v. 53), è suggerito, certo, dal pensiero del verso precedente: non doversi sdegnare l'amore d'un povero pecoraio, *ὁ Πρωτεὺς φῶκας καὶ θεὸς ὢν ἔνεμεν.*

Mutata per questa via intonazione, riprende vigore, non mai scomparsa l'idea prima e fondamentale, ed ecco, nel più ampio sviluppo degli esametri, tutto uno sguardo largo, armonico, sereno alla realtà presente, a quel mondo che, con l'accennata ultima strofe elegiaca (1), Dafni vivamente si augurava continuo, preferibile alle terre di Pelope e ai talenti di Creso: quindi, la preghiera al lupo che risparmi il gregge e non assalga il debole, al cane che non dorma mentre pascola solo con un ragazzo, *σὺν παιδί*, alle pecore che non si diano pensiero se e quando l'erba abbia a rinascere. L'antagonista non vuol essere da meno in queste premure, ed ingenuamente ricorda come non si sia lasciato distrarre neppur lui da un'ardita fanciulla, ma abbia proseguito col gregge affidatogli il cammino abituale: troppo al bifolco sta a cuore il suo gregge (vv. 63-71, 72-80).

Dalla stretta osservanza del testo esce la concezione artistica organica, salda, sempre fedele a sè stessa. E nel dialogo introduttivo e nel canto elegiaco e nell'esametrico è la medesima, coerentemente sviluppata. Una cosa sola, e a bella posta, ho tralasciato, la strofe che sarebbe ultima del canto elegiaco

---

per bucoliasti assai più adulti, ad es. nell'id. V), non bisogna però esagerare in tal senso: come si esagererebbe qui accettando l'interpretazione comune e l'autenticità dell'ultima strofe, con grave scapito pel valore del carme. Noi, anzi, facciamo consistere il magistero dell'arte di Teocrito nel saper riflettere, attraverso il motivo convenzionale, viva, piena, distinta la figura dei personaggi. Qualunque sia stato l'autore dell'idillio VIII, seppe sapientemente concepire l'animo dei suoi giovanetti, e di Dafni sopratutto, che canta, inesperto, d'amore, e poi si tradisce, confondendo i finti sentimenti per Milone coi veri sentimenti d'affetto pel compagno, Menalca: gli è che, tanto nell'un caso, quanto nell'altro, di erotico non v'ha che la espressione.

(1) Ultima secondo lo Hermann e secondo diremo più innanzi.

(vv. 57-60), affatto estranea al luogo che occupa. Conservandola, l'armonica visione si rompe e diviene incomprensibile. Qui non hanno nulla che fare le considerazioni d'indole generale sulla forza dell'amore, come non ha nulla che fare un *ἀνήρ*: Menalca non ha coscienza di tutte queste cose, nè certo pensa di essere *γυναικοφίλας*. La necessità di espungere la strofe si impone anche perchè, con questa, Menalca avrebbe un canto di più, mentre, ristabilendo la proporzione, a Dafni, che chiude la prima serie di canti, succede nella seconda Menalca, conforme è verisimile avvenga. Poi, come mai quei sentimenti apparterrebbero a chi ama Milone, e non piuttosto a chi canta la *καλὰ παῖς*? Gli è che la strofe era una cosa fatta, e venne accodata alle altre strofe, dietro il semplice concetto d'amore, senza avvertire il contrasto, senza pensare a quale dei due personaggi essa rimanesse attribuita. La frequenza di questo tema, che più sopra riscontrammo, rende pieno conto dell'interpolazione. La quale si introdusse molto per tempo, se Virgilio potè inspirarvisi (*ecl.* III 80).

Note di epigrafia romana

di G. DE SANCTIS.

I.

La orazione funebre di Turia.

La famosa epigrafe dell'età augustea contenente l'orazione funebre detta in onore della moglie da uno dei proscritti del secondo triumvirato che da lei ripeteva la sua salvezza (*CIL.* VI 1 n. 1527. VI 4 n. 31.670. Bruns *Fontes*[7] n. 126. Dessau *Inscr. Lat. sel.* II 2 n. 8393) fu, come è noto, ampiamente illustrata nel rispetto storico e nel rispetto giuridico da Teodoro Mommsen (" Abhandl. der Berl. Akad. „ 1863 p. 465 segg. = *Juristische Schriften* I p. 393 segg.) (1). Attenendosi ad una ipotesi presen-

(1) V. anche VOLLMER *Laudationum funebrium Romanorum historia et reliquiarum editio* " Jahrb. f. Philol. „ Supplbd. XVIII (1891) p. 491 sgg.

tata già in un assennato ed acuto scritterello da Filippo della Torre (presso Calogerà *Raccolta d'opuscoli* vol. XXVIII Venezia Occhi p. 129 segg.), ritenne il Mommsen di poter dimostrare che l'oratore era Q. Lucrezio Vespillone (o piuttosto Vispillone, cf. Boissevain nella sua ed. di Dione II p. 442 e le *Juristische Schriften* p. 417 n. 1) (1), e la moglie Turia, noti l'uno e l'altra da alcuni passi di Appiano (*b. c.* IV 44), di Valerio Massimo (VI 7, 2) e di Dione (LIV 10, 2); poichè tra i proscritti menzionati dalle fonti, che furono salvi per opera delle consorti, Q. Lucrezio è il solo a cui s'attagli quanto l'epigrafe riferisce. La moglie infatti rimase (stando al documento) in Roma, dove poi ebbe a invocare la clemenza di Lepido. Il marito si salvò avvisato da lei *repentinis nu[nt]iis ad praesentia et imminen[tia vitanda]*; ma non s'allontanò di molto dalla città, se pur se ne allontanò: *ut* (così infatti apostrofa la defunta) *neque audaci[a abripi me] temere passa sis et mod[es]tiora agitanti fida rece[ptacula pararis] sociosque consilior[um t]uorum ad me servandum d[ederis sororem] tuam et virum eius C. Clu[viu]m coniuncto omnium pe-r[iculo]*. Così appunto Vispillone, costretto dalla fame a tornare nella città donde era riuscito a fuggire, fu salvato dalla moglie nascondendolo nella propria casa. Ora degli altri proscritti che ebbero salvezza dalla moglie, come il Mommsen osserva, Anzio, Acilio e Lentulo scamparono in Sicilia. E questo non solo par contrastare con la interpretazione più ovvia della frase citata, ma contraddice anche più palesemente con quel che l'oratore espone nella epigrafe più oltre: che, cioè, graziato da Cesare Ottaviano assente, la moglie non potè ottenere dal triumviro Lepido rimasto in Roma il riconoscimento della grazia concessa dal collega e dovette perciò attendere il ritorno di Cesare. Mentre è chiaro che gli scampati in Sicilia non poterono tornare in patria se non dopo l'accordo di Miseno (39 av. C.); quando Lepido non solo era tanto scaduto d'autorità da non poter certo opporsi alle deliberazioni degli altri triumviri, ma risiedeva in Africa, donde non tornò che nel 36 per quella guerra di Sicilia che ebbe termine con la sua destituzione (cf. Della Torre l. c.). In particolare poi a favore di quell'Acilio di cui fa parola Appiano (l. c.) e che è forse lo stesso M' Aquilio Crasso

(1) V. su di lui la *Prosopographia imperii Romani* II p. 305.

menzionato da Appiano altrove (III 93 seg.) non possono allegarsi certo con O. Hirschfeld (v. oltre) le circostanze della fuga. La moglie infatti non consegnò a lui gli ori e le gemme a modo di viatico come la donna lodata nella nostra orazione (se pure queste righe si riferiscono davvero, come lo Hirschfeld tiene, al 43 av. C.), ma diede i suoi ornamenti come riscatto al soldato che s'era persuaso di lasciar ricomperare al proscritto la vita. Nè più s'adatta alla epigrafe quanto è detto d'Antistio e d'Appuleio, che fuggirono da Roma o dalle residenze loro, quali che fossero, in compagnia delle consorti; dove l'oratore della nostra iscrizione ebbe dalla moglie solo l'avviso di nascondersi. E ciò che è esposto nel documento sulla grazia concessa da Ottaviano assente esclude che si tratti di quel Coponio che Antonio graziò o di T. Vinio, che graziò bensì Ottaviano, ma presente (1).

Senonchè la ipotesi del Mommsen fu generalmente abbandonata dopo la scoperta del nuovo frammento della epigrafe pubblicato dal Vaglieri (" Notizie degli Scavi „ 1898 p. 412 segg.) e illustrato dal Vaglieri stesso e da O. Hirschfeld (" Wiener Studien „ XXIV 1902 p. 233 segg.). Da esso infatti appare chiaro che l'oratore, anzichè rimanere in Roma come Lucrezio Vispillone, fu durante il *bellum civile* in esilio, e da lungi la consorte lo aiutò di denaro e di altri sussidi.

Ma quanto è naturale che questa fosse la prima impressione del benemerito editore del frammento, altrettanto singolare è che essa sia stata poi generalmente condivisa. Il frammento nuovo va collocato, come lo stesso Vaglieri avvertì, a metà circa della epigrafe, sul principio della seconda colonna. Ora nell'ipotesi del Vaglieri vi si parlerebbe già dell'esilio, mentre sui particolari della fuga si torna a parlare nelle linee seguenti. E, ciò che è anche più singolare, negli ultimi versi del frammento le parole ... *rtis hominibus a Milone quoius domus emptione* ... *exul belli civilis occasionibus inrupturum* ... si riferiscono a una irruzione a mano armata di Miloniani prima della morte di Milone, ossia per l'appunto alla sedizione miloniana del 48; chè di Miloniani i quali facessero sedizione vari anni dopo la morte di lui ai tempi del secondo triumvirato come par supporre il

(1) Su tutto ciò cfr. MOMMSEN mem. cit. p. 416 n. 2.

Vaglieri, non potrebbe esser parola, anche se non fosse escluso in realtà dal tenore stesso della iscrizione (*a Milone*), e men che mai di resistenza efficace e, pare, armata opposta ad essi dalla moglie d'un proscritto ([*defen*]*disti domum nostram*). Quanto male ciò si concilî con la ipotesi che già prima di tali parole si accenni ai tempi del secondo triumvirato s'è da altri avvertito; ma non per risolvere la difficoltà, sì soltanto per chiosare col Dessau: *mirum orationem reverti ad a. 706* (48 av. C.) *quo Milo ex exilio reversus et paullo post occisus.*

In realtà questa e la precedente aporia sono facilissime a risolversi. Aveva detto l'oratore al principio della parte conservata della laudazione d'essersi recato in Macedonia, mentre in Africa s'era diretto il marito della cognata C. Cluvio. Si allude qui, come già riconobbero gli editori, ai tempi della guerra civile tra Cesare e Pompeo. Proscritto più tardi dai secondi triumviri, l'oratore aveva prima, al pari di tanti altri di quei proscritti, combattuto tra i Pompeiani contro Cesare. Come aveva fatto anche Q. Lucrezio Vispillone, il quale nel 48 comandava insieme con Minucio Rufo una squadra dell'armata repubblicana di stazione ad Orico, sotto gli ordini di Bibulo (Caes. *b. c.* III 7, 1).

Per l'appunto a questo primo esilio e alla sedizione miloniana avvenuta mentr'esso durava si riferisce il frammento nuovo, che sarà il tempo di allegare con qualche nuovo tentativo di restituzione:

amplissima subsi]dia fugae meae praestitisti, órnamentis
tuis iuvisti me], cum omne aurum margaritaque corpori
tuo detracta trad]idisti mihi et subinde familia nummis, frúctibus
dotis tuae, deceptis a]dversariorum custodibus, apsentiam meam locupletasti,
5 periculis posthab]itis; quod ut conarere virtús tua te hortabatur;
fortuna autem te m]únibat clementiá eorum contra quos ea parabas.
Inter quae nulla indigna v]óx tua est firmitate animí emissa.
Deinde nefariis exo]rtis hominibus á Milone quoius domús emptione
mihi comparaveram, qui] exul belli civilis occásionibus inrupturum
10 sese sperabat, strenuissime defen]disti domum nostram.

Le lacune son tali ed è tanto poco ciceroniano lo stile che i supplementi son proposti in massima, s'intende, per mostrare non ciò che era, ma ciò che poteva essere nella epigrafe e per chia-

rire il senso che va dato secondo me alle frasi (1). — Al v. 2 non accoglierei il supplemento *divenditis* perchè appunto la donna non vendette, ma consegnò al marito gli ornamenti più preziosi. Il v. 3 e il seguente non mi pare voglian dire che in assenza del marito la donna arricchì col risparmio e la cura l'asse familiare, perchè in tal caso non avrebbe senso il [*deceptis a*]*dversariorum custodibus*. Vuol dir dunque che essa al marito fornì schiavi e denari deludendo la sorveglianza degli avversari; e ciò indica ch'egli era lungi e che non riusciva facile comunicare con lui. — I frutti di cui si parla più che i frutti della terra, dei quali, lontano e fornito di denaro, non si sa bene che cosa l'esule avrebbe potuto fare, pare debbano essere quelli della dote o dei beni o di qualcos'altro di simile; una apposizione forse a *nummis*. — La menzione della clemenza (2) *eorum contra quos ea parabas* non bene s'attaglia ai secondi triumviri: nella epigrafe stessa Lepido non è davvero rappresentato come clemente; assai bene invece a Cesare. E inoltre, nascondendo il marito nel 43, la donna non apparecchiava niente contro i triumviri; contribuiva invece alla guerra contro Cesare mandando denari a un Pompeiano nel 49 o nel 48. — Per *exortis* al v. 8 cf. Ter. *Hec.* 632: *a Myrrhina haec sunt mea uxore exorta omnia*. — *Domús* allo stesso verso dovrebbe, avendo l'*apex*, essere acc. plurale; quindi o v'è una certa incongruenza formale col *domum* del v. 10, o l'*apex* è errato, e conviene supplire *mihi comparata erat*. — *Exul* e *inrupturum* paiono riferirsi a Milone, che Cesare, appunto, non aveva graziato. Men facile è che si abbia a supplire, come pur forse si potrebbe: [*cum ego*] *exul belli civilis occasionibus inrupturum repellere non possem*.

Checchè ne sia dei singoli supplementi, la mia congettura ristabilisce, parmi, nella epigrafe l'ordine logico e cronologico; nè vedo contro di essa quale obiezione possa addursi. Può, accettandola, usarsi con assoluta sicurezza delle ultime linee del frammento, per illustrare con un nuovo episodio le turbolenze

---

(1) Debbo qui ringraziare il prof. Taccone che m'ha aiutato in questo tentativo con qualche utile suggerimento. — *Detracta* al v. 3, *deceptis* al 4, *nulla indigna* al v. 7 son degli editori precedenti.

(2) *Clementiá* è ablativo, come mostra l'apice, che, notato nelle " Notizie degli scavi ", non so per quale ragione sia omesso p. e. dal Dessau.

celiane e miloniane del 48 av. C. E son tolte di mezzo le obiezioni più gravi contro l'ipotesi del Della Torre e del Mommsen che nella epigrafe s'abbia a vedere la *laudatio Turiae*. Questo nome lo si può dunque provvisoriamente conservare; per quanto le nostre informazioni circa il secondo triumvirato sono troppo scarse per escludere che ad altri proscritti, a noi ignoti, toccasse suppergiù la sorte di Lucrezio Vispillone. Ma non va taciuto che la frase *cum paene* [*e*]*xule me vita fidissuma permun*[*sisses*] su cui il Mommsen più si fondava per ritenere che l'oratore fosse stato, come Vispillone, non in esilio ma solo in una condizione che era quasi (*paene*) d'esule, deve invece interpretarsi con O. Hirschfeld, riferendo l'ablativo *vita* ad *exule* e non a *fidissuma*, nel senso che egli s'era ridotto presso alla estrema rovina.

II.

Ancora della tavola d'Eraclea.

Le due *Note di epigrafia giuridica* da me edite in questi " Atti „ vol. XLV p. 144 segg. furono entrambe impugnate vivacemente nelle loro conclusioni dal prof. Pais (" Rend. dei Lincei „ ser. V vol. XIX p. 72 segg., vol. XX p. 157 segg.). Già ebbi a ricordare (" Atti „ vol. XLVI p. 727 segg.) che le congetture sul decreto di Cn. Pompeio Strabone contenute nell'una di esse trovarono piena conferma nella scoperta del frammento mancante della epigrafe. Purtroppo non posso addurre una scoperta simile a difesa della seconda di quelle mie note (" Rend. dei Lincei „ ser. V vol. XX p. 157 segg.), dove discorrendo del testo latino conservato nella famosa tavola d'Eraclea proponevo l'ipotesi che sia da tenere come una specie di piccolo *digestum* o *pandectes* di leggi romane redatto a cura degli Eracleoti; raccolta (soggiungevo) assai modesta e limitata a estratti di leggi promulgate di recente e forse soltanto a leggi del dittatore Cesare.

Una tale ipotesi si fonda, avverte il prof. Pais, " su di un grave errore „ (" Rend. „ XX p. 163), tanto da essere inferiore di molto alla ipotesi di Legras, che, se è errata, " è per lo meno razionale „. Essa infatti implicherebbe " che il municipio

stesso di Eraclea si scegliesse quelle leggi che reputava a sè convenienti „, la qual cosa “ è in assoluta opposizione con gli stessi elementi e fondamenti del diritto pubblico romano „ (p. 164). Non è dubbio invece che Eraclea ricevendo la cittadinanza romana “ dovette accettare non quelle leggi che ai cittadini piaceva sceglièrsi, ma . . . quelle che a Roma piacque conferirle „. — Mi viene in sostanza attribuito d'aver detto che un comune romano poteva fissare da sè la propria giurisprudenza. Nonchè dire, non ho mai pensato, ben s'intende, nulla di simile. Ho scritto, ed è tutt'altro, che gli Eracleoti vollero a propria cura incisa ed esposta per uso pratico una raccolta fatta da loro stessi di *excerpta* di leggi romane; di talune cioè tra le più recenti leggi romane “ che avevano maggiore interesse per loro „ (“ Atti „ XLV p. 156); non già, ben inteso, esimendosi dall'osservare le altre.

V'erano bensì leggi romane che in Eraclea non si aveva l'obbligo di osservare nè punto nè poco, quelle concernenti la sola città di Roma. Queste leggi è pur chiarissimo che gli Eracleoti (salvo le disposizioni contenute eventualmente negli statuti municipali) erano a pieno liberi in diritto d'imitarle, *mutatis mutandis*, nei loro regolamenti sulla polizia cittadina, la viabilità o le costruzioni. Ma farei torto al lettore intelligente fermandomi più oltre a chiarire come ciò non ha da vedere nulla con “ la facoltà di fare da se stessi una scelta delle leggi emanate da Roma „ da me secondo il prof. Pais attribuita ad Eraclea, presupponendo in essa una autonomia legislativa incompatibile con la sua condizione di municipio (1).

---

(1) Questo fraintendimento delle mie opinioni non è negli scritti del prof. Pais il solo. Parecchi altri ne sono enumerati nel mio volume *Per la scienza dell'antichità* (Torino 1909) p. 480 segg. V. ivi in specie a p. 528 segg. su quel ch'egli dice nei “ Rend. dei Lincei „ ser. V vol. XVII p. 68 d'una teoria circa le origini del consolato che mi attribuisce, ma che è, in punto di cronologia, diversissima da quella che io tengo, poichè la allega contro l'autenticità dei Fasti consolari. — Entro certi limiti la obiezione che mi fa il prof. Pais potrebbe a buon diritto rivolgersi invece al Nap che, occupandosi della tavola d'Eraclea nelle “ Verhandelinger der Akad. van Wetenschappen „ di Amsterdam afd. Letterkunde XI (1910) n° 4, la ritiene una raccolta di tre leggi Papie del 65 di cui gli Eracleoti si fecero *fundi*: dove non si vede nè perchè gli Eracleoti dovessero farsi *fundi* di quelle leggi, nè perchè esse manchino dei prescritti (il che invece in una specie di

Osservai del resto, d'accordo in ciò col Legras, come nota caratteristica della tavola d'Eraclea è l'accozzamento senza nessun ordine logico delle cose più disparate. Il che non si spiega bene trattandosi d'una legge unica e molto meno d'una legge votata sotto gli auspicî d'un uomo dalla mente lucida come Cesare; si spiega invece agevolmente in una raccolta d'estratti di leggi disposti l'uno accanto all'altro secondo criteri esterni. Ciò secondo il prof. Pais starebbe invece a provare che si tratta di una legge satura; quando sembra al contrario che si dovesse appunto nelle leggi sature, a dissimulare la illegalità, introdurre quanto più era possibile l'apparenza della logica e dell'ordine. Nè deve pretendersi (aggiunge) che Cesare abbia distese e personalmente rivedute tutte le leggi promulgate tra il 47 e il 44. Verissimo; ma è da presumere che abbia rivedute o fatte rivedere da chi fosse in grado di redigerle secondo i suoi criterî quelle precisamente ove si trattava di materie più importanti, come molte leggi della tavola d'Eraclea.

Senonchè " si può forse gettare su Cesare la responsabilità delle gravi mancanze di ordine che si notano ad esempio nel testo della *lex coloniae Iuliae Genetivae*, la quale, come è noto, fu redatta dietro sua iniziativa negli ultimi anni della sua vita? „ Il disordine della *lex coloniae Genetivae* (che del resto non è da paragonare in alcun modo con quello della tavola di Eraclea, trattandovisi soltanto delle norme strettamente legate tra loro, se pur poco ordinate, d'uno statuto locale) non può certo imputarsi a Cesare. Tra l'altro perchè la colonia fu dedotta e la legge promulgata qualche tempo dopo la sua morte; sicchè vi si rispecchia, come ha ben visto il Mommsen, " *perturbatis illis temporibus propriam confusionem actorum dictatoris defuncti consulisque superstitis* „ (*Ges. Schriften* I p. 246). Ed è quindi assai arbitrario dalla redazione che quella legge ha avuto argomen-

digestum d'interesse più che altro pratico. si spiega assai bene); a prescindere dalle difficoltà particolari intorno alla data (per cui rimando al mio articolo precedente) e da altre concernenti la *lex Papia de civitate*. Su queste e in generale sulla ipotesi del Nap v. le assennate osservazioni di M. Besnier " Revue des études anciennes „ XIV (1912) p. 40 segg. La mia ipotesi del resto il Besnier la conosce e la giudica di sulla critica del prof. Pais. È quindi naturale che non si avveda come io ho tentato precisamente con essa di eliminare quelle difficoltà ch'egli adduce contro la teoria del Nap.

tare intorno alla redazione finale delle leggi promulgate da Cesare vivo.

La prova dunque tentata dal prof. Pais che la tavola di Eraclea abbia le caratteristiche d'una *lex satura* e d'una *lex* cesariana riesce affatto insufficiente. Ma anche più manchevole appare la difesa dell'asserto, fondamentale per la sua tesi, che presso i Romani le *leges saturae* furono un poderoso strumento di partito, di uso assai più frequente che non appaia dalle due o tre menzioni della tradizione. Dimostra egli bensì, e ciò non aveva bisogno di dimostrazione, che molte illegalità si commisero in Roma al tempo delle guerre civili. Ma per la specifica irregolarità di cui è parola, rimane in massima nel campo delle supposizioni vaghe o delle valutazioni subiettive. E quando ne esce, come per le leggi Licinie-Sestie, la elezione di Tiberio Gracco, le leggi fatte da Cesare approvare nel decembre 49, non è con vantaggio delle sue ipotesi.

Vediamo. Il primo esempio di *lex satura* che la tradizione ricordi è quello delle tre rogazioni Licinie-Sestie, *de faenore, de modo agri, de plebeio consule*, le quali secondo Livio (VI 39 2) sarebbero state votate per l'appunto in una volta sola. Ma, secondo E. Pais, se nella legge del consolato plebeo vi è “ qualche raro elemento storico „, “ nella legge dei cinquecento iugeri „ invece “ è tutto falso „ (*St. di Roma* I 2 p. XXXIX. 142 seg.), ed essa è in realtà “ di origine recente „. La rogazione *de faenore* poi, non autentica pel 367, non è tale neppure pel 347, quando ricompare: si tratta di disposizioni non anteriori al principio o anche alla fine del III secolo (ibid. p. 144 seg.). Dopo ciò non mi riesce d'intendere come, richiamandosi precisamente a questi suoi giudizi, egli concluda (“ Rend. „ XIX p. 789) che “ nel complesso la tradizione relativa alle leggi Licinie-Sestie pare attendibile „ e l'alleghi a favore delle sue congetture sulle leggi sature. Non si è avveduto probabilmente di avere in tutto e per tutto cambiato idea, come gli è capitato rispetto all'origine del popolo romano-sabello, la quale secondo lui “ non risaliva, nella ipotesi più favorevole, al di là della prima metà del V secolo „ (*St. di Roma* I 2 p. 716): dottrina che ora respinge sdegnosamente protestando contro quelli che gliela attribuiscono (“ Saggi di storia antica in onore di G. Beloch „, p. 94 seg. Cf. questi “ Atti „ XLI p. 729).

" Quanto al periodo dei Gracchi (continua il prof. Pais), le nostre notizie sono più abbondanti e precise. Il partito popolare, come nell'elezione del celebre tribuno, si valse forse con vantaggio di una *lex satura* „ (" Rend. „ XIX p. 790). La sola notizia che abbiamo d'una *lex satura* votata fra il 133 e il 121 è in un frammento di T. Annio Lusco, *in ea quam dixit adversus Ti. Gracchum*, riportato da Festo p. 314: *imperium quod plebes per saturam dederat, id abrogatum est*; notizia la quale non pare, a dir vero, nè abbondante nè precisa. Che essa si riferisca alla elezione del celebre tribuno (come è pur detto dal prof. Pais a p. 788) è opinione, non dirò con lo stesso Pais, " in assoluta contraddizione con gli elementi e fondamenti del diritto pubblico romano „, poichè asserzioni così recise sono a mio avviso da evitare in materie tanto discusse, e giovano solo ad inasprire non a risolvere le controversie; ma certo tale da lasciare perplesso chi sappia che alle elezioni tribunizie non si provvedeva con una *lex*, satura o no, e molto meno con una *lex de imperio*, quando l'autorità tribunizia non era *imperium*, ma *sacrosancta potestas*. Suppone invece il Mommsen (*Staatsrecht* II 1³ p. 634 n. 2, III 1 p. 336 n. 5) che si tratti dell'*imperium* giurisdizionale dei *tresviri agris dandis adsignandis*, di cui si sarebbe impugnata la legalità per la sovrabbondanza della legge che li istituiva. Chi accetti questa ipotesi, che potrà essere incerta, ma non contrasta con " gli elementi e fondamenti del diritto pubblico romano „, dovrà riconoscere che non vi è la più lontana attinenza tra la vera o pretesa sovrabbondanza di cui sarebbe stata accusata la legge Sempronia agraria e la disparatezza delle materie trattate nella tavola d'Eraclea. Chi poi non l'accetti avrà ragione non solo di dubitare di siffatta attinenza, ma persino di sospettare col mio amico prof. Cardinali che il frammento non si riferisca neppure ad avvenimenti dell'età graccana. Non si potrebbe pensare (mi suggerisce acutamente il Cardinali) che Annio (nella sua contesa con Ti. Gracco di cui è parola in Plut. *Tib*. 14 e in Liv. *Per*. 59, ove deve trovar posto l'orazione citata da Festo) prevenisse o ribattesse con quelle parole un argomento che a favore della illegale deposizione d'Ottavio voluta da Tiberio si fosse tratto da qualche magistratura revocata? Egli avrebbe potuto rilevare con esse semplicemente che in qualche anteriore caso particolare di revoca

s'era trattato di *imperium quod plebes per saturam dederat*, di un *imperium* cioè già vulnerato d'illegittimità (1).

Rimangono le leggi fatte approvare da Cesare nel breve periodo di undici giorni in cui fu a Roma come dittatore nel decembre 49. Tra esse ve ne furono secondo E. Pais (" Rend. „ XIX p. 798 seg.): " 1º Una sulla riduzione del valore dei debiti; 2º Un'altra sulla restituzione *in integrum* di tutti quei cittadini che erano stati condannati per la legge *de ambitu* di Pompeo; 3º Una sui figli dei proscritti di Silla „. Si sarà quindi indotti " a sospettare che furono votate per mezzo di leggi sature, ovvero, ciò che vale lo stesso, che le singole leggi approvate nei diversi giorni non si votarono secondo l'esatta osservanza delle norme costituzionali rispetto ai termini di promulgazione, di discussione, di votazione „. — Delle tre leggi è anzitutto da lasciar da parte quella sui figli dei proscritti di Silla. Plutarco (*Caes.* 37) la riferisce sì a questo periodo; ma Dione (XLI 36, 2) e Velleio (II 43, 4) le assegnano tutt'altra data. E, ciò che è più grave, non ne fa parola Cesare (*b. c.* III 1), pur registrando con compiacenza gli atti numerosi ed importanti da lui compiuti in quegli undici giorni. Infirma per di più la testimonianza di Plutarco la confusione che egli fa (l. c.) tra la durata della prima dittatura di Cesare, che fu di circa due mesi (cfr. Groebe presso Drumann *Geschichte Roms* III² p. 735 segg.), e quella della sua permanenza in Roma del decembre 49, che fu di undici giorni. Confusione per cui Plutarco doveva forzatamente attribuire a quegli undici giorni ogni proposta fatta presentare nel corso della dittatura. Rimangono dunque la legge *de aere alieno* e la restituzione dei condannati per ambito. Ma per queste le parole stesse di Cesare escludono assolutamente che sieno state proposte *uno rogatu*, com'era appunto caratteristico delle *leges saturae*. Accennato infatti alla prima legge, egli aggiunge: *itemque praetoribus tribunisque plebis rogationes ad populum ferentibus nonnullos ambitus Pompeia lege damnatos ... restituit*; ossia la restituzione si fece non per mezzo d'una sola legge e molto meno d'una legge che trattasse nel tempo stesso dell'*aes alienum*, ma di singole rogazioni in forma di *privilegia*

(1) La *lex repetundarum* del 123 o 122 mostra soltanto che non era ritenuta legittima una convocazione di comizi *sei quid in saturam feretur* (72).

personali secondo il buon uso costituzionale. Può darsi certo che non tutte le norme costituzionali, specie rispetto agl'intervalli prescritti, fossero in quell'occasione osservate; benchè Cesare dicendo che la *restitutio* avvenne entro gli undici giorni, non esclude punto che le *rogationes* fossero state proposte, come si doveva, un *trinundinum* prima o più. Ma ad ogni modo questi vizi di forma, se vi furono, possono dirsi equivalenti alla saturità delle leggi negli effetti pratici, non certo nel rispetto giuridico, su cui cade appunto la controversia.

Nessun valido argomento giuridico pare dunque che adduca il prof. Pais nè contro la ipotesi del *digestum*, nè a favore di quella della *lex satura*. Gli argomenti tratti da ragioni di pratica e d'opportunità riescono anche meno probanti. Perchè mai, egli domanda, in una specie di *digestum* di leggi romane redatto dagli Eracleoti per loro uso potevano essere norme di polizia municipale concernenti Roma? Perchè, già risposi, tali norme era lecito e naturale che, *mutatis mutandis*, gli Eracleoti si proponessero d'imitarle. Ma " poteva veramente venire in mente agli Eracleoti di prendere a modello l'ordinamento edilizio di Roma? Agli abitanti di Cervetri o di Zagarolo salterebbe oggi in capo di adottare le norme edilizie che in questi giorni di nuovo sviluppo edilizio per Roma va prendendo il municipio capitolino? " (" Rend. " XX p. 165). Non so di Cervetri o di Zagarolo, ma è per l'appunto così, ed è notato anche oggi dagli studiosi di cose municipali: nei piccoli comuni vi è il vezzo d'imitare i grandi: e gli esempi sono tanto noti che non occorre citarli. Come poi vi sono e vi erano cose in cui i comuni minori fanno male ad imitare i maggiori, così vi erano e vi sono cose in cui fanno bene. Ecco per esempio un articolo delle leggi romane di polizia urbana che gli Eracleoti avrebbero potuto far proprio senz'altro: *quae loca publica porticusve publicae . . . sunt erunt . . . nei quis in ieis loceis sive ieis porticibus quid inaedificatum immolitumve habeto* (*tab. Her.* v. 29 segg.).

Come mai però gli Eracleoti avrebbero accolto in quel loro piccolo *digestum* d'alcune tra le più recenti leggi romane " non solo *le* disposizioni in cui si parla del *rex sacrorum*, ma persino *quelle* in cui si accenna al trionfo romano? " (" Rend. " XX p. 166: il corsivo è mio). Accolsero, ben inteso, non già *le* disposizioni in cui si parlava del *rex* o del trionfo, ma *una* delle

tante disposizioni in cui se ne parlava. E basta ricordare quale essa sia per vedere quanto è fuor di luogo il domandare " quale funzione eracleota si sarebbe potuto far corrispondere a quella del trionfo ". Si trattava non d'altro che del permesso d'usare in date occasioni e per determinate persone dei cocchi in tempi e luoghi in cui agli altri erano vietati; e naturalmente nulla toglie che, con le opportune modificazioni, ciò potesse servire di norma anche agli Eracleoti.

La compilazione di questa minuscola raccolta di leggi ad Eraclea, avevo detto, si spiega assai bene tenendo conto della mentalità de' suoi autori, mentalità di Greci, usi ad avere un codice e una rigida custodia delle leggi, e ricordando che secolari abiti mentali non si perdono a un tratto. Ma, lungi dal rispecchiare abiti mentali greci, secondo E. Pais, il fatto stesso che la legge latina di Eraclea è incisa sul rovescio d'un testo più antico mostra come gli Eracleoti " avevano purtroppo appreso come i Romani a valersi, con risparmio di materiale e di tempo, delle tavole di bronzo usate in età anteriori " (p. 167). Avevano bisogno davvero d'apprender ciò dai Romani? O non si hanno della Grecia stessa e delle stesse regioni greche ove era più curata la *νομοφυλακία* iscrizioni opistografe o palimpseste? Farei torto al lettore di questi " Atti " se allegassi le prove d'una verità così nota.

Ma è vano cercar traccie di concetti greci presso gli Eracleoti, poichè Eraclea era divenuta, come si apprende da Strabone, una città barbara (Pais p. 168). Ora Strabone avverte, è vero, che tutta la Magna Grecia circa il principio dell'E. V. si era imbarbarita, fuor di Taranto, Reggio e Napoli (VI p. 253 C: *νυνὶ δὲ πλὴν Τάραντος καὶ Ῥηγίου καὶ Νεαπόλεως ἐκβεβαρβαρῶσθαι συμβέβηκεν ἅπαντα*). Ma anche prendendo questa frase con un rigore che evidentemente non comporta, anche applicandola senz'altro, come in nessun modo si deve, ai tempi di Cesare, potrà trovare ingiustificata la ricerca delle sopravvivenze elleniche in Eraclea solo chi creda possibile che secoli di storia s'annullino in un punto. Ed è questo un modo come un altro d'intendere l'evoluzione storica; ma non è il mio.

Vero è che il prof. Pais ha qualche ragione di ritenere più che non si pensi di solito rapida la latinizzazione della Magna Grecia. Perchè secondo lui a Regio come in molte, se non tutte,

le città federate dell'Italia meridionale già prima della guerra sociale " la cittadinanza romana veniva conseguita da coloro che avevano ottenuto le magistrature municipali e dai loro discendenti „ (*Il conseguimento della cittadinanza romana a Regio e nelle città federate d'Italia*, in " Rend. dei Lincei „ serie V vol. XIX p. 143 segg.). Era cosa fin qui ignota, che egli crede di avere scoperta da un testo di Strabone di cui dà una interpretazione nuova.

Il luogo di Strabone è questo (VI p. 258 C.): *πλὴν εἴτε διὰ ταῦτα τοὔνομα τῇ πόλει γέγονεν, εἴτε διὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πόλεως, ὡς ἂν βασίλειον τῇ Λατίνῃ φωνῇ προσαγορευσάντων Σαυνιτῶν διὰ τὸ τοὺς ἀρχηγέτας αὐτῶν κοινωνῆσαι Ῥωμαίοις τῆς πολιτείας καὶ ἐπὶ πολὺ χρήσασθαι τῇ Λατίνῃ διαλέκτῳ, πάρεστι σκοπεῖν ὁποτέρως ἔχει τἀληθές*. Strabone dunque secondo E. Pais avrebbe dubitato se spiegare il nome di Regio da *ῥήγνυμι* o dal latino *rex*, *regia*. Nell'ultima ipotesi il nome latino glielo avrebbero imposto i magistrati supremi della città (discendenti dalle stirpi sannitiche penetrate in Regio dal sec. IV), che, ricevendo normalmente la cittadinanza romana, avevano preso ad usare la lingua latina. Questa interpretazione è bensì nuova, ma non è altro in realtà che una semplice svista. Nè è ammissibile che i magistrati supremi di Regio fossero per regola Sanniti, nè *ἀρχηγέται* sono mai in Strabone i supremi magistrati o i *primores*, nè può aver mai detto sul serio Strabone che Regio ebbe il suo nome, noto ad Erodoto e a Tucidide, solo dopo iniziate nel III secolo av. Cr. le sue relazioni con Roma (1). Strabone ha voluto dire che i Sanniti (in età, s'intende, remotissima), avendo i loro *ἀρχηγέται*, cioè i loro primi padri o i fondatori delle loro tribù (2), le stesse istituzioni e suppergiù la stessa lingua dei Romani, nominarono la città con voce latina

(1) Esempi d'etimologie anacronistiche non mancano presso gli antichi; ma non è da attribuire un anacronismo sì grave senza assoluta necessità a Strabone, il quale della storia più antica delle colonie greche d'Italia e di Sicilia era largamente informato.

(2) I Prisci Sanniti, come noi potremmo dire, o i Sabelli, cfr. STRAB. V 228: *ἔστι δὲ καὶ παλαιότατον γένος οἱ Σαβῖνοι καὶ αὐτόχθονες· τούτων δ' ἄποικοι Πικεντῖνοί τε καὶ Σαυνῖται, τούτων δὲ Λευκανοί, τούτων δὲ Βρέττιοι*.

Regio (cioè regia) pel suo splendore (1). Vero è che a favore della sua interpretazione allega E. Pais un passo delle *Novelle* 30, 5, dove *ἀρχηγέτης* vorrebbe indicare un magistrato. Ma è anche questa una svista non dissimile dall'altra. Quella novella di Giustiniano istituisce un proconsole di Cappadocia: *καλείσθω δὲ ὁ ταύτης ἡγούμενος τῇ πατρίῳ φωνῇ proconsul Iustinianeus Cappadociae ὥστε καὶ τὸ τῆς ἀρχῆς ἔχειν ἴδιον καὶ τὸν ἀρχηγέτην συνονομάσαι τῷ πράγματι.* L'*ἀρχηγέτης*, come ognuno vede, non è già il magistrato nuovo, ma è Giustiniano, l'autore della nuova istituzione, il cui nome deve comparire in quello della magistratura da lui creata, che è detta appunto *Iustinianea* (2).

Errare è umano, ed io mi guarderò bene dall'usare verso il prof. Pais, per le sviste che ha commesse, la severità che egli ed i suoi amici adoperano verso di me per le sviste che non ho commesse. Ma sarà certo d'accordo con me egli stesso nel riconoscere che non è punto dimostrata una teoria la cui dimostrazione si fonda sopra sviste siffatte.

---

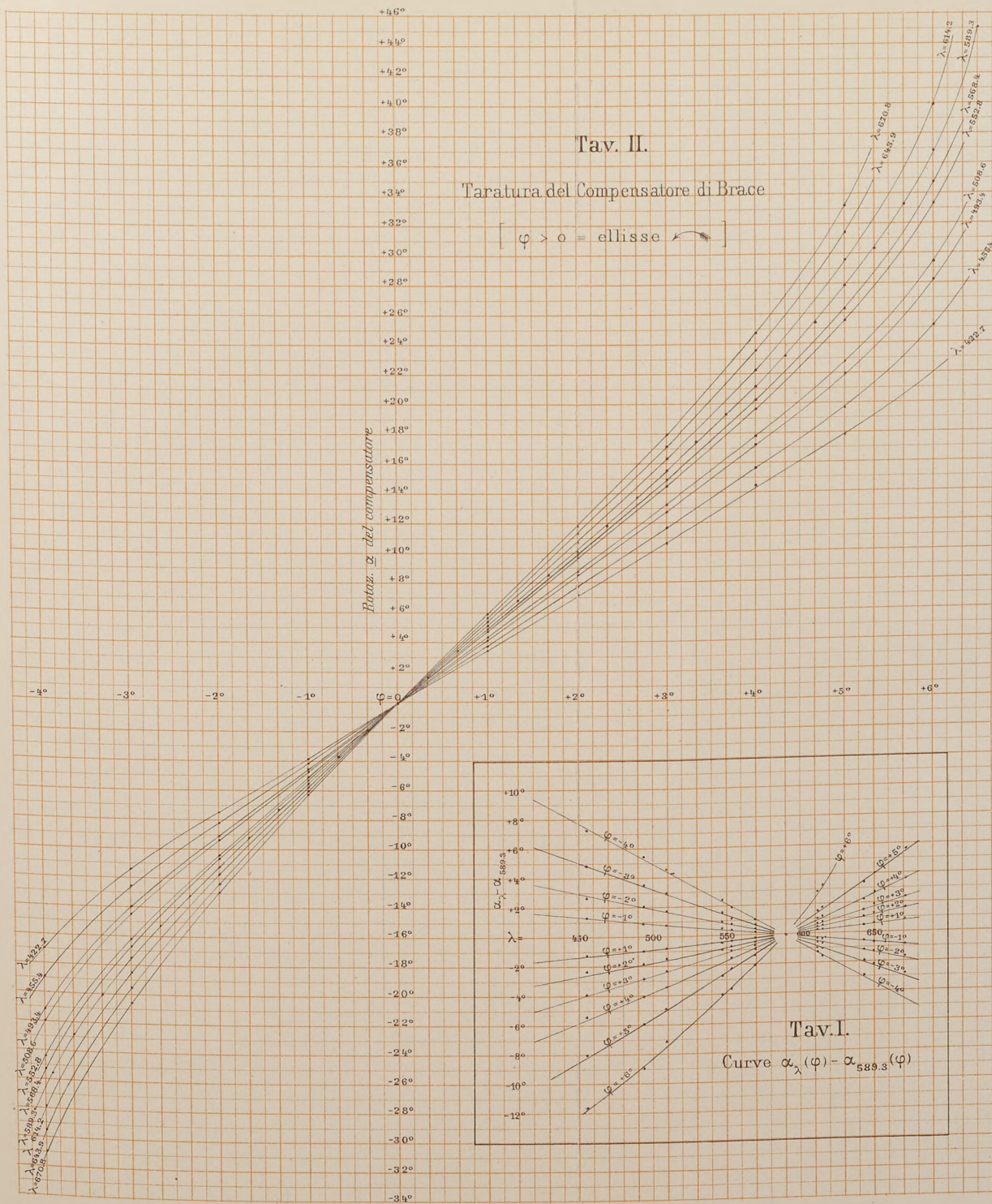
(1) Non è detto nel passo nè esplicitamente nè implicitamente che questi Prisci Sanniti fossero stabiliti in Regio; anche senza di ciò potevano darle il nome, come i Greci p. es. diedero a due città fenicie i nomi di Panormo e di Aspis. — *Κοινωνῆσαι τῆς πολιτείας* non vuol dire punto qui avere la cittadinanza romana, ma solo avere istituzioni simili a quelle dei Romani prisci, e in particolare, poichè si tratta di età assai antica e si vuole spiegare da *regia* il nome di Regio, la monarchia.

(2) Questa interpretazione è giustamente messa innanzi nell'acuto saggio di L. Pareti *Di un luogo straboniano su Regio* (di prossima pubblicazione nell' " Atene e Roma „ 1913), di cui ho potuto consultare le bozze di stampa per cortesia dell'A.; il quale vi fa anche opportune osservazioni sul significato della parola *ἀρχηγέτης*.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Lit. Salussolia-Torino

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Dicembre 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-presidente CAMERANO, il Direttore della Classe NACCARI, ed i Soci: SALVADORI, D'OVIDIO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, FUSARI e SEGRE, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio PARONA.

Viene letto ed approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente comunica che, appunto nella sua qualità di Presidente dell'Accademia, è stato invitato dall'Associazione chimica industriale di Torino a concedere il suo appoggio alle onoranze che si vogliono fare alla memoria di ASCANIO SOBRERO, pel centenario della sua nascita. Il Socio GUARESCHI dà alcuni schiarimenti intorno a queste onoranze, ricordando i grandi meriti del SOBRERO. La Classe è lieta di essere rappresentata dal Presidente in questa manifestazione di onore verso il suo antico illustre Socio.

Il Socio NACCARI, per incarico del Socio GRASSI, comunica che, se la Classe non si oppone, la Memoria del Dr. A. G. ROSSI, *Alcune trasformazioni delle formole su la riflessione e la polariz-*

zazione ed alcune esperienze sulla pressione della luce, presentata nell'adunanza del 17 novembre pei volumi delle *Memorie*, verrebbe invece stampata sotto la responsabilità dello stesso Socio Grassi nel fascicolo degli *Atti*. Non essendovi opposizioni, la proposta resta accolta.

Il Socio Guidi presenta, pure per la stampa negli *Atti*, una sua Nota: *Sul calcolo statico dei serbatoi cilindrici in béton armato.*

LETTURE

Sul calcolo statico dei serbatoi cilindrici in beton armato.

Nota del Socio CAMILLO GUIDI

Il calcolo statico dei serbatoi, per liquidi, a parete cilindrica continua di spessore variabile, ad asse verticale, è notoriamente uno dei quesiti più delicati della scienza delle costruzioni, sia che lo si risolva per via analitica o per via grafica.

Ma se si sostituisce la parete continua con una parete rinforzata da *speroni verticali* e da *anelli orizzontali di cintura*, tipo di costruzione più razionale, e del resto più conforme alle usuali costruzioni in beton armato, le soluzioni grafica ed analitica, con quel grado di approssimazione ormai accettato dalla pratica in costruzioni consimili, si presentano facili ed abbastanza spedite, come ci proponiamo di esporre nella presente Nota.

S'immagini un serbatoio aperto superiormente, a parete cilindrica verticale, costituita da una soletta rinforzata da *n contrafforti*, o *speroni*, o *nervature verticali* equidistanti ed abbastanza vicine e da *anelli orizzontali di cintura*; la parete cilindrica sia solidale col fondo. Lo spessore della soletta e le dimensioni delle nervature verticali si suppongano diverse, per le diverse zone in cui la parete è divisa dagli anelli di cintura.

Un pannello qualunque limitato fra due contrafforti consecutivi e due anelli successivi di cintura può essere riguardato, analogamente a quanto si fa nel calcolo dei solai, come una soletta incastrata al perimetro. Una nervatura verticale, insieme colla striscia di soletta che si giudica contribuisca efficacemente alla sua resistenza alla flessione, può essere considerata come una trave più o meno rigidamente incastrata al piede, ed appoggiata contro appoggi elastici, gli appoggi forniti dagli anelli di cintura.

Sul calcolo delle solette non occorre nuova teoria. Il calcolo degli speroni può essere fatto per via grafica o per via analitica:

Metodo grafico. — Prendendo in esame un contrafforte colla striscia di soletta che gli compete, lo si immagini liberato dagli anelli di cintura, e, prescindendo da ogni altra forza, lo si supponga cimentato da una forza unitaria (per es. 1 tonn.) orizzontale, radiale, diretta in fuori, agente successivamente in corrispondenza dei varî anelli soppressi. Si costruiscano (fig. 1) le corrispondenti linee elastiche, tenendo conto, naturalmente, della variazione di sezione del contrafforte; esse saranno curve pel tratto compreso fra la sezione d'incastro ed il punto d'applicazione della forza unitaria, rettilinee per il resto.

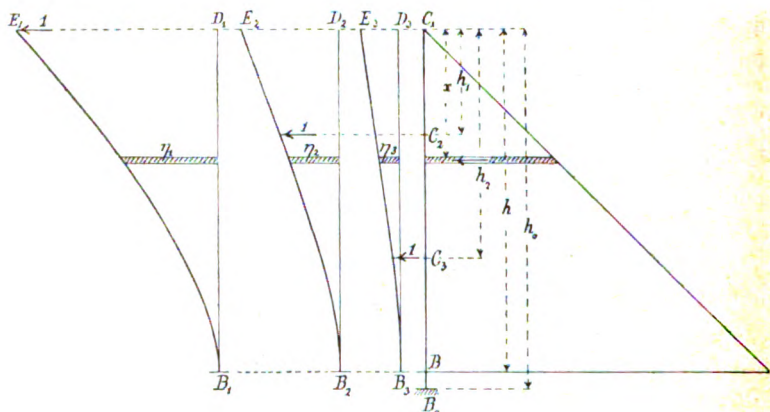



Fig. 1.

Si scrivano ora le equazioni di Maxwell determinatrici delle reazioni fornite dalle nervature anulari. A questo scopo si osservi innanzi tutto che la sollecitazione effettiva del contrafforte è prodotta dalla pressione idrostatica, la cui intensità alla profondità x sotto il livello superiore, che supporremo corrispondere al ciglio superiore del serbatoio, vale $\gamma \frac{\pi d}{n} x$, se γ è il peso dell'unità di volume del liquido, e d il diametro del serbatoio. La pressione elementare vale $\gamma \frac{\pi d}{n} x dx$, e produce uno spostamento del punto C_m, corrispondente all'ennesimo anello di cintura, dato da $\gamma \frac{\pi d}{n} x dx \eta_m$, se η_m è l'ordinata della linea elastica prodotta dalla forza unitaria agente in C_m, letta sulla

linea d'azione della forza elementare $\gamma \frac{\pi d}{n} x\,dx$. Lo spostamento di C_m, che indicheremo con ζ_m, prodotto dalla pressione idrostatica totale è quindi dato dalla

$$\zeta_m = \gamma \frac{\pi d}{n} \int_0^h x\,\eta_m\,dx$$

nella quale *l'integrale rappresenta il momento statico dell'area* $B_m D_m E_m$ *rispetto al livello superiore.*

Il cedimento elastico radiale δ_m che subisce l'emmesimo anello di cintura, di sezione trasversale F_m e di modulo di elasticità E, quando lo s'immagini cimentato, in corrispondenza di ciascun contrafforte dalla suddetta forza unitaria, ricordando che la tensione T' in un poligono di cintura di n lati è dato per tale sollecitazione da

(1) $$T' = \frac{1^t}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = \sim \frac{1^t}{2 \frac{\pi}{n}} \quad \text{(per } n \text{ abbastanza grande)}$$

verrà espresso da

(2) $$\delta_m = \frac{T'}{E F_m}\, r = \frac{1^t\, r}{\frac{2\pi}{n} E F_m}$$

nella quale r rappresenta il raggio del serbatoio.

Indicando da ultimo col solito simbolo $\eta_{m\,i}$ lo spostamento in corrispondenza dell'anello m^{esimo}, prodotto dalla forza unitaria agente in corrispondenza dell'anello i^{esimo}, si avranno, supponendo, ad esempio, che gli anelli di cintura siano tre, le note equazioni di Maxwell determinatrici delle reazioni C sviluppate dagli anelli

(3) $$\left\{\begin{aligned} C_1(\eta_{1.1} + \delta_1) + C_2\,\eta_{2.1} + C_3\,\eta_{3.1} &= \zeta_1 \\ C_1\,\eta_{1.2} + C_2(\eta_{2.2} + \delta_2) + C_3\,\eta_{3.2} &= \zeta_2 \\ C_1\,\eta_{1.3} + C_2\,\eta_{2.3} + C_3(\eta_{3.3} + \delta_3) &= \zeta_3\,. \end{aligned}\right.$$

Trovate le C resta perfettamente determinato il regime statico dei contrafforti e degli anelli di cintura.

Se fosse noto il cedimento elastico dell'incastro al piede, se ne terrebbe conto senza alcuna difficoltà nella costruzione delle linee elastiche ausiliarie; basterebbe assumere come tangenti iniziali. delle dette linee, rette inclinate dell'angolo di rotazione subìto dalla sezione d'incastro. Od anche *basterebbe supporre prolungato virtualmente il contrafforte, oltre la base, di un certo tratto, considerandone poi la nuova estremità inferiore come rigidamente incastrata*; con che verrebbe in qualche modo a tenersi conto anche dell'ampliamento elastico subìto dal perimetro di base del serbatoio.

Metodo analitico. — La determinazione delle ζ e delle η che entrano nelle (3) può essere fatta anche analiticamente, applicando, ad esempio, il teorema delle derivate del lavoro di deformazione.

Espressioni analitiche delle ζ: Supponiamo, per fissare le idee, che il contrafforte sia diviso in tre tronchi $C_1 C_2 = h_1$, $C_2 C_3 = h_2 - h_1$, $C_3 B = h - h_2$ con tre anelli di cintura, passanti rispettivamente pei punti C_1, C_2, C_3. Teniamo conto inoltre di un cedimento elastico della sezione al piede, supponendo il contrafforte prolungato fino in B_0 ad una profondità h_0, raggiungendo ivi un incastro *rigido*. Indicando con J_1, J_2, J rispettivamente i momenti d'inerzia delle sezioni trasversali (supposte costanti) del contrafforte nei tre tronchi h_1, $h_2 - h_1$, $h_0 - h_2$ poniamo:

$$J = \theta_1 J_1 = \theta_2 J_2;$$

poniamo inoltre:

$$h = \frac{h_1}{\mu_1} = \frac{h_2}{\mu_2} = \frac{h_0}{\mu_0}.$$

Supposto il contrafforte cimentato dalla pressione idrostatica, ed inoltre da una forza fittizia P orizzontale radiale applicata in C_1 e trascurando il lavoro di deformazione prodotto dal taglio rispetto a quello prodotto dal momento flettente si ha, adottando i soliti simboli,

$$\zeta_1 = \frac{\partial L}{\partial P} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Per x compreso fra 0 ed h si ha:

$$M = Px + \gamma \frac{\pi d}{n} \frac{x^3}{6}, \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x.$$

Per x compreso fra h ed h_0 si ha:

$$M = Px + \gamma \frac{\pi d}{n} \frac{h^2}{2}\left(x - \frac{2}{3} h\right), \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x,$$

e dovendo annullare nel risultato finale i termini contenenti P, si avrà:

$$\zeta_1 = \frac{\gamma \pi d}{6nEJ}\left(\theta_1 \int_0^{h_1} x^4 dx + \theta_2 \int_{h_1}^{h_2} x^4 dx + \int_{h_2}^{h} x^4 dx + \int_h^{h_0} (3h^2x^2 - 2h^3x)\, dx\right)$$

ossia:

$$\zeta_1 = \frac{\gamma \pi d h^5}{30 n EJ}\left[1 + \mu_1^5 (\theta_1 - \theta_2) + \mu_2^5 (\theta_2 - 1) + 5 \mu_0^2 (\mu_0 - 1)\right].$$

Analogamente, supponendo ora la forza fittizia P applicata in C_2, si ha nel tratto h_1:

$$M = \gamma \frac{\pi d}{n} \frac{x^3}{6} \quad \text{e quindi} \quad \frac{\partial M}{\partial P} = 0,$$

mentre per x compreso fra h_1 ed h risulta

$$M = P(x - h_1) + \gamma \frac{\pi d}{6n} x^3, \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x - h_1$$

e per x compreso fra h ed h_0 si ha:

$$M = P(x - h_1) + \gamma \frac{\pi d}{n} \frac{h^2}{2}\left(x - \frac{2}{3} h\right), \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x - h_1.$$

Dovendo annullare nel risultato finale i termini in P si può scrivere

$$\zeta_2 = \gamma \frac{\pi d}{6nEJ}\left(\theta_2 \int_{h_1}^{h_2} x^3 (x - h_1)\, dx + \int_{h_2}^{h} x^3 (x - h_1)\, dx + \right.$$
$$\left. + \int_h^{h_0} (3h^2 x - 2h^3)(x - h_1)\, dx\right)$$

ossia:

$$\zeta_2 = \gamma \frac{\pi d h^5}{120 n EJ} \Big[4 - \mu_1 (15 - \theta_2 \mu_1^4) + \mu_2^4 (\theta_2 - 1)(4\mu_2 - 5\mu_1) + + 20 \mu_0 \Big\{ 2\mu_1 + \mu_0 \Big(\mu_0 - 1 - \frac{3}{2} \mu_1\Big) \Big\} \Big].$$

Finalmente, supponendo la forza fittizia P applicata in C_3 si ha nel tratto h_2:

$$M = \gamma \frac{\pi d}{n} \frac{x^3}{6}, \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = 0,$$

mentre per x compreso fra h_2 ed h risulta:

$$M = P(x - h_2) + \gamma \frac{\pi d}{6n} x^3, \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x - h_2,$$

e per x compreso fra h ed h_0 si ha:

$$M = P(x - h_2) + \gamma \frac{\pi d}{n} \frac{h^2}{2} \Big(x - \frac{2}{3} h\Big); \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x - h_2 .$$

Dovendo annullare nel risultato finale i termini contenenti P si può scrivere

$$\zeta_3 = \gamma \frac{\pi d}{6 n EJ} \Big(\int_{h_2}^{h} x^3 (x - h_2)\, dx + \int_{h}^{h_0} (3h^2 x - 2h^3)(x - h_2)\, dx\Big).$$

ossia:

$$\zeta_3 = \gamma \frac{\pi d h^5}{120 n EJ} \Big[4 - \mu_2 (15 - \mu_2^4 - 40 \mu_0) + 20 \mu_0^2 \Big(\mu_0 - 1 - \frac{3}{2} \mu_2\Big)\Big].$$

Espressioni analitiche delle η: Analogamente si trova:

$$\eta_{1,1} = \frac{\partial L}{\partial P} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{P}{EJ} \Big[\theta_1 \int_0^{h_1} x^2 dx + \theta_2 \int_{h_1}^{h_2} x^2 dx + \int_{h_2}^{h_0} x^2 dx\Big]$$

e per $P = 1$:

$$\eta_{1,1} = \frac{1 \,.\, h^3}{3 EJ} [\mu_1^3 (\theta_1 - \theta_2) + \mu_2^3 (\theta_2 - 1) + \mu_0^3].$$

Similmente:

$$\eta_{2.2} = \frac{P}{EJ}\left[\theta_2 \int_{h_1}^{h_2} (x - h_1)^2\, dx + \int_{h_1}^{h_0} (x - h_1)^2\, dx\right],$$

ossia:

$$\eta_{2.2} = \frac{1 \,.\, h^3}{3\, EJ} \left[(\mu_2 - \mu_1)^3 (\theta_2 - 1) + (\mu_0 - \mu_1)^3 \right];$$

$$\eta_{3.3} = \frac{P}{EJ} \int_{h_2}^{h_0} (x - h_2)^2\, dx,$$

ossia:

$$\eta_{3.3} = \frac{1 \,.\, h^3}{3\, EJ} (\mu_0 - \mu_2)^3.$$

Si ha poi, indicando con φ_2 la rotazione della sezione C_2 prodotta dalla forza unitaria applicata in C_2 e con φ_3 la rotazione della sezione C_3 per la forza unitaria applicata in C_3,

$$\eta_{1.2} = \eta_{2.2} + \varphi_2 h_1 = \eta_{2.2} + h_1 \left(\frac{1}{EJ_2} \int_{h_1}^{h_2} (x - h_1)\, dx + \frac{1}{EJ} \int_{h_2}^{h_0} (x - h_1)\, dx \right),$$

ossia:

$$\eta_{1.2} = \eta_{2.2} + \frac{1 \,.\, h^3}{2\, EJ} \mu_1 \left[(\mu_2 - \mu_1)^2 (\theta_2 - 1) + (\mu_0 - \mu_1)^2 \right],$$

$$\eta_{1.3} = \eta_{3.3} + \varphi_3 h_2 = \eta_{3.3} + h_2 \frac{1 \,.\, (h_0 - h_2)^2}{2\, EJ},$$

ossia:

$$\eta_{1.3} = \eta_{3.3} + \frac{1 \,.\, h^3}{2\, EJ} \mu_2 (\mu_0 - \mu_2)^2;$$

e finalmente:

$$\eta_{2.3} = \eta_{3.3} + \varphi_3 (h_2 - h_1) = \eta_{3.3} + (h_2 - h_1) \frac{1 \,.\, (h_0 - h_2)^2}{2\, EJ},$$

ossia:

$$\eta_{2.3} = \eta_{3.3} + \frac{1 \,.\, h^3}{2\, EJ} (\mu_2 - \mu_1) (\mu_0 - \mu_2)^2.$$

In un calcolo di progetto, determinato nel modo noto lo spessore della soletta per le diverse zone, convien cominciare coll'attribuire alle reazioni C valori che assicurino una buona distribuzione dei momenti lungo il contrafforte; assegnare in conseguenza le dimensioni approssimate delle nervature verticali, e determinare poi colle (3) i δ, e quindi le dimensioni degli anelli di cintura.

Se il serbatoio fosse interrato e si volesse, per ragioni di economia, fare assegnamento su di una certa frazione della spinta passiva del terreno retrostante, basterebbe ridurre in un certo rapporto le ζ, restando ancora lineare la legge di variazione della spinta contro il contrafforte.

In generale il diametro dell'orlo superiore del serbatoio non subisce variazione sensibile nella deformazione elastica del sistema; talchè può semplificarsi la ricerca prescindendo, nei calcoli statici, dall'anello di cintura superiore.

Esempio numerico. — Consideriamo un serbatoio cilindrico di m. 19,10 di diametro interno e di m. 9 di profondità, rinforzato da 24 contrafforti, con interasse di m. 2,50, e da due anelli di cintura, uno alla profondità di m. 3 sotto il ciglio superiore, e l'altro alla profondità di m. 6. La nervatura del contrafforte per il tratto $h_0 - h_2$ si suppone larga m. 0,40 e sporgente dalla soletta m. 0,60; computandovi insieme una striscia di soletta larga m. 2, spessa m. 0,20 si ha per la sezione del contrafforte:

Area:

$$F = 2 \times 0{,}80 - 1{,}6 \times 0{,}60 = \text{m}^2\ 0{,}64.$$

Distanza del baricentro dal lembo esterno:

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{2 \times 0{,}8^2 - 1{,}60 \times 0{,}60^2}{0{,}64} = \text{m. } 0{,}55.$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse neutro:

$$J = \frac{1}{3}\,(2 \times 0{,}8^3 - 1{,}6 \times 0{,}6^3) - 0{,}64 \times 0{,}55^2 = \text{m}^4\ 0{,}0325.$$

Per il tronco $h_2 - h_1$ la sezione è omotetica con rapporto di omotetia 1,75 : 2 (supponendo che nello stesso rapporto in cui vengono ridotte le dimensioni della nervatura, si riduca

anche la larghezza della striscia utile della soletta, e precisamente a m. 1,75); cosicchè si ha:

$$\theta_2 = \frac{J}{J_2} = \left(\frac{2}{1,75}\right)^4 = 1,706.$$

Inoltre:

$$h = \text{m.}\, 9, \qquad \mu_1 = \frac{1}{3}, \qquad \mu_2 = \frac{2}{3}, \qquad \mu_0 = 1,05,$$

e si ritiene $E = 200\ ^{t}/_{cm^2}$.

Con questi dati si ricava dalle espressioni precedenti:

$$\zeta_2 = \text{cm.}\, 6,098 \qquad \eta_{2.2} = \text{cm.}\, 0,14739$$
$$\zeta_3 = \text{„}\ 2,241 \qquad \eta_{3.3} = \text{„}\ 0,02107$$
$$\eta_{2.3} = \eta_{3.2} = \text{„}\ 0,04855.$$

L'anello superiore di cintura è armato con 10 tondini da 34 mm. di diametro, presenta una sezione di cm² 395 e computandovi insieme 1 metro di soletta si ha in totale una sezione ragguagliata in beton di cm² 2895, e quindi dalla (2) si ricava:

$$\delta_2 = \text{cm.}\, 0,0063.$$

L'anello inferiore di cintura è armato con 12 tondini da 36 mm. di diametro, presenta una sezione di cm² 2630 e computandovi insieme m. 1,50 di soletta si ha in totale una sezione ragguagliata in beton di cm² 6680, e quindi dalla (2) si ricava:

$$\delta_3 = \text{cm.}\, 0,00273.$$

Con tali valori le equazioni di Maxwell divengono:

$$0,1537\, C_2 + 0,0485\, C_3 = 6,098$$
$$0,0485\, C_2 + 0,0238\, C_3 = 2,241$$

dalle quali si ottengono:

$$C_2 = \text{t.}\, 27,91 \qquad C_3 = \text{t.}\, 37,29.$$

Ottenute le reazioni C, risultano note, per mezzo della (1), anche le tensioni degli anelli di cintura, e precisamente:

$$T_2 = \frac{C_2}{2 \cdot \frac{\pi}{n}} = \frac{12 \times 27,91}{3,14} = \text{t. } 106,66$$

$$T_3 = \frac{C_3}{2 \frac{\pi}{n}} = \frac{12 \times 37,29}{3,14} = \text{,, } 142,51$$

alle quali, prescindendo completamente dalla resistenza del beton alla tensione, come pure non computando la resistenza offerta dall'armatura della soletta, corrispondono nei ferri d'armatura degli anelli gli sforzi unitari

$$\sigma_2 = \frac{106,66}{90} = 1,19\ ^{t}/_{cm^2} \qquad \sigma_3 = \frac{142,51}{120} = 1,19\ ^{t}/_{cm^2}.$$

Nella fig. 2 è rappresentato il diagramma del momento flettente che sollecita il contrafforte; è superfluo fermarsi sulle

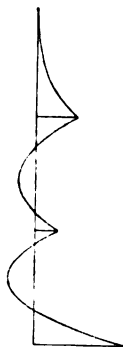



Fig. 2.

modalità della sua armatura metallica e sulla determinazione degli sforzi unitari massimi nel ferro e nel beton.

Torino, Dicembre 1912.

Alcune trasformazioni delle formole su la riflessione e la polarizzazione ed alcune esperienze sulla pressione della luce.

Nota di A. G. ROSSI

I.

1. — Nel corso di certi tentativi diretti alla ricerca di una formola che si prestasse al calcolo della pressione esercitata dalla luce sopra uno specchio trasparente, in quanto si consideri l'azione dovuta a vettori luminosi diversamente orientati rispetto al piano d'incidenza, fui condotto a sperimentare come artifizio analitico, l'introduzione, nella legge ordinaria della rifrazione, di quella specie di elemento critico che è l'incidenza brewsteriana, la quale caratterizza uno “specchio„ identicamente come il suo indice.

Poche leggi della fisica sono così semplici e così prossime alla realtà dei fatti come la legge di Snell, e a nessuno può venire in mente di ricercarne una espressione più immediatamente obbiettiva; ma si può pensare, per analogia con altri casi, che introducendovi esplicitamente gli elementi di un fatto critico, quale è quello che riguarda la legge di Brewster, certi calcoli ulteriori e certe formole particolari possano avvantaggiarsi in quanto a semplicità e funzione rappresentativa.

Se, invece di considerare il rapporto dei *seni*, si assuma il rapporto delle *tangenti* degli angoli d'incidenza e di rifrazione, si ha una grandezza, ovviamente non più costante come è l'indice ordinario, ma funzione crescente o decrescente dell'incidenza secondo che l'indice sia maggiore o minore dell'unità. Questa grandezza ha però un significato fisico abbastanza notevole, poichè rappresenta, come vedremo, il fattore pel quale bisogna moltiplicare il quadrato dell'ampiezza rifratta per ottenere l'intensità. Ho quindi pensato che fosse conveniente isolarla in un simbolo, X, considerandola transitoriamente come variabile indipendente in luogo dell'incidenza. L'introduzione di questo simbolo (o di altro analogo, come $Z = X/n$) nelle formole di

Fresnel-Maxwell, le riduce, come si vedrà, a espressioni notevolmente omogenee.

Sieno difatti: φ l'angolo d'incidenza, χ l'angolo di rifrazione, n l'indice relativo di due mezzi trasparenti isotropi.

Se $n > 1$, a seconda del senso in cui si fa il passaggio per la superficie di separazione, si ha:

$$\operatorname{sen}\varphi = n \operatorname{sen}\chi, \qquad \text{oppure} \qquad n \operatorname{sen}\varphi' = \operatorname{sen}\chi'$$

con $\qquad \varphi > \chi, \qquad\qquad \varphi' < \chi'.$

Consideriamo la funzione:

$$(1) \qquad X = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\chi} = n \frac{\cos\chi}{\cos\varphi}, \quad \text{oppure} \quad X' = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\chi'} = \frac{1}{n} \frac{\cos\chi'}{\cos\varphi'},$$

ove, per l'incidenza brewsteriana (φ), si avrà:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = n, \qquad \operatorname{tg}(\chi) = \frac{1}{n}.$$

La (1) equivale a scrivere, eliminando χ,

$$(2) \qquad X^2 = \frac{n^2 - \operatorname{sen}^2\varphi}{1 - \operatorname{sen}^2\varphi}, \qquad \text{oppure} \qquad X'^2 = \frac{1 - n^2 \operatorname{sen}^2\varphi'}{n^2(1 - \operatorname{sen}^2\varphi')},$$

ovvero infine:

$$(3) \quad X = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad \text{oppure} \quad X' = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\operatorname{tg}^2\varphi'}.$$

Conserveremo più d'ordinario questa forma per la sostituzione X, considerandola sia funzione di n sia di φ.

Si vede subito che X è sempre reale (e positivo), e anzi:

$$X > n > 1.$$

Col crescere di φ da 0 a 90°, X cresce continuamente da n a ∞. Per l'incidenza brewsteriana, $(\varphi) = \operatorname{arc}\operatorname{tg} n$, si ha

$$(X) = n^2.$$

Per la funzione X', che scriveremo, indicando $\frac{1}{n}$ con n',

$$(3') \qquad X' = \sqrt{n'^2 - (1 - n'^2)\operatorname{tg}^2\varphi},$$

si ha invece:

$$X' < n' < 1.$$

Col crescere di φ, X' diminuisce continuamente a partire da n' fino a 0 (per $\varphi = \varphi_0 = \operatorname{arc}\operatorname{tg} n' \sqrt{1 - n'^2}$); per $\varphi > \varphi_0$, X' è

immaginario. Prima di φ_0, si passa pel valore arc tg n' per il quale $(X') = n'^2$.

Le curve dei due diagrammi nella fig. 1, mostrano X funzione di n e di φ.

Nel primo, i due campi X e X' $(n \gtrless 1)$ sono compresi fra l'ordinata 1 e l'ascissa 1, e le curve relative passano con continuità dall'un campo all'altro attraverso il punto comune 11.

Nel secondo, i due campi confinano nella retta orizzontale comune 11.

La curva tratteggiata riunisce i punti corrispondenti alle incidenze brewsteriane, $(X) = n^2$. Non v'ha discontinuità fra il campo X e il campo X', $(n \gtrless 1)$. Per $n > 1$, le curve partono dall'ordinata n e tendono a ∞; per $n < 1$, le curve partono da n e cadono a 0 per $\varphi = \varphi_0 =$ arc sen n = arc tg $n / \sqrt{1 - n^2}$; poi entrano nel campo immaginario.

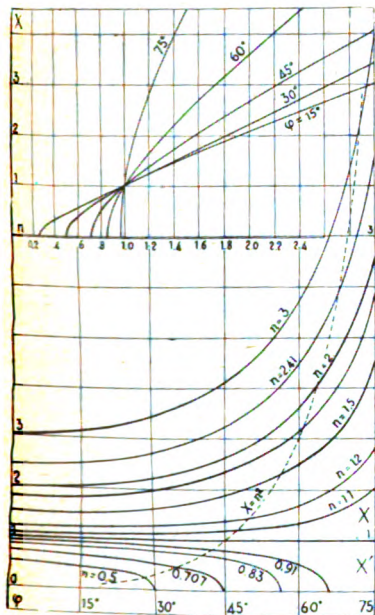



Fig. 1.

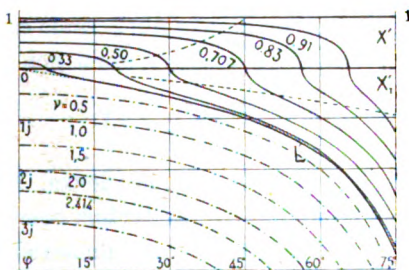



Fig. 2.

In questo campo si ha, con $j = \sqrt{-1}$,

$$(3'') \qquad jX' = \sqrt{(1 - n'^2)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi - n'^2} = \pm X_1'.$$

X_1', a partire da tg $\varphi = n' / \sqrt{1 - n'^2}$, è sempre reale, nel piano immaginario. *Ribaltiamo* questo piano intorno all'asse delle ascisse 0: compariscono, per i varii valori di n', le curve $X_1' = f(\varphi)$, come prosecuzione delle curve X' corrispondenti nel piano reale (fig. 2). Queste curve partono da zero con lo

stesso gradiente col quale vi cadono le curve reali X', e cioè normalmente all'asse delle ascisse 0; poi, crescendo φ, vinto il flesso di passaggio, si avviano con una tendenza assintotica verso l'asse delle ordinate per $\varphi = 90°$; e difatti, la curva limite della schiera, OL, per $n' = 0$, non è altra che quella avente per ordinate $\operatorname{tg} \varphi$.

Le (3) forniscono ora:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{X^2 - n^2}{n^2 - 1}}\ ; \qquad \operatorname{tg} \varphi' = \sqrt{\frac{n'^2 - X'^2}{1 - n'^2}}\ .$$

$$\operatorname{tg}(\varphi \mp \chi) = \frac{\operatorname{sen}(\mp) = \dfrac{\sqrt{(X^2 - n^2)(n^2 - 1)}}{n(X \pm 1)}}{\cos(\mp) = \dfrac{n^2 \pm X}{n(X \pm 1)}} = \frac{\sqrt{(X^2 - n^2)(n^2 - 1)}}{n^2 \pm X}\ .$$

Se la luce passa dal meno al più rifrangente, in queste formole, e in quelle che ne deriveranno, i fattori come $X - 1$, $X^2 - n^2$, $(n^2 - X)$, ... sono positivi e i radicali che li contengono reali.

Invertendo il passaggio della luce, gli stessi fattori si presentano positivamente in $1 - X'$, $n'^2 - X'^2$, $(X' - n'^2)$, ... Le funzioni che ne dipendono rimangono reali in tutto il campo X'; diventano immaginarie nel campo X_1', quando cioè si sostituisca X' con $X_1' j$ ossia con $-jX_1'$. Allora, per es., si ha:

$$1 - X' = 1 + jX_1'\ , \qquad n'^2 - X'^2 = n'^2 - X_1'^2\ , \ldots$$

Invertendo l'incidenza, basterà dunque invertire il senso delle differenze nei fattori come $X - 1$, $n^2 - X$, ... cambiando X in X' ed n in n', finchè sia

$$\operatorname{sen} \varphi < n'\ ;$$

e per $\operatorname{sen} \varphi > n'$, ad X' sostituire $-jX_1'$.

Si vede dunque che *nel campo* X' *si hanno le condizioni per la riflessione parziale, come nel campo* X; *e nel campo* X_1' *si hanno le condizioni per la riflessione totale.*

2. — Allora, se h_i, h_r, h_t indichino rispettivamente i vettori incidente, riflesso, rifratto, con gli indici n, p, a seconda che sieno *normali* o *paralleli* al piano d'incidenza, le formole di

Fresnel-Maxwell in mezzi isotropi trasparenti assumono in funzione di X la forma seguente:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} h_{rn} &= -h_{in}\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\chi)}{\operatorname{sen}(\varphi+\chi)} &&= -h_{in}\frac{X-1}{X+1},\\ h_{rp} &= +h_{ip}\frac{\operatorname{tg}(\varphi-\chi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\chi)} &&= +h_{ip}\frac{n^2-X}{n^2+X},\\ h_{tn} &= +h_{in}\frac{2\operatorname{sen}\chi\cos\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi+\chi)} &&= +h_{in}\frac{2}{X+1},\\ h_{tp} &= +h_{ip}\frac{2\operatorname{sen}\chi\cos\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)} &&= +h_{ip}\frac{2n}{n^2+X}.\end{aligned}\right.$$

Valori particolari dei fattori d'ampiezza, per

(4′)	$\varphi=0$,	$(\varphi)=\operatorname{arc\,tg} n$,	$\varphi=90^\circ$
h_{rn}	$-\frac{n-1}{n+1}$	$-\frac{n^2-1}{n^2+1}$	-1
h_{rp}	$+\frac{n-1}{n+1}$	$+0-$	-1
h_{tn}	$+\frac{2}{n+1}$	$+\frac{2}{n^2+1}$	0
h_{tp}	"	$+\frac{1}{n}$	"

Il vettore h_{rp} ha lo stesso senso del vettore incidente da $\varphi=0$ fino all'incidenza brewsteriana, in cui svanisce. Poi si inverte, ossia acquista un avanzo o un ritardo di π.

Per $n'<1$: le due prime (4) diventano:

$$\frac{h_{rn}}{h_{in}}=\frac{1-X'}{1+X'},\qquad \frac{h_{rp}}{h_{ip}}=(\pm)\frac{X'-n'^2}{X'+n'^2},$$

da $\varphi=0$ fino a $\varphi=\operatorname{arc\,sen} n'$; e cioè, la prima espressione è positiva in tutto il campo X' della riflessione parziale, la seconda rimane positiva soltanto fino a $\varphi=\operatorname{arc\,tg} n'$ e poi diviene negativa: da $\varphi=\operatorname{arc\,tg} n'$ a $\varphi=\operatorname{arc\,sen} n'$, h_{rp} diminuisce da

zero a $-h_{ip}$. Di poi entrambe, da $\varphi = \text{arc sen}\, n'$ a $\varphi = 90°$, divengono immaginarie complesse; nel campo X_1', sono cioè:

$$h_{rn} = h_{in} \frac{1 + jX_1'}{1 - jX_1'}, \qquad h_{rp} = -h_{ip} \frac{-jX_1' - n'^2}{-jX_1' + n'^2},$$

e forniscono col solito metodo le relazioni simboliche della riflessione totale:

$$(4_j) \qquad \begin{cases} \dfrac{h_{rn}}{h_{in}} = \dfrac{1 - X_1'^2}{1 + X_1'^2} + j\, \dfrac{2X_1'}{1 + X_1'^2}, \\[2ex] \dfrac{h_{rp}}{h_{ip}} = \dfrac{n'^4 - X_1'^2}{n'^4 + X_1'^2} + j\, \dfrac{2n'^2 X_1'}{n'^4 + X_1'^2}. \end{cases}$$

Fra i due vettori riflessi si introduce per la riflessione totale una differenza di fase:

$$(4_{jj}) \qquad \begin{cases} \delta_p - \delta_n = \text{arc tg}\, \dfrac{2n'^2 X_1'}{n'^4 - X_1'^2} - \text{arc tg}\, \dfrac{2X_1'}{1 - X_1'^2} \\[2ex] \qquad = 2\, \text{arc tg}\, \dfrac{\dfrac{X_1'}{n'^2} - X_1'}{1 + \dfrac{X_1'^2}{n'^2}} = 2\, \text{arc tg}\, \dfrac{X_1'}{\text{tg}^2 \varphi}, \end{cases}$$

ritardo del vettore h_{rp} sul vettore h_{rn}. Questo ritardo è nullo ai due estremi della riflessione totale, tanto per l'angolo limite $\varphi = \text{arc sen}\, n'$ che rende $X_1' = 0$ quanto per l'incidenza radente $\varphi = \frac{\pi}{2}$; passa per un massimo con l'incidenza:

$$\varphi = \text{arc sen} \sqrt{\frac{2n'^2}{1 + n'^2}} = \text{arc tg} \sqrt{\frac{2n'^2}{1 - n'^2}};$$

Questo massimo della differenza di fase è:

$$(\delta_p - \delta_n)_{\max} = 2\, \text{arc tg}\, \frac{1 - n'^2}{2n'} = 4\, \text{arc tg}\, n'.$$

Donde la possibilità di comporre con i due vettori riflessi totalmente, un vettore ellittico (parallelepipedo-rombo di Fresnel). Notare che per $n \lesseqgtr 2{,}414$, il detto angolo massimo è $\gtreqless \frac{\pi}{2}$.

3. — Dalle (4) si ricavano i significati dei varii fattori che ricorrono in queste formole e nelle seguenti:

$$
(4'')\quad \begin{cases}
\frac{1}{2}(X+1) = \frac{h_{in}}{h_{tn}} = \frac{\text{vettore incidente } normale}{\text{vettore rifratto } normale}, \\
\frac{1}{2}(X-1) = -\frac{h_{rn}}{h_{tn}} = -\frac{\text{vettore riflesso } normale}{\text{vettore rifratto } normale}, \\
\frac{1}{2}(n^2+X) = n\frac{h_{ip}}{h_{tp}} = \frac{\text{vettore incidente } parallelo}{\frac{1}{n}\text{ vettore rifratto } parallelo}, \\
\frac{1}{2}(n^2-X) = n\frac{h_{rp}}{h_{tp}} = \frac{\text{vettore riflesso } parallelo}{\frac{1}{n}\text{ vettore rifratto } parallelo}.
\end{cases}
$$

Queste relazioni, per somma e sottrazione, dànno:

$$(5)\qquad X = \frac{h_{in} - h_{rn}}{h_{tn}} = n\frac{h_{ip} - h_{rp}}{h_{tp}};$$

$$(6)\qquad h_{tn} = h_{in} + h_{rn}; \qquad nh_{tp} = h_{ip} + h_{rp}.$$

Le (5) esprimono che, *normalmente* al piano d'incidenza, X rappresenta il rapporto della differenza fra il vettore incidente e il riflesso al vettore rifratto; *parallelamente* al piano d'incidenza, X è il rapporto della differenza fra vettore incidente e riflesso alla n^a parte del vettore rifratto. Ciò che potrebbe essere *una* definizione della funzione X.

Si ottengono poi le relazioni di Brewster o di Neumann sotto le forme:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\frac{h_{rp}}{h_{rn}} = -\frac{h_{ip}}{h_{in}}\frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)} = -\frac{h_{ip}}{h_{in}}\frac{(n^2-X)(X+1)}{(n^2+X)(X-1)}; \\
\frac{h_{tp}}{h_{tn}} = \frac{h_{ip}}{h_{in}}\frac{1}{\cos(\varphi-\chi)} = \frac{h_{ip}}{h_{in}}\frac{n(X+1)}{n^2+X}.
\end{cases}
$$

$$(8)\qquad \frac{h_{rp}}{h_{rn}} = -\frac{h_{tp}}{h_{tn}}\cos(\varphi+\chi) = -\frac{h_{tp}}{h_{tn}}\frac{n^2-X}{n(X-1)}.$$

E moltiplicando le (5) per le (6) in colonna, si hanno relazioni che riguardano le intensità:

$$(9)\qquad \left| h_t^2 . X = h_i^2 - h_r^2 \right|_{n,p},$$

quali corrispondono al principio di conservazione:

$$| J_t = J_i - J_r |_{n,p} .$$

Queste intensità sono:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{rn} &= J_{in} \left(\frac{X-1}{X+1} \right)^2 = h_{rn}^2 , \\ J_{rp} &= J_{ip} \left(\frac{n^2 - X}{n^2 + X} \right)^2 = h_{rp}^2 , \\ J_{tn} &= J_{in} \frac{4X}{(X+1)^2} = h_{tn}^2 . X , \\ J_{tp} &= J_{ip} \frac{4n^2 X}{(n^2 + X)^2} = h_{tp}^2 . X . \end{aligned} \right.$$

Valori particolari dei fattori delle intensità, per

(10′)

	$\varphi = 0$	$(\varphi) = \text{arc tg } n$	$\varphi = 90^\circ$
J_{rn}	$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = r_o^2$	$\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 = r_n^2$	1
J_{rp}	"	0	"
J_{tn}	$\frac{4n}{(n+1)^2} = t_o^2$	$\frac{4n^2}{(n^2+1)^2} = t_n^2$	0
J_{tp}	"	1	"

In fig. 3 sono tracciate le curve rappresentanti le espressioni (10), in funzione di φ, per $n = 1{,}485$, preso $J_i = 1$.

Siccome le intensità di vettori complanari sono complementari, e cioè

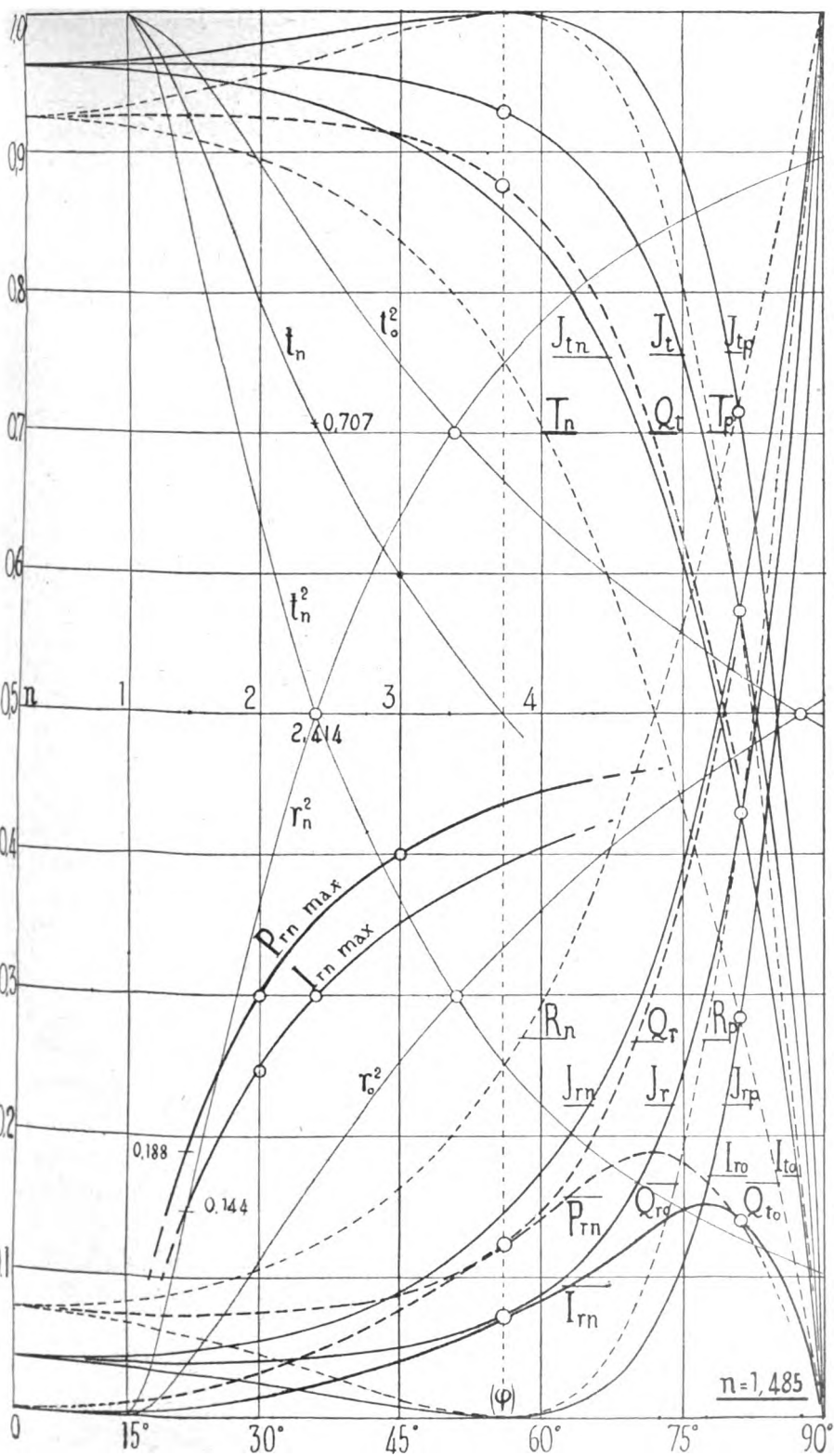
$$[J_r + J_t]_{n,p} = 1 ,$$

le curve relative sono simmetriche rispetto all'orizzontale di ordinata 0,5 (*). Similmente per le curve *medie* J_r ed J_t, tali che

$$J_r = \frac{1}{2} [J_{rn} + J_{rp}] . \qquad J_t = \frac{1}{2} [J_{tn} + J_{tp}] .$$

(*) Ciò non si accorda con quanto rappresenta la fig. 11 del volume II del *Précis d'Optique " publié d'après l'ouvrage de Paul Drude, refondu et complété par Marcel Boll "* (Chap. III, § 11, p. 41, 42). Ma quella figura è evidentemente errata: si può verificare sommariamente che le due curve J_{tn} e J_{tp} ivi tracciate rappresentano i *quadrati* di h_{tn} e h_{tp} e non le grandezze $1 - J_{rn}$ e $1 - J_{rp}$, come dev'essere, indipendentemente da ogni teoria o meccanica o elettromagnetica.

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
15°
30°
45°
60°
75°
90°
n
1
2
3
4
2,414
0,707
0,188
0,144
(φ)
n=1,485

Fig. 8.

e che si può intendere rappresentino le intensità riflessa e rifratta per un incidente $J_o = 1$ polarizzato a 45° col piano dii ncidenza.

Sullo stesso diagramma sono disegnate anche le curve dei valori limiti (10'), r_o^2, t_o^2 ed r_n^2, t_n^2, *in funzione di* n.

Si ha $r_n^2 = t_n^2$ per $n = \sqrt{2} \pm 1$, ed $r_o^2 = t_o^2$ per $n = 3 \pm \sqrt{8} = (\sqrt{2} \pm 1)^2$. A notarsi inoltre che r_n e t_n sono rispettivamente i valori che assumono sen $(\varphi - \chi)$ e cos $(\varphi - \chi)$ per la incidenza brewsteriana (φ). Cosicchè, per tale incidenza, è

$$\operatorname{tg}(\varphi - \chi) \lesseqgtr 1 \text{ a seconda che } n \lesseqgtr 2{,}414.$$

4. — Le (9) e le ultime due (10) mostrano che X *è il fattore pel quale bisogna moltiplicare il quadrato del vettore rifratto per avere la intensità rifratta.* Altra definizione.

Nel linguaggio della teoria meccanica, X rappresenta il rapporto della *massa* di un prisma d'etere contenente l'energia cinetica rifratta alla *massa* del prisma incidente contenente l'uguale energia; e ciò esprime difatti la (1).

Con la teoria elettromagnetica, la stessa grandezza si scrive:

$$X = \frac{\sqrt{K_2} \cos \chi}{\sqrt{K_1} \cos \varphi} . \tag{2'}$$

Se h è il vettore elettrico, $\sqrt{K} . h$ è il vettore magnetico H che gli è normale: $\sqrt{K} h_n = H_p$.

Le (5) dicono allora:

$$(H, h)_{tp} \cos \chi = [(H, h)_{ip} - (H, h)_{rp}] \cos \varphi , \tag{5'}$$

e cioè: la componente, parallela alla superficie riflettente, del vettore rifratto, o magnetico o elettrico, che giace nel piano d'incidenza, uguaglia la differenza delle componenti parallele degli omonimi vettori incidente e riflesso.

E le (6), similmente,

$$(h, H)_{tn} = (h, H)_{in} + (h, H)_{rn} : \tag{6'}$$

il vettore, o elettrico o magnetico, rifratto, normale al piano di incidenza uguaglia la differenza degli omonimi vettori incidente

e riflesso (essendo $({}_{rn})$ di segno contrario a $({}_{in})$). Le due note condizioni di passaggio.

L'energia elettromagnetica nella unità di volume è Kh^2, a meno di un fattore costante. I volumi dei fasci rifratto e incidente, corrispondenti alla unità di tempo, stanno fra loro nel rapporto:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\cos \chi}{n \cos \varphi} = \frac{X}{n^2} = X \frac{K_1}{K_2} .$$

uguale a 1 per l'incidenza brewsteriana. Moltiplicando dunque il quadrato di un vettore h_t rifratto per X,

$$h_{t_n}{}^2 . X = h_{t_n}{}^2 \frac{K_2}{K_1} \frac{r_2}{r_1} ,$$

si ottiene l'energia rifratta riferita a quella incidente in uno stesso tempo . (9) . (10).

La sostituzione X ha dunque un significato fisico-geometrico abbastanza definito, e come tale presenta qualche utilità in parecchi calcoli, semplificandone lo schema. Ma potrebbe anche considerarsi come una specie di indice di rifrazione, definito dalla (1) o (3), variabile con l'incidenza, a seconda del valore di n, in campi reali e immaginarii.

Pertanto *le espressioni dei vettori* (4) *e delle intensità* (10) *si presentano immediatamente sotto forme omogenee a quelle limiti* (4') *e* (10').

Le curve della fig. 3 bis rappresentano le (4) e le (10) *presa come variabile indipendente* X, invece di φ, con $n = 1{,}485$.

Queste curve cominciano realmente all'ascissa $X = n$.

Le ampiezze $({}_r)$ partono rispettivamente da $\pm \frac{n-1}{n+1}$, avviandosi entrambe al valore -1; le ampiezze $({}_t)$ partono entrambe dal valore $\frac{2}{n+1}$ per tendere a 0 con $\varphi = 90^\circ$ o $X = \infty$.

Le curve delle intensità, per $X = n$ partono rispettivamente le $({}_r)$ da $r_0{}^2$ e le $({}_t)$ da $t_0{}^2$; per $X = n^2$, le $({}_p)$ sono tangenti agli assi limiti 0 e 1, quando le $({}_n)$ passano per i valori $r_n{}^2$ e $t_n{}^2$. Inoltre:

$$J_{rn} = J_{tn} = 0{,}5 \text{ con } X = 3 \pm \sqrt{8} ;$$
$$J_{rp} = J_{tp} = 0{,}5 \text{ con } X = n^2 (3 \pm \sqrt{8}).$$

Le espressioni (4) e (10) mostrano che soltanto i vettori e le intensità $(_p)$ contengono esplicitamente n, mentre le grandezze $(_n)$ contengono solo X. Quindi in questo diagramma, le curve J_{rn} e J_{tn} son sempre le stesse qualunque sia n; le curve J_{rp} e J_{tp} invece, col crescere di n da 1 in avanti, si spostano col punto di tangenza $X = n^2$ (incid. brewst.) verso le ascisse crescenti; per $n = 1$ coincidono con le J_{rn} e J_{tn}, e per $n < 1$

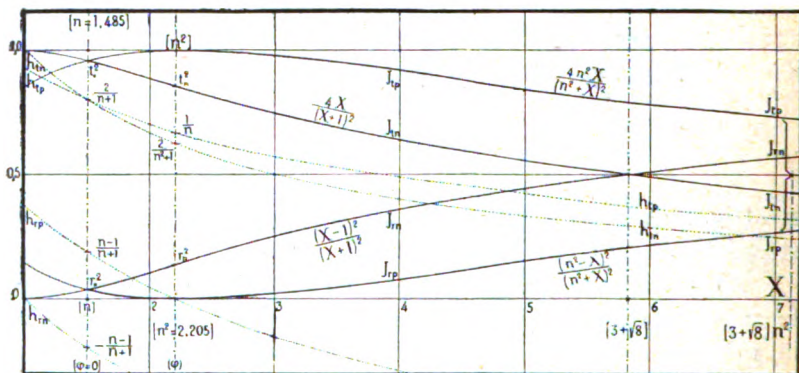



Fig. 3 bis.

se ne distaccano nello stesso verso, riprendendo le stesse forme quando ad n si sostituisca $\frac{1}{n}$. Il diagramma ha lo svantaggio di avere una estremità all'infinito; ma i casi pratici più interessanti ricadono verso l'origine, entro la regione rappresentata in fig. 3 bis.

Si può anche notare che ad una trattazione analoga darebbe luogo la sostituzione

$$(1^*) \qquad Z = \frac{\cos \chi}{\cos \varphi} = \frac{X}{n} = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \mathrm{tg}^2 \varphi}\,.$$

Con questa, tanto le grandezze $(_p)$ come le grandezze $(_n)$ conterrebbero esplicitamente n, e quindi nel diagramma corrispondente entrambe le specie di curve varierebbero con n.

Si hanno allora difatti per i vettori e le intensità le espressioni:

$$(4^*)\quad \begin{cases} h_{rn} = -\dfrac{Zn-1}{Zn+1} \\ h_{rp} = +\dfrac{n-Z}{n+Z} \\ h_{tn} = +\dfrac{2}{Zn+1} \\ h_{tp} = +\dfrac{2}{n+Z}. \end{cases} \qquad (10^*)\quad \begin{cases} J_{rn} = \left(\dfrac{Zn-1}{Zn+1}\right)^2 \\ J_{rp} = \left(\dfrac{n-Z}{n+Z}\right)^2 \\ J_{tn} = \dfrac{4Zn}{(Zn+1)^2} \\ J_{tp} = \dfrac{4Zn}{(n+Z)^2}. \end{cases}$$

Le curve delle intensità partirebbero all'ascissa $Z=1$, $(\varphi=0)$, con gli stessi valori iniziali r_o^2, t_o^2; e tenderebbero agli stessi valori finali con andamenti analoghi ai precedenti. I punti di tangenza delle $(_p)$ con l'orizzontale cadrebbero però più vicini all'origine, avendosi per l'incidenza brewsteriana $Z=n$. Si avrebbe poi $J_{rn}=J_{tn}=0{,}5$ con $Z=\frac{1}{n}(3\pm\sqrt{8})$; e $J_{rp}=J_{tp}=0{,}5$ con $Z=n(3\pm\sqrt{8})$. Etc.

5. — Se invece di un secondo mezzo trasparente si consideri un metallo, fortemente estinguente per alta conduttività, come sarebbe un argento ideale, possiamo ancora trovargli posto nel nostro diagramma, assegnandogli un indice di rifrazione completamente immaginario.

Poniamo per esso:

$$n = j\nu, \qquad j=\sqrt{-1},$$

ove ν sia reale. La forma (3), che indicheremo ora con X_i, diviene:

$$X_i = j\sqrt{\nu^2+(\nu^2+1)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi} = jX_1.$$

ν^2 essendo reale e positivo, X_1 è reale.

$X_i = jX_1$ può trovare la sua rappresentazione nel campo immaginario del diagramma fig. 2. Le curve disegnate a puntilinee al disotto della curva limite $OL = \mathrm{tg}\,\varphi$, rappresentano precisamente la funzione:

$$(3_i)\qquad X_1 = \sqrt{\nu^2+(\nu^2+1)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi} = -jX_i$$

che corrisponderebbe alla riflessione metallica completa. Queste curve, per $\varphi = 0$, partono dal valore ν con gradiente nullo e si avviano con tendenza assintotica verso l'asse delle ordinate per $\varphi = 90^\circ$, analogamente alle curve nello spazio reale del diagramma fig. 1 per $n > 1$ (ma non identicamente, se non per n e ν grandissimi).

Due polarizzati incidenti, $h_{in} = h_{ip} = 1$, dànno due vettori riflessi, secondo le (4),

$$h_{rn} = -\frac{X_i - 1}{X_i + 1} = \frac{1 - jX_1}{1 + jX_1} = \frac{1 - X_1^2 - 2jX_1}{1 + X_1^2},$$

$$h_{rp} = \frac{n^2 - X_i}{n^2 + X_i} = \frac{\nu^2 + jX_1}{\nu^2 - jX_1} = \frac{\nu^4 - X_1^2 + 2j\nu^2 X_1}{\nu^4 + X_1^2},$$

caratterizzati, per rispetto ai vettori incidenti, dai ritardi:

$$\delta_n = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{X_1}, \qquad \delta_p = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{X_1}{\nu^2}.$$

h_{rp} è in ritardo su h_{rn}, poichè la differenza di fase

$$\delta_p - \delta_n = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{X_1^2 - \nu^2}{X_1(\nu^2 + 1)} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{X_1}$$

è positiva. Questo ritardo è nullo per l'incidenza normale, $\varphi = 0$ e diviene π per l'incidenza radente. Assume il valore $\frac{\pi}{2}$ per l'incidenza principale Φ, che corrisponde a:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_p - \delta_n}{2} = 1 \qquad \text{ossia a:} \qquad X_1 = \operatorname{tg}^2 \Phi.$$

Se ne trae l'equazione:

$$\operatorname{tg}^4 \Phi - (\nu^2 + 1) \operatorname{tg}^2 \Phi - \nu^2 = 0$$

che dà il valore positivo:

$$(\Phi) \qquad \operatorname{tg}^2 \Phi = \frac{\nu^2 + 1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\nu^2}{(1 + \nu^2)^2}}\right).$$

I due vettori riflessi si compongono quindi generalmente in un ellittico, che diviene un circolare per l'incidenza principale.

Ciò varrebbe per uno specchio metallico ideale, che riflettesse totalmente tutti i vettori luminosi, pel quale cioè la costante dielettrica K fosse trascurabile rispetto al prodotto della conduttività γ per il periodo della radiazione e si potesse assumere quindi $\nu^2 = 2\gamma T$.

6. — Torniamo ai mezzi trasparenti, per applicare la sostituzione X alle formole riguardanti la *luce naturale*.

Considerando la luce naturale come composta di due polarizzati ortogonali di uguali intensità

$$J_{in} = J_{ip} = \frac{1}{2} J_o ,$$

un fascio naturale incidente J_o dà un riflesso e un rifratto, di intensità proporzionali rispettivamente alla *somma dei poteri riflettenti* e alla *somma dei poteri trasmettenti* superficiali:

$$(11) \quad \begin{cases} J_r = \dfrac{J_o}{2}\left[\left(\dfrac{X-1}{X+1}\right)^2 + \left(\dfrac{n^2-X}{n^2+X}\right)^2\right], \\ J_t = \dfrac{J_o}{2}\left[\dfrac{4X}{(X+1)^2} + \dfrac{4n^2X}{(n^2+X)^2}\right], \end{cases}$$

tali che:

$$J_r + J_t = J_o ;$$

come mostrano le curve della fig. 3, ove $J_o = 1$.

Ciascuno consiste di una parte polarizzata e di una parte naturale:

$$J_r = I_{rn} + I_{ro} , \qquad J_t = I_{tp} + I_{to} .$$

con la condizione:

$$I_{rn} = I_{tp} .$$

Le *differenze dei poteri riflettenti*, o *dei poteri trasmettenti*, della superficie, che rappresentano queste due grandezze,

$$\frac{1}{2}[J_{rn} - J_{rp}] = \frac{J_o}{2}\left[\left(\frac{X-1}{X+1}\right)^2 - \left(\frac{n^2-X}{n^2+X}\right)^2\right] = I_{rn} ,$$

$$\frac{1}{2}[J_{tp} - J_{tn}] = \frac{J_o}{2}\left[\frac{4n^2X}{(n^2+X)^2} - \frac{4X}{(X+1)^2}\right] = I_{tt} ,$$

forniscono indifferentemente:

$$I_{rn} = I_{tp} = J_o \frac{2(n^2-1)X(X^2-n^2)}{(n^2+X)^2 . (X+1)^2},$$

$$(11_1) \qquad = \frac{J_o}{2} \frac{4X}{(X+1)^2} \frac{(n^2-1)(X^2-n^2)}{(n^2+X)^2} = \frac{1}{2} J_{tn} \operatorname{tg}^2(\varphi-\chi),$$

valore della *parte polarizzata comune* nel raggio riflesso ($_n$) e nel raggio rifratto ($_p$).

Le intensità dei quali possono quindi scriversi:

$$(11') \qquad \begin{cases} J_r = J_o \dfrac{2(n^2-1)X(X^2-n^2)}{(n^2+X)^2(X+1)^2} + J_o \left(\dfrac{n^2-X}{n^2+X}\right)^2, \\ J_t = J_o \dfrac{2(n^2-1)X(X^2-n^2)}{(n^2+X)^2(X+1)^2} + J_o \dfrac{4X}{(X+1)^2}. \end{cases}$$

ciò che corrisponde a:

$$(11'')\,(*) \qquad \begin{cases} J_r = \dfrac{1}{2} J_{tn} \operatorname{tg}^2(\varphi-\chi) + J_{rp} = I_{rn} + I_{ro} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \parallel \quad \wedge\!\vee \\ J_t = \dfrac{1}{2} J_{tn} \operatorname{tg}^2(\varphi-\chi) + J_{tn} = I_{tp} + I_{to}. \end{cases}$$

Il primo termine è la parte polarizzata, il secondo la parte naturale.

All'incidenza normale, la parte polarizzata si annulla, ($X = n$), e rimangono i valori dei secondi termini:

$$I_{ro} = J_o \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = J_o r_o^2, \qquad I_{to} = J_o \frac{4n}{(n+1)^2} = J_o t_o^2.$$

All'incidenza brewsteriana: $(X) = n^2$; $\operatorname{tg}^2(\varphi-\chi) = \dfrac{r_n^2}{t_n^2}$;

$$(J_r) = \frac{J_o}{2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2, \qquad (J_t) = \frac{J_o}{2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 + J_o \frac{4n^2}{(n^2+1)^2},$$

ossia:

$$(J_r) = \frac{J_o}{2} r_n^2, \; (J_t) = \frac{J_o}{2} r_n^2 + J_o t_n^2 = J_o\left(1 - \frac{r_n^2}{2}\right) = \frac{J_o}{2}(1+t_n^2).$$

(*) Sommando le (11″) a riprova, si giunge alla seconda delle (7).

7. — La quantità di luce polarizzata I_{rn} non è però massima con l'incidenza brewsteriana, ma con una maggiore.

La condizione per il massimo:

$$\frac{d}{dX}\frac{4X}{(X+1)^2} = \frac{d}{dX}\frac{4n^2X}{(n^2+X)^2},$$

conduce a:

$$- \frac{n^2 - X}{n(X-1)} = \left[\frac{n^2+X}{n(X+1)}\right]^3, \tag{12}$$

che significa:

$$-\cos(\varphi+\chi) = \cos^3(\varphi-\chi)$$

ossia, per le (7) e (8),

$$\frac{h_{rp}}{h_{rn}} : \frac{h_{ip}}{h_{in}} = \left(\frac{h_{tn}}{h_{tp}}\right)^2 : \left(\frac{h_{in}}{h_{ip}}\right)^2.$$

ed ora:

$$\frac{h_{rp}}{h_{rn}} = \left(\frac{h_{tn}}{h_{tp}}\right)^2 = \frac{J_{tn}}{J_{tp}}. \tag{12'}$$

Il segno — dinanzi a $\cos(\varphi+\chi)$ indica appunto che per questa incidenza è

$$X > n^2 \qquad \text{o} \qquad \operatorname{tg}\varphi > n.$$

È facile interpretare la (12') dal punto di vista sperimentale. Se le (11) si considerino rappresentare due fasci uguali con l'azimut di polarizzazione $\pm 45°$, la riflessione fa ruotare il piano di polarizzazione del primo (accostandolo al piano d'incidenza) per un angolo β, la cui tangente è il rapporto delle ampiezze riflesse,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)} = \frac{h_{rp}}{h_{rn}},$$

e la rifrazione fa ruotare il piano di polarizzazione del secondo (allontanandolo dal piano d'incidenza) per un angolo γ, la cui tangente è il rapporto delle ampiezze rifratte,

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{\cos(\varphi-\chi)} = \frac{h_{tp}}{h_{tn}}.$$

La (12′) dice allora che la quantità di luce polarizzata nel raggio riflesso o nel rifratto è massima, quando gli angoli β e γ sieno tali che:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{cotg}^2 \gamma .$$

Ma non si può misurare l'angolo γ, che spetta al raggio trasmesso, se non facendo uso di una lamina.

Svolgendo ora la (12), per trarre l'X corrispondente, si ha:

$$X^4 - (n^2 + 1) X^3 - 6n^2 X^2 - n^2 (n^2 + 1) X + n^4 = 0$$

ossia:

$$(12'') \qquad [X^2 - 2n\tau_1 X + n^2] [X^2 - 2n\tau_2 X + n^2] = 0$$

ove si ponga

$$(12\,a) \qquad \tau_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8t_{,,}^2}}{2t_{,,}} .$$

τ_1 è positivo. τ_2 è negativo. Il secondo trinomio della (12″) non si annulla per alcun valore reale di X. Il primo ha per radici:

$$(12\,b)\ (*) \qquad {}_{,}X = n[\tau_1 \pm \sqrt{\tau_1^2 - 1}] .$$

τ_1 è sempre maggiore di 2. Sul diagramma fig. 4 è tracciata (in punti-linee) la curva $\tau_1 = f(n)$: per $n < 1$ discende da ∞ fino al minimo 2 con $n = 1$, poi col crescere di n, risale verso un andamento rettilineo. Sullo stesso diagramma è tracciata la curva ${}_{,}X$ funzione di n: si tratta di due rami crescenti, partenti da 1 o da 0 secondo il segno del radicale in (12 b). Al ramo ${}_{,}X_{(+)}$ corrispondono punti del diagramma pei quali ${}_{,}X > n^2$ (quelli che cerchiamo quando $n > 1$); al ramo ${}_{,}X_{(-)}$ corrispondono valori ${}_{,}X < n'^2$ quando $n' < 1$. Manterremo dunque il doppio segno nella (12 b) uguagliando ${}_{,}X$ a $\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \varphi}$ per ricavare il valore di $\operatorname{tg} \varphi$ che dà il massimo per la quantità polarizzata nel raggio riflesso. Si giunge alla espressione:

$$(12\,c) \qquad \operatorname{tg}^2 \varphi_{,} = \pm \frac{2n^2}{n^2 - 1} \cdot \sqrt{\tau_1^2 - 1}\, [\tau_1 \pm \sqrt{\tau_1^2 - 1}] =$$

$$= \pm {}_{,}X \frac{t_{,,}}{r_{,,}} \sqrt{\tau_1^2 - 1}$$

(*) Per la trattazione di equazioni come la (12″) e le (17_1), (21), che seguono, si dimostrerebbe più conveniente la sostituzione $Z = X / n$.

ove si prenderanno i segni superiori oppure gli inferiori, affinchè $tg^2\varphi_{\prime}$ sia positivo, a seconda che l'indice sia $n > 1$ oppure $n' < 1$. Nei due casi, τ_1, come r_n^2 e t_n^2, non cambiano, scambiando n in $n' = \frac{1}{n}$. Ma t_n/r_n cambia di segno scambiando n con $1/n$ perchè cambia di segno r_n: come si scorge se dalle relazioni

$$r_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \qquad t_n = \frac{2n}{n^2 + 1}, \qquad (r_n^2 + t_n^2 = 1),$$

si ricavi:

$$n = \frac{1 \pm r_n}{\sqrt{1 - r_n^2}} = \sqrt{\frac{1 \pm r_n}{1 \mp r_n}};$$

e quindi nella (12 c), e in altre espressioni analoghe che troveremo, va conservato il doppio segno per generalizzarle a tutti i valori di $n \gtreqless 1$.

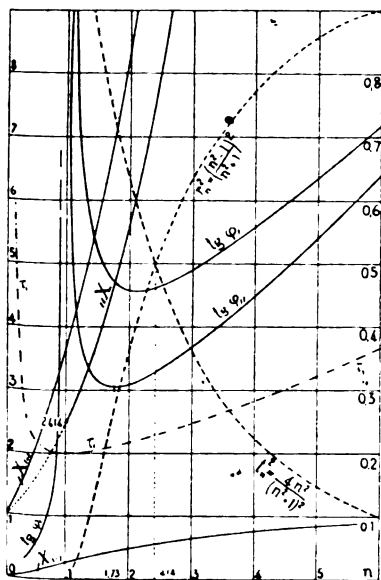



Fig. 4.

Nel diagramma fig. 4 è tracciata la curva di $tg\,\varphi_{\prime}$: cresce da 0 a ∞ quando n' cresce da 0 a 1, e diminuisce da ∞ ad un minimo (4,537 per $n = 2,414$) per poi risalire verso un andamento lineare, quando n cresce da 1 in avanti. Ciò significa che

l'ordinata massima della curva I_{rn} (fig. 3), partendo per $n = 1$ dall'ascissa $\varphi = 90°$ indietreggia fino ad un'ascissa minima arc tg $4,537 = 77°30'$ con $n = 2,414$, per tornar poi ad avanzare verso 90° col crescere di n. Contemporaneamente questa ordinata massima cresce continuamente con n, partendo da zero.

Sostituendo il valore (12 b) nella espressione ordinaria della quantità polarizzata (11_1), se ne ottiene questo valor massimo. A calcoli fatti, si giunge a:

$$(12_1) \quad I_{rn} \max = J_0 \frac{\pm 4n(n^2-1)\sqrt{\tau^2-1}}{(n^2-1)^2 + 12n^2(\tau^2-1)} = J_0 \frac{\pm 2\frac{r_n}{t_n}\sqrt{\tau^2-1}}{\frac{r_n^2}{t_n^2} + 3(\tau^2-1)},$$

ove il doppio segno si può intendere riguardi il fattore (n^2-1), ossia r_n.

Sostituendo $r_n/t_n = \pm\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{\tau^2-4}\,\tau$, si ricava anche, più semplicemente:

$$(12_{II}) \qquad I_{rn} \max = \frac{J_0}{2} \frac{\tau\sqrt{\tau^2-4}}{(\tau^2-1)},$$

funzione crescente di τ (il cui minimo è 2 per $n = 1$), che parte da 0 per $n = 1$, raggiunge il valore 0,144 per $n = 1,485$; il valore 0,205 per $n = 1,732$; il valore 0,299 per $n = 2,414$; il valore 0,352 per $n = 3$, ecc. Come indica la curva relativa tracciata in fig. 3, che parte da 0 con gradiente ∞ e tende per n grandissimo al valore 0,5 con gradiente zero.

8. — Lamina a faccie parallele ($n \gtrless 1$). — Sieno R, T le intensità rispettivamente riflessa e trasmessa per un incidente polarizzato ($_{n}$, $_{p}$) d'intensità $J_i = 1$. Si trova, con le (10) sostituite nella nota espressione di Arago-Verdet,

$$(13) \quad \begin{cases} R_n = \dfrac{2J_{rn}}{1+J_{rn}} = 1 - \dfrac{2X}{1+X^2} = 1 - T_n, \\[2ex] R_p = \dfrac{2J_{rp}}{1+J_{rp}} = 1 - \dfrac{2n^2X}{n^4+X^2} = 1 - T_p. \end{cases}$$

Si può qui notare che la sostituzione $Zn = X$ fornirebbe, più omogeneamente,

$$(13^*)\qquad \begin{cases} R_n = 1 - \dfrac{2Zn}{1 + Z^2 n^2} = 1 - T_n\,, \\ R_p = 1 - \dfrac{2Zn}{n^2 + Z^2} = 1 - T_p\,. \end{cases}$$

In fig. 3 sono tracciate (in punteggiato) anche le curve corrispondenti alle (13), cioè ai *poteri riflettenti* e *trasmettenti* della lamina trasparente. con $n = 1{,}485$.

Valori particolari dei poteri riflettenti e trasmettenti, per:

(13′)	$\varphi = 0$	$(\varphi) = \operatorname{arctg} n$	$\varphi = 90°$
R_n	$\dfrac{(n-1)^2}{n^2+1} = 1 - t_n$	$\dfrac{(n^2-1)^2}{n^4+1} = \dfrac{2r_n^2}{1+r_n^2}$	1
R_p	"	0	"
T_n	$\dfrac{2n}{n^2+1} = t_n$	$\dfrac{2n^2}{n^4+1} = \dfrac{1-r_n^2}{1+r_n^2}$	0
T_p	"	1	"

Se luce naturale cade sulla lamina, $J_{io} = 1$, la luce riflessa e la luce trasmessa contengono ancora parti uguali di luce polarizzata ($_n$, $_p$), più parti diverse di luce naturale.

La quantità polarizzata ($_n$) che è nel raggio riflesso, è la semidifferenza dei poteri riflettenti:

$$P_{rn} = \frac{1}{2}\,(R_n - R_p) = \frac{n^2 X}{n^4 + X^2} - \frac{X}{X^2 + 1}\,,$$

ed uguaglia la quantità polarizzata ($_p$) nel raggio trasmesso:

$$(14)\qquad P_{tp} = \frac{1}{2}\,(T_p - T_n) = \frac{(n^2-1)(X^2-n^2)X}{(n^4+X^2)(X^2+1)}\,.$$

Ora, di una intensità incidente $J_{io} = 1$, la lamina dà una intensità riflessa e una intensità trasmessa:

$$Q_r = \frac{1}{2}\,(R_n + R_p)\,, \qquad Q_t = \frac{1}{2}\,(T_n + T_p)\,.$$

tali che:

$$Q_r + Q_t = 1.$$

E con le (13) si trova:

$$Q_r = 1 - \frac{(n^2+1)X(X^2+n^2)}{(n^4+X^2)(X^2+1)} = 1 - Q_t. \tag{15}$$

E quindi si scriverà:

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} Q_r &= P_{rn} + (Q_r - P_{rn}) = P_{rn} + Q_{ro} \\ &= \frac{(n^2-1)(X^2-n^2)X}{(n^4+X^2)(X^2+1)} + \frac{(n^2-X)^2}{n^4+X^2}. \\ Q_t &= P_{tp} + (Q_t - P_{tp}) = P_t + Q_{to} \\ &= \frac{(n^2-1)(X^2-n^2)X}{(n^4+X^2)(X^2+1)} + \frac{2X}{X^2+1}. \end{aligned} \right.$$

Ciò che significa, analogamente alle (11''),

$$(16')\quad \left\{ \begin{aligned} Q_r &= \frac{1}{2} T_n(1+T_p)\,\mathrm{tg}^2(\varphi-\chi) + R_p = P_{rn} + Q_{ro}. \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \parallel \qquad \wedge\!\vee \\ Q_t &= \frac{1}{2} T_n(1+T_p)\,\mathrm{tg}^2(\varphi-\chi) + T_n = P_{tp} + Q_{to}. \end{aligned} \right.$$

Sommando, a riprova, queste due espressioni, ciò che dà $Q_r + Q_t = 1$, si giunge a:

$$\frac{T_p}{T_n} = 1 + (1+T_p)\,\mathrm{tg}^2(\varphi-\chi), \tag{16''}$$

che è la relazione corrispondente, per la lamina, alla seconda delle (7) di Neumann, e che si può anche scrivere:

$$\frac{T_p}{T_n} = \frac{1+\mathrm{tg}^2(\varphi-\chi)}{1+T_n\,\mathrm{tg}^2(\varphi-\chi)}. \tag{16'''}$$

Si può notare che questo rapporto tende a $1+\mathrm{tg}^2(\varphi-\chi)$ per T_n tendente a zero con T_p, cioè per $\varphi = 90^\circ$, e allora χ è l'angolo limite, e si ha $T_n\, T_p = \mathrm{sen}^2\chi$.

Il primo termine delle (16) o (16') è la parte polarizzata, il secondo la parte naturale. Vedasi la fig. 3.

All'incidenza normale, $X = n$, la parte polarizzata comune scompare e restano le intensità riflessa e rifratta naturali

$$Q_{ro} = 1 - t_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+1}, \qquad Q_{to} = t_n = \frac{2n}{n^2+1}.$$

All'incidenza brewsteriana, $(X)=n^2$, il riflesso è polarizzato totalmente ($_n$), il rifratto sempre parzialmente ($_p$):

$$(Q_r)=(P_{rn})=\frac{r_n^2}{1+r_n^2}=\frac{1}{2}\frac{(n^2-1)^2}{n^4+1}.$$

$$(Q_t)=(P_{tp})+(Q_{to})=\frac{r_n^2}{1+r_n^2}+\frac{t_n^2}{1+r_n^2}=\frac{1}{1+r_n^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(n^2-1)^2}{n^4+1}+\frac{2n^2}{n^4+1}=\frac{1}{2}\frac{(n^2+1)^2}{n^4+1}.$$

9. — La quantità di luce polarizzata P_{rn} nel raggio riflesso è però massima per una incidenza maggiore di arc tg$n$. Questa incidenza corrisponde al massimo della differenza dei poteri riflettenti, cioè a

$$\frac{d}{dX}\frac{2n^2X}{n^4+X^2}=\frac{d}{dX}\frac{2X}{X^2+1}.$$

Se né deduce una relazione di condizione, analoga alla (12),

$$(17)\qquad -\frac{n^4-X^2}{X^2-1}=\left[\frac{n^4+X^2}{n(X^2+1)}\right]^2$$

che equivale a

$$-\cos(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)=\frac{1}{4}\left[\frac{\text{sen}^2 2\varphi+\text{sen}^2 2\chi}{\text{sen}^2(\varphi+\chi)+\text{sen}^2(\varphi-\chi)}\right]^2.$$

E notando che

$$1\pm T_p=\frac{2\,\text{tg}^2(\varphi\pm\chi)}{\text{tg}^2(\varphi+\chi)+\text{tg}^2(\varphi-\chi)},$$

la (16'') diviene:

$$(16''')\qquad \frac{T_p}{T_n}=4\,\frac{\text{sen}^2(\varphi+\chi)+\text{sen}^2(\varphi-\chi)}{\text{sen}^2 2\varphi+\text{sen}^2 2\chi};$$

e quindi la (17) significa:

$$\left(\frac{T_n}{T_p}\right)^2=-\cos(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)$$

ossia:

$$(17')\qquad \left(\frac{T_n}{T_p}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2(\varphi-\chi)}=\frac{h'_{rp}}{h'_{rn}}=\text{tg}\,\beta',$$

che s'interpreta identicamente alla (12') con la condizione sperimentale tg $\beta'=\text{cotg}^2\gamma'$.

Finalmente, la (17) fornisce l'equazione:

$$(17_1)\quad [X^2-(n^2+1)X-n^2][X^2+(n^2+1)X-n^2][X^2+n^2]=0.$$

Siccome è sempre $X^2+n^2>0$, ciascuno dei trinomi uguagliato a zero, oppure il loro prodotto, forniscono indifferentemente

$$(17'')\qquad {}_{\prime\prime}X^2 = n^2+\frac{1}{2}(n^2+1)^2[1\pm\sqrt{1+t_n^2}].$$
$$= n^2+2n^2\,\frac{1\pm\sqrt{1+t_n^2}}{t_n^2}.$$

Preso il radicale col segno $+$ affinchè almeno sia ${}_{\prime\prime}X^2>n^2$, ed uguagliato alla (3), si ricava

$$(18)\qquad \operatorname{tg}^2\varphi_{\prime\prime}=\frac{2n^2}{n^2-1}\cdot\frac{1+\sqrt{1+t_n^2}}{t_n^2}=n\,\frac{1+\sqrt{1+t_n^2}}{r_n\,t_n},$$

incidenza cui corrisponde il massimo della differenza dei poteri riflettenti della lamina per vettori ($_n$) e per vettori ($_p$).

Questa $\operatorname{tg}\varphi_{\prime\prime}$ è sempre maggiore di n. S'intende che qui consideriamo il solo caso $n>1$.

Sul diagramma fig. 4 è disegnato l'andamento di $\operatorname{tg}\varphi_{\prime\prime}$ in funzione di n, rispetto all'asse delle ordinate di sinistra. La curva è analoga alla precedente di $\operatorname{tg}\varphi_{\prime}$ e le si mantiene inferiore: per $n>1$, discende da ∞, ($n=1$), verso un minimo uguale a 3 per $n=\sqrt{3}$, e poi risale avviandosi verso un andamento rettilineo per n molto grande. Ciò significa che l'*ordinata massima* della curva P_{rn} (fig. 3), partendo per $n=1$ dall'ascissa $\varphi=90^\circ$ si sposta fino ad un'ascissa minima, arc tg $3=71^\circ 35'$ per $n=1{,}732$, per poi tornare a spostarsi verso 90° col crescere di n.

Il valore di

$$(17')\quad {}_{\prime\prime}X=\frac{1}{2}(n^2+1)[1+\sqrt{1+t_n^2}]=n\,\frac{1+\sqrt{1+t_n^2}}{t_n}=r_n\operatorname{tg}^2\varphi_{\prime\prime}$$

invece cresce continuamente e rapidamente, col crescere di n, a partire dal valore 2.414 per $n=1$; la linea però tende verso l'ordinata 1 quando n diminuisce da 1 a zero.

Sostituendo ora il valore (17″) di $_{,,}X$ nella espressione (14) di $P_{rn} = P_{tp}$, si ottiene il valor massimo della quantità pola-

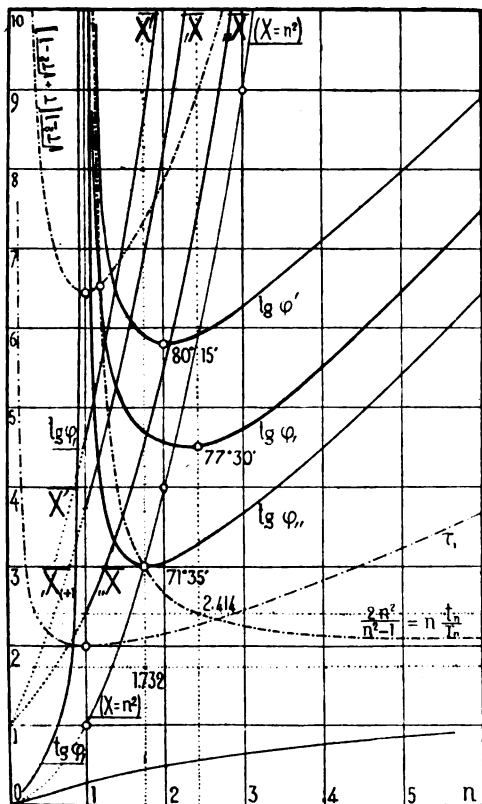



Fig. 4 bis.

rizzata che la lamina può riflettere da luce naturale, con l'incidenza $\varphi_{,,}$. Questo valore non è altro, a calcoli fatti, che

$$(14') \qquad (P_{rn})_{\max} = \frac{1}{2}\, r_n = \frac{1}{2}\, \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1},$$

cioè vale numericamente la metà grandezza del vettore riflesso *superficialmente* per l'incidenza brewsteriana da un vettore incidente normale al piano d'incidenza. Questo valore è sempre

maggiore di $\frac{1}{2}(n^2-1)^2(n^4+1)$, cui si riduce il potere riflettente della lamina per $\varphi = \text{arc}\,\text{tg}\, n$.

In fig. 3 si vede che la curva di P_{rn} *max* funzione di n, è analoga a quella di I_{rn} *max* e le è superiore, tendendo per n molto grande al valore 0,5. Allo stesso valore 0,5 tende notoriamente, salvo l'assorbimento, l'intensità (Q_t) rifratta dopo un gran numero di lamine parallele, polarizzata $(_p)$, con l'incidenza (φ).

10. — La lamina riflette, a parità d'incidenza, maggior luce che la superficie semplice: la curva Q_r è totalmente superiore alla J_r (fig. 3).

Ma il *rapporto delle quantità polarizzate* riflesse non procede sempre del pari.

Interessa notare come varia con l'incidenza il rapporto

$$(19)\qquad \frac{P_{rn}}{I_{rn}} = \frac{1}{2}\frac{(n^2+X)^2(X+1)^2}{(n^4+X^2)(X^2+1)} = \frac{1}{2}(1+T_p)(1+T_n).$$

Esso definisce la quantità polarizzata $(_n)$ dovuta alla serie delle riflessioni multiple sulle due faccie della lamina, presa come unità quella riflessa da una sola faccia, la prima.

Le grandezze T_p e T_n partono *ugualmente* dal valore t_n per $\varphi = 0$, e raggiungono lo zero con diversi andamenti per $\varphi = 90°$. Il detto rapporto vale all'origine, $(X = n)$,

$$\frac{1}{2}(1+t_n)^2 = \frac{1}{2}\frac{(n+1)^4}{(n^2+1)^2} < 2,$$

(nel nostro caso, fig. 3, vale 1,855): per l'incidenza brewsteriana, $(X = n^2)$, vale

$$\frac{2}{2-t_n^2} = \frac{(n^2+1)^2}{n^4+1},$$

(nel nostro caso, 1,752); diviene uguale a *uno* ove le due curve P_{rn} e I_{rn} si tagliano, e infine tende al valore 0,5 per $\varphi = 90°$, ove T_p e T_n si annullano.

Ciò significa che per una gran parte del quadrante d'incidenza la lamina riflette più luce polarizzata che la superficie semplice, ma finisce col rifletterne meno dopo una certa incidenza, facile a trovarsi.

Uguagliando le espressioni (11_I) e (14), si trova per il punto d' intersezione delle due curve P_{rn} e I_{rn}, una qualunque delle condizioni seguenti (che corrispondono a certe altre intersezioni, rintracciabili in fig. 3):

$$
\begin{aligned}
&T_p = J_{rn}, \quad R_p = J_{tn}, \\
(20) \qquad &T_n = J_{rp}, \quad R_n = J_{tp}.
\end{aligned}
$$

Ciascuna delle quali conduce all'equazione

$$(21) \qquad [X'^2 - 2n\theta' X' + n^2]\,[X''^2 - 2n\theta'' X'' + n^2] = 0$$

ove si è posto:

$$\theta_{\prime\prime}{}' = \frac{1 \pm t_n \sqrt{2}}{t_n}.$$

$\theta' > 2{,}414$ per n qualunque; $\theta'' < 0$ per $n < 2{,}414$; $\theta'' < 1$ per $n < 4{,}370$.

Se ne ricava X' e l'incidenza corrispondente φ':

$$(21') \qquad X' = n[\theta' \pm \sqrt{\theta'^2 - 1}],$$

$$X'^2 = n^2 \pm 2n^2 \sqrt{\theta'^2 - 1}\,[\theta' \pm \sqrt{\theta'^2 - 1}];$$

$$(21'') \quad \mathrm{tg}^2\varphi' = \pm \frac{2n^2}{n^2 - 1} \cdot \sqrt{\theta'^2 - 1}\,[\theta' \pm \sqrt{\theta'^2 - 1}] = \pm X' \frac{t_n}{r_n} \sqrt{\theta'^2 - 1},$$

ove, come al solito, si prenderanno i segni superiori oppure gli inferiori, affinchè tg^2 sia positivo, secondo che sia $n \gtrless 1$. Con $n = 1{,}485$ si ha $\varphi' = 81°$, (fig. 3).

Questa $\mathrm{tg}\,\varphi'$ ha, in funzione di n, un andamento analogo a quello di $\mathrm{tg}\,\varphi_{\prime}$ e $\mathrm{tg}\,\varphi_{\prime\prime}$, quali si vedono in fig. 4 bis; e cioè, la sua ordinata cade da ∞ (per $n = 1$) verso un minimo, per poi risalire più lentamente col crescere di n. Il minimo di φ' ha luogo per $n = 2$, ed è $\mathrm{arctg}\, 5{,}804 = 80° 15'$. Vuol dire che l'ascissa dell' intersezione di P_{rn} con I_{rn} (fig. 3), diminuisce da 90° a 80° 15' quando n cresce da 1 a 2, per avanzare poi di nuovo verso 90° per $n > 2$. Corrisponde a questo minimo di φ' un determinato valore della ordinata d' intersezione $P_{rn} = I_{rn}$, che si trova sostituendo le (21') nella (14):

$$(P_{rn})' = \frac{2n(n^2 - 1)\sqrt{\theta^2 - 1}}{(n^4 - 1)^2 + 4n^2\theta^2} = r_n \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{2} + t_n)^2 - 1}}{(\sqrt{2} + t_n)^2}.$$

E con $n = 2$: $\qquad t_n = \frac{4}{5}, \; r_n = \frac{3}{5}$:

$$(P_{rn})_2' = 3 \frac{\sqrt{(5\sqrt{2}+4)^2 - 5^2}}{(5\sqrt{2}+4)^2} = \frac{2,414}{10} .$$

Questo valore è minore del massimo corrispondente di P_{rn} per $n = 2$, che sarebbe $\frac{1}{2} r_n = \frac{3}{10}$, e differisce di poco dal massimo di I_{rn} che sarebbe 0,247: il punto d'intersezione delle due curve cade allora cioè press'a poco sul vertice di I_{rn}: altrimenti cade sempre a destra.

Riguardo alla *superficie semplice*, notiamo ancora che la condizione

$$J_r = J_t , \tag{22}$$

(intersezione sull'asse 0,5 fig. 3), coinvolge anche:

$$J_{rn} = J_{tp}, \; J_{tn} = J_{rp}; \quad (I_{ro} = I_{to}). \tag{22'}$$

E riguardo alla *lamina*: la condizione

$$Q_r = Q_t , \tag{23}$$

(intersezione sull'asse 0,5), coinvolge:

$$T_n = R_p, \; R_n = T_p; \; (Q_{ro} = Q_{to}). \tag{23'}$$

Vale per entrambi i casi, l'equazione stessa (21), ove però si ponga: per la superficie semplice,

$$\theta_{\prime\prime}' = \frac{1 \pm 2t_n}{t_n}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta' > 3 \text{ per } n \text{ qualunque,} \\ \theta'' < 0 \text{ per } n \gtrless 2 \mp \sqrt{3}; \end{array} \right. \tag{22''}$$

e per la lamina,

$$\theta_{\prime\prime}' = \frac{1 \pm t_n}{t_n} = \frac{(n \pm 1)^2}{2n}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta' > 1 \\ \theta'' > 0 . \end{array} \right. \tag{23''}$$

Con le corrispondenti incidenze, la superficie e la lamina dànno una *intensità trasmessa uguale alla intensità riflessa* (0,5 se

l'intensità naturale incidente sia 1). Ne viene che i due raggi riflesso e trasmesso contengono ora anche una stessa quantità naturale in miscuglio con la parte comune polarizzata.

Invece delle (11″) e (16′), si ha ora:

$$\begin{array}{ccccc} J_r = I_{rn} + I_{ro} & & Q_r = P_{rn} + Q_{ro} \\ \| \quad \| \quad < \| & & \| \quad \| \quad < \| \\ J_t = I_{tp} + I_{to}, & & Q_t = P_{tp} + Q_{to}. \end{array}$$

La parte naturale è però sempre maggiore della parte polarizzata.

Con le (22″) e (23″) introdotte nella (21), si trova: la quantità polarizzata riflessa dalla superficie semplice per luce naturale incidente:

$$(22_I)\quad (I_{rn}) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(\theta'+1)(\theta'-3)}}{\theta'} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(1+3t_n)(1-t_n)}}{1+2t_n} = \frac{\sqrt{1-t_o^4}}{2+t_o^2};$$

e la quantità naturale, identica in entrambi i raggi riflesso e trasmesso:

$$(22_{II})\quad (I_{ro}) = (I_{to}) = \frac{2t_n^2}{(1+t_n)^2+\sqrt{1-t_n^2}\sqrt{1+2t_n}} = \frac{2t_o^4}{2+\sqrt{1-t_o^2}\sqrt{4-t_o^4}}$$
$$= \frac{8n^2}{(n+1)^4+(n^4-1)\sqrt{1+2t_n}}.$$

La quantità polarizzata riflessa o trasmessa dalla lamina è:

$$(23_I)\qquad (P_{rn}) = \frac{1}{2}\,\frac{n-1}{n+1}\sqrt{1+2t_n} = \frac{1}{2}\,r_0\sqrt{\frac{2+t_o^2}{2-t_o^2}},$$

e la quantità naturale, la stessa in entrambi i raggi:

$$(23_{II})\quad (Q_{ro}) = (Q_{to}) = \frac{t_n^2}{1+2t_n+r_n\sqrt{1+2t_n}} = \frac{t_o^4(2-t_o^2)}{t_o^6+8r_o^2+2r_o\sqrt{\dfrac{2+t_o^2}{2-t_o^2}}}$$
$$= \frac{4n^2}{(n+1)^4-4n^2+(n^4-1)\sqrt{1+2t_n}}.$$

Le incidenze corrispondenti son date da formole analoghe alla (21″) e hanno, in funzione di n, andamenti analoghi a quelli delle curve in fig. 4 bis.

II.

11. — La *pressione della luce* su una superficie è proporzionale alla densità media J dell'energia contenuta nell'onda elettromagnetica incidente, e consiste in una componente normale e una tangenziale, dipendenti dal potere riflettente ρ della superficie. La pressione normale è proporzionale a $J(1+\rho)\cos\varphi$, con l'incidenza φ; cosicchè, se la superficie fosse perfettamente riflettente, la pressione normale sarebbe il doppio di quella su una superficie nera. La pressione tangenziale è proporzionale a $J(1-\rho)\,\mathrm{sen}\,\varphi$; cosicchè è nulla sopra uno specchio perfetto e massima su una superficie completamente assorbente.

La pressione della luce non dipende dunque solo dalla intensità o dalla densità dell'energia; ma anche dalla direzione del vettore incidente, in quanto ne dipende il potere riflettente ρ.

Un apparecchio destinato alla ricerca di questa pressione deve in principio comprendere uno " specchio „ in forma di lamina, mobile sotto l'azione di forze debolissime. Tutti gli sperimentatori usarono appunto a tale scopo una bilancia di torsione assai sensibile, sostenente alla estremità di un braccio lo " specchio „, talora metallico, talora di vetro, talora francamente assorbente.

Il procedimento d'esperienza deve però mirare anzitutto ad eliminare le azioni termocinetiche (o radiometriche) dovute all'aria, e che nelle condizioni in cui si deve osservare la pressione della luce sono quasi sempre più importanti di questa; il Lebedew, il Poynting, Nichols e Hull, ..., eliminarono, più o meno totalmente, l'effetto radiometrico ponendo la bilancia in un recipiente rarefatto, ma sopratutto procedendo per esperienze differenziali.

A. Amerio al Congresso di Padova del 1909 (*) presentò una elegante esperienza dimostrativa della pressione della luce, ideata allo scopo di eliminare fondamentalmente le azioni termocinetiche, consistente in principio nell'adoperare luce polarizzata: siccome la pressione normale della radiazione su uno " specchio „ dipende dalla direzione del vettore luminoso, oltre che dalla sua

---

(*) " Nuovo Cimento „, Nov.-Dic. 1909.

intensità, mentre l'effetto termocinetico dipende soltanto dalla intensità, ne nasce la possibilità sperimentale di eliminare completamente quest'ultima.

Amerio ha anche una bilancia di torsione sensibile, posta entro un pallone di vetro sottile, nel quale " si spinge la rare-" fazione in modo che la pressione non superi qualche mm. di " mercurio, per evitare perturbazioni prodotte da moti convet-" tivi ".

Lo *specchio* è un vetrino coprioggetti, fissato all'estremità del braccio del bilanciere, nel piano verticale del braccio e della sospensione, che all'altra estremità porta un altro vetrino uguale e simmetrico. Uno dei vetrini rimane all'oscuro, l'altro viene illuminato con un fascio *polarizzato nel piano d'incidenza*, che è orizzontale. L'esperienza, quale fu eseguita al Congresso di Padova, consiste nel mostrare che questo fascio, cadente sul vetrino con la incidenza di polarizzazione, gli imprime una notevole deviazione nel senso della pressione della luce, la quale si arresta e diminuisce quando si giri il nicol polarizzatore di 90°, cioè si illumini con luce vibrante nel piano d'incidenza e che non viene più affatto riflessa dallo *specchio*. L'osservazione contemporanea del raggio riflesso, che ha la massima intensità quando la pressione apparisce più grande e si spegne quando, per la rotazione di 90°, si vede diminuire la deviazione, cioè la pressione, rende l'esperimento assai dimostrativo.

Però, il principio del metodo e la disposizione adottata consentono a questo esperimento un grado di rigore ben più grande, al quale non si dovrebbe rinunciare neanche in una esperienza didattica. Il secondo vetrino che rimane all'oscuro e cui fu dato apparentemente il solo ufficio di contrappeso, può venire illuminato a sua volta al posto del primo o anche contemporaneamente. Illuminando uno solo dei due specchi simmetrici, l'esperienza manca di quella simmetria fisica che caratterizza i metodi differenziali, i più adatti precisamente ad eliminare effetti scalari perturbatori, del genere di quello termocinetico. Questo non dipende dalla direzione del vettore luminoso, ma, per un dato specchio, soltanto dalla sua intensità. Per potere affermare sicuramente che " in questa esperienza non è il caso di parlare di azioni radiometriche " *è necessario illuminare entrambi gli specchi* (supposti otticamente identici e meccanica-

mente simmetrici) *con una stessa intensità luminosa, variando dall'uno all'altro soltanto la direzione del vettore.*

L'eliminazione dell'effetto termocinetico deve ottenersi a rigore soltanto con una disposizione e una serie di esperienze aventi carattere nettamente differenziale, qualunque sia il principio del metodo. A ciò si presta egregiamente la coppia di vetrini simmetrici che costituiscono il bilanciere di Amerio, *quando si illuminino ciascuno con ciascuno dei fasci di uguali intensità che escono per un prisma birefrangente da luce naturale.* Se i due fasci si fanno agire sulla coppia di specchi con uguali momenti, l'uno vibrando verticalmente, l'altro orizzontalmente, è chiaro che l'azione termocinetica sarà senz'altro identica su entrambi (se gli specchi sono identici) e darà luogo a due coppie uguali e contrarie; mentre la pressione del vettore luminoso si eserciterà soltanto su quello specchio che gli è parallelo e che lo riflette.

12. — Ho eseguito serie di esperienze con un apparecchio poco diverso da quello descritto da Amerio, rappresentato nella fig. 5.

Un pallone *P* di 20 cm. di diametro, ha il collo tagliato brevemente in *c* e porta, con giunto a smeriglio, un tubo verticale *T* lungo 35 cm. e chiuso in alto con un tappo ben smerigliato. Questo serve di attacco alla sospensione *b*, un filo di bozzolo di 40 cm., cui si può imprimere così a piacimento qualunque orientazione senza spostare il pallone. Il bilanciere *e*, costruito con fili di vetro, comporta due vetrini tondi copri-oggetti, del diametro da 1 a 2 cm., ed eventualmente uno specchietto argentato. Questo non è però necessario per esperienze dimostrative, essendo più che sufficiente la luce riflessa dai vetrini, che dànno sopra uno schermo a tre o quattro metri due dischi luminosi di 40 cm., quando sieno entrambi illuminati dai due fasci usciti da un prisma birefrangente. Con una lampada ad arco di 20 o 25 amp., la sensibilità dell'apparecchio in queste condizioni è forse anche troppo grande. Con la incidenza di polarizzazione, che è facile raggiungere per tentativi finchè una delle immagini riflesse si spegne, i due dischi proiettati si spostano di conserva nel senso della immagine più brillante, mentre questa impallidisce gradatamente e l'altra va

accendendosi. Ruotando di 180° il prisma birefrangente, si scambiano di posto i due fasci polarizzati, e la deviazione s'inverte dopo breve tempo.

Il filo di bozzolo ha lo svantaggio di dare una posizione di quiete o di zero poco stabile; se è sufficiente per un apparecchio dimostrativo, non vale se si vogliano eseguire delle misure. Le ho quindi sostituito la disposizione rappresentata di fianco a sinistra (fig. 5), con un filo di quarzo *q* di 0,002 mm.,

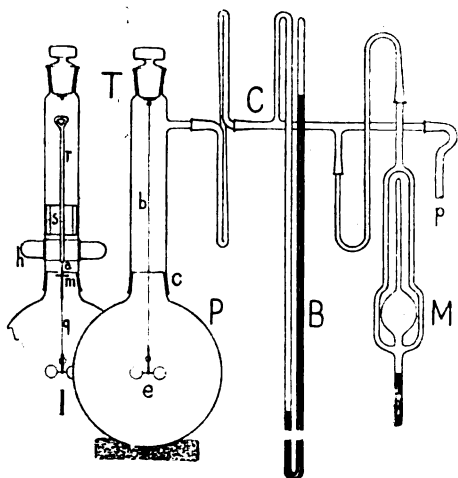



Fig. 5.

lungo 6 cm., portato da una asticciuola di vetro pendente verticale lunga 3 cm. e sostenuta da un breve filo di seta *a*, attaccato all'estremo di un grosso filo di ottone *r*, passante nell'asse di un sughero *s* che è calzato entro il tubo *T*. L'asticciuola di vetro è armata in alto da un ago magnetizzato *m*, che serve ad assegnare all'equipaggio la voluta orientazione mediante una coppia di magneti *h* disposti orizzontalmente e paralleli a fianco di un manicotto molleggiante che si adatta sul tubo *T* e che si può girare dolcemente di fronte ad un arco graduato in un piano orizzontale (non rappresentato in figura). Così è possibile determinare a volontà l'angolo di incidenza sul piano dei due vetrini *e* a partire dall'incidenza di polarizzazione, per gli scopi che vedremo. Con il filo di quarzo di 6 cm.. due

vetrini rotondi di 18 mm. e gli orli distanti di 20 mm., e con uno specchietto di 5 mm. per le letture al cannocchiale, il sistema aveva un periodo di 147″ e uno zero abbastanza stabile.

I vetrini coprioggetti, rimasti esposti all'aria per molto tempo, come quelli che avevo a disposizione, acquistano facilmente una velatura superficiale in forma di alone, che non si può allontanare con semplici lavature alcaline o altre. Siccome è necessario che i due *specchi* sieno otticamente identici, oltre che forniti del loro massimo potere riflettente, ebbi cura di ripolire tutte le coppie di vetrini, poco tempo prima di metterli in opera, con rossetto inglese finissimo in olio da macchine, fra due lastrine ben piane di cristallo spesso, lavandoli poi con alcali, alcool, e serbandoli immersi in etere fino all'ultimo momento. Ottenni così risultati discreti. Ma per meglio assicurare la identità della superficie per rispetto ai due raggi, finii col preferire l'uso di un unico vetrino ben terso, del diametro di 30 mm., sospeso ad un filamento di vetro lungo 8 mm. per portare lo specchietto, come indica la fig. 6. Con un filo di quarzo di 6 cm., il sistema ha un periodo di 126″.

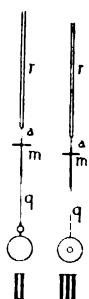



Fig. 6.

Finalmente, in altre esperienze più recenti, non ancora ultimate, il disco è direttamente appeso col suo orlo all'estremo del filo di quarzo: al centro del vetrino fu deposto uno specchio circolare di argento di 5 mm. per l'uso del cannocchiale. Con quest'ultima disposizione è possibile calcolare con buona approssimazione il momento d'inerzia dell'equipaggio, per dedurre il modulo di torsione. S'intende che i due raggi si fanno battere a destra e a sinistra del diam. verticale di sospensione. — Indicherò con I, II, III questi tre equipaggi successivamente adoperati.

Nella fig. 5 si vede come il pallone P è congiunto per la condotta C alla pompa in p, con l'intermediario di un barometro B graduato in mm. e di un provino Mac Leod M.

13. Esperienze con l'equipaggio I. — Queste ebbero principalmente per iscopo la ricerca dell'*influenza del grado di rarefazione* esistente nel pallone, quando si illumini uno solo degli specchi con un polarizzato all'incidenza brewsteriana, — nelle condizioni cioè volute da Amerio.

In queste esperienze, e in tutte le successive, il pallone P e il tubo T erano ricoperti con una camicia di ovatta, fasciata inoltre con un foglio di stagnola spessa, ciò che trovai necessario per limitare i moti convettivi interni causati da movimenti d'aria esterni e da irraggiamenti accidentali. La camicia aveva due piccole aperture, l'una per l'entrata del fascio attivo, l'altra in corrispondenza dello specchietto rivolto al cannocchiale; inoltre era interrotta per l'altezza di 1 cm. intorno a un arco d'equatore del pallone, ove era incollata con paraffina una striscia di carta translucida, divisa in gradi, per ricevere il raggio riflesso, e che si estendeva da c in d (fig. 7).

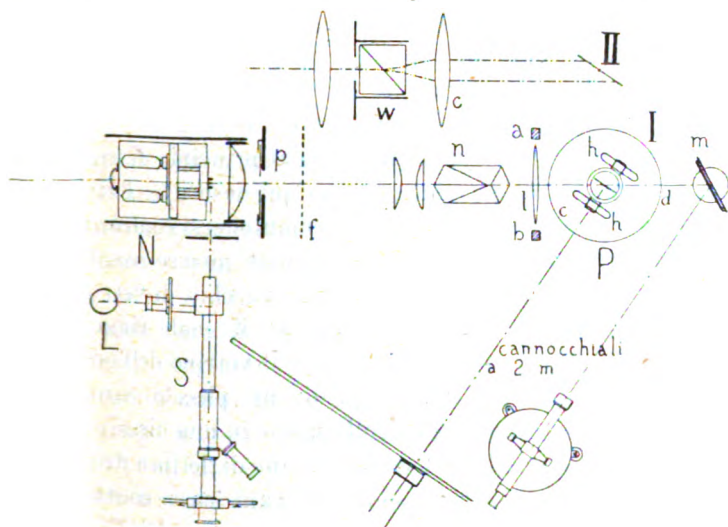



Fig. 7.

L'apparato ottico era press'a poco quello descritto da Amerio, col nicol n prossimo alla superficie del pallone, e un sistema di lenti tale che il vetrino riflettesse una immagine abbastanza nitida della sorgente sulla graduazione equatoriale cd, ove si poteva controllare approssimativamente l'inclinazione dell'equipaggio. La sorgente luminosa era la pupilla di un diaframma p, traversata da un reticolo a 45° e illuminata, con un condensatore opportuno, da una lampada Nernst a corrente continua, N, da 220 volt, 4 amp., di circa 1400 hefner. La cor-

rente per questa era presa da una batteria di accumulatori a 256 volt.

Per assicurarmi della costanza d'emissione della lampada durante ogni serie di esperienze, oltre che sorvegliare la tensione costante e il milliamperometro in circuito, — lateralmente, la luce di uno dei filamenti della Nernst, debitamente frazionata da una fessura a scrupolo, veniva ricevuta in uno spettrofotometro (del tipo Crova) *S*, in confronto alla luce di una lampadina campione *L* a filamento metallico mantenuta alla sua tensione di taratura. Con l'esame di tre regioni determinate dello spettro, eseguito a intervalli durante le osservazioni, ebbi così modo di accertarmi che l'energia emessa dalla Nernst rimase lungamente costante, nei limiti di precisione concessi dallo spettrofotometro. Quando, dopo circa 250 ore di accensione, cominciai a notare le prime traccie di indebolimento agli estremi dello spettro, preferii rinnovare il corpo incandescente, ciò che d'altra parte accadde al principio di nuove serie di esperienze, le ultime che saranno qui descritte. Tutte queste esperienze non richiedevano che di mantenersi confrontabili fra loro, non avendosi per iscopo di eseguire misure assolute.

Sulla fig. 7 rimane a notare uno specchio di vetro nero *m*, fissato verticalmente oltre il pallone *P*, il quale rimandava la luce della sorgente, passata attraverso il vetrino dell'equipaggio e le pareti del pallone, nel campo di un piccolo cannocchiale su cerchio diviso orizzontale, collimante in una direzione all'incirca parallela a quella del cannocchiale di lettura delle deviazioni (a 2 m.). Era così possibile in ogni caso controllare la posizione del centro dell'immagine luminosa o del fascio battente sul vetrino mobile, affinchè agisse con un momento costante, portando a coincidere l'immagine del reticolo in *p* con quello del cannocchiale, mediante lo spostamento nel suo piano di una grande lente *l* interposta fra il nicol *n* e il pallone *P*. Questa lente poteva spostarsi fra due arresti *a*, *b*, che limitavano i centri del fascio su punti simmetrici, rispetto alla sospensione, del vetrino di destra o di sinistra, ciò che corrispondeva a due determinate posizioni angolari del piccolo cannocchiale sul suo cerchio diviso. Si collimava con questo cannocchiale in maniera da vedere distintamente il centro della pupilla *p*, e ad ogni esperienza si spostava la lente *l* fino a che il disco

luminoso prendesse la posizione giusta sul vetrino, prefissata sul cannocchiale.

Finalmente, uno schermo metallico f poteva farsi scattare a distanza per interrompere o ristabilire l'illuminazione.

I risultati delle migliori serie di esperienze eseguite sono riassunti nelle curve della fig. 8, che hanno per ascisse le pressioni in mm. di mercurio, indicati dal barometro B o dal Mac Leod M, e per ordinate le letture, in mm. della scala a 2000 mm., delle deviazioni dell'equipaggio mobile a partire dallo zero, determinato dalla incidenza brewsteriana sul vetrino influenzato. Il quale fu uno solo, e sempre lo stesso.

Ogni osservazione procedeva così. Aggiustata o verificata sullo specchio m la direzione del fascio (velando la pupilla p con un vetro lattiginoso) in maniera che l'immagine ovale cadesse sul vetrino sempre nella stessa posizione, si calava lo schermo f, si orientava il nicol, e si aspettava al cannocchiale che l'equipaggio si portasse al suo zero, per valutarne infine la posizione esatta nel solito modo allorchè le oscillazioni fossero divenute abbastanza piccole. Nel frattempo si controllava allo spettrofotometro e ai reometri, l'intensità della lampada N. Fissato lo zero, si allontanava lo schermo f: la deviazione cominciava dopo parecchi secondi e cresceva verso un massimo: questo veniva raggiunto con oscillazioni finali, interminabili, in un tempo più o meno lungo a seconda della rarefazione; se ne calcolava infine la posizione, leggendo le ultime più piccole ampiezze. Poi si interrompeva la luce, calando f; si girava il nicol di 90°, e si procedeva alla seconda esperienza con lo stesso grado di rarefazione. Ogni coppia di esperienze dava così due punti omologhi delle curve h_n e h_p (fig. 8).

La pompa era una coppia rotativa capsulismo-mercurio di Gaede; fatte le connessioni dalle macchine al pallone con ogni cura, lo stabilire e il variare la rarefazione era il compito più facile e più rapido. Dopo aver fatto girare le macchine o dopo aver fatto rientrare un po' di aria, bisognava però aspettare qualche tempo perchè si spegnessero le oscillazioni in P. Le letture della pressione al barometro B o al Mac Leod M venivano fatte al principio e alla fine di ogni coppia di osservazioni: la quale richiedeva in media un tre quarti d'ora.

Le due curve h_n ed h_p nel diagramma fig. 8 riassumono esperienze fatte in varii giorni successivi: i punti indicati con circoletti corrispondono a serie di osservazioni fatte con rarefazioni crescenti, quelli indicati con croci a osservazioni fatte lasciando rientrare aria nel pallone. La curva superiore h_n rappresenta l'azione di luce vibrante parallelamente al piano del vetrino; la curva h_p l'azione di luce vibrante nel piano d'incidenza. Superiormente a destra, sono ricostruiti con altre esperienze più fitte i rami iniziali delle due curve per pressioni sotto i 3 mm. di mercurio, lette la maggior parte al Mac Leod;

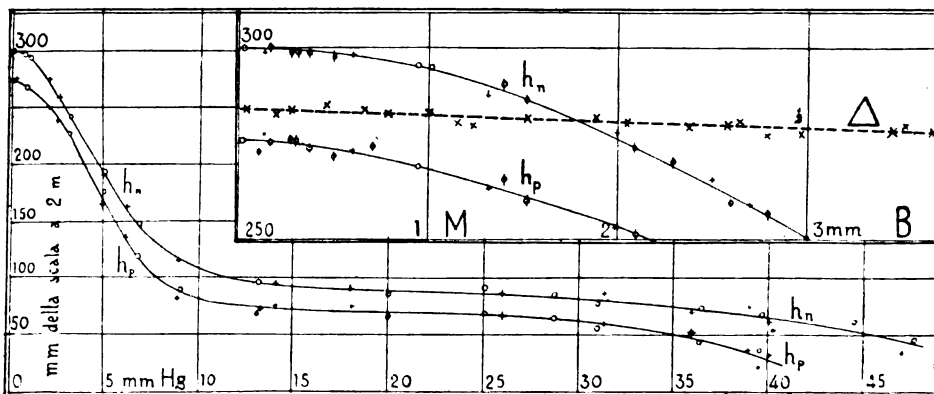



Fig. 8.

l'asse delle ascisse fu qui allungato al decuplo, quello delle ordinate al triplo.

Si vede dunque che l'azione repulsiva del fascio luminoso sul vetrino trasparente varia assai e in vario modo in presenza d'aria a diverse pressioni. In particolare, per entrambi i polarizzati ($_n$) e ($_p$), l'andamento di questa repulsione ha forme analoghe: cresce rapidamente allorchè la pressione diminuisce sotto i 5 mm., si mantiene press'a poco costante da 10 e 35 mm., poi diminuisce col crescere della pressione. Parecchie osservazioni fatte verso 100 e 200 mm. di mercurio diedero punti molto dispersi, non possibili a collegarsi con continuità. A pressioni molto basse, le due curve sembrano tendere a un'ordinata limite massima con gradiente nullo. Inutile notare che la curva h_n

essendo superiore alla h_p, la differenza fra le ordinate delle due curve dovrebbe rappresentare la pressione di Maxwell.

La massima deviazione avuta in questa serie di esperienze, quella all'origine, come si vede, non raggiunge i 10°.

Senza tentare per ora l'interpretazione dell'andamento di queste due curve (che deve dipendere anche dalla variazione dell'incidenza), limitiamoci a constatare il fatto che la presenza del gas ha una notevole influenza sull'azione repellente che le due luci esercitano su uno specchio, anche trasparente e omogeneo come è il vetrino di Amerio. Esso apparisce scaldarsi, cioè, con entrambi i raggi polarizzati in modi poco diversi, e la " faccia " colpita in modo prevalente.

Rimarrebbe a studiarsi se, e come, lo strato di gas *aderente* al vetrino e avente sempre maggior densità dell'atmosfera circostante intervenga, sotto l'azione della radiazione, per modificare completamente le condizioni del fenomeno, che, nei termini enunciati da Amerio, dovrebbe indubbiamente attribuirsi alla pressione della luce. In appoggio a quest'induzione, valga il richiamare le conclusioni delle recenti ricerche del Prof. Naccari " *Sull'influenza delle radiazioni diurne sull'attrito che incontra un mobile nell'aria* " (*), secondo le quali " quando " una radiazione cade sulla superficie... la sua energia deve " andare in gran parte impiegata ad aumentare la velocità " delle molecole d'aria dello strato aderente alla superficie... " e anche ad aumentare il numero delle molecole d'aria che se " ne staccano ". Basterebbe attribuire a questo strato aderente e *condensato* un potere assorbente maggiore che all'atmosfera circostante, per ispiegare una parziale trasformazione superficiale dell'energia raggiante in energia termocinetica gassosa, indipendente dalla direzione del vettore, ossia dal potere riflettente dello specchio propriamente detto.

14. — È però necessario il pensare ad un metodo schiettamente differenziale, per separare l'azione maxwelliana da quella termocinetica dovuta inevitabilmente al gas.

Lo stesso apparecchio suddescritto si presta anche all'uso di questo metodo, quando si possegga un prisma birefrangente

(*) " Nuovo Cimento ", Aprile 1912.

che dia sufficiente divergenza ai due fasci polarizzati ortogonalmente, per colpire con momenti abbastanza grandi i due vetrini del bilanciere. Adoperando il noto apparato di polarizzazione per proiezione del Dubosq, che comprende d'ordinario un birefrangente artificiale di grande apertura, l'esperienza conserva i suoi caratteri dimostrativi per un esteso uditorio. Con una lampada ad arco da 25 amp. e due vetrini ben politi di 1,5 cm. di diametro separati da orlo a orlo di altrettanto e sospesi a 4 o 5 cm. di filo di quarzo, si possono proiettare senz'altro le due immagini da essi riflesse. Quando la sezione principale del birefrangente è orizzontale, con l'incidenza di polarizzazione l'uno dei vetrini riflette vivamente il fascio ($_n$), l'altro *quasi nulla* nel fascio ($_p$), e la coppia di dischi luminosi si sposta sullo schermo in direzione da quello oscuro verso quello brillante, mentre gli splendori variano mantenendosi complementari. Girando il birefrangente di 180°, si scambiano di posto i due fasci (e vanno centrati di nuovo sui due vetrini con uno spostamento opportuno della lente *l*, fig. 6); si osservano invertirsi tanto le due immagini riflesse, come il verso della deviazione. È conveniente rimandare sullo schermo di proiezione anche i due fasci residui che hanno oltrepassato il pallone, riflettendoli con lo specchio verticale *m*, disposto per l'incidenza brewsteriana; allora invertendo il birefrangente, si assiste all'intera evoluzione d'intensità dei due raggi riflessi da *m*; poi, le immagini di questi rimangono fisse sullo schermo e servono di riferimento per il moto di quelle riflesse dai vetrini.

Con una serie di esperienze fatte a varie rarefazioni ho dapprima verificato con questo apparecchio che l'azione del gas è effettivamente eliminata, quando si illuminano entrambi gli " specchi „ con luci uguali e vibranti ortogonalmente. La curva Δ tracciata sul diagramma ingrandito nella fig. 8, rende conto di queste esperienze, fra 0 e 4 mm. di mercurio. Si illuminavano i due vetrini all'incidenza brewsteriana e si determinava il massimo di deviazione raggiunto (sempre leggendo le oscillazioni).

L'andamento della curva Δ si può bensì ammettere rettilineo, ma non è orizzontale: col crescere della pressione, la deviazione tende a diminuire: con pressioni verso i 25 o 30 mm. la tendenza va accentuandosi. Non saprei spiegare questa pendenza se non attribuendone la causa ad una eventuale non identità ottica o

altrimenti superficiale dei due vetrini. — Col crescere della pressione si osserva inoltre che il tempo, necessario a raggiungere l'elongazione definitiva, va crescendo; e questo si comprende, data la piccolezza della coppia e il volume di gas relativamente grande che ogni vetrino ruotando deve spostare.

15. Esperienze con l'equipaggio II. — Ho eseguito anche altre determinazioni con questo metodo, tanto con l'equipaggio I, ora adoperato, quanto con l'equipaggio II, che consiste in un solo vetrino di 30 mm. sospeso per un diametro al filo di quarzo. Riferirò i risultati di queste ultime.

Non avevo per iscopo con esse di ottenere misure assolute della pressione della radiazione, ciò che avrebbe richiesto di determinare l'energia integrale incidente; desideravo unicamente verificare se la differenza delle pressioni normali esercitate " con uguali momenti " dai due raggi birifratti (ammessi di uguali intensità) sullo specchio, corrispondesse senz'altro alle leggi quantitative di Fresnel-Maxwell.

I poteri riflettenti della lamina parallela per i polarizzati $(_n)$ e $(_p)$ sono, con le nostre notazioni,

$$(13) \qquad R_n = 1 - \frac{2X}{1+X^2}, \qquad R_p = 1 - \frac{2n^2X}{n^4+X^2}.$$

Se sulle due metà del disco II (fig. 9) rispetto al diametro verticale per l'asse di sospensione, incidono con l'angolo φ due polarizzati ortogonali di uguali intensità e con uguali momenti (uno dei vettori essendo verticale, l'altro orizzontale), *la coppia dovuta alla pressione normale della luce è proporzionale alla differenza dei due poteri riflettenti*; e si può scrivere:

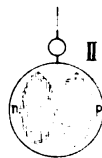



Fig. 9.

$$(24) \qquad C = k(R_n - R_p)\cos\varphi = k\,\frac{2(n^2-1)(X^2-n^2)X}{(n^4+X^2)(X^2+1)}\cos\varphi,$$

ove k sia un coefficiente dipendente dalle dimensioni dell'equipaggio (braccio del momento.....) e dalla intensità incidente. Conosciamo già come varia il fattore in X: si annulla tanto per $\varphi = 0$ quanto per $\varphi = 90°$; per l'incidenza brewsteriana diventa

$(n^2-1)^2/(n^4+1)$; e raggiunge il valor massimo $(n^2-1)/(n^2+1)$ per una certa incidenza, maggiore di quella. Il fattore

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{n^2-1}{X^2-1}}$$

ha per effetto di spostare il massimo della coppia C verso le ascisse minori e di deprimerlo; come mostrano le curve della fig. 10.

Salvo dunque il fattore $\cos\varphi$, la coppia in questo caso è proporzionale alla quantità di luce polarizzata che verrebbe riflessa dalla lamina quando un fascio di luce naturale la colpisse.

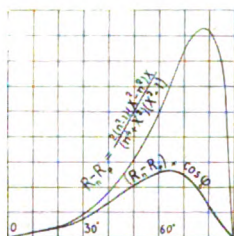



Fig. 10.

Se un pennello cilindrico di luce naturale, d'intensità uniforme, incide sul disco II con l'angolo φ in un piano d'incidenza orizzontale e con l'asse tagliante il diametro verticale di sospensione del disco, la luce riflessa non produrrà alcuna azione meccanica. La luce trasmessa dalla lamina, che è anche parzialmente polarizzata, esercita invece una coppia di rotazione intorno all'asse di simmetria del cilindro rifratto, parallelo alla lamina e normale al piano d'incidenza, coppia che risulta proporzionale allo spessore della lamina (nel nostro caso 0,15 mm.) e alla intensità del vettore vibrante nel piano d'incidenza. Un pennello polarizzato normalmente al piano d' incidenza (fig. 11) che colpisca la lamina di spessore s con l'angolo φ, la oltrepassa subendo uno spostamento parallelo x

Fig. 11.

$$x = s\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\chi)}{\operatorname{sen}\chi} = s\,\frac{\sqrt{(X^2-n^2)(X^2-1)}}{X},$$

che rappresenta il braccio della coppia esercitata nel piano di incidenza dalla differenza degli impulsi contemporanei della energia incidente e della energia rifratta. Questa coppia è quindi proporzionale al potere trasmettente della lamina e al $\cos\varphi$:

$$C_1 = k_1 s\,\frac{\sqrt{(X^2-n^2)(X^2-1)}}{X}\cdot\frac{2n^2X}{n^4+X^2}\cdot\sqrt{\frac{n^2-1}{X^2-1}}$$
$$= 2k_1 s\,n^2\,\frac{\sqrt{(X^2-n^2)(n^2-1)}}{n^4+X^2}.$$

Essa si annulla tanto per $\varphi = 0$, $(X = n)$, quanto per $\varphi = 90°$; passa per un massimo con la condizione

$$X^2 = n^2(n^2 + 2) \qquad \text{ossia} \qquad \operatorname{tg}\varphi = n\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2-1}} = \frac{n}{\sqrt{r_{''}}},$$

assumendo il valore

$$C_{1\max} = k_1 s n \sqrt{r_{''}}.$$

Questa coppia è nel nostro caso estremamente debole; tentativi per metterla in evidenza, richiederebbero l'uso di una lamina sospesa piuttosto spessa e di grande indice di rifrazione, quindi in generale non leggera. Sul nostro disco sottile è affatto insensibile.

Se con l'interposizione di un prisma birefrangente, o di altro sistema più complesso, sdoppiamo ora il pennello incidente in due metà uguali, costituenti due fasci divergenti in un piano orizzontale, nascerà una coppia ben più notevole, tendente a far ruotare il vetrino nel verso ove batte il polarizzato ($_{''}$) che è quello massimamente riflesso.

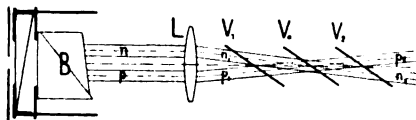



Fig. 12.

Ho cercato di realizzare una disposizione pratica consimile, che permettesse cioè, partendo da un fascio di luce naturale incidente sul centro del vetrino II, di sdoppiarlo a volontà e con varia divergenza nei suoi due componenti ortogonali. La fig. 12 rappresenta uno dei metodi sperimentati. Da un birefrangente composto B (acromatizzato) escono due fascetti *paralleli* n, p (ciò che si può non troppo facilmente ottenere regolando la convergenza e l'inclinazione, mediante un prisma di vetro addizionale, del fascio entrante), i quali vengono ricevuti sopra una lente L; questa li fa convergere nel suo foco, ove essi ricostituiscono luce naturale. Spostando la lente lungo il suo asse, si può trasportare avanti e indietro la regione di convergenza dei due fascetti polarizzati, prima della quale e dopo, l'ordine di essi si inverte sopra un piano fisso che li tagli.

È così possibile far battere sul vetrino V i due polarizzati nell'ordine $n_1 p_1$ ovvero $p_2 n_2$, invertendo cioè dalla posizione V_1 alla posizione V_2 la coppia, che in V_0 è nulla. In causa della inclinazione del vetrino, diversa sui due raggi, su di esso si proiettano due dischi luminosi di diverse grandezze e di forme ovali diverse: ma se i due fascetti iniziali sieno rigorosamente paralleli e cilindrici e tutto sia simmetrico rispetto all'asse della lente, v'ha compensazione rispetto ai " momenti " sul disco. Tali condizioni sono però alquanto difficili a realizzarsi, se non a forte discapito della intensità luminosa; la disposizione sarebbe altrimenti molto comoda, poichè col solo spostamento longitudinale della lente L fra due arresti predeterminati s'invertirebbe l'esperienza (*). Meno comoda, a questo scopo, ho trovato invece la rotazione dello stesso birefrangente, giacchè ad ogni inversione è necessario eseguire anche spostamenti laterali per riportare i due fascetti sulle direzioni primitive, non essendo per essi in generale l'asse di rotazione del prisma B, o se vuolsi il raggio incidente, un asse di simmetria. Sarebbe forse più conveniente, lasciando fisso il birefrangente con la sezione principale orizzontale, far girare mediante un biquarzo, di spessore opportuno, i due vettori di 90°...

Ho però finalmente ricorso ad un prisma Wollaston, che, come è noto, possiede la proprietà di dare per un raggio entrante normale, fasci birifratti molto prossimamente divergenti

---

(*) Se i due raggi incidenti sullo " specchio " mentre esso oscilla, si invertano a intervalli uguali al suo mezzo periodo e in fasi opportune della elongazione, si riesce, anche con deboli intensità, a fargli raggiungere ampie oscillazioni. Questo metodo *dinamico* per dimostrare la pressione del raggio luminoso, potrebbe praticarsi con maggior evidenza di risultati e con luce naturale, se si riuscisse a costruire la bilancia di torsione con un periodo dell'ordine di un secondo invece che di cento secondi, tuttavia mantenendo la coppia direttrice debolissima. Facendo oscillare a destra e a sinistra sullo specchio, posto nel vuoto, un foco luminoso intenso, con lo stesso periodo proprio dello specchio, e costituendo questo con una laminetta di argento (ben brunita) per rendere rapido l'equilibrio della temperatura, si potrebbe forse trasmettergli una oscillazione abbastanza ampia pel tramite del fascio luminoso oscillante. Il metodo eliminerebbe ancora l'azione termocinetica, poichè si può ammettere che la laminetta d'argento assumerebbe presto in tutti i suoi punti una stessa temperatura, e allora non resterebbero che gl'impulsi periodici della luce per produrre la vibrazione.

di uno stesso angolo $\pm \alpha$ dalla normale e in uno stesso piano con questa. Cosicchè, facendo ruotare il prisma entro la sua custodia cilindrica intorno al raggio incidente coassialmente, i due fascetti battenti sul disco mantengono lo stesso " momento ".

La disposizione definitivamente utilizzata è quindi quella indicata al disopra della fig. 7 prec., ove si vede il Wollaston *W* nel quale entra un fascio parallelo proveniente dalla Nernst *N* e dal quale escono i due polarizzati, condotti poi al parallelismo da una lente *c* fissa alla sua distanza focale, che li dirige sul disco II entro il pallone. La disposizione degli altri apparecchi è quella precedentemente descritta. Il piccolo cannocchiale diretto allo specchio fisso *m* servì ora a *fissare* ogni volta la linea verticale di tangenza (o d' intersezione) dei due ovali luminosi proiettati sul disco precisamente in coincidenza col diametro di sospensione di quest'ultimo, ciò che richiedeva sempre qualche piccolo spostamento della lente *l* (*ab*) ad ogni rotazione del birefrangente, regolazione d'altra parte assai spiccia che si eseguiva a distanza, dopo aver velato la lampada.

Mantenendo costantemente nel pallone *P* una rarefazione di alcuni 0,01 di mm. di mercurio, venne eseguita una serie di misure, distribuite in parecchi giorni successivi, con intensità luminosa costante e *facendo variare l'angolo d'incidenza* sul vetrino. Per questo scopo, si spostava angolarmente di volta in volta il sistema di magneti *hh*, di fronte all'arco diviso orizzontale, di 40 cm. di diametro, posto a loro livello, e si controllava l'angolo di rotazione con la determinazione del *nuovo zero* riflesso ogni volta nel cannocchiale di lettura. Indi si trasportava il cannocchiale con la scala in direzione della nuova normale allo specchietto dell'equipaggio, rettificando ovviamente le condizioni di simmetria del sistema con la massima cura.

Ciascuna esperienza consisteva allora in un gruppo di osservazioni coniugate della deviazione massima raggiunta a illuminazione costante partendo dallo *zero* determinato, e con l'inversione, dall'una all'altra, dei due polarizzati, cioè con la rotazione di 180° del birefrangente. Delle deviazioni ottenute, alternativamente di versi opposti, si prendeva la media. Ciascun gruppo comprese sempre almeno tre coppie di inversioni, spesso quattro: cosicchè ciascuna media, che dà un punto, proviene da almeno sei letture, alternamente a destra e a sinistra della scala. Am-

messo che il disco II fosse in tutta la sua estensione otticamente e *superficialmente* omogeneo, si doveva così eliminare l'effetto termocinetico residuo, non solo, ma anche la variazione del potere riflettente dello " specchio „ dovuta alla variazione d' incidenza durante le deviazioni. Queste d'altra parte furono tenute abbastanza piccole, regolando convenientemente la intensità luminosa. Per es., la deviazione più forte osservata, quella che comparisce sul culmine della curva, fig. 13, nel

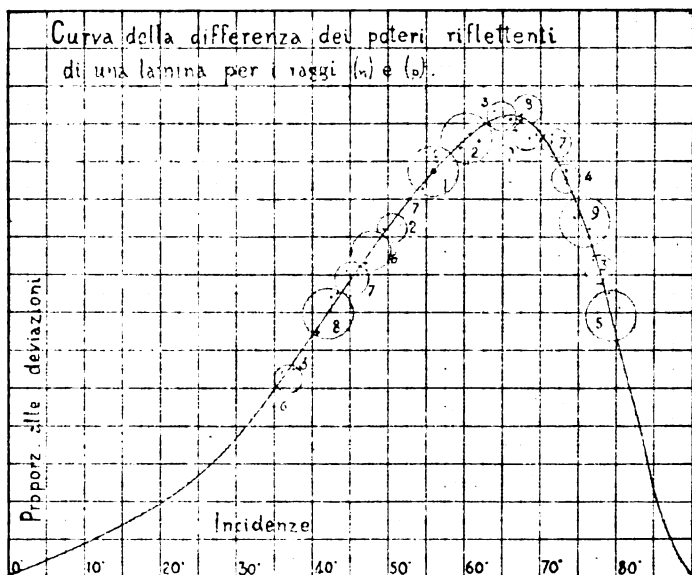



Fig. 13.

giorno 3, rappresenta 143 mm. della scala a 2000 mm., ossia circa 4°.

Il campo delle esperienze venne esteso per una ventina di gradi a destra e a sinistra della incidenza brewsteriana, ricavandosi in totale 39 punti in *nove* giorni successivi.

Costruita in iscala conveniente la curva teorica (19) della differenza dei poteri riflettenti del vetrino (di indice 1.48_5, determinato al microscopio), come mostra la fig. 13, furono riportati sul diagramma i punti sperimentali, dopo averli ridotti alla stessa scala prendendo per unità l'ordinata teorica corrispon-

dente alla incidenza brewsteriana, cui si riferisce il primo gruppo di esperienze eseguite il giorno 1 e verificate scrupolosamente il giorno 10.

Entro ciascuno dei circoletti, numerati da 1 a 9 sul tracciato, sono contenuti punti determinati in uno stesso giorno; come si scorge, esperienze eseguite in giorni diversi trovansi inserite le une fra le altre, secondo il caso delle incidenze determinate.

La discreta uniformità di distribuzione della costellazione dei punti sperimentali sulla curva teorica nel ramo studiato, stabilisce una prova sufficiente a dimostrare la bontà del metodo.

Torino, R. Politecnico, 1911-12.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 5 Gennaio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: MANNO, Direttore della Classe, RENIER, PIZZI, BRONDI, SFORZA, BAUDI DI VESME e DE SANCTIS Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 22 dicembre 1912.

Il Presidente porge ai Colleghi il buon anno; e ricordando poi come al Socio RENIER il 28 decembre scorso fu presentato il volume di scritti vari raccolti in suo onore per commemorarne il trentesimo anno d'insegnamento nell'Ateneo torinese, crede d'interpretare il sentimento dei Colleghi compiacendosi delle onoranze tributate al nostro insigne Socio. Il Socio RENIER ringrazia.

Si comunica poi il decesso avvenuto il 21 dicembre della sig.ª Francesca CORONA vedova del nostro compianto Socio Luigi SCHIAPARELLI e madre del Collega prof. Ernesto. L'Accademia si associa alle condoglianze già trasmesse al Socio SCHIAPARELLI dal Presidente.

Il Socio DE SANCTIS presenta per la inserzione negli *Atti* una nota del Dr. Ettore BIGNONE, intitolata: *Studi critici sui nuovi frammenti dei Demi di Eupoli.*

Il Socio RENIER chiede notizie intorno allo stato dei lavori per la pubblicazione del Codice *k* promossa dall'Accademia.

Il Socio DE SANCTIS dice che furono da tempo tirate le tavole riproducenti il codice e che fu interamente stampata la prefazione. Il ritardo nella tiratura di questa e nella pubblicazione del volume, non dipende in alcun modo dalla Commissione accademica che ne fu incaricata.

LETTURE

Studi critici sui nuovi frammenti dei Demi di Eupoli.

Nota di ETTORE BIGNONE.

Una delle più interessanti scoperte di papiri è certamente quella dei nuovi frammenti dei *Demi* di Eupoli pubblicati dal Lefebvre nella seconda edizione di Menandro (p. XXI sgg. e Tav. XLIX-LIII) come appartenenti alla commedia attica antica. Il Körte e il Van Leeuwen riconobbero poi trattarsi di frammenti dei *Demi* di Eupoli, come è provato dal fr. II *r* (cfr. fr. 108 K.), ed ambedue ne curarono la restituzione, il V. Leeuwen in " Mnemos. „ XL 129 sg. e append. p. 207 e il Körte in " Hermes „ (1912) p. 276 sgg. (cfr. anche ivi p. 314 sgg. Pohlenz *Aristophanes und Eupolis*). Molte sono le difficoltà che presenta la restituzione di questi foglietti di papiro (si tratta di un codice papiraceo e non di un rotolo) di difficile lettura per lo stato in cui giunse, e copioso di errori di scrittura. Ma poichè il testo ha tratti di vera bellezza, degni del contemporaneo di Aristofane, è bene che gli studiosi riprendano l'opera già valentemente iniziata in particolar modo dal Körte, dal Van Leeuwen e dal Wilamowitz. Per parte mia ho cercato di porgere quanto mi sembra di aver trovato che possa giovare all'integrazione e alla valutazione del testo (1). Per brevità mi riferirò sempre all'edizione del Körte: ho confrontato pure il Van Leeuwen e la riproduzione fotografica, ma questa, eccetto che per qualche punto, è di scarsissimo aiuto, perchè nulla di più si può vedere che non sia già

(1) Devo ringraziare il Prof. Gaetano De Sanctis che mi ha porto aiuto di consigli e di libri per la parte storica dell'articolo. — Dello scritto di Br. Keil *Ueber Eupolis Demen und Aristophanes Ritter* edito nelle " Gött. Nachrichten „ non ho notizia che dal Nr. 47 della " Berliner phil. Woch. „. Fino al momento in cui rivedo le bozze di stampa, il fascicolo delle " Nachrichten „ ove esso è contenuto non è giunto (come il Segretario mi dichiara) a questa R. Acc. delle Scienze.

stato letto dai precedenti, anzi in alcun punto, come nell'ultima pagina, non si legge quasi nulla affatto.

Tralasciando il primo frammento di cui già si sono occupati, dopo il Körte, il Maas e il Mayer, passerò ad esaminare il *verso* del foglio I.

Fr. I *v*.

. . . . -ε]ι κἄξιοῖ δημηγορεῖν,
χθὲς δὲ καὶ πρῴην παρ' ἡμῖν φρατέρων ἔρη[μος ἦν,
κοὐδ' ἂν ἠττίκιζεν, εἰ μὴ τοὺς φίλους ἠισχύν[ετο,
τῶν ἀπραγμόνων ⟨γ⟩ε πόρνων κοὐχὶ τῶν σεμνῶν [τινας
5 ἀλλ' ἔδει νεύσαντα χωρεῖν εἰς τὸ κινητήρ[ιον,
τῆς ἑταιρίας δὲ τούτων τοὺς φίλους ἐσκ[εύακεν,
ταῖς στρατηγίαις δ' ὑφέρπει καὶ τρυγῳδ[ίαν δάκνει.
εἰς δὲ Μαντίνε⟨ι⟩αν ὑμᾶς οὗτος οὐ μεμ . . . . . .
τοῦ θεοῦ βροντῶντος ὑμῖν οὐδ' ἐῶν[τος ἐμβαλεῖν
10 εἶπε δήσειν τοὺς στρατηγοὺς πρὸς βίαν [ἐν τῷ ξύλῳ;
ὅστις οὖν ἄρχειν τοιούτους ἄνδρας [αἱρεῖταί ποτε,
μήτε πρόβατ' αὐτῷ τεκνοῖτο, μήτε γῆ κ[αρπὸν φέροι.
Ἀρ. ὦ γῆ πατρῴα χαῖρε· σὲ γὰρ ἀσπ[άζομαι
πασῶν πόλεων ἐκπαγλ[. . . . .
15 ? τὸ δὲ πρᾶγμα τί ἐστι[. . . . .
(Ἀρ.) χαίρειν δέ φ[ημι . . . .
πανιαπ . . . .
πρα . . . .

Riferisco, eccetto che per il verso 14, il testo adottato dal Körte e restituito dietro congetture del Van Leeuwen, del Wilamowitz e sue, rimandando alla pubblicazione del Körte per il facsimile e per l'indicazione particolare della paternità delle congetture adottate. Incerta è la lezione del v. 6, in cui ἐσκεύακεν proposto dal Körte e spiegato da lui col confronto di Menandro *Sam.* 254 Μοσχίων ἐσκεύακέν με " er hat mich reingelegt „ è il migliore integramento finora ritrovato (ἐσκέμμεθα Leeuw.[1]

ἔσκωπτ' ἀεί Leeuw.[2]), benchè lasci luogo a dubbi, particolarmente per il modo con cui si riattacca il verso seguente (1). Per il verso 8 il Körte non accetta nessuno degli integramenti proposti, e con ragione, perchè *μεθῆκε δή* del Croiset e *μετήγαγεν* del Lefebvre sono impossibili paleograficamente. " Der letze Buchstabe der Zeile war *M* oder allenfalls *N*, sicher nicht *T* ", scrive infatti il Körte, e chi esamini la riproduzione fotografica del papiro vede che ha ragione; il papiro è spaccato per il lungo, ma si vedono tratti indiscutibili di almeno i due primi elementi del *M*: dirò subito che è possibilissimo anche *Λ* o doppio *Λ*, cfr. per la forma il *Λ* di *ἐκπαγλ* v. 14. La congettura del Wil. *μέμνησθ' ὅτι* conduce ad una costruzione troppo artificiosa e improbabile. Quanto a me noto che nei papiri il *M* non può di solito distinguersi dal doppio *Λ* *(ΛΛ)*, e del resto la riproduzione fotografica dà come certa solo la prima parte del *M* supposto, cioè *Λ*, e perciò credo che si abbia un emendamento soddisfacente, tanto per il senso come per la paleografia, leggendo *οὐ μέλλ[ων ἄγειν... ἐν τῷ ξύλῳ ;*. In un periodo in cui Atene sentiva grave il peso degli errori dei suoi capitani è opportuno questo far ricadere su quest'uomo risalito la causa della disfatta di Mantinea.

Prima di indagare chi possa essere l'uomo politico preso di mira, sarà opportuno studiare i vv. 13 sgg., in cui appare Aristide.

La mossa di Eupoli è piena di vigore e degna della grande scena della commedia attica. In mezzo a questo dilagare di odii civili, fra le voci stridule della nuova politica ateniese invilita, senza figure nobili ed eminenti, si eleva ad un tratto la persona austera di Aristide e lancia il suo nobile saluto alla città amata. Il testo lacunoso non ci permette di avere se non un adombramento dell'arte del poeta; ma ad ogni modo le linee principali possono essere rintracciate e restituite.

Quale sia l'effetto che il poeta vuole ottenere è già di subito evidente nel colorito della lingua e dello stile. Le parole di Aristide ed il tono della sua allocuzione ricevono nobile gran-

---

(1) Forse *ἐσκευακώς* espungendo il *δ'* del v. sg.?

dezza e passione dallo stile tragico; basterebbe a provarlo l'aggettivo ἔκπαγλος che appare nel v. 14. Questo verso però non mi pare bene integrato da nessuno: ἐκπαγλοτάτη καὶ φιλτάτη congettura il Körte, ma i due superlativi coordinati si indeboliscono, ἐκπαγλόταϑ' οὖν ἧς μοι φίλη propone il Croiset, ma οὖν è poco a posto e inutile dopo γάρ, ed ἧς sminuisce l'effetto del bel grido. Credo che si restituisca il *pathos* dell'allocuzione se si legge ἐκπαγλόταϑ' οὖσάν μοι φίλην, e che questa dovesse essere la lezione originaria credo risulti anche da altre prove esterne.

Lo stile dell'allocuzione abbiamo visto e vedremo essere di coloritura epico-tragica: ora precisamente Omero ama questa espressione ἔκπαγλ' ἐφίλησα Γ 415 Ε 423 (ἐφίλησεν), ed in *Antigone* 1135 sgg. il testo corretto dal Dindorf e seguito dalla maggior parte degli editori suona Θηβαΐας 'Επισκοποῦντ' (Bacco) ἀγυιάς· Τὰν (sc. Tebe) ἔκπαγλα τιμᾷς 'Υπὲρ πασᾶν πόλεων, dove il Laur. ha ἐκ πασᾶν τιμᾷς ὑπερτάταν, Callimaco *In Del.* 247 ha ἔκπαγλόν τι σεβίζομαι.

Nel verso che segue credo opportuno rilevare i due anapesti iniziali: essi esprimono vivamente lo stupore e la commozione dello spettatore, che di sulla scena vede apparire, con i simboli dell'Ade, il grande capitano. Ciò che segue nel verso non è possibile congetturare con certezza, credo però di non andare troppo lungi dal vero proponendo *exempli causa* di chiudere così il trimetro [πῶς περᾷς ἐκ τῶν νεκρῶν (1): περᾷς continua il colorito tragico del passo, e le parole da me supposte rendono quel senso di pauroso stupore che ci lasciano intravvedere i due anapesti iniziali. Necessariamente il numero delle lettere complessive del verso, dati i due anapesti, doveva essere grande, però il numero delle lettere da supplirsi non si può determinare, essendo, come appare dalla fotografia, il papiro mancante a destra; nella fotografia mi pare anche di vedere il π di περᾷς, ma essa è tutt'altro che chiara.

Anche più incerto per la condizione lacunosa del papiro è quel che segue.

---

(1) Cfr. II r, v. 6: οὕς φασιν ἥκειν παρ[ὰ νεκρῶν, cfr. Aesch. *Prom.* 572: κἀξ ἐνέρων περῶν. Soph. *Ant.* 382; *O. C.* 531; Eur. *Or.* 512; *Med.* 272.

Ad ogni modo mi pare che resti quanto è essenziale per poter riconoscere l'effetto d'arte che il poeta ha voluto ottenere. Come nell'episodio dantesco di Farinata la subita interruzione di Cavalcante Cavalcanti è inserita per render meglio, con l'immobilità e l'impassibilità di Farinata, quell'anima sua assorta e fissa nella passione politica — che rimane pur dominatrice in lui, fra le pene dei dannati, — donde il bel piglio risoluto della ripresa:

E se, continuando al primo detto,
S'egli han quell'arte, disse, male appresa,
Ciò mi tormenta più che questo letto;

così nella scena di Eupoli il medesimo effetto è ottenuto con mezzi anche più semplici. Aristide, quest'*altro magnanimo* ateniese, all'interruzione dello spettatore non risponde e non la cura, ma, come rivelano *χαίρειν* che riprende *ἀσπάζομαι* e il *δέ*, continua, assorto, nella sua allocuzione ad Atene compiendo il saluto. Qual era poi il seguito di questo saluto? Anche questo mi pare che, per un punto almeno, si possa rintracciare. Lo stile, come abbiamo veduto, ha coloritura tragica, e la tradizione epico-tragica prestava ad Eupoli il tono e le parole che Aristide doveva pronunziare. Quale fosse questa tradizione non credo difficile stabilire.

Ulisse, appena giunto ad Itaca, bacia la terra e saluta le divinità della sua patria:

ν 354 sgg.

. . . . *κύσε δὲ ζείδωρον ἄρουραν,*
αὐτίκα δὲ Νύμφῃς ἠρήσατο, χεῖρας ἀνασχών·

Oreste, nell'Elettra di Sofocle, ritornato ad Argo invoca la sua terra e poi gli dèi patrii:

Soph. *Hel.* 67 sg.
ἀλλ' ὦ πατρῴα γῆ θεοί τ' ἐγχώριοι
δέξασθε μ' εὐτυχοῦντα ταῖσδε ταῖς ὁδοῖς...

In Sofocle pure, Filottete, nello scoppio del suo dolore, si rivolge alla terra e agli dèi:

Soph. *Philoct.* 1040.
ἀλλ' ὦ πατρῴα γῆ θεοί τ' ἐπόψιοι.

E allo stesso modo nell'Agamennone di Eschilo il primo saluto del re ritornato ad Argo è per la sua città e per i patrii dèi:

Aesch. *Agam.* 810 sg.
πρῶτον μὲν Ἄργος καὶ θεοὺς ἐγχωρίους
δίκη προσειπεῖν.....

Non mi pare dubbio dunque che nel seguito dell'allocuzione di Aristide dovessero essere nominati i *θεοὶ ἐγχώριοι,* ed il v. 16 potrebbe, con qualche probabilità, essere compiuto così: *χαίρειν δέ φ|ημι τοὺς θεοὺς ἐγχωρίους.*

A ciò potremmo essere paghi essendo la nostra opera indirizzata a ritracciare quelle linee della tradizione che il tempo ha impallidite o mozzate. Se non che, come semplice supposizione, e per quei lettori che vogliano, in una forma puramente probabile avvivarsi un testo classico lacunoso, aggiungerò ancora qualche indagine. Il saluto dell'Araldo nell'Agamennone ci offre una ampliazione della formola tradizionale che, come ha un particolare valore in quel luogo della tragedia eschilea, così può essere suggestiva per il nostro frammento:

Aesch. *Agam.* 508 sgg.
νῦν χαῖρε μὲν χθών, χαῖρε δ' ἡλίου φάος,
ὕπατός τε χώρας Ζεύς, ὁ Πύθιός τ' ἄναξ,
τόξοις ἰάπτων μηκέτ' εἰς ἡμᾶς βέλη.

Anche qui i due saluti consueti ricorrono, la terra e gli dèi patrii, ma un altro vi si intromette che è ben naturale per chi è sfuggito da morte nella tempesta che ha combattuto il suo ritorno con la flotta: il saluto al sole, alla vita. Non è improbabile che un medesimo saluto ricorresse anche nell'allocuzione di Aristide, che ritornava alla luce della vita dalle tenebre dell'Ade, cosicchè si potrebbe congetturare che l'allocuzione continuasse ad un di presso così:

χαίρειν δέ φ|ημι λαμπρὸν ἡλίου φάος
πάντ' ἀπ|οφανοῦν καὶ τοὺς θεοὺς ἐγχωρίους,
πρᾶ γος δὲ τῆσδε γῆς φυλάσσοντας δίκη.....

Ho integrato l'ultimo verso supponendo che Aristide salutasse per ultimi quanti ancora onesti fra i suoi cittadini serbava Atene. Cfr. per la forma:

Aesch. *Sept.* 1 sg.

> *Κάδμου πολῖται, χρὴ λέγειν τὰ καίρια*
> *ὅστις φυλάσσει πρᾶγος ἐν πρύμνῃ πόλεως.*

Resta ora a vedere chi sia il politicante risalito che il poeta morde.

Considerando il secondo verso del passo da noi studiato:

> *κοὐδ' ἂν ἠττίκιζεν, εἰ μὴ τοὺς φίλους ᾐσχύν[ετο,*

e confrontandolo con il fr. 168 K. di Platone comico, pare si abbia alcuna ragione per credere che il sicofante di Eupoli non sia altro che Iperbolo. Platone infatti scrive di lui:

> *ὁ δ' οὐ γὰρ ἠττίκιζεν, ὦ μοῖραι φίλαι,*
> *ἀλλ' ὁπότε μὲν χρείη 'διῃτώμην' λέγειν,*
> *ἔφασκε 'δῃτώμην', ὁπότε δ' εἰπεῖν δέοι*
> *'ὀλίγον', 'ὀλίον' ἔλεγεν . . . .*

E assai naturale è certamente l'accusa di non saper parlare attico se rivolta ad Iperbolo. dal momento che la sua origine spuria era a lui rimproverata dai comici, e Polizelo (Schol. Luc. 47) lo chiama frigio *εἰς τὸ βάρβαρον σκώπτων*, Platone lo dice *lidio* (170 K.); Andocide fr. 5 Blass, lo dice *ξένος καὶ βάρβαρος* e dice che il padre suo era schiavo pubblico; ma prima di vedere quanto anche le altre caratteristiche convergano, occorre esaminare se l'identificazione non sia esclusa da ragioni cronologiche. Sulla data dei *Demi* anche prima della scoperta presente vi era disparità di opinioni. Per ricordarne solo alcune (1), Rasp, *comm. de Eup. Dem. et Civit.* p. 11, poneva la rappresentazione dei Demi dopo la spedizione di Sicilia nell'Olimp. 92, 1 (411); il Meineke in *Hist. crit.* 129 poneva la commedia in 412, per ragioni che poi esamineremo, e poi, in *Fr. com. gr.* II 455, mutò opinione, e arguendo dal fr. 4 *M.* = 91 K. che Nicia fosse ancor vivo quando fu rappresentata la commedia, la collocò nel 415; il Gilbert ancora (*Beiträge zur inn. Gesch. Athens im Zeitalt. des Peloponnes. Krieges* p. 222) la faceva risalire al 419. Dopo la scoperta, il Körte ritiene sicura la

(1) Vedi le altre in Thieme cit. infr. p. 60 sgg.

prima datazione del Meineke, cioè il 412, basandosi particolarmente sulle ricerche del Thieme *Quaest. com. ad Pericl. pert.* p. 60 sgg. (1).

Ora, siccome Iperbolo fu ostracizzato tra il 417 e il 416, anzi, secondo il Beloch (*Att. Pol.* p. 332 sg., cfr. p. 55), nei primi mesi del 417, nel caso che si debba accogliere una datazione posteriore, l'identificazione d'Iperbolo con il personaggio da noi studiato sarebbe impossibile (cfr. Körte p. 299). Occorre adunque esaminare anzitutto quelle conclusioni del Thieme, che il Körte accetta, per vedere se sono esatte.

Ora il Thieme (o. c. p. 55 sg.) basa le sue induzioni sul fatto che nella migliore tradizione manoscritta del fr. 91 K. = Gal. *π. ψυχῆς παθ.* 1, 7, 38 il nome di Nicia non ricorre; infatti nel passo che è dato dagli editori comunemente (V. Gal. *Scr. min.* I p. 29, 10, Marq.) *ταῦτα καὶ ὁ Εὔπολις ἐρωτώμενον Ἀριστείδην τὸν δίκαιον ὑπὸ τοῦ Νικία, ὡς ἐγένου δίκαιος, οὕτω εὐπρεπῶς ἀποκρινόμενον ἐποίησεν..... L*[1] dà *ἡ το νητιας*. Se non che, dinanzi a questa incertezza della lezione manoscritta, si deve osservare: 1) che la lezione che dà il nome di Nicia, debbasi essa ad una fonte manoscritta o no, è certamente assai probabile, dato *ἡ το νητίας* che difficilmente si potrebbe spiegare in altro modo; 2) che anche ammettendo fosse da escludersi questa lezione, il passo di Galeno se non prova che Nicia fosse vivo al tempo della rappresentazione, non dà alcun argomento per provare che egli vivo non fosse, e perciò non v'è alcuna difficoltà per questa parte ad assegnare la commedia ad una data anteriore all'ostracismo di Iperbolo.

Ma il Thieme ha posto in luce un nuovo elemento di cronologia che merita di essere studiato. L'autore del trattato *Sul sublime* (in XVI 2), per illustrare l'austerità della formula di giuramento di Demostene *De corona* 208 *μὰ τοὺς ἐν Μαραθῶνι προκινδυνεύσαντας*, la paragona con un luogo simile di Eupoli nei Demi (§ 3) *καίτοι παρὰ τῷ Εὐπόλιδι τοῦ ὅρκου τὸ σπέρμα φασὶν εὑρῆσθαι.*

οὐ γάρ, μὰ τὴν Μαραθῶνι τὴν ἐμὴν μάχην,
χαίρων τις αὐτῶν τοὐμὸν ἀλγυνεῖ κέαρ.

(1) Il Thieme però, confr. anche [Long.] *π. ὕψ.* 16, 3 sceglierebbe il 413, mentre il Van Leeuwen si rifà al 417-415.

Poscia l'Autore seguita a paragonare i due giuramenti, in quello che avevano di diverso per le circostanze in cui furono pronunciati, e osserva che in Eupoli " non v'è altro che un giuramento, e questo pronunciato dinanzi agli Ateniesi *quando la loro fortuna politica non era ancora scossa ed essi non avevano bisogno di conforto (καὶ πρὸς εὐτυχοῦντας ἔτι καὶ οὐ δεομένους παρηγορίας τοὺς Ἀθηναίους)*; e per di più il poeta in esso non divinizza gli eroi per suscitare negli uditori un'ammirazione condegna della loro virtù, ma sostituì al nome degli antenati cimentatisi per la patria un'espressione impersonale, la stessa battaglia. Mentre in Demostene il giuramento è rivolto agli Ateniesi *sconfitti (ἡττημένους), perchè ad essi più non apparisca Cheronea una sventura* ". Ora da questo passo risulta manifesto che lo scrittore prospetta le condizioni di tempo dei Demi ben diverse da quelle che furono dopo la battaglia di Cheronea, e perciò anche da quelle che seguirono la sconfitta siciliana, tempo di cui certamente non si potrebbero dire le parole che abbiamo riferito nel testo greco. È chiaro dunque che la data dei *Demi* deve essere posta prima della morte di Nicia, ciò che ci riconduce a dar fede alla volgata del passo di Galeno.

Però il Körte p. 296 n. rigetta senz'altro la testimonianza dell'Autore del *De sublimitate*, dicendo che il Thieme: " hat aber, wie sich nun zeigt, die historische Genauigkeit dieses Autors überschätzt ". Ma certo non vi è alcuna ragione di dubitare qui della fede storica dello scrittore del *De sublimitate*, a meno di avere qualche indizio contrario, che a mio parere manca assolutamente. Infatti è vero che il Körte si riferisce al f. I *r* del presente papiro, in cui si parla di quegli che abitano *ἐν μακροῖν τειχοῖν*, e si dice dai demi che sono *ἀστικώτεροι ἡμῶν*, ciò che è evidentemente ironico, ed allude a gente non cittadina venuta ad abitare sulle grandi mura; ma quando il Körte (p. 296) per spiegare questo passo, dopo aver riferito Thuc. II 17, 3 (da cui risulta che nell'invasione spartana molti contadini si erano stabiliti sulle grandi mura e in gran parte del Pireo) aggiunge che queste popolazioni, al più tardi dopo la pace di Nicia, dovettero ritornare nelle campagne, e che solo in seguito, dopo la occupazione di Decelea, ritornarono (Thuc. VII 19 e 27) e si stanziarono più lungamente, mi pare che abbia molto forzato

il valore di questo cenno cronologico. Anzitutto, anche ammesso che parte dei rifugiatisi sulle grandi mura siano poi ritornati alle loro sedi, è ben naturale che non tutti vi ritornassero. ed è ovvio che parecchi, adattatisi alla vita cittadina e trovatovi lavoro, vi siano rimasti; così avviene sempre, perchè gli agricoltori, una volta assorbiti dalla città, a malincuore ritornano alla campagna, e non diversamente si spiega il fenomeno dell'inurbamento. Cosicchè anche prima della guerra decelea poteva alludersi a questo inurbarsi dei contadini abitanti sulle grandi mura. Ma se si bada bene poi, la frase stessa di Eupoli indica questo; egli fa dire ai demi: *essi sono ⟨ormai⟩ più cittadini di noi*, ciò che indica che già da qualche tempo i contadini vi si erano stabiliti e già avevano preso così possesso della nuova vita da darsi delle arie da perfetti cittadini; del che i Demi sono un poco punti.

Applicata invece a gente venuta appena allora l'espressione di Eupoli sarebbe meno arguta e naturale. Ma vi è di più: in realtà Tucidide, in proposito della guerra decelea (VII 27), non dice punto che i contadini si siano ritirati sulle grandi mura, se anche sembra probabile dal testo che dovessero essersi rifugiati in città, e questo tacere del sito in cui si stanziarono proviene probabilmente dal fatto che le grandi mura erano già occupate da quelli che vi avevano preso sede precedentemente, e che perciò i nuovi venuti dovettero spargersi qua e là; mentre invece il testo di Tucidide II 17 riceve una nuova luce dal passo recente di Eupoli. Tucidide infatti, dopo aver detto che dei contadini alcuni cercarono rifugio fra i parenti e gli amici, e i più si stanziarono nei luoghi inabitati della città, nei tempii, nei santuari degli eroi, eccetto l'Acropoli e l'Eleusinio e gli altri edifizi meglio serrati, e che anzi lo stesso Pelargico fu abitato contro la prescrizione dell'oracolo, aggiunge: *κατεσκευάσαντο δὲ καὶ ἐν τοῖς πύργοις τῶν τειχῶν πολλοί, καὶ ὡς ἕκαστός που ἐδύνατο. Οὐ γὰρ ἐχώρησε ξυνελθόντας αὐτοὺς ἡ πόλις, ἀλλ' ὕστερον δὴ τὰ μακρὰ τείχη ᾤκησαν καταvειμάμενοι, καὶ τοῦ Πειραιῶς τὰ πολλά.* Ora mi pare chiaro che *ὕστερον* e *κàτανειμάμενοι* pongano questa notizia ulteriore su di un piano cronologico diverso dalle notizie precedenti; là si parlava di un rifugio temporaneo, qui di una abitazione stabile avvenuta poi come conseguenza dell'inurbamento, ciò che conviene

affatto con il passo di Eupoli, e con la spiegazione e la cronologia da me date.

Resta dunque assai improbabile che la data dei *Demi* sia, come vuole il Körte, il 413, lo stesso anno appunto della occupazione di Decelea e della catastrofe siciliana, e il dato dell'Autore del *De subl.* non è punto infirmato. Quanto all'opinione del Thieme che crede che la commedia non possa essere anteriore al 414 (perchè in *sch. Arist.* III p. 672, 7 accoglie con i codici Gelone fra i quattro duci risuscitati), essa cade ormai affatto, perchè è provato dalla scoperta dei nuovi frammenti che quarto fra i duci è Mironide, e perciò è accertato che *Γέλωνα* dei codici è un errore per *Μυρωνίδην* già ristabilito dal Gilbert.

Nessuna ragione cronologica ci impedisce dunque di vedere in Iperbolo il politicastro assalito dal poeta, anzi vi sono molte altre ragioni favorevoli. Abbiamo già citato il frammento di Platone comico e la sua interessante consonanza con i primi versi di l *v.*, ed abbiamo toccato anche dell'origine spuria di Iperbolo: ma vi è di più: nei vv. 4, 5, si parla di questo politicastro come frequentatore di bagascioni *(πόρνων)* e di bordelli *(κινητήριον)*; ora precisamente tale era l'accusa che Eupoli rivolgeva a Iperbolo da lui satireggiato sotto il nome di Maricante, come dimostra la glossa di Esichio: *Μαρικᾶν κίναιδον* fr. 181 K. Di più la madre di lui era chiamata *πόρνη* da Ermippo nelle Artopolidi (10 K.): *(ὦ σαπρὰ καὶ πᾶσι πόρνη καὶ κάπραινα)* (1). Ciò che ci dà anche modo di interpretare più giustamente il verso 5: *ἀλλ' ἔδει νεύσαντα χωρεῖν εἰς τὸ κινητήριον.* Di solito si interpretano queste parole nel senso che egli dovesse ritirarsi nel bordello chinando il capo per entrare nella bassa porta, ma è molto più vigoroso se, come io credo, si intende che il brav'uomo esercitando il suo mestiere infame dovesse, come le meretrici, far cenno ai passanti e guidarli al *κινητήριον*, ciò che è la sorte delle meretrici di ultimo rango (2). Che secondo il poeta egli fino a poco tempo prima non fosse stato

(1) Perciò sarei tentato di integrare il v. 4 così: *τῶν ἀπραγμόνων γε πόρνων κοὐχὶ τῶν σεμνῶν* [*γεγώς*. Cfr. per il costrutto Eurip. *Hel.* 379 sg. *δεινὸς χαρακτὴρ κἀπίσημος ἐν βροτοῖς Ἐσθλῶν γενέσθαι.*

(2) Il Körte traduce, p. 298: “Nein er müsste mit gesenktem Haupt ins Bordell wandern„.

iscritto a nessuna fratria è anche naturale per il fatto che Andocide presso lo Scoliasta delle *Vespe* v. 1001 dice che il padre di lui era schiavo pubblico (lui stesso faceva il lucernaio: Schol. *Nub.* 1064). Nel v. 7 è detto *ταῖς στρατηγίαις δ' ὑφέρπει καὶ τρυγωιδ[ίαν δάκνει*, ora è noto che Iperbolo successe come capopopolo a Cleone, e appunto Aristofane lo rappresenta aspirante alla strategia, proponendo imprese di quella politica imperialistica e bellicosa con cui cercava di guadagnarsi il favor popolare: vedi i *Cavalieri* 1300 sgg. *φασὶ μὲν..... οὐ γὰρ ἡμῶν γε στρατηγῶν.....* che son parole delle triremi che Aristofane rappresenta sdegnate e rifiutantisi alla spedizione proposta da Iperbolo. Quanto a *τρυγῳδίαν δάκνει* resta incerta l'integrazione (che è del Körte, Leeuw. *τρυγωδοῖς μέμφεται*), ma il senso non pare dubbio: si allude alla guerra che fa il personaggio di Eupoli contro i comici che lo avevano vituperato. Ora appunto Iperbolo era stato tratto vituperosamente sulla scena da Eupoli nel Maricante, ed è naturale che cercasse di vendicarsi poi quando si sentiva sicuro del favore popolare. Finalmente nei v. 8 sgg. è ricordata la battaglia di Mantinea, della cui sconfitta si fa cadere la causa sull'anonimo personaggio. Ora appunto in quel tempo Iperbolo era fra i capipopolo di Atene, ed è certo che i comici alludono di preferenza a fatti recenti. In ultimo poi è ormai noto (vedi Pohlenz, in append. all'articolo del Körte) che il verso di Eupoli (I *v.*, 11) *ὅστις οὖν ἄρχειν τοιούτους ἄνδρας.....* è quasi eguale a quello dell'epirrema di Aristofane nei *Cavalieri*: *ὅστις οὖν τοιοῦτον ἄνδρα μὴ σφόδρα βδελύττεται* (1288); ora Aristofane immediatamente dopo tocca di Iperbolo, e qualunque sia la ragione di questa identità verbale (1). anche questo è un argomento di più all'identificazione di Iperbolo.

La commedia dunque, con probabilità, fu scritta e rappresentata nel tempo intercedente fra la battaglia di Mantinea e l'ostracismo di Iperbolo (2), ciò che corrisponde all'uso dei comici antichi di alludere nelle loro *revues* politiche a fatti di immediata attualità.

(1) Vedi su ciò gli scoliasti e la discussione del Pohlenz: p. 314.

(2) La cui data è solo congetturale, ma con ogni probabilità ebbe luogo, come abbiamo detto, fra il 417 e il 416.

Aggiungerò che Iperbolo e Pisandro sono associati, come nei nuovi frammenti dei Demi (vedi di Pisandro I *r.*), nelle Artopolidi di Ermippo, fr. 9 sg. K. e nel Maricante di Eupoli stesso, fr. 182 K. Quanto poi al dato cronologico su cui si basa il Meineke (*H. Cr.* 129), per essere nel fr. 102 K. ricordato Lespodia, che fu stratego nel 414-413, non vi è alcuna ragione per dare ad esso alcun valore essenziale per la cronologia.

Nel fr. di Eupoli Lespodia è ricordato appena per la sua persona sgraziata; ora se egli fu poi stratego non si vede perchè non fosse ricordato come un personaggio caratteristico in Atene alcuni anni prima, quando, pur avendo forse un grado inferiore, era sempre fra i personaggi in vista, come quegli a cui era destinato un avvenire maggiore. Lo stesso si dica di Demostrato, che nel fr. 96 è detto *ἄριστος ἀλιτήριος* e che, per essere egli stato uno dei fautori della spedizione di Sicilia, il Couat (*Arist. etc.* p. 138, 9) ne argomenta che la commedia fu rappresentata dopo la catastrofe siciliana. Ora, anzi tutto, Demostrato non sarà diventato tutto ad un tratto un mestatore politico, e la sua tendenza si sarà dimostrata anche prima, in una città, come Atene, in cui tutti si conoscevano assai bene fra loro; in secondo luogo abbiamo già visto che non si può togliere fede all'autore del *De subl.* che ci dà la commedia come anteriore alla disfatta ateniese.

E del resto con questi risultati convengono anche gli altri elementi cronologici che si possono dedurre dai frammenti già conosciuti della commedia prima della scoperta presente. Così, per esempio, il fr. 100 K.

> *..... καὶ μηκέτ' ὦναξ Μιλτιάδη καὶ Περίκλεες*
> *ἐάσατ' ἄρχειν μειράκια βινούμενα*
> *ἐν τοῖν σφυροῖν ἕλκοντα τὴν στρατηγίαν*

è già stato notato da altri che *μειράκια βινούμενα* conviene benissimo ad Alcibiade, e giova osservare che è tanto più appropriato se si accetta la nostra cronologia, considerando che per il 420/19. e successivamente per il 419/18, Alcibiade era stato scelto stratego in luogo del vecchio e sperimentato capitano Nicia (cfr. Beloch *A. P.* p. 54).

Frequenti poi sono nei frammenti che debbono attribuirsi

a questa commedia le allusioni ad onori dati a chi abbia vinto nelle corse:

fr. 118 *κἂν τις τύχῃ πρῶτος δραμὼν εἴληφε χειρόνιπτρον.*
ἀνὴρ δ' ὅταν τις ἀγαθὸς ᾖ καὶ χρήσιμος πολίτης,
νικᾷ τε πάντας χρηστὸς ὤν, οὐκ ἔστι χειρόνιπτρον.

cfr. fr. 116 *τῆς τοῦδε νίκης πλεῖον' ἑλκύσαι σταθμόν.*

Ora precisamente nel 420 Alcibiade vinse in Olimpia, e per questa vittoria venne in onore particolare presso il popolo; egli stesso si teneva perciò degno di essere eletto duce, come appare dal discorso che Tucidide gli fa pronunciare più tardi: VI, 16 *καὶ προσήκει μοι μᾶλλον ἑτέρων, ὦ Ἀθηναῖοι, ἄρχειν..... καὶ ἄξιος ἅμα νομίζω εἶναι..... διότι ἅρματα μὲν ἑπτὰ καθῆκα, ὅσα οὐδείς πω ἰδιώτης πρότερον, ἐνίκησα δὲ..... Νόμῳ μὴν γὰρ τιμὴ τὰ τοιαῦτα, ἐκ δὲ τοῦ δρωμένου καὶ δύναμις ἅμα ὑπονοεῖται*, e dalle parole di Nicia a cui Alcibiade rispondeva: cfr. 12, 2 *εἴτε τις, ἄρχειν ἄσμενος αἱρεθεὶς..... τὸ ἑαυτοῦ μόνον σκοπῶν, ἄλλως τε καὶ νεώτερος ἔτι ὢν ἐς τὸ ἄρχειν, ὅπως θαυμασθῇ μὲν ἀπὸ τῆς ἱπποτροφίας*. Cfr. anche 15, 2; per la sua giovinezza si difende Alcibiade in cp. 17.

Già il Gilbert p. 223 ha posto in luce come ad Alcibiade ed ai Demi si convenga il fr. 310:

καὶ λέγουσί γε
τὰ μειράκια προϊστάμενα τοῖς ἀνδράσιν

cfr. il fr. 101 *ἀνὴρ πολίτης πουλύπους εἰς τοὺς τρόπους*

e il 109 *γυναῖκ' ἔχοντα μάλα καλήν τε κἀγαθήν*
αὕτη νεανικοῦντος ἐπεθύμησέ μου.

Però il Gilbert p. 223 n. 4 crede che il frammento 117:

καὶ μὴν ἐγὼ πολλῶν παρόντων οὐκ ἔχω τι λέξω·
οὕτω σφόδρ' ἀλγῶ τὴν πολιτείαν δρῶν παρ' ἡμῖν.
ἡμεῖς γὰρ οὐχ οὕτω τέως ᾠκοῦμεν οἱ γέροντες,
ἀλλ' ἦσαν ἡμῖν τῇ πόλει πρῶτον μὲν οἱ στρατηγοί
ἐκ τῶν μεγίστων οἰκιῶν, πλούτῳ γένει τε πρῶτοι,
οἷς ὡσπερεὶ θεοῖσιν ηὐχόμεσθα· καὶ γὰρ ἦσαν·
ὥστ' ἀσφαλῶς ἐπράττομεν· νυνὶ δ', ὅταν τύχωμεν,
στρατευόμεσθ' αἱρούμενοι καθάρματα στρατηγούς.

riferito da Stob. *Flor.* 43, 9 sotto il nome di Eupoli e attribuito dal Meineke ai Demi, non possa riferirsi a questa commedia, perchè tratta di gente povera e vile che aspira alle strategie, mentre nei Demi si colpirebbe Alcibiade ed i suoi amici che erano ricchi e di nobili famiglie (1). Ma credo giusto notare che l'esclusione voluta dal Gilbert non può ora più sussistere, perchè appunto il personaggio che abbiamo identificato con Iperbolo è rappresentato da Eupoli come uomo di vilissima e poverissima origine che aspira a diventare stratego, se già non lo fu. Ora è certo che accanto ad Alcibiade dovevano stare altre figure che, pur essendo uomini saliti nel medesimo tempo alla vita politica, non dovevano essere tutti nè nobili nè ricchi.

Finalmente ciò che abbiamo detto fin qui può servire anche di commento ai vv. 15 sgg. del nuovo fr. III *r.* di cui ci occuperemo, per la lezione del testo, più innanzi:

ἐμ[εμφ]όμην δ' ἂν . . . .
. . . . τῶν νεωτ[έρων
τὸν σωκρατί[ζονθ'], ὁπόταν εὖ τὸ σῶμ' ἔχ[η.

Chi sia questo socratizzante sibarita non è detto, ma pare a me molto probabile sia lo stesso Alcibiade, se pensiamo alla scena del *Simposio* ove egli, ebbro, si professa grande ammiratore e discepolo di Socrate (212 *d* sgg.); e l'identificazione mi pare anche più probabile confrontando un altro frammento di Eupoli che mi sembra servire di commento a questo passo:

fr. 352 *μισῶ δὲ καὶ τὸν Σωκράτην τὸν πτωχὸν ἀδολέσχην,*
ὃς τἄλλα μὲν πεφρόντικεν,
ὁπόθεν δὲ καταφαγεῖν ἔχοι τούτου κατημέληκεν.

Come si vede, il discepolo che faceva il *viveur* socratizzante, è bene opposto al maestro, il quale non aveva di che mangiare e non se ne curava. Del resto anche il raffinato Fidippide delle *Nubi*, che va pazzo per i cavalli e le corse, raccoglie alcuni elementi satirici desunti dalla figura di Alcibiade (2).

---

(1) Anche il Thieme p. 66 n. gli dà ragione.
(2) Anche Iperbolo nelle *Nubi* 876 è posto fra gli allievi di Socrate, cfr. 1065 sg.

Nel *verso* del secondo foglio è un frammento in cui appare Mironide, al quale è rivolta una appassionata invocazione:

5 ἐπ]εὶ δ' ὁρῶ τοὺς ἄνδρας ἤδη τυχη . . . . .
καθη]μένους, οὕς φασιν ἥκειν παρ[ὰ νεκρῶν,
ἐνταῦ]θα μὲν δὴ τῶν φίλων προστή[σομαι.
μόν]ος ὀρθὸς ἑστηκὼ[ς πάρε]στ' αὐτῶν [ὁδί
ὁ Μυ]ρωνίδης, ἐρώμεθ' [α]ὐτὸ[ν . . . .
10 εἰπέ μοι ὦ . . .
μόλις ε . . . . . .
προς πολλῶν . .
φρά[σ]ον . . . . .
(Μυ.) ὅ]δ' αὐτός εἰμ' ἐκεῖνος ὃν ε[. . . . .
15 ὁ τὰς Ἀθήνας πόλλ' ἔτη [προηγμένος
. . (1) ασι [ἀνάν]δρους ἄνδρ[ας
η καὶ σαφῶς οι . . .
ηναυεθ . ηγγ .

Ho accolti anche qui, eccetto che nei versi 9 e 14, i supplementi preferiti o proposti dal Körte.

Il 1° v. è dato senza integramento dagli editori, e certo le due ultime parole ἤδη τυχη non possono stare per la metrica, ma poichè καθ]ημένους del v. seguente vuol dire anche: *accolti a giudizio*, e i duci dovevano appunto essere seduti nell'*Agora* in atto di attendere le accuse contro i cattivi reggitori di Atene, credo che in un papiro come questo, copioso di errori e di ommissioni, non sia difficile pensare ad una trasposizione o ad un'ommissione e leggere ἤδη ⟨κατὰ⟩ τύχην Καθημένους. Vedi per una simile trasposizione p. e. III *v.* v. 8 *ΤΟΝΙΕΡΕΑΤΟΥΔΙΟϹ* invece di ἱερέα τὸν τοῦ Διός, ristabilito dal Leo.

Nel v. 9 il Körte integra ὅτι θέλει che mi pare molto debole; i versi brevi che seguono indicano che si ha una supplica calorosa, perciò il desiderio deve essere da parte dell'interlocutore

(1) Due lettere e non una, come nella trascrizione, segna il facsimile del Körte e la fot.; al fine del verso il papiro è rotto.

anzi che di Mironide, propongo perciò *ὦ φίλοι* che pare suggerito da *ἐρώμεθα* (del desiderio dei compagni si farebbe interprete l'interlocutore (v. *μοί* v. 10)), o forse meglio, per preparare il tono solenne dell'invocazione, *ὡς δίκη, ut decet*.

Così pure nel v. 14, il Wilamowitz propose, ed il Körte accolse, *σ[ὺ προσδοκᾷς* che non mi pare conveniente. L'interlocutore ha subito riconosciuto Mironide, ed è naturale, perchè, pure essendo fra i morti, egli è morto di recente ed ha una posizione affatto distinta dagli altri duci evocati dall'Ade (1), perchè è un contemporaneo, e la sua nobile figura era ancora nella mente di tutti.

Di più i versi frammentari precedenti (cfr. v. 12 *πρὸς πολλῶν*) indicano che lo si supplicava; perciò, in corrispondenza al piglio fiero della risposta ed al tono tragico dello stile, preferirei *προστρέπει* " che tu invochi „ (2).

V. 15 *προηγμένος* è dato dubitosamente dal Körte, cfr. Dem. LIV 23 *εἰ γὰρ οὕτω τοὺς ἑαυτοῦ προῆκται παῖδας*, e per quanto basato su di un solo esempio, mi pare conveniente al senso e efficace.

Il v. 16 è lasciato dai critici e dagli editori incompiuto. Ma l'integrazione delle prime due lettere mancanti mi pare quasi assolutamente certa, cioè credo debba supplirsi *ὥσ]ας τ' ἀνάνδρους ἄνδρ[ας*..... Quanto al resto, può essere più dubbio, non il senso, ma la lezione precisa, l'integrazione più naturale sarebbe *ἄνδρ[ας ἔξω τῆς πόλεως* o *ἔξωθεν πόλεως* (cfr. Aesch. *Prom.* 668, Eur. *Andr.* 344). Ma poichè Mironide usa uno stile grandioso, preferisco, con il cfr. di Soph. *Aiax* 1307 *ὠθεὶς ἀθάπτους*, proporre *ἄνδρ[ας ἐκδήμους πόλεως*, cfr. Eur. *Hipp.*

---

(1) Cfr. Thieme, loc. cit., 58.

(2) *ὅδ' αὐτός εἰμ' ἐκεῖνος*..... è enfatico: " *Io* sono quegli... „ ed indica la coscienza che egli ha di sè anzichè un incerto riconoscimento dell'interlocutore. Per *προστρέπει* cfr. *οἷς ὡσπερεὶ θεοῖσιν ηὐχόμεσθα* riferito ai duci antichi nel fr. 117 riferito sopra. [Se però il Wilamowitz non ci conduce fuori di strada; l'ultima lettera del v. 14 leggibile nel papiro pare un *ε*, e fu il Wilamowitz a emendarlo in *σ* per integrare *σὺ προσδοκᾷς*, mentre il v. Leeuwen integrava *ἐκαλεῖτ'* dubitosamente, senza compiere il verso, e perciò a voler essere prudenti e tener l'*ε*, si può supplire *ὃν ἐννέπεις δίκῃ* o anche *ὃν ἐν δίκῃ καλεῖς*; v. per la divisione dell'anapesto Ir 15].

281, 659; *Bacch.* 215; *Iph. Aul.* 419 e Plat. *Resp.* VIII 560 *d* τὴν... αἰδῶ... ὠθοῦσιν ἔξω ἀτίμως φυγάδα, il testo è monco a destra e non si può stabilire il preciso numero delle lettere mancanti.

Il terzo foglio offre nel *recto* un altro frammento di natura diversa. È un episodio in cui appare un sicofante che si giustifica di avere estorto danaro da un ξένος, il quale è probabilmente lo stesso personaggio che ha evocato dall'Ade i duci ateniesi. È l'età dei processi di *asebeia*, e da ciò trae colore il comico in questa commedia come nei Βάπται.

Ecco il testo quale è presentato dal Körte:

. . . . ν . . . . ντε προσμ[ένω.
. . . . . . νῦν αὐτίχ' ἁγνός εἰμ' ἐγώ, [οτω corr. Wil.]
ἐπεὶ δί]καιός εἰμ' ἀνήρ. (A) λέγ' ὅ τι λέγεις.
(B) ἦλθε ξέν]ος ποτ' εἰς ἀγο[ρὰ]ν κυκεῶ πιών,
5 ἦν γὰρ ἔτι κρ]ίμνων τὴ[ν] ὑπήνην ἀνάπλεως
. . . . ων· τοῦτ' ἐννοοῦμαί πως ἐγώ.
ἐλ]θὼν δὲ ταχέως οἴκαδ' εὐθὺς τοῦ ξένου
„τί] ἔδρασας ὦ πανοῦργε καὶ κυβευτὰ σύ;"
ἔφη]ν, κελεύων τὸν ξένον μοι χρυσίου
10 δοῦν]αι στατ[ῆ]ρας ἑκατόν· ἦν γὰρ πλούσιος.
. . . . πον ἐκ[έ]λευσ' ἐμ' εἰπεῖν, ὅ τι πιὼν
ἦλθεν θύραζε·] κἆτ' ἔλαβον τὸ χρυσίον.
ἀποδοὺς δὲ ποι]είτω τις ὅτι ποτὲ βούλεται.
(A) νὴ Δί' ἄγαμαί σε] τῆς δικαιοσύνης ὅση.
15 . . . . . . ητηνουτειτω διαστολά[ς
. . . . . ων ⟨ἔ⟩πραξεν ουπιδαυριος
. . . . ς φρενῶν ἀποκλεις † ἐκποδῶν
(A.?) τὴν διαφο]ρὰν κατέλυσας [ἡτ]τηθεὶς πολύ.
(B.) . . ἐπρ]αξάμην δὲ χρήματ' οὐ λόγῳ.
20 . . . . . θανόντων οὐ χάριτος ταῦτ' ἄξια
. . . . ν εἰ σαφῶς τις ἀποθάνοι;
. . . . τοπου . . . . . .

A commentare questo passo mi pare serva bene il seguente frammento di Eupoli stesso, fr. 181 K.:

> *A.* πόσου χρόνου γὰρ συγγεγένησαι Νικίᾳ;
> *B.* οὐδ' εἶδον, εἰ μὴ 'νάγχος ἑστῶτ' ἐν ἀγορᾷ.
> *A.* ἀνὴρ ὁμολογεῖ Νικίαν ἑορακέναι,
> καί τοι τί παθὼν ἂν εἶδεν, εἰ μὴ προὐδίδου;
> *Γ.* ἠκούσατ', ὦ ξυνήλικες,
> ἐπ' αὐτοφώρῳ Νικίαν εἰλημμένον;

Anche qui come nel frammento dei *Demi* un sicofante, da un indizio qualsiasi e risibilmente sproporzionato, desume la colpevolezza di un onestuomo. Nei *Demi* l'indizio è qualche granello rimasto nella barba del ξένος che fa arguire al sicofante che egli abbia bevuto il κυκεῶ dei misteri, e per quel che io credo (v. fr. III *v.* v. 6 e quello che ne diremo poi) che egli sia colui che ha suscitate le anime dei duci per arte magica.

Il verso secondo non fu ancora integrato. Il senso è evidente: il sicofante si tiene sicuro di provare luminosamente (νῦν αὐτίκα) la propria innocenza. Nel verso precedente giova notare che è possibile integrare, oltre che προσμ[ένω con il Körte, anche προσμ[ένει, intendendo che si minacci una pena che attende il colpevole. Ad ogni modo i versi seguenti credo che si possano integrare così:

> ἄκουε δή·] νῦν αὐτίχ' ἁγνός εἰμ' ἐγώ,
> ἐπεὶ δί]καιός εἰμ' ἀνήρ.

ἄκουε δή·] nel primo verso è concesso dallo spazio, come si vede dalla fotografia del papiro, ed è suggerito dalla risposta λέγ' ὅ τι λέγεις, cfr. Aesch. *Prom.* 630: ἐπεὶ προθυμεῖ, χρὴ λέγειν· ἄκουε δή; εἰμί a prima vista è strano, ci si aspetterebbe, dato νῦν αὐτίκα, qualunque fosse l'integramento iniziale, un φανῶ, ma questa forma è usata ad arte dal comico per esprimere la sfacciataggine del sicofante che prende il tono di un prestigiatore, sì che seccato e incredulo l'uditore aggiunge λέγ' ὅ τι λέγεις. Il sesto verso neppure non è stato integrato; non mi pare però difficile trovare un supplemento conveniente e quasi certo: da ciò che segue τοῦτ' ἐννοοῦμαί πως ἐγώ è chiaro che nella parte mancante si accennava ad una riflessione del sicofante (τοῦτο); ora che può essere questa riflessione se non l'in-

duzione della colpevolezza dello *ξένος*? Ed è appunto questa induzione che, pur essendo necessaria, manca in tutto il frammento; ora chi confronti l'altro frammento di Eupoli citato sopra:

ἀνὴρ ὁμολογεῖ Νικίαν ἑορακέναι
καίτοι τί παθὼν ἂν εἶδεν, εἰ μὴ προὐδίδου;

vedrà che anche qui dobbiamo attenderci qualcosa di simile, cioè la riflessione: " dunque egli era colpevole! ", la finale *-ων* conservata ci dice che doveva essere contenuto, con grande probabilità, un participio: ma di che era colpevole se non di *ἀσέβεια* lo *ξένος*? Ed anche nell'altro frammento di Eupoli non è dimenticata l'enunciazione del capo di accusa *(προὐδίδου)*, cosicchè mi pare si possa integrare:

ἆρ' οὐκ ἀσεβ]ῶν; τοῦτ' ἐννοοῦμαί πως ἐγώ.

dato che 8 o 9, come nel facsimile, siano le lettere che si suppongono mancare: se si può giungere a 9 o 10, come apparirebbe dalla trascrizione e dalla fotografia, si può sostituire *ἆρ' οὐκ* con *πῶς οὐκ*, od anche può scriversi *πῶς οὐκ ἀδικ]ῶν*, che era la formula più generale per indicare la colpevolezza: cfr. Dem. 317, 13 *πῶς οὐκ ἀδικεῖς;*

Il v. 11 non offre sufficiente spazio al supplemento iniziale di almeno tre sillabe mancanti e il Körte suppone una corruzione del testo che originalmente avrebbe dovuto essere *ἀρνούμενον οὖν* o *ἄπαρνον ὄντ'*, nè saprei trovare di meglio. Nel v. 12 *ἦλθεν θύραζε* è integramento del Körte, ma egli stesso nota poi (p. 309 n.) " *ἦλθεν θύραζε* trifft den Wortlaut gewiss nicht ". Credo si potrà meglio integrare *ἀνόσι' ἔπραξε*. Il v. 15 non mi riesce di integrarlo, ma il verso 16 può forse integrarsi: *τί δὴ πι]ὼν ⟨ἔ⟩πραξεν οὑπιδαύριος* (1); l'*Ἐπιδαύριος* probabilmente è lo stesso *ξένος*. Uguale difficoltà del v. 15 presenta il 17, ove *ἀποκλεις* è certamente corrotto, ma correggere *ἀπόκλειστος*, che sembra naturale (v. anche Körte, p. 309), non basta a sanare il verso; credo si possa integrare: *ἦλθ' ὥ]ς φρενῶν ἀπόκλεισ⟨τος αὐτίκ'⟩ ἐκποδών.*

---

(1) O anche *τί δὴ παθ]ὼν*: cfr. sopra nel frammento citato *τί παθὼν ἂν εἶδεν .....*

Il verso 19 è certo detto dal sicofante, ma presenta varie difficoltà, *ἐπρ]αξάμην* integrato dal Wilamowitz pare sicuro, ma non riempie tutto lo spazio iniziale, di più se si corregge *οὐ λέγω* in *οὐ λόγῳ* con il Wilamowitz e il Körte e si ritiene compiuto il verso con queste parole, si cade nel rischio di modificare senza certezza la lezione del testo. Nel caso che si debba tenere la correzione *οὐ λόγῳ* del Wilamowitz, mi pare, dovendosi avere un piede in due lettere e per di più dinanzi ad una vocale iniziale del secondo piede, non si debba ritenere mancante altro che una interiezione, e cioè una risata di scherno del sicofante che si stupisce dell'ingenuo sdegno dell'interlocutore; propongo perciò: *ἃ ἅ, ἐπρ]αξάμην δὲ χρήματ' οὐ λόγῳ* (1), a meno che il verso non si debba correggere, ma supporre mancante qualcosa in fine e scritte più lunghe del consueto le prime lettere, nel qual caso si può integrare: *ἐπραξάμην δὲ χρήματ', οὐ λέγω ⟨καλῶς;⟩*; ma la prima proposta mi sembra più probabile.

Il v. 21 è lasciato mancante dal Körte, pure credo si possa arguire ciò che è caduto. Il sicofante vuol avere dalla sua anche l'interlocutore, uno dei duci, probabilmente Aristide, il giusto, cfr. anche III *v.* v. 20: si dice infatti *θανόντων οὐ χάριτος ταῦτ' ἄξια;*. Ma che cosa può meritare l'approvazione dei morti? Per di più *εἰ σαφῶς τις ἀποθάνοι* ha intonazione ironica, e giova notare che l'ironia e la derisione continua nel frammento seguente in cui probabilmente Aristide è stato fatto imprigionare dal sicofante (2):

(Ar.) *κα]λέσας με συνδεῖς κἀδικεῖς;* (Sic.) *ἀλλ' οὐ[κ ἐγώ*
ξυνέδησά σ', ἀλλ' ὁ ξένος ὁ τὸν κυκεῶ [πιών.

E deve essere infatti il *ξένος* che ha evocato i duci dall'Ade. Ciò posto, credo che anche l'ironia dei vv. 20 sg. possa essere ristabilita. Suppongo nel primo *τί δ' αὖ* che mi pare più vigoroso di *ἐκ τῶν* del Wil., e leggo:

τί δ' αὖ] θανόντων οὐ χάριτος ταῦτ' ἄξια
ἐὰν ἄνοστο|ν [ο ἄοχλον?] εἰ σαφῶς τις ἀποθάνοι;

(1) *ἃ ἅ γέλωτα δηλοῖ* Diogen. *ap. Phot.* O forse anche *ἔα*, che indica stupore.

(2) Il Körte crede invece il contrario, che Aristide abbia fatto imprigionare il sicofante. Però, se anche la questione non è ben certa, con l'opinione del Körte riesce difficile spiegare i vv. 3 e 6 del fr. seguente.

Appunto lo *ξένος* era colpevole, secondo il sicofante, di avere suscitati dall'Ade con i suoi beveraggi i duci ateniesi. Anche *τόπου* che segue nell'ultimo verso lacunoso è possibile si riferisca ai luoghi dell'Ade in confronto con la terra o viceversa. In corrispondenza di questa mia integrazione credo si debba scrivere il verso 3 della pagina III *v.* tolto dalla *Melanippe* di Euripide, non già *τί] τοὺς θανόντας ο[ὐκ] ἐᾶις τεθνηκέν[αι*; ma bensì *σὺ] τοὺς..... τεθνηκέναι.* È infatti naturale che Aristide, fatto imprigionare, dica: " sei tu che non lasci star quieti i morti ".

Non sono poi d'accordo nella distribuzione dei personaggi. Infatti il verso secondo di quest'ultimo frammento:

..... *μεδ'* (*sic*) *ἢ ταῦτ' ἂν |ἔ]πορε χρήμα|τα.*

deve essere stato detto dal sicofante. La fotografia è illeggibile e la lezione è probabilmente corrotta; ma ciò che pare probabile è che si dica che se il *ξένος* non si fosse sentito colpevole non avrebbe pagato (*μηδὲ ταῦτ' ἂν*...?). Ora se questo verso è detto dal sicofante il seguente *σὺ τοὺς θανόντας*..... non può essere detto che dal duce morto. Al sicofante, e non al morto, probabilmente va ancora attribuito il 4: . *ΑΡΤΥΡΟΜΑΙϹ ΕΤΙΔΕ . . ΑΓΩΝΙ . ΥΜ*..... che credo si debba leggere, anzichè col Wil. e il Körte, *μ]αρτύρομαι ⟨προσ⟩έτι δ' ἀγωνι[ο]ύμ[εθα* con troppo violenta correzione, piuttosto *μ]αρτύρομαί σ' · ἔτι δ' ἐ[π]αγωνι[ο]ύμε[θα* (1). Detto dal sicofante *μαρτύρομαί σ'* va bene, egli si appella ad Aristide se possa affermare che egli, che ha multato il *ξένος* che si intriga dei misteri, può dirsi un nemico dei morti. Così pure la prima parte del verso sesto deve essere stata detta dal morto *κα]λέσας με συνδεῖς κἀδικεῖς;* A cui il sicofante obbietta *ἀλλ' οὐ[κ ἐγώ Ξυνέδησά σ', ἀλλ' ὁ ξένος*..... con il gioco di parole che già abbiamo rilevato, cioè qui *δέω* è usato con riferimento al linguaggio magico, vedi Jacobs *ad Anth. Pal.* II 138.

Ecco infatti come intendo il passo: " *Sicofante:* ... Se egli non si fosse sentito colpevole non avrebbe dato a me il danaro. *Morto:* Sei tu e non il *ξένος* che non lasci stare quieti i morti.

(1) Per la divisione del tribraco vedi Ar. *Av.* 1382; *Vesp.* 767, ecc.

Sicofante: Mi appello a te stesso, ma di ciò discuteremo dopo. *M.:* È vero o no che mi hai chiamato arbitro e poi mi hai fatto legare contro giustizia? *S. (ironico):* Non sono io, ma lo *ξένος* che ti ha legato con i suoi incantamenti „. Successivamente al morto vanno i vv. 7, 9, 11 e al sicofante gli altri intermedi. Una difficoltà veramente fanno i vv. 14 sgg., che non possono essere detti dal sicofante, credo perciò siano detti o dal morto mentre se ne va, o dal corifeo sdegnato, e che si debba integrare il v. 14 così *οὗτος π]άρεστι*: " questi (il sicofante) è il colpevole! „ Del resto la questione dell'imprigionamento e della divisione dei personaggi in questo fr. è assai complessa e non son ben certo neppur io di aver colto nel giusto. Certo che dalla mia ipotesi mi pare che qualche verso riesca illuminato.

Trascriverò i vv. 13 sgg., perchè mi pare di potervi introdurre qualche miglioramento:

(*S.*) *φυλάτ]τετ' αὐτὸν καὶ παράδοτ' ἐ[ς τὸ ξύλον.*
(?) *οὗτος π]άρεστι τῶν τοιούτων ἄ]ξιος.*
15 *ἐμ[εμφ]όμην δ' ἂν καὶ Διόγ[νητ]ον κα[κῶς,*
τὸν [ἱε]ρόσυλον, ὅς ποτ' η . . . νενδε . .
τούτων πανούργων . . ιντῶν νεωτ[έρων
τὸν σωκρατί[ζονθ'], ὁπόταν εὖ τὸ σῶμ' ἔχ[η.
ἐγὼ δὲ πάσῃ προσαγορεύω τῇ πόλ[ει
20 *εἶναι δικαίους, ὡς ὅς ἂν δίκαιος ᾖι*

Nel v. 15 *ἐμ[εμφ]όμην* è supplemento incerto del K. (il pap. *EM . . OMHN*), come riconosce anche il K., ma il senso pare chiaro; quanto al v. 16 non è stato integrato: il K. nel commento scrive: " Stand am Schluss von 16 *ἦλθεν* (oder *ἦγχεν*) *ἐνδεής* (oder *ἐνδεῶς*)? „, che non mi pare dia senso soddisfacente; credo invece che si possa integrare leggendo *ὅς ποτ' ἦ[ν τῶ]ν ἔνδο[θεν Τούτων πανούργων.* Lo scambio di *ο* ed *ε*, anche se non è un errore di lettura del papiro, che deve ancora essere riveduto, è certo uno dei più frequenti errori del copista di questo papiro stesso, e ve ne sono altri esempi anche in questa pagina (v. 9, 13).

Nel v. 17 il Körte osserva: " Sehr fatal ist auch ..ιν, Leeuwens Ergänzung *ἐστί* mit Fortlassung des unmetrischen *ν* liegt ja nahe, aber ich finde keine Construction, die passt ". E neppur io credo che *ἐστί* possa accettarsi, ma poichè *ι* è di dubbia lettura e *N*, dato anche che sia certo, è da supporsi erroneo anche se si integra *ἐστί*, credo che in un papiro tanto ricco di errori non sia difficile supplire emendando [*κᾲ*]*τα̣*: *N* per *A* è assai facile.

Finalmente i vv. 19 sg. saranno ancora detti, come vuole il K., dallo stesso personaggio che ha detti i precedenti? Il loro significato allora dovrebbe essere ironico, ma non mi riesce bene di comprenderne la portata. O pure sono una ripresa del Sicofante?

AGGIUNTA a p. 356 l. 29: Conviene anche osservare che il ricordo di quest' identità verbale è ripetuto dagli Scoliasti *ad Nubes* 554 e precisamente in rapporto ad Iperbolo.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 12 Gennaio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-presidente Camerano, il Direttore della Classe Naccari, e i Soci: Salvadori, D'Ovidio, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari e Segre, Segretario.

Vien letto ed approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Comitato ordinatore per le onoranze a Giovanni Capellini nel 50° anniversario del suo insegnamento nell'Università di Bologna ha inviato un volume contenente la narrazione e i documenti di quelle onoranze.

Il Socio Guareschi offre in omaggio la Parte III della sua opera: *La Chimica in Italia dal 1750 al 1800.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 19 Gennaio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Carle, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Stampini e D'Ercole.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 5 gennaio 1913.

Si comunicano i ringraziamenti del Socio Prof. Ernesto Schiaparelli per le condoglianze trasmessegli dal Presidente a nome dell'Accademia.

Il Socio Chironi presenta uno scritto del Prof. Alessandro Lattes: *La formazione del codice penale Estense* (Modena, 1912), estr. dalle " Memorie della R. Accademia di Modena ", ser. III, vol. X, p. 2ª, rilevandone l'importanza.

Il Socio Brondi presenta con parole di viva lode i *Principii di diritto amministrativo*, vol. I (Napoli, 1912) del Prof. Oreste Ranelletti.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

PROGRAMMA

PER IL

XIX PREMIO BRESSA

La Reale Accademia delle Scienze di Torino, uniformandosi alle disposizioni testamentarie del Dottore Cesare Alessandro Bressa ed al programma relativo pubblicatosi in data 7 Dicembre 1876, annunzia che col 31 Dicembre 1912 si chiuse il Concorso per le scoperte e le opere scientifiche fatte nel quadriennio 1909-1912, al quale concorso erano chiamati Scienziati ed Inventori italiani.

Contemporaneamente essa Accademia ricorda che, a cominciare dal 1° Gennaio 1911, è aperto il Concorso per il diciannovesimo premio Bressa, a cui, a mente del Testatore, saranno ammessi gli **Scienziati ed Inventori di tutte le Nazioni**.

Questo concorso ha per iscopo di premiare quello Scienziato di qualunque nazione egli sia, che durante il quadriennio 1911-914, " a giudizio dell'Accademia delle Scienze di Torino, avrà fatto la " più insigne ed utile scoperta, o prodotto l'opera più celebre in " fatto di scienze fisiche e sperimentali, storia naturale, mate" matiche pure ed applicate, chimica, fisiologia e patologia, non " escluse la geologia, la storia, la geografia e la statistica „.

Questo Concorso verrà chiuso col 31 Dicembre 1914.

La somma destinata al premio, dedotta la tassa di ricchezza mobile, sarà di lire **9000** (novemila).

Chi intende presentarsi al concorso dovrà dichiararlo, entro il termine sopra indicato, con lettera diretta al Presidente dell'Accademia ed inviare l'opera con la quale concorre. L'opera

dovrà essere stampata; non si terrà alcun conto dei manoscritti. Le opere presentate dai concorrenti non saranno restituite.

Nessuno dei Soci nazionali, residenti o non residenti, dell'Accademia Torinese potrà conseguire il premio.

L'Accademia aggiudicherà il premio allo scienziato che le sembrerà più meritevole, anche se questi non avesse preso parte al concorso.

Torino, 1° gennaio 1913.

Il Presidente dell'Accademia
PAOLO BOSELLI.

Il Segretario della Giunta
A. NACCARI.

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze di Torino conferirà nel 1913 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Storia politica e civile in senso lato, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1910-1912. Il premio sarà di L. 2200, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Gennaio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SALVADORI, D'OVIDIO, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e SEGRE Segretario. — Scusa l'assenza il Socio GUIDI.

Viene letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Sono giunte in omaggio le seguenti Memorie di Soci corrispondenti:

T. TARAMELLI, *Rapporti fra popolazione e natura del suolo nel Friuli e nell'Appennino pavese.*

FRANZ E. SUESS, *Die Moravischen Fenster und ihre Beziehung zum Grundgebirge des hohen Gesenke.*

Similmente altri due Soci corrispondenti, i signori LACROIX e KILIAN, hanno inviato in dono parecchi loro opuscoli di Mineralogia e di Geologia e Paleontologia, dei quali si troveranno i titoli nell'elenco generale delle pubblicazioni ricevute dall'Accademia.

Il Segretario rileva inoltre, fra le pubblicazioni giunte all'Accademia, il 2° vol. delle Lettere di JAC. BERZELIUS pubblicate dal Prof. SÖDERBAUM sotto gli auspici della Reale Accademia delle Scienze di Svezia: volume contenente la corrispondenza fra

Berzelius e Davy. Il Socio GUARESCHI mette in luce la speciale importanza di queste lettere per la storia della Chimica, e plaude alla bella iniziativa di questa pubblicazione, che fu cominciata colla corrispondenza fra Berzelius e Berthollet.

Il Socio D'OVIDIO presenta in omaggio, a nome dell'Autore, l'opuscolo di G. BERNARDI: *Nuovo metodo di risoluzione dell'equazione* $ax + by = c$ *in numeri interi e positivi, quando i tre numeri noti* a, b, c *sono interi e positivi*; e mette in luce le operazioni a cui si è condotti da questo metodo di risoluzione. — Il Socio MATTIROLO offre in dono i due suoi opuscoli: *Lorenzo Terraneo (1676-1714) e l'importanza dell'opera sua nella storia botanica del Piemonte*; e *Risultati delle erborizzazioni nelle 5 terre studiate in rapporto all'efficacia del fattore antropico*; ed i tre opuscoli del Dr. G. GOLA: *Il terreno forestale*; *La vegetazione dell'Appennino piemontese*; *Osservazioni sopra un fungo vivente sugli idrocarburi alifatici saturi.*

Vengono presentate, per l'inserzione negli *Atti*, le seguenti Note:

P. GIACOSA, *Un postulato meno avvertito della dottrina dell'evoluzione,* dal Socio FUSARI;

F. GIUDICE, *Interpretazione geometrica del Metodo di Lagrange,* dal Socio PEANO;

E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero,* dal Socio SEGRE;

A. TERRACINI, *Sulle varietà di spazi con carattere di sviluppabili,* pure dal Socio SEGRE.

Infine il Socio MATTIROLO presenta, per la stampa fra le *Memorie,* uno Studio del Dr. Angelo CASU: *Lo Stagno di S^{ta} Gilla (Cagliari) e la sua vegetazione. Ricerche bio-chimiche sull'adattamento fisiologico ed ecologico delle piante palustro-stagnali all'azione dell'acqua salata.* Si dà incarico di riferire su di esso ai Soci MATTIROLO e PARONA.

LETTURE

Interpretazione geometrica del Metodo di Lagrange.

Nota di F. GIUDICE

In un precedente lavoro [1] abbiamo data una proposizione molto importante per la risoluzione approssimata delle equazioni numeriche: ora vogliamo dilucidarla con considerazioni geometriche. Siccome quella proposizione è strettamente connessa al metodo di LAGRANGE, che può talvolta riuscir utile anche pel calcolo di radice complessa, accenniamo prima nel num. 1 ad uno dei modi in cui si potrebbe procedere per sviluppare in frazione continua un numero imaginario. Nel num. 2 analizziamo la generale trasformazione lineare d'una variabile complessa; nel num. 3 ci occupiamo di radice reale; infine nel num. 4 esponiamo brevemente un nuovo metodo di calcolo assintotico valevole anche per radice complessa, che è implicitamente contenuto nel lavoro citato, e per mostrarne la praticità ne facciamo applicazione all'equazione a cui NEWTON ha applicato il suo metodo.

1. Sviluppo in frazione continua. — Se α sia un numero calcolabile con qualsiasi approssimazione, p. es. una radice reale o complessa d'una data equazione algebrica a coefficienti numerici, e ponsi che

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_r = \alpha_{r+1} + \frac{1}{x_{r+1}} = \alpha_{r+1} + \epsilon_{r+1},$$

si potrà operare in modo che sian tutti maggiori di 2 i moduli di x_1, x_2, x_3, ... e di α_2, α_3, α_4, ...

Se

$$p_0 = 1, \qquad p_1 = \alpha_1, \qquad p_{r+1} = p_{r-1} + p_r \alpha_{r+1},$$
$$q_0 = 0, \qquad q_1 = 1, \qquad q_{r+1} = q_{r-1} + q_r \alpha_{r+1},$$

[1] F. GIUDICE, *Teorema fondamentale per la risoluzione assintotica delle equazioni algebriche numeriche* (" Rend. Circ. Mat. di Palermo ", t. XXXIII, 1° semestre, 1912).

allora

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n ,$$

$$q_1 - q_0 = 1 , \qquad \operatorname{mod} q_{n+1} - \operatorname{mod} q_n > \operatorname{mod} q_n - \operatorname{mod} q_{n-1} ,$$

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} \epsilon_n}{q_n (q_n + \epsilon_n q_{n-1})} ,$$

per cui

$$\operatorname{mod}\left(\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right) < \left(\frac{1}{\operatorname{mod} q_n}\right)^2 ,$$

$$\lim_{n=\infty} \operatorname{mod} q_n = \infty , \qquad \lim_{n=\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha .$$

2. **Trasformazione lineare.** — In un piano rappresentiamo nel modo usuale una variabile complessa. Consideriamo per ciò una coppia d'assi ortogonali ed, indicando con x l'asse reale e con y l'imaginario, indichiamo con z la variabile complessa $x + iy$. Sul medesimo piano e coincidenti coi medesimi assi x ed y, e degli stessi versi, consideriamo due altri assi ed, indicando con ξ l'asse reale e con η l'imaginario, indichiamo con ζ la variabile complessa $\xi + i\eta$. Supponiamo che ζ s'ottenga trasformando z e che i valori corrispondenti della variabile iniziale z e della trasformata ζ sian legati dalla formula di trasformazione

$$z = \frac{a\zeta + p}{b\zeta + q} .$$

Questa relazione si può scrivere in quest'altro modo:

$$\left(z - \frac{a}{b}\right)\left(\zeta + \frac{q}{b}\right) = \frac{bp - aq}{b^2} .$$

Indichiamo con ρ^2 ed ω il modulo e l'argomento del secondo membro, con r ed s i moduli e con α e β gli argomenti dei fattori del primo membro; abbiamo così che

$$\frac{bp - aq}{b^2} = \rho^2 (\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) ,$$

$$z - \frac{a}{b} = r (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) , \qquad \zeta + \frac{q}{b} = s (\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) ,$$

$$rs = \rho^2 , \qquad \alpha + \beta = \omega .$$

Se pongasi che

$$z' = \frac{a}{b} + s(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha), \qquad z'' = -\frac{q}{b} + s(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha),$$

e si osservi che

$$\binom{\zeta}{z} = \binom{\zeta}{z''}\binom{z''}{z'}\binom{z'}{z},$$

si riconosce che:

La trasformazione

$$z = \frac{a\zeta + p}{b\zeta + q}$$

è risultante delle tre seguenti trasformazioni:

1ª: $\binom{z'}{z}$ che è l'inversione sul circolo di centro $\frac{a}{b}$ e di raggio ρ;

2ª: $\binom{z''}{z'}$ che è la traslazione $-\frac{a+q}{b}$;

3ª: $\binom{\zeta}{z''}$ che è la riflessione sulla retta che passa per il punto $-\frac{q}{b}$ e forma l'angolo $\frac{\omega}{2}$ con l'asse delle x.

3. Trasformazione ordinaria di Lagrange. — Supponiamo che $\frac{p}{q}$ ed $\frac{a}{b}$ sian due ridotte consecutive d'una frazione continua ordinaria: esse sono allora due frazioni ordinarie irreducibili e

$$(bp - aq)^2 = 1.$$

Se $bp - aq = 1$, la trasformazione

$$z = \frac{a\zeta + p}{b\zeta + q}$$

è risultante d'inversione sul circolo di centro $\frac{a}{b}$ e raggio $\frac{1}{b}$, della traslazione $-\frac{a+q}{b}$ e di riflessione sull'asse delle x.

Se $bp - aq = -1$, quella trasformazione è risultante delle medesime inversione e traslazione e di riflessione sulla perpendicolare all'asse delle x passante per il punto $-\frac{q}{b}$.

Siccome, in entrambi i casi, la parte di piano esterna al circolo d'inversione trasformasi nella parte di piano interna al cerchio di centro $-\frac{q}{b}$ e raggio $\frac{1}{b}$, si riconosce intanto immediatamente che: *se l'equazione a coefficienti reali e di grado* n

$$f(z) = 0$$

non ha radici interne al circolo di centro $\frac{a}{b}$ *e di raggio* $\frac{1}{b}$, *la trasformata*

$$(b\zeta + q)^n f\left(\frac{a\zeta + p}{b\zeta + q}\right) = 0$$

non può avere nessuna variazione di segno, perchè ha negative le sue radici reali e le parti reali delle sue radici imaginarie.

Se α è il valore della frazione continua e precisamente, per il nostro scopo, se $\frac{p}{q}$ ed $\frac{a}{b}$ sono due ridotte consecutive della frazione continua ordinaria in cui sviluppasi una radice positiva α dell'equazione $f(z) = 0$, allora

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \frac{1}{b(b+q)}$$

per cui la radice α è certamente interna al circolo di centro $\frac{a}{b}$ e di raggio $\frac{1}{b}$. Se si opera su di z la trasformazione

$$z = \frac{a\zeta + p}{b\zeta + q}$$

ne consegue, per quanto fu detto, che:

se $\alpha > \frac{a}{b}$, l'inversione porta la radice α in un punto dell'asse reale d'ascissa maggiore di $\frac{a}{b} + \frac{q+b}{b}$, per cui, dovendo seguire la traslazione $-\frac{a+q}{b}$ e la riflessione sull'asse delle x, la trasformata di α sarà reale e maggiore di $\frac{b}{b}$ cioè di 1;

se invece $\alpha < \frac{a}{b}$, allora l'inversione porta la radice α in un punto dell'asse reale d'ascissa minore di $\frac{a}{b} - \frac{q+b}{b}$ per cui,

dovendo seguire la traslazione $-\frac{a+q}{b}$ e la riflessione sulla retta d'equazione $x=-\frac{q}{b}$, si riconosce ancora che la trasformata di α è reale ed è maggiore di 1.

Se nel circolo di centro $\frac{a}{b}$ e di raggio $\frac{1}{b}$ cade solamente la radice α e k è l'ordine di questa radice e β è la sua trasformata e le trasformate delle $n-k$ rimanenti radici, uguali o disuguali, sono:

$$-\frac{q}{b}-\epsilon_1, \qquad -\frac{q}{b}-\epsilon_2, \qquad \ldots, \qquad -\frac{q}{b}-\epsilon_{n-k},$$

e

$$\varphi(\zeta)=(\zeta-\beta)^k\left[\left(\zeta+\frac{q}{b}\right)^{n-k}+s_1\left(\zeta+\frac{q}{b}\right)^{n-k-1}+\ldots+s_{n-k}\right]$$

dove s_r indica la somma dei prodotti delle $n-k$ quantità ϵ_1, ϵ_2, ..., ϵ_{n-k} ad r ad r, allora l'equazione trasformata è

$$\varphi(\zeta)=0.$$

Le quantità s_1, s_2, ..., s_{n-k} sono reali ed

$$|s_r|<\binom{n-k}{r}\left(\frac{1}{b}\right)^r$$

per cui, se

$$\left(\zeta+\frac{q}{b}\right)^{n-k}+s_1\left(\zeta+\frac{q}{b}\right)^{n-k-1}+\ldots+s_{n-k}=$$
$$=\zeta^{n-k}+d_1\zeta^{n-k-1}+\ldots+d_{n-k+1}\zeta+d_{n-k},$$

allora

$$\binom{n-k}{r}\left(\frac{q-1}{b}\right)^r<d_r<\binom{n-k}{r}\left(\frac{q+1}{b}\right)^r,$$

cosicchè, siccome

$$\varphi(\zeta)=\zeta^n+e_1\zeta^{n-1}+\ldots+e_{n-1}\zeta+e_n$$

dove, supposto d_0 uguale ad 1 e d_m nullo quando m sia negativo,

$$e_r=d_r-\binom{k}{1}d_{r-1}\beta+\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}d_{r-k}\beta^k,$$

vedesi che $\varphi(\zeta)$ ha sicuramente, e precisamente, k variazioni di segno e le ha in principio se, per tutti i valori di r da 1 ad $n-k$,

$$\beta > \frac{k}{r}(n-k-r+1)\frac{q+1}{b}\left(1+\frac{2}{q-1}\right)^{r-1},$$

certamente quindi se

$$q \gtreqless 2n \qquad \text{e} \qquad \beta \gtreqless n^2.$$

Siccome la parte intera di β è il nuovo quoziente incompleto della frazione continua equivalente ad α, abbiamo che: *se un quoziente incompleto della frazione continua in cui sviluppasi la radice positiva* α *non sia minore di* n^2 *ed il denominatore dell'antiprecedente ridotta della frazione continua non sia minore di* $2n$, *la trasformata relativa a quel quoziente incompleto ha tante variazioni di segno quant'è l'ordine della radice* α *e le ha in principio.*

Consideriamo ora la trasformata in θ che si ottiene con la trasformazione

$$z = \frac{\frac{a}{b}\theta + \frac{p}{q}}{\theta+1}.$$

Essa ha lo stesso numero di variazioni di segno della trasformata in ζ. Si ottiene con queste tre successive trasformazioni:

1ª: inversione sul circolo di centro $\frac{a}{b}$ e di raggio $\frac{1}{\sqrt{bq}}$;

2ª: traslazione $-\frac{a+b}{b}$;

3ª: riflessione sull'asse delle x se $pb-aq=1$, sulla retta d'equazione $x=-1$ se $pb-aq=-1$.

Siccome

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b(b+q)},$$

la radice α è certamente interna al circolo di centro $\frac{a}{b}$ e di raggio $\frac{1}{\sqrt{bq}}$; supponiamola sola interna a questo circolo e d'ordine k, come abbiam supposto prima.

Se $\alpha > \frac{a}{b}$, l'inversione porta questa radice a destra del punto $\frac{a}{b} + \frac{b+q}{q}$ per cui, dovendo seguire la traslazione $-\frac{a+b}{b}$ e la riflessione sull'asse delle x, la trasformata della radice α è positiva ed è maggiore di $\frac{b}{q}$;

se $\alpha < \frac{a}{b}$, l'inversione porta questa radice a sinistra del punto $\frac{a}{b} - \frac{b+q}{q}$ per cui, dovendo seguire la traslazione $-\frac{a+b}{b}$ e la riflessione sulla retta d'equazione $x = -1$, la trasformata della radice α, anche in questo caso, sarà positiva e maggiore di $\frac{b}{q}$, che è maggiore di 1.

Le radici esterne al circolo di centro $\frac{a}{b}$ e di raggio $\frac{1}{\sqrt{bq}}$ portansi interne per l'inversione, per cui, per la trasformazione completa, portansi interne al circolo di centro -1 e raggio $\frac{1}{\sqrt{bq}}$.

Indichiamo con γ la trasformata di α e con $-1-\lambda_1$, $-1-\lambda_2$, ..., $-1-\lambda_{n-k}$ indicheremo le trasformate delle rimanenti $n-k$ radici, disuguali od uguali. L'equazione trasformata sarà

$$(\theta - \gamma)^k (\theta + 1 + \lambda_1) \dots (\theta + 1 + \lambda_{n-k}) = 0 .$$

Supponiamo che $\frac{p}{q}$ ed $\frac{a}{b}$ sian le ridotte m^{ma} ed $(m+1)^{ma}$ e pensiamo di far successivamente m uguale ad

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Col crescere indefinitamente di m tendono a zero λ_1, λ_2, ..., λ_{n-k}, per cui, se γ che è maggiore di $\frac{b}{q}$ sorpassa ogni numero positivo, la trasformata ha k variazioni di segno e le ha in principio per infiniti valori di m; se invece si può dare un numero N maggiore di tutti i valori di γ, allora l'insieme degli infiniti valori di γ, che son tutti compresi tra 1 ed N, ha almeno un punto limite; sia δ un limite dell'insieme dei valori di γ.

Per quanto si sa delle equazioni a coefficienti e radici reali, ha precisamente k variazioni di segno

$$(\theta - \delta)^k (\theta + 1)^{n-k}$$

epperò certamente, per m sufficientemente grande, hanno precisamente k variazioni di segno

$$(\theta - \gamma)^k (\theta + 1 + \lambda_1) \dots (\theta + 1 + \lambda_{n-k})$$

e la corrispondente trasformata

$$\varphi(\zeta) = 0 .$$

4. Calcolo assintotico di radice. — Se si tien presente che, come abbiamo osservato, la trasformazione

$$z = \frac{a\zeta + p}{b\zeta + q}$$

si può scrivere anche così

$$\left(z - \frac{a}{b}\right)\left(\zeta + \frac{q}{b}\right) = \frac{bp - aq}{b^2} ,$$

non occorre pensare alle tre trasformazioni in cui l'abbiam decomposta per riconoscere che, se ρ^2 ed ω sono modulo od argomento di $\frac{1}{b^2}(bp - aq)$ e

$$z = \frac{a}{b} + \rho(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi) ,$$

il corrispondente

$$\zeta = -\frac{q}{b} + \rho(\cos(\omega - \psi) + i \operatorname{sen}(\omega - \psi)) ;$$

per cui, facendo variare ψ da 0 a 2π, si riconosce immediatamente che il circolo di centro $\frac{a}{b}$ e di raggio ρ si trasforma in quello di stesso raggio e di centro $-\frac{q}{b}$. Se poi si osserva che

il centro $\frac{a}{b}$ vien portato all'infinito dalla trasformazione, si riconosce subito che la parte di piano interna al primo circolo si trasforma nella parte di piano esterna al secondo e la parte esterna al primo si trasforma nella parte interna al secondo, come d'altronde è notorio.

Supponiamo d'operare la precedente trasformazione sopra l'equazione di grado n

$$f(z) = 0$$

e di ottenere la trasformata

$$\zeta^n + c_1 \zeta^{n-1} + \ldots + c_{n-1} \zeta + c_n = 0.$$

Se il modulo di $\frac{1}{b^2}(bp - aq)$ è molto piccolo e l'equazione in z ha una radice d'ordine k interna al circolo di centro $\frac{a}{b}$ e di raggio uguale al modulo di $\frac{1}{b}\sqrt[k]{bp - aq}$ ed ha esterne a questo circolo le rimanenti radici, la trasformata ha $n - k$ radici condensate in vicinanza di $-\frac{q}{b}$ ed una radice d'ordine k, per cui ognuno dei coefficienti della trasformata può darci un valore approssimato di questa radice; quello datoci da c_1 è

$$\frac{1}{k}\left((n-k)\,\frac{q}{b} - c_1\right).$$

Per fare un'applicazione del *nuovo metodo di calcolo assintotico* contenuto in quest'osservazione, ricorderemo d'aver trovato altra volta che dell'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

la radice positiva

$$x = 2 + \frac{1}{10+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{12+}\,\frac{1}{3+}\cdots$$

Se si opera la trasformazione

$$x = 2 + \frac{1}{10+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+\frac{1}{y}}$$

ossia

$$x = \frac{576y + 155}{275y + 74},$$

si ottiene la trasformata

$$1399y^3 - 1940y^2 - 1348y - 195 = 0$$

e di qui si deduce che approssimativamente la radice y è uguale a

$$2 \times \frac{74}{275} + \frac{1940}{1399}.$$

Questo numero ossia

$$\frac{740552}{384725} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{9051}{1745}}$$

e così, in una volta sola, risultano esatti tutti gli altri quattro quozienti incompleti che allora [1] trovammo con calcolo diretto.

[1] F. Giudice, *Sulla risoluzione assintotica delle equazioni numeriche col metodo di* Lagrangia („ Periodico di Matem. „, anno XXIII, Livorno, 1907).

Un postulato meno avvertito della dottrina dell'evoluzione.

Nota di PIERO GIACOSA.

È ammesso da tutti che l'essersi riconosciuta la cellula — qualunque sia il significato odierno di questa parola — come unità fondamentale morfologica ha segnato il principio della attuale più fruttifera fase delle scienze biologiche. Senza di questa scoperta mancherebbe la prima base alla dottrina della unità sostanziale delle forme viventi e della loro derivazione da un tipo comune primordiale, dottrina che benchè ancora allo stato di ipotesi, pure rappresenta la spiegazione più plausibile e più probabile del sistema degli organismi e costituisce la spina dorsale di tutti i concetti moderni biologici.

Ma quando noi parliamo della cellula come primo e più semplice organismo capace di vivere, noi affermiamo più di quanto possiamo provare. Il concetto di cellula è schiettamente morfologico, e i dati che noi possediamo sono soltanto capaci di dimostrare che la cellula è il primo e più semplice *strumento* di vita. A definire l'opera vivente non basta la forma; occorre ancora la materia, e la funzione in atto. Lasciamo stare la materia che è grossolanamente nota avendo noi definiti gli elementi chimici indispensabili a costituire un organismo. Rimane ancora l'elemento principale, l'atto cioè e la funzione, cioè le modificazioni a cui questa forma e questa materia soggiaciono secondo un ritmo determinato e che si manifestano come vita. Perchè la posizione da noi assegnata alla cellula di organismo primordiale sia bene definita, occorre che noi, considerandola nella sua attività, ricerchiamo in essa il tipo fondamentale e primitivo della vita di cui essa è sede. Definire questo tipo è essenziale non solo per stabilire su basi filosofiche i nostri sistemi di dottrine, ma anche per chiarire molte questioni che senza di questa definizione possono essere poste e interpretate in modo erroneo.

Questo tipo deve possedere sotto il punto di vista funzionale gli attributi della cellula che la fanno considerare come prototipo morfologico; possedere tutte le attitudini e le attività necessarie allo svolgimento dei fenomeni vitali, ben inteso in

presenza e nei limiti di quelle condizioni fisico-chimiche che sappiamo sostenere e circoscrivere la vita. Per definirlo bisogna trasportare nel dominio delle funzioni quegli attributi, quelle proprietà che nel campo strutturale conferiscono alla cellula tipica primordiale la sua posizione.

Questa cellula primordiale possiede la struttura che è necessaria per costituirla come essere vivente, e non ha bisogno di altri strumenti morfologici per raggiungere i suoi fini. Considerata come funzionante, la stessa cellula deve possedere le stesse prerogative e non abbisognare del concorso di altre attività funzionali. L'affermazione è puramente razionale perchè finora non ho parlato di alcuna verificazione sperimentale della sua esistenza reale. Ma dato l'accertamento di fatto dell'unità morfologica, l'ammessione della unità funzionale diventa necessaria, se pure a prima vista l'imperativo di tale riconoscimento non appare chiaro a tutti; e l'introduzione di questo concetto agevola singolarmente le indagini e permette di giungere a risultati di grande importanza per lo sviluppo della biologia.

Il trasporto dei termini morfologici che definiscono la cellula primordiale in termini funzionali permette subito di accertare la prima condizione a cui deve sottostare l'organismo che deve occupare quel posto. La condizione cioè di non abbisognare del concorso di nessuna altra funzione vitale per vivere; in altri termini questo organismo primordiale deve poter vivere utilizzando le energie esterne, depositate in materiali inorganici od organici, ma non originate da processi vitali. Perchè in tale caso l'organismo in cui tali processi si compirono sarebbe primitivo rispetto ad esso. Così posto il problema, è certo che esso ammette una verificazione sperimentale, la quale ha preceduto la enunciazione stessa del problema. Noi conosciamo infatti degli organismi monocellulari che per vivere utilizzano unicamente i composti inorganici che la terra provvede loro. Questi sono i veri e proprii protobionti e lo studio del loro funzionare ha per la biologia la stessa importanza che ha lo studio della struttura della cellula.

Ma una osservazione deve qui farsi; così come è posto il problema si limita alla indagine di ciò che possiamo osservare nelle condizioni attuali, le quali, come è ammesso da tutti, escludono ogni atto creativo sia nel campo inorganico che in

quello della vita. Noi dunque assumiamo come primitivo un organismo del quale ignoriamo l'origine; ma non per questo il punto di partenza della nostra indagine è meno fisso, in quanto che esso è rappresentato non da una ipotetica sostanza organica, anche già assunta alla dignità di virtualmente viva, come sarebbero i bioforidi di Weismann, ma da un vero organismo, cioè da un aggregato di strutture definibili, del quale noi conosciamo una proprietà fissa e sempre verificabile, la proprietà di non poter compiere tutti gli atti inerenti alla vita individuale e specifica senza conservare integre e associate queste strutture.

Ed un'altra osservazione è pure necessaria. Quando noi fossimo ancora all'oscuro sulla esistenza reale di un organismo a cui bastano per vivere le pure e semplici condizioni offerte dal mondo inorganico, non per questo l'assunzione del concetto di una primitiva unità elementare funzionante posta daccanto alla primitiva unità morfologica, sarebbe meno logica, cioè meno necessaria. Se non che la realizzazione di questo concetto potrebbe trovarsi o in un individuo isolato, o in aggregati di individui viventi simbioticamente, aggregati ai quali spetterebbe di costituire il tipo di protobionte. Forse in realtà le due cose sono egualmente vere; perchè nella cellula vivente più semplice noi troviamo sempre una complessità tale, che ci prova come in realtà si sia in presenza di una associazione; se non che nel protoplasma questa associazione non può sciogliersi senza avere subito la cessazione della sua vita, mentre nella sinbiosi è possibile realizzare condizioni tali per cui il legame associativo s'allenti prima e poi si sciolga senza che per questo debbano necessariamente perire gli individui associati.

Ma, lo ripeto, allo stato attuale delle nostre cognizioni, noi possiamo fare a meno di escogitare queste possibilità; e l'analisi delle singole attività dei componenti protoplasmatici, non capaci di vivere separatamente, sui quali non possediamo dati sufficienti, può per ora sospendersi.

L'essenziale, nella nostra condizione attuale, non è dunque la constatazione di un fatto accertato da tempo dai batteriologi, cioè dell'esistenza di alcune specie di organismi che possono vivere e moltiplicarsi in mezzi di coltura assolutamente privi di materiali organici; l'essenziale è la valutazione di questo dato, cioè il suo collocamento nel sistema razionale delle nostre

cognizioni. Qui non si tratta di una semplice constatazione fatta per soddisfare alle esigenze della logica; non si tratta di una acquisizione puramente filosofica. Si tratta del riconoscimento di un fatto dal quale deve derivare la definizione della vita, dal punto di vista sperimentale; dal quale devono partire le linee di svolgimento delle nostre indagini se esse vogliono indirizzarsi al loro scopo; si tratta insomma del riconoscimento di un principio che ha una sanzione pragmatica essenziale nella scienza.

La portata di una osservazione, la sua importanza rispetto ad ordini diversi, per estensione o per numero, di problemi, dipende non dalla natura dell'osservazione stessa, ma dalla posizione che l'oggetto osservato ha rispetto ad altri. Questa constatazione che vale tanto nell'ordine morale e storico, può farsi facilmente in argomento di biologia sperimentale. Le singole constatazioni, che l'istologo fa sulle modificazioni che si osservano negli elementi, hanno, prese da sè stesse, lo stesso valore, esigono gli stessi strumenti, la stessa tecnica, la stessa capacità a sperimentare, le stesse doti di accuratezza e di sincerità; ma la loro portata varia immensamente, secondo gli oggetti a cui si applicano. E quando queste osservazioni sono rivolte al comportarsi della unità fondamentale — della cellula, delle sue strutture, dei suoi componenti, — esse naturalmente varcano i confini della immediata constatazione e contribuiscono alla soluzione di vasti problemi. Lo studio del nucleo e del suo comportarsi ci spiega l'ordine dei fenomeni della riproduzione e della eredità: le reazioni motorie del protoplasma in relazione agli stimoli chimici o fisici fanno luce sulle proprietà fondamentali della psiche; si può dire che ogni osservazione esatta che rivela un nuovo attributo formale o funzionale della cellula, ha la sua ripercussione in tutto il vasto campo della scienza della vita: di qui partono i fili che accendono tutte le lampade. E questo soltanto perchè quando parliamo di cellula sappiamo di parlare di vita.

Ma possiamo noi dire altrettanto per altre osservazioni fatte in altro campo della biologia? Certo fra i fenomeni a noi noti del metabolismo dei viventi, alcuni hanno una importanza pari a quelli che ho citato e che hanno sì vasta portata: ma noi non li distinguiamo dagli altri più limitati, non sappiamo perciò comprenderne il significato. Essi racchiudono un valore ignoto.

Quasi tutti i dati della chimica biologica hanno un'importanza che non eccede i limiti immediati della esperienza a cui sono dovuti; e non permettono se non in limitata misura delle applicazioni larghe. E quando si tratta di fenomeni generali che si svolgono su vasta scala, come quelli della respirazione o della assimilazione, o le azioni enzimatiche più diffuse, noi non possiamo affermare nè distinguere ciò che hanno di fondamentale e di essenziale per la vita stessa.

Di quale soccorso possa essere l'assunzione di un punto di partenza rappresentato da un complesso organico in cui si realizzano tutti gli atti essenziali della vita nelle condizioni di maggiore semplicità, si può vedere prendendo in esame rapido una funzione fisiologica fondamentale, p. e., la respirazione.

Lo sviluppo storico delle dottrine respiratorie è stato regolato dal fatto che la respirazione venne prima conosciuta e studiata nell'uomo e negli animali respiranti per polmoni; dati di fatto ovvii hanno dimostrato la dipendenza della vita dalla funzione respiratoria, e allorchè tale funzione venne riconosciuta nella sua essenza di introduzione e trasporto di ossigeno, si attribuì alla ossidazione l'importanza che in una fase precedente s'era data alla funzione puramente meccanica (1). E dapprima si assomigliarono le ossidazioni organiche ai fenomeni analoghi inorganici; e si parlò di combustioni e perfino di deflagrazioni; poi mano mano si ammisero reazioni meno violente, ma sempre si identificarono gli scambii del metabolismo unicamente coi processi ossidativi; tantochè pochi decennii or sono parve ardita l'affermazione che negli organismi animali si possano compiere anche processi di riduzione e sintesi. Se oggidì le nostre idee al proposito si sono molto modificate, tuttavia l'interpretazione del fenomeno della respirazione non è ancora esatta.

Or bene; esaminiamo questa funzione nell'organismo funzionante più semplice; qui troveremo il fenomeno che destò tanta meraviglia nei primi scopritori, quello della anaerobiosi, cioè della vita senz'aria. Naturalmente si può dimostrare che anche in queste condizioni intervengono ancora ossidazioni, e che l'os-

(1) Come è noto, gli antichi parlavano della respirazione come d'un atto destinato a ventilare e sfreddare il cuore, e ad emettere i fumi esalanti dal sangue.

sigeno, se pure non tratto direttamente dall'atmosfera, è sempre indispensabile per mantenere la vita. Ma in questi casi è pure evidente che esso non interviene in forma libera, ma si trasporta direttamente dal corpo ossidante al corpo riducente senza mai passare allo stato di gaz. Questa forma di ossidazione negli organismi più semplici li abilita a vivere in atmosfere diverse dalla attuale, il che è della massima importanza per le dottrine dell'evoluzione in quanto l'atmosfera terrestre non ebbe sempre la sua composizione attuale; e così una semplice constatazione fattasi in base alla assunzione del trovarsi in presenza della forma vitale più semplice, per sè stessa acquista già una portata vastissima. Ma v'ha di più: per la dottrina dell'evoluzione è necessario che si mantenga la unità fondamentale strutturale e funzionale che è naturale in un ceppo unico di discendenza. Ora l'analisi del fenomeno respiratorio nella sua essenza, fatta sulla scorta di ciò che si osserva negli anaerobionti, ci permette di scorgere l'unità fondamentale della funzione. Alla cellula vivente e al protoplasma che la costituisce, l'ossigeno non giunge allo stato gassoso; esso deve pervenire direttamente per via liquida liberandosi da una combinazione per passare ad un'altra, e a quanto pare, mediante l'intervento di un fermento, cioè dell'attività stessa del corpo vivente; la combinazione che costituisce il corpo ossidante può essere più o meno salda, l'ossigeno più o meno mobile (e di questa mobilità abbiamo infiniti gradi dagli ossidi più stabili fino alle ossiemoglobine), ma la sostanza vivente si dirige ad essa e non all'ossigeno atmosferico. Questa condizione si mantiene per tutti gli organismi animali, i quali perciò sono altrettanti anaerobii quanto gli organismi classificati come tali. L'aerobiosi, come l'idrobiosi, sono dunque solo forme di ambiente, che possono aver dato luogo a sistemi diversi di fissazione dell'ossigeno, implicanti consumi di energia differenti; ma la funzione in ciò che ha di fondamentale è rimasta la stessa.

Ho già avuto occasione di far notare (1) che la fisiologia ha esagerato la parte spettante all'ossigeno nel ricambio. La intensità dei fenomeni respiratori negli animali superiori, l'imponenza dei disturbi che seguono alla sospensione di questa fun-

(1) P. Giacosa, *I fattori chimici della evoluzione*, " Giorn. R. Acc. di Med. di Torino ", vol. XV, 1909.

zione hanno indotto ad attribuire alla presenza di ossigeno nei tessuti una importanza maggiore di quella che ha in realtà. Molte cellule dell'organismo vivono in ambienti affatto privi di ossigeno libero: anzi la presenza di questo gaz si può solo constatare nelle cavità dell'apparato respiratorio. I tessuti possono sopportare abbastanza a lungo la stasi venosa che induce uno stato semiasfittico. I soli centri nervosi, che sono senza dubbio fra i tessuti più differenziali, hanno bisogno di una quantità fissa di ossigeno combinato.

Ma noi ignoriamo ancora quale sia l'ufficio dell'ossigeno nei centri nervosi (1); nè possiamo senz'altro assomigliarlo a quello che esso compie nei muscoli dove esso apparisce chiaramente come produttore di energia. Tuttavia il fatto che questi due tessuti così strettamente associati nel loro funzionare si assomigliano in questo che l'attività di entrambi non può manifestarsi se non è presente un eccesso di ossigeno che non è necessario per altri processi vitali, ci indica che la funzione nerveomuscolare, la quale deriva dalla eccitabilità rudimentale degli organismi monocellulari, nel processo della evoluzione si è singolarmente sviluppata e complicata e suddivisa, e ha assunto una forma di ricambio che è specifica, e non può nè deve essere assimilata alla funzione respiratoria ordinaria.

La fisiologia moderna ha riconosciuto l'opportunità di distinguere nel bilancio respiratorio la parte di ossigeno consumato e restituito sotto forma di lavoro muscolare, dalla parte che serve alla respirazione generale. Partendo dal concetto del primo e più semplice organismo funzionante e studiandone il ricambio, si sarebbe giunti allo stesso risultato. In ogni caso l'assunzione di questo punto di partenza basta a tracciare una linea lungo la quale i fatti vengono naturalmente e logicamente a collo-

(1) Potrebbe imaginarsi che perchè i centri nervosi si trovino in condizione di funzionare siano necessarie alcune reazioni che decorrono soltanto in presenza di un eccesso d'ossigeno che esercita una azione di massa, o una azione catalitica, senza entrare in combinazione stabile colle molecole organiche e ossidarle come avviene nei muscoli. Questa interpretazione è forse da preferirsi a quella che corre ora in fisiologia e fu enunciata prima dal Noll e dal Driesch, che cioè l'ossigeno serva a neutralizzare o meglio a svelenizzare determinati prodotti del ricambio, e che può applicarsi a spiegare il consumo d'ossigeno per tutti i tessuti in genere (cfr. Driesch, *Philosophie des Organischen*, II, p. 247, Leipzig, Engelmann, 1909).

carsi; e così fornisce il mezzo di ordinare e collegare nozioni che per sè sarebbero isolate e non avrebbero il loro vero significato.

Si possono citare altri esempi dai quali risulta l'utilità del concetto, che io propongo di introdurre. Le classificazioni attuali dei proteidi, se pure rappresentano un notevole passo sulle antiche, sono in gran parte fondate su caratteri che hanno scarsa importanza biologica; tali classificazioni hanno invece una stretta connessione colle dottrine e colle ipotesi puramente chimiche relative alla struttura, alla configurazione molecolare dell'albuminoide o dei suoi prodotti di sdoppiamento; uno studio dei processi cata- ed anabolici dell'organismo primitivo, la determinazione delle forme attraverso a cui passa l'azoto nel suo tragitto dai composti inorganici a quelli organici, deve condurre ad una conoscenza, ad una classificazione delle albumine assai più soddisfacente per il biologo.

Per arrivare in questo argomento alla chiarezza desiderabile è necessario che la terminologia acquisti una precisione maggiore dell'attuale. Conviene che la parola cellula mantenga il suo significato di struttura, di edifizio, di ricettacolo, di disposizione di parti aventi caratteri formali definiti, e non varchi i limiti di questi concetti puramente morfologici per designare anche l'attività e il funzionare, cioè il fattore che Aristotile designò sotto il nome di Entelechia. Questo errore non si può negare non sia commesso comunemente ai giorni nostri, e noi parliamo spesso di cellule intendendo non già la struttura, ma la funzione. Conviene dunque per le ragioni esposte e anche in omaggio alla storia, mantenere alla parola cellula quel significato esclusivamente statico e strutturale che tuttora le si attribuisce in istologia, se pure si sono trasmutati i primitivi concetti sulla sua natura; e conviene contrapporre a quel termine un altro che si inspiri a concetti dinamici o funzionali. Dacchè in questo argomento la lingua latina è quella che ha dato un nome, è bene che la stessa lingua dia l'altro; e poichè si tratta di designare una attività, io propongo che si adotti la parola *Faber*, artefice, per designare l'organismo primitivo che, immedesimato nella officina, la cellula, da lui stesso fabbricata, spiega qui la sua attività vivente. Cellula e Faber; nella prima. la materia e la forma indisgiungibili, nel secondo la funzione che le manifesta come viventi.

Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.

Nota del Dr. ENRICO BOMPIANI.

1. — Il teorema di Meusnier, relativo alle curve di una superficie (dello spazio ordinario) uscenti da un punto di essa con una tangente assegnata, lega la prima curvatura di una di queste curve, nel punto, a quella della sezione normale ad essa tangente.

Il teorema di Eulero insegna la legge di variazione della curvatura della sezione normale relativa ad una tangente uscente dal punto quando questa varii nel fascio.

Questi teoremi sono stati estesi dal Prof. BERZOLARI (1) ad una varietà ad m dimensioni V_m immersa in uno spazio di curvatura costante di n dimensioni S_n; forma oggetto di questo studio la curvatura (secondo Kronecker) delle varietà segate su V_m da spazi passanti per un suo punto. Se queste varietà si riducono a curve e la V_m ad una superficie dello spazio ordinario si ritrovano i teoremi di Meusnier e di Eulero.

Il Prof. E. E. LEVI, nella sua tesi di laurea (2), ha esteso invece il teorema di Meusnier alle successive curvature delle curve (V_1) uscenti da un punto della V_m di S_n.

Un'altra estensione del teorema di Meusnier mi è suggerita dal seguente enunciato di esso:

I circoli osculatori alle curve di una superficie in un punto in cui hanno la stessa tangente, appartengono ad una sfera tangente alla superficie.

(1) In due note pubblicate negli " Atti della R. Accademia dei Lincei " (1897, 2° sem., pag. 283; 1898, 1° sem., pag. 4) e in due successive negli " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino " (1897-98, pag. 462, 527); i risultati dell'ultima nota comprendono quelli dati in precedenza.

(2) " Annali della Scuola normale di Pisa ", vol. X, 1908 (cfr. pag. 42-55 dell'Estratto).

Astraendo dalla forma metrica del teorema esso può enunciarsi come una proprietà di carattere proiettivo dei piani osculatori alle linee di una superficie di S_4 uscenti da un suo punto con una tangente assegnata.

Sotto questa forma esso è suscettibile di generalizzazione: si può estendere la ricerca alla distribuzione degli spazii (di dimensione qualsiasi) osculatori a curve di una V_m di S_n uscenti da un suo punto ed aventi ivi in comune gli spazi osculatori fino a quello di dimensione ν.

La ricerca può essere agevolmente condotta (nn. 2-5) con i mezzi già usati dal Prof. SEGRE per stabilire alcuni di questi teoremi ([3]). Nel n° 5 ho definito un nuovo elemento, relativo ai punti di una varietà, che ha un ufficio fondamentale per la teoria delle curve tracciate su di essa e definite da proprietà proiettive (cfr. le applicazioni dei nn. 6 e 7).

Da questi teoremi traggo, seguendo un'idea del Klein, l'estensione accennata di quelli di Meusnier e di Eulero (nn. 8 e 9).

Particolarizzando poi la natura della varietà V_m si hanno teoremi sui sistemi di rette in uno S_n, alcuni dei quali, nello spazio ordinario, erano già stati dati dal Koenigs ([4]) come analoghi al teorema di Meusnier: l'analogia puramente formale acquista, dal punto di vista più elevato in cui ci siamo posti, un significato inerente alla natura delle cose.

Proposizioni generali relative alle curve tracciate sopra una V_m.

2. — Sia data una varietà a m dimensioni V_m immersa in S_n $(n > m)$; le coordinate proiettive omogenee di un suo punto

([3]) C. SEGRE, *Su una classe di superficie degl'iperspazii legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, "Atti R. Accad. delle Scienze di Torino", vol. XLII, 1906-07. — ID., *Preliminari di una teoria della varietà luoghi di spazi*, "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo", t. XXX, 1910, 2° sem. Vedasi pure: DEL PEZZO, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni*, "Rend. Accad. delle Scienze di Napoli", 1886, fasc. 8.

([4]) G. KOENIGS, Thèse: *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* ("Annales de l'École normale", 1882 (2), t. XI).

generico x s'indicheranno con $x_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$; in generale l'indice i sarà sottinteso.

Una curva sulla varietà sarà individuata quando si riguardino le τ funzioni di un parametro t. I successivi spazi osculatori alla curva sono individuati dai punti:

$$(1) \qquad x, \sum_k^{1 \ldots m} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} \tau_k', \quad \sum_{h,k}^{1 \ldots m} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_h' \tau_k' + \sum_k^{1 \ldots m} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} \tau_k'', \ldots ;$$

ove gli apici posti alle τ indicano derivazioni rispetto a t; il punto di posto $r+1$ nella successione scritta si dice derivato r-esimo di x sulla curva [5]. Notiamo che in esso (o, se si vuole, nelle sue coordinate) comparisce il termine $\sum_k^{1 \ldots m} \frac{\partial x}{\partial \tau_k} \tau_k^{(r)}$ e, con un certo coefficiente numerico, il termine $\sum_{h,k}^{1 \ldots m} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_h' \tau_k^{(r-1)}$; gli altri termini contengono derivate delle τ d'ordine inferiore ad $r-1$.

Diciamo *elemento d'ordine* r di una curva, e indichiamolo con E_r, l'insieme di un punto e degli $S_1, S_2, \ldots, S_r$, ivi osculatori alla curva (E_0 è il punto, E_1 l'elemento lineare (*linienelement*) della curva).

Un elemento E_{r-1} di una curva sulla V_m è individuato quando si diano i valori delle τ e delle loro derivate fino a quelle d'ordine $r-1$ (incluse) per un valore di t.

Ci domandiamo il luogo degli S_r osculatori nel punto $x(E_0)$ alle curve della V_m aventi in comune un elemento E_{r-1}.

Nella espressione del punto derivato r-esimo vanno ritenute affatto arbitrarie le $\tau^{(r)}$; si ottengono con ciò, come appartenenti al luogo cercato, i punti $\frac{\partial x}{\partial \tau_k}$ (con $k = 1, \ldots, m$); esso è dunque lo spazio dei punti:

$$(2) \qquad x, \frac{\partial x}{\partial \tau_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial \tau_m}, \sum_{h,k}^{1 \ldots m} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_h' \tau_k', \ldots,$$

(5) Cfr. SEGRE, *Preliminari*, § 1, n° 1, in nota.

intendendo di far seguire i successivi punti derivati fino a quello d'ordine r, sopprimendo però nelle coordinate di ciascuno di essi la Σ nella quale compariscono le derivate d'ordine più elevato delle τ. Questo spazio ha, in generale, la dimensione $m+r-1$ (che dev'essere $< n$ perchè il risultato abbia interesse) e contiene lo S_m tangente in x alla V_m. Ad esso appartengono i punti infinitamente vicini ad x, fino a quelli contenuti nell'intorno d'ordine r, quando si esca da x con l'elemento E_{r-1} fissato: lo diremo perciò *spazio* r-*osculatore a* V_m *secondo l'elemento* E_{r-1} *fissato.*

Si può anche osservare che se nel gruppo di punti (2) sopra scritto ci fermiamo a considerare quelli che contengono derivate delle τ d'ordine $\leq \nu - 1$ (con $\nu < r$), questi punti individuano precisamente lo spazio ν-osculatore a V_m secondo l'elemento $E_{\nu-1}$ che vien fissato dai valori delle $\tau, \tau', \ldots, \tau^{(\nu-1)}$ spettanti all'E_{r-1} già assegnato. Riassumendo:

Si consideri la totalità delle curve di una V_m *aventi in comune un* E_{r-1} *assegnato: gli* S_r *ad esse osculatori (in* E_0*) descrivono intorno allo* E_{r-1} *un sistema lineare* ∞^{m-1} *in uno* S_{m+r-1}*; questo è lo spazio* r-*osculatore alla varietà* V_m *nel punto secondo l'elemento* E_{r-1} *fissato. Esso è tangente alla* V_m *e contiene inoltre gli spazi* ν-*osculatori a* V_m *(con* $\nu < r$*) secondo* $E_{\nu-1}$ *contenuti nell'* E_{r-1} *fissato.*

Ci si può domandare il luogo degli S_r osculatori alle curve della V_m aventi in comune un elemento E_{r-2} (si ritiene cioè variabile lo S_{r-1} osculatore che prima era fisso) o più in generale un E_{r-l} $(l \geq 2)$. Consideriamo l'ipotesi dello E_{r-2} fisso: deve essere $r \geq 2$. Il caso $r = 2$ è già stato trattato dai Proff. DEL PEZZO e SEGRE i quali hanno trovato [6] che gli S_{m+1} 2-osculatori ad una V_m in un suo punto descrivono, in generale, un cono (avente per vertice lo S_m tangente ivi alla V_m) di ordine 2^{m-1} che ha per ambiente lo $S_{\frac{m(m+3)}{2}}$ del punto x e dei suoi punti derivati primi $\left(\frac{\partial x}{\partial \tau_h}\right)$ e derivati secondi $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k}\right)$ $(h,k=1,\ldots,m)$. Ogni iperpiano passante per questo $S_{\frac{m(m+3)}{2}}$ sega la V_m in V_{m-1} aventi ivi un punto triplo (almeno).

---

[6] Cfr. DEL PEZZO, l. c. [3], nn. 5, 13; SEGRE, *Preliminari*, nn. 18, 19.

Supponiamo ora $r > 2$. Il termine contenente le derivate d'ordine più elevato delle τ nelle espressioni dei punti che individuano lo spazio r-osculatore è $\sum_{h,k}^{m} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_h' \tau_k^{(r-1)}$: facendo variare a piacere le $\tau^{(r-1)}$ e lasciando fisse le $\tau^{(r-2)}, \ldots, \tau$, cioè l'elemento E_{r-2}, soltanto l'ultimo dei punti che ci è servito a individuare lo spazio r-osculatore varia. Questo punto fa descrivere allo spazio r-osculatore un sistema lineare ∞^{m-1} che ha per base lo spazio $(r-1)$-osculatore secondo l'E_{r-2} fissato ed ha per ambiente, in generale, uno S_{2m+r-2}; questo è individuato dai punti:

$$x, \frac{\partial x}{\partial \tau_1}, \frac{\partial x}{\partial \tau_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial \tau_m}, \sum_k^m \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_k} \tau_k', \sum_k^m \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_2 \partial \tau_k} \tau_k', \ldots, \sum_k^m \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_m \partial \tau_k} \tau_k',$$

e dai successivi punti derivati (terzo, ..., r-esimo) contenuti nel gruppo (1) quando si sopprimano in ciascuno di essi le due Σ contenenti le derivate delle τ dei due ordini più elevati. Questo S_{2m+r-2} comprende i punti infinitamente vicini ad x, fino all'intorno d'ordine r, quando si esca da x con l'E_{r-2} fissato: lo diremo perciò (quando non coincida con l'ambiente) *spazio* r-*osculatore a* V_m *secondo l'*E_{r-2} *fissato.*

3. — Se invece dell'E_{r-2} si fissa un E_{r-3} (quindi $r \geq 3$), conviene distinguere le ipotesi $r = 3$ e $r = 4$ dall'altra $r > 4$.

Sia $r = 3$; si domanda il luogo degli S_3 osculatori a tutte le curve uscenti da un punto x della V_m. Siccome già si è trovato (n° 2) il luogo di questi S_3 quando si lasci fissa una tangente in x alla V_m basterà far variare i rapporti $\tau'_1 : \tau'_2 : \ldots : \tau'_m$. Questo luogo è lo spazio dei punti:

$$x, \frac{\partial x}{\partial \tau_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial \tau_m}, \sum_k^m \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_k} \tau_k', \ldots, \sum_k^m \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_m \partial \tau_k} \tau_k',$$

$$\sum_{hkl}^m \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k \partial \tau_l} \tau_h' \tau_k' \tau_l',$$

dei quali i primi $m+1$ sono fissi al variare della tangente (τ');

cerchiamo perciò l'ordine della W_{2m-1} descritta dello spazio congiungente gli altri $m+1$ (al variare delle τ').

Supponiamo tutti i punti derivati secondi e terzi di x linearmente indipendenti; lo spazio dei punti derivati secondi (S_{ϱ_2}) ha dimensione:

$$\rho_2 = \frac{m(m+1)}{1\,.\,2} - 1$$

quello dei derivati terzi S_{ϱ_3}:

$$\rho_3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3} - 1$$

e il loro congiungente S_ϱ: $\rho = \rho_2 + \rho_3 + 1$. La W_{2m-1} è perciò incontrata in punti da uno S_l ove $l = \rho - 2m + 1$. Gli spazi S_m generatori della W_{2m-1} che incidono lo S_l sono forniti dai valori delle τ' che annullano una matrice ad $m+1$ linee e a $2m-1$ colonne del tipo:

$$\left\| \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \dots & f_{2m-1} \\ l_1 & l_2 & \dots & l_{2m-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ n_1 & n_2 & \dots & n_{2m-1} \end{array} \right\|$$

ove le f_i son forme cubiche delle τ', e le $l_i, \dots, n_i$ forme lineari. Le condizioni così espresse equivalgono ad un sistema di $m-1$ equazioni, nei rapporti $\tau_1' : \tau_2' : \dots : \tau_m'$, d'ordine [7]:

$$\sum_{1}^{m}{}_k \, 3^{k-1} \binom{2m-k-1}{m-1}.$$

Quest'ordine è in generale anche quello del cono che si ottiene proiettando la W_{2m-1} dallo S_m tangente a V_m in x, anche se non tutti i punti derivati secondi e terzi sono linearmente indipendenti.

---

(7) Questo numero si ricava da una formola di Salmon-Roberts (Cfr. p. es.: SALMON-FIEDLER, " Anal. Geom. des Raumes „ (Leipzig, 1880), II th., pag. 591, n° 444). Un modo semplice per giungere a quella matrice si ha proiettando la configurazione in esame dallo S_l sopra un generico S_{2m-2}. Per $m = 2$, cfr. SEGRE, *Su una classe di superficie*, n° 6.

Occorre però che:

1° gli ∞^{m-1} S_{m+1} generatori del cono non siano *tutti* gli S_{m-1} passanti per S_m, quindi $n > 3m$;

2° che lo S_ϱ in cui è la W_{2m-1} non abbia dimensione $= 2m - 1$ quindi $\rho > 2m - 1$;

3° che lo spazio dei punti derivati secondi non abbia dimensione $= m - 1$ (chè altrimenti solo l'ultimo dei $2m+2$ punti considerati sarebbe variabile, e quindi la W_{2m-1} avrebbe in questo caso ordine 3^{m-1}) cioè $\rho_2 > m - 1$.

Dunque in generale, con le limitazioni $\rho_2 > m - 1$, $\rho > 2m - 1$, $n > 3m$, si ha:

Il luogo degli S_3 *osculatori alle curve di una* V_m *passanti per un suo punto è un cono di dimensione* 3m, *avente per vertice lo* S_m *tangente nel punto a* V_m *e d'ordine:*

$$\sum_{k}^{m} 3^{k-1} \binom{2m-k-1}{m-1}.$$

Esso appartiene allo spazio del punto x e dei suoi derivati primi, secondi e terzi. Se questo spazio ha dimensione minore di quella dell'ambiente lo diremo 3-*osculatore alla* V_m *nel punto* x. Gli iperpiani che si potranno condurre per esso tagliano la V_m secondo V_{m-1} aventi in x un punto quadruplo (almeno); infatti se ξ_i sono le coordinate di uno di questi iperpiani si ha

$$\sum_{i}^{n+1} \xi_i x_i \equiv (\xi, x) = 0, \left(\xi, \frac{\partial x}{\partial \tau_k}\right) = 0, \left(\xi, \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k}\right) = 0, \left(\xi, \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k \partial \tau_l}\right) = 0$$

h, k, l variando da 1 ad m. Se con $x + dx$ indichiamo un punto infinitamente vicino ad x della V_m per il quale $(\xi, x + dx) = 0$, in virtù delle precedenti relazioni si ha ([8]):

$$\sum_{jhkl}^{m} \left(\xi, \frac{\partial^4 x}{\partial \tau_j \partial \tau_h \partial \tau_k \partial \tau_l}\right) d\tau_j d\tau_h d\tau_k d\tau_l = 0 .$$

Questo è il cono del quarto ordine, delle tangenti alla V_{m-1} sezione di V_m con l'iperpiano ξ. Esso varia, con ξ, in un sistema lineare, la cui dimensione è data da $n - 1$ diminuito della dimensione dello spazio a cui appartiene il cono trovato. Questo

---

([8]) Cfr. SEGRE, *Preliminari*, nn. 17 e 21.

spazio avrebbe in generale (essendo individuato da x e dai suoi derivati primi, secondi e terzi rispetto a tutte le τ) la dimensione:

$$m + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1\,;$$

se ciò non avviene, come certamente deve accadere se n è minore di quel numero, vuol dire che passa un certo numero di relazioni lineari fra x e i suoi punti derivati fino a quelli derivati terzi. In tal caso le coordinate omogenee dei punti della V_m sono soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee a derivate parziali di terzo ordine (9).

4. — Esaurito il caso $r = 3$ conviene studiare ancora separatamente il caso $r = 4$, prima di passare a quello generale. Ci si propone, sarà bene ricordarlo, di trovare il luogo degli S_4 osculatori alle curve di V_m aventi in x la stessa tangente (E_{r-3} fisso in x). S'è già trovato (cfr. n° 2) il luogo di questi S_4 quando sia fisso un E_2 in x: esso è uno (S_{2m+r-2} e poichè $r = 4$) $S_{2(m+1)}$, in generale, individuato dai punti

$$x, \frac{\partial x}{\partial \tau_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial \tau_m}, \sum_h^{1\ldots m} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_h} \tau_h', \ldots, \sum_h^{1\ldots m} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_m \partial \tau_h} \tau_h',$$

$$\sum_{hkl}^{1\ldots m} \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k \partial \tau_l} \tau_h' \tau_k' \tau_l',$$

$$\sum_{jhkl}^{1\ldots m} \frac{\partial^4 x}{\partial \tau_j \partial \tau_h \partial \tau_k \partial \tau_l} \tau_j' \tau_h' \tau_k' \tau_l' + \epsilon_1 \sum_{jhk}^{1\ldots m} \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_j \partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_j' \tau_h' \tau_k'' + \epsilon_2 \sum_{hk}^{1\ldots m} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_h'' \tau_k''$$

---

(9) Questa rappresentazione per mezzo di sistemi di equazioni lineari a derivate parziali è un'estensione di quella studiata dal Prof. Segre (cfr. *Su una classe...*, specialmente il n° 28: *Generalizzazioni*). Per lo sviluppo delle idee ivi esposte vedansi anche le due memorie: CH. H. SISAM: *On three Spreads satisfying four or more homogeneous linear partial differential equations of the second order* (" Amer. Journ. of Mathematics ", vol. XXX, n° 2). — A. TERRACINI, *Sulle* V_k *che rappresentano più di* $\frac{k(k-1)}{2}$ *equazioni di Laplace linearmente indipendenti* (" Rendiconti Circ. Matem. di Palermo ", t. XXXIII, 1912).

ove ϵ_1, ϵ_2 sono due coefficienti numerici che non c'interessa determinare. Per far variare lo S_2 osculatore intorno ad una tangente fissa dobbiamo, nelle espressioni precedenti, ritenere variabili le τ'' e fisse le τ'. Disponiamo che la tangente fissa sia, come può sempre supporsi, la tangente in x alla linea su cui varia τ_1; perciò $\tau_h' = 0$ per $h \neq 1$. Dei punti individuanti lo $S_{2(m+1)}$:

$$x, \frac{\partial x}{\partial \tau_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial \tau_m}, \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}, \ldots, \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_m}, \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_1^3},$$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial \tau_1^4} \tau'^4_1 + \epsilon_1 \tau'^2_1 \sum_{2}^{m}{}_k \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_k} \tau_k'' + \epsilon_2 \sum_{2}^{m}{}_{h,k} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_h'' \tau_k''$$

varia, con le τ'', solo l'ultimo: quindi il luogo cercato è un cono che ha per vertice lo S_{2m+1} dei primi $2(m+1)$ punti fissi e i cui $S_{2(m+1)}$ generatori proiettano la V_{m-1} descritta dall'ultimo punto.

Le sue coordinate (proiettive, omogenee) sono funzioni quadratiche *non* omogenee di $m-1$ parametri (τ_2'', ..., τ_m'') e però la varietà da esso descritta è di ordine 2^{m-1} (almeno se i punti $\frac{\partial^4 x}{\partial \tau_1^4}$, $\frac{\partial^3 x}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_h}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k}$ $(h, k = 2, \ldots, m)$ non appartengono ad uno S_{m-1}). Questo è pure, in generale, l'ordine del cono che proietta la V_{m-1} dallo S_{2m+1}, se $n > 3m - 1$. Con queste limitazioni, si ha in generale:

Il luogo degli S_4 *osculatori in un punto di una* V_m *alle curve che escono da esso con una tangente assegnata è un cono di specie* $2(m+1)$ *di dimensione* $3m+1$ *e d'ordine* 2^{m-1}.

Questo cono appartiene allo spazio dei punti:

$$x, \frac{\partial x}{\partial \tau_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial \tau_m}, \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}, \ldots, \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_m^2}, \sum_{1}^{m}{}_{jh} \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_j \partial \tau_h \partial \tau_1} \tau_j' \tau_h', \ldots,$$

$$\sum_{1}^{m}{}_{jh} \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_j \partial \tau_h \partial \tau_m} \tau_j' \tau_h', \sum_{1}^{m}{}_{jhkl} \frac{\partial^4 x}{\partial \tau_j \partial \tau_h \partial \tau_k \partial \tau_l} \tau_j' \tau_h' \tau_k' \tau_l'$$

i quali potranno essere indipendenti oppure no; se questo spazio non coincide con l'ambiente lo diremo *spazio 4-osculatore in* x *alla* V_m *secondo la tangente fissata.*

5. — Nel caso generale, $r > 4$, il problema che ci occupa è molto più semplice. Gli S_r osculatori alle curve di V_m aventi in x un elemento E_{r-2} comune descrivono uno S_{2m+r-2} (v. nº 2): per avere il luogo cercato in questo caso bisogna far variare le $\tau^{(r-2)}$ (lasciando fisse le τ e le loro derivate d'ordine inferiore ad $r - 2$) nei punti che individuano lo S_{2m+r-2}. Ma, per $r > 4$, queste derivate entrano linearmente nell'espressione del punto che le contiene, quindi quello S_{2m+r-2} descrive un sistema lineare etc., etc.

È chiaro ora il modo di procedere nel caso che sia assegnato un elemento E_{r-l} e si cerchi il luogo degli S_r osculatori (in E_0) alle curve di V_m aventi in comune quell'elemento. Bisognerà discutere separatamente i casi $r = l, l + 1, \ldots$ fino a che le derivate che interessano delle τ compariscano linearmente nelle espressioni delle coordinate dei punti individuanti gli spazi in esame. Questo ultimo caso è quello generale.

Lo spazio contenente questi S_r osculatori (quando abbia dimensione minore dell'ambiente) si dirà *r-osculatore alla* V_m *nel punto secondo l'elemento* E_{r-l} *fissato.*

Indichiamo lo spazio r-osculatore secondo un elemento E_ν con la notazione $S(r, \nu)$. Per questi spazi $S(r, \nu)$ vale il seguente teorema generale:

Si considerino gli spazi che da uno $S(r, \nu)$ *proiettano i punti ad essi infinitamente vicini della* V_m*; essi generano un cono, giacente nello* $S(r + 1, \nu)$, *d'ordine* $\left[\frac{r+1}{\nu+1}\right]^{m-1}$, *ove con* $[a]$ *indico il massimo intero contenuto in* a.

Infatti è facile verificare, con osservazioni del tutto analoghe ad altre già adoperate, sulle espressioni delle derivate successive che le coordinate del punto che serve ad individuare lo spazio generatore (uscente dallo $S(r, \nu)$ vertice) del cono sono funzioni non omogenee, di grado $\left[\frac{r+1}{\nu+1}\right]$ di $m - 1$ dei parametri $\tau^{(\nu+1)}$.

Se $\nu = 0$ lo $S(r, 0)$ è lo spazio $(r + 1)$-*tangente* del Prof. *Del Pezzo*; questi ha determinato anche, con considerazioni sintetiche, l'ordine precedente nel caso $\nu = 0$ [10].

---

[10] Del Pezzo, l. c., nn. 7, 13, 14. Per ragioni ovvie mi parrebbe più opportuno chiamare *r-tangente* lo $S(r, 0)$. Nel pubblicare ora (Dicembre 1912)

6. — Le considerazioni precedenti (nn. 2-5) possono dare origine ad una teoria delle curve di una varietà legate ad essa da proprietà proiettive. Pur non volendo trattenermi su questo punto mi permetto di accennarvi di sfuggita.

Si è visto come si possano definire spazi di dimensione convenientemente ampia, contenenti i successivi intorni di un punto generico di una varietà quando si esca dal punto in una direzione data, o più in generale con un elemento E_ν fissato. Questi spazî sono, da questo punto di vista, gli analoghi dello S_m tangente alla V_m (che contiene l'intorno del 1° ordine di un punto) e sono anche gli analoghi dei successivi spazî osculatori ad una curva.

Nasce da questa osservazione una classe molto estesa di problemi. Ci si può domandare infatti se, in rapporto allo spazio che si considera come legato ad un punto generico della V_m e alla dimensione del suo ambiente d'immersione, esista qualche curva i cui spazi osculatori di dimensione convenientemente alta abbiano un'incidenza speciale con lo spazio sopra nominato. Queste curve sono analoghe alle asintotiche sulle superficie di S_3 (per le quali il piano osculatore in un punto coincide con lo S_2 tangente nel punto alla superficie).

L'applicazione di queste idee alle varietà generate da spazi dà luogo a risultati molto interessanti sui quali intendo ritornare fra breve.

Per ora mi limito, come esempio, ad accennare ad un sistema di curve sulle superficie di S_4 e di S_5.

7. — Si consideri una V_2 in S_4: su di essa non esistono in generale asintotiche nel senso ordinario (curve i cui piani osculatori sono tangenti, nei loro punti d'osculazione, alla superficie).

---

questa ricerca mi sia permesso di citare la mia comunicazione: *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi*, che è in corso di stampa negli " Atti del V Congresso internazionale di matematica ", (Cambridge, agosto 1912).

Si noti (in relazione a quel lavoro) che se $n > m + \nu - 1$, l'elemento E_ν è, *in generale*, individuato dallo S_ν osculatore; se ciò non accade gli elementi E_ν che si ottengono per uno stesso S_ν osculatore sono analoghi agli elementi E_2 di asintotica sulle superficie dello spazio ordinario (ove il piano osculatore fissa due elementi E_1, e quindi due E_2, di asintotica). V. a questo proposito i nn. 6 e 7.

Si può invece definire un sistema ∞^2 di curve imponendo allo S_3 osculatore generico ad una di esse di esser tangente alla superficie nel punto d'osculazione.

Infatti in tal caso i punti:

$$x, \frac{\partial x}{\partial \tau_1}, \frac{\partial x}{\partial \tau_2}, \sum_{hk}^{2} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_h \partial \tau_k} d\tau_h d\tau_k + \sum_{h}^{2} \frac{\partial x}{\partial \tau_h} d^2\tau_h$$

e il punto derivato di quest'ultimo debbono appartenere ad uno stesso S_3. Questa condizione è lineare in τ_2'' (avendo posto $\tau_2 = \tau_2(\tau_1)$) quindi per ogni direzione d uscente da x esiste una curva che ha ivi per S_3 osculatore lo S_3 2-osculatore alla superficie secondo d stessa (ed è perciò tangente alla superficie).

Uno S_3 passante per il piano tangente alla superficie in un punto riesce ivi osculatore a due curve del sistema ∞^2; le loro tangenti dividono armonicamente le tangenti alle caratteristiche nel punto stesso ([11]).

Se ci proponiamo la stessa questione per le superficie di S_5 siamo condotti ad annullare la matrice (cioè due determinanti del 5° ordine, invece che uno, come nel caso precedente):

$$\left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & x_i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sum_{hk}^{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_h' \tau_k' & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sum_{hkl}^{2} \frac{\partial^3 x_i}{\partial \tau_h \partial \tau_k \partial \tau_l} \tau_h' \tau_k' \tau_l' + 3 \sum_{hk}^{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_h \partial \tau_k} \tau_h' \tau_k'' & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \qquad (i = 1, \ldots, 6)$$

([11]) Con una conveniente interpretazione di questi risultati ottenni i teoremi che ho già avuto occasione d'esporre nella Nota: *Sopra una trasformazione classica di Sophus Lie* (" Rend. Accademia dei Lincei, classe di scienze fisiche, matematiche e naturali ", vol. XXI, an. 5, 1° semestre 1912), nn. 4 e 5.

A queste due condizioni *non* è possibile in generale soddisfare assegnando (come nel caso precedente) un determinato valore di $\tau_1' : \tau_2'$. Perchè si possano trovare valori τ'' soddisfacenti a quelle due condizioni occorre e basta che sia:

$$\left|\begin{array}{ccc} \cdot & x_i & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} & \cdot \\ \cdot & \sum_h^{1\ldots 2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_1 \partial \tau_h} \tau_h' & \cdot \\ \cdot & \sum_h^{1\ldots 2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_2 \partial \tau_h} \tau_h' & \cdot \\ \cdot & \sum_{hkl}^{1\ldots 2} \frac{\partial^3 x_i}{\partial \tau_h \partial \tau_k \partial \tau_l} \tau_h' \tau_k' \tau_l' & \cdot \end{array}\right| = 0 .$$

Questa condizione dà, per ogni punto x, cinque valori di τ', per i quali le condizioni espresse dall'annullarsi della matrice si riducono ad una sola. Allora da essa sarà in generale possibile ricavare un determinato valore per τ_2'' per es. (potendosi prendere $\tau_2 = \tau_2(\tau_1)$ e quindi $\tau_1'' = 0$). In ogni punto della superficie vengono determinati 5 elementi E_3 di curve rispondenti (per quel punto) alla questione posta: ma *non* è possibile in generale ordinare questi elementi in modo che ∞^1 fra essi appartengano ad una stessa curva. Infatti, per una curva inviluppata da tangenti corrispondenti a quei valori di τ', si ha τ'' derivando l'ultima equazione-determinante, e si ottiene quindi un valore differente da quello che annulla la matrice. Riassumendo:

Esistono in ogni punto di una superficie S_5 *cinque rette tangenti a curve tali che i loro* S_3 *osculatori nel punto coincidono con lo* S_3 *2-osculatore alla superficie secondo una di quelle tangenti.*

A queste cinque tangenti notevoli era giunto il Prof. SEGRE, partendo da un'altra proprietà ([12]); a ciascuna di esse vengono

([12]) Cfr. *Preliminari*, n° 24 (in fine). Nello spazio ordinario: in ogni punto della superficie focale di una congruenza (∞^2) di rette (non appar-

ora associati uno S_3 (quello 2-osculatore) e uno S_2 (osculatore) notevoli.

Se consideriamo i cinque sistemi ∞^1 di curve inviluppate da queste tangenti e se supponiamo che sopra le curve di uno di questi sistemi vari soltanto τ_1 ($d\tau_2 = 0$) la condizione imposta si traduce in una relazione del tipo:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \tau_1^3} + \alpha_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1^2} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + a \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + b \frac{\partial x}{\partial \tau_2} + cx = 0$$

equazione alle derivate parziali, lineare ed omogenea del 3° ordine, alla quale soddisfano le coordinate proiettive omogenee dei punti della superficie.

Applicazioni.

8. — Passiamo ora all'accennata estensione del teorema di Meusnier. Supponiamo data in uno S_{n-1} una V_m che immaginiamo proiettata stereograficamente sopra un'ipersfera Σ_{n-1} di uno S_n. Diciamo V_m' la nuova varietà giacente in Σ_{n-1}. Le curve di V_m' si proiettano in curve di V_m e le intersezioni dei loro S_k osculatori con Σ_{n-1} in sfere Σ_{k-1} osculatrici alle curve proiezioni (passanti cioè per $k+1$ punti infinitamente vicini di una di queste curve). Applicando alla V_m' il primo teorema del n° 2, si ha, in generale:

Le sfere Σ_{r-1} osculatrici alle curve di una V_m *aventi in comune un elemento* E_{r-1} *descrivono un sistema lineare ∞^{m-1} di sfere (passanti per la sfera Σ_{r-2} osculatrice comune) giacenti tutte sopra una sfera Σ_{m+r-2} che può dirsi* r*-osculatrice alla* V_m *nel punto secondo l'*E_{r-1} *fissato. Essa è tangente alla* V_m *e contiene le sfere osculatrici alla varietà secondo* $E_{\nu-1}$ *contenuti nello* E_{r-1} *fissato* ($\nu < r$).

È questo il teorema di Meusnier generalizzato. Esso lega i raggi delle sfere Σ_{r-1} osculatrici alle curve di una varietà

---

tenente ad un complesso lineare) vi sono cinque tangenti che hanno un incontro quadripunto con rigate della congruenza.

Se la congruenza appartiene ad un complesso lineare vale invece un teorema ricordato nella nota precedente (n° 4).

aventi in comune un elemento E_{r-1}. Il risultato trovato appartiene alla geometria delle inversioni (secondo il concetto del Klein), cioè le trasformazioni del gruppo delle inversioni lo lasciano inalterato.

Gli altri teoremi trovati nei nn. 2-5 ci dicono inoltre come variano queste sfere quando si fissa un elemento E_ν ($\nu < r - 1$). Essi sono dunque gli analoghi dell'ordinario teorema di Eulero; la maggior varietà dipende dalla possibilità di considerare come fissi elementi E_ν di diverse dimensioni. Non sarà certo necessario scrivere qui tutti gli enunciati che si ottengono; basterà tener conto del fatto che applicando la proiezione stereografica alle varietà luoghi di spazi osculatori si ottengono varietà di sfere aventi, in generale, ordine doppio delle primitive.

Noterò invece che i teoremi così dedotti per uno S_{n-1} euclideo (ottenuto con proiezione stereografica di un'ipersfera Σ_{n-1} di un S_n) valgono per uno spazio S_{n-1} a curvatura costante qualsiasi, potendosi sempre rappresentare questo sopra un'ipersfera dello S_n [13].

9. — Per mettere bene in luce la differenza fra il teorema ora dimostrato e quello del Prof. E. E. Levi mi permetto di riportare il suo enunciato (loc. cit. in [2], n° 31, pag. 55 dell'estratto).

" Supposto che una curva C tracciata su una varietà V_m abbia le prime ν direzioni principali regolari (ciò risponde alla nostra limitazione " in generale "), il raggio di ν-esima curvatura è uguale al raggio di ν-esima curvatura della curva C' che ha le stesse prime ν direzioni principali che C e la $(\nu + 1)$-esima direzione principale normale all'$S_{m+\nu-1}$ contenente l'S_m tangente

---

[13] Oltre a questa applicazione e a quella del n° 10 se ne possono fare altre, per es., alle congruenze di sfere. Ricordiamo che ∞^1 sfere inviluppano una superficie avente i cerchi caratteristici per linee di curvatura: su ciascuno di essi vi sono due punti dello spigolo di regresso (V. Bianchi, *Lezioni di geom. diff.*, t. I, pag. 25). Allora il teorema di Meusnier per una congruenza di sfere è il seguente:

Si considerino le superficie che sono inviluppate da ∞^1 sfere della congruenza e che hanno in comune un cerchio di curvatura: le congiungenti i punti dello spigolo di regresso di ciascuna superficie formano fascio (nel piano del cerchio).

e le prime ν direzioni principali, moltiplicato per il coseno dell'angolo che la $(\nu + 1)$-esima direzione principale di C fa con questa normale „.

Si noti che il raggio di ν-esima curvatura di una curva (in un ambiente qualsiasi) non coincide col raggio della sfera Σ_ν osculatrice: soltanto per $\nu = 1$ si ha la coincidenza, cioè il 1° raggio di curvatura (o flessione) di una curva è anche il raggio del circolo ivi osculatore ad essa. Già nello spazio ordinario la seconda curvatura (o torsione) non ha il valore reciproco del raggio della sfera osculatrice; se r è il raggio di 1ª curvatura, ρ il raggio di torsione ed R il raggio della sfera osculatrice si ha la nota relazione: $R^2 = r^2 + \rho^2 r'^2$ ove r' è la derivata di r rispetto all'arco di curva. Ripetendo un ragionamento analogo a quello che conduce a questa formola ([14]) si ha la seguente relazione ricorrente fra i raggi $R_{\nu-1}$, R_ν delle sfere osculatrici $\Sigma_{\nu-1}$, Σ_ν e il raggio di ν-esima curvatura ρ_ν (limite del rapporto dell'arco di curva all'angolo dei due S_ν osculatori nei suoi estremi, quando l'arco tenda a zero):

$$R_\nu^2 = R_{\nu-1}^2 + \rho_\nu^2 \, R'^2_{\nu-1} \qquad (\nu \geq 2).$$

Supponiamo ora fissato su V_m un elemento E_ν di curva: tutte le curve alle quali esso appartiene hanno ivi la stessa sfera $\Sigma_{\nu-1}$ osculatrice e quindi ad esse spetta uno stesso valore di $R_{\nu-1}$ nel punto che si considera: non così per R_ν, $R'_{\nu-1}$, ρ_ν. Il teorema del Levi ci dà la legge di variazione di ρ_ν variando lo $S_{\nu+1}$ osculatore intorno allo E_ν fissato; il teorema del n° precedente ci dà il modo di variare di R_ν; la formola ricorrente ora scritta permette infine di dedurre come varia $R'_{\nu-1}$. Si può dire, in un certo senso, che i due teoremi messi a confronto sono tutti e due necessari per lo studio completo delle curvature delle curve in un punto di una varietà, aventi un elemento E_ν comune.

Soltanto per la prima curvatura $(r = R_1)$ i due teoremi coincidono nell'unico teorema ordinario di Meusnier.

([14]) Cfr. p. es. SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume*, Zweite Auflage, 1910, zweiter Abschnitt, § 16, p. 325.

10. — Altre applicazioni, d'indole proiettiva, possono farsi dei teoremi generali enunciati nei nn. 2-5.

È noto (Klein, Segre) [15] che la retta dello spazio ordinario può considerarsi come punto di una quadrica non specializzata di uno S_5. Una curva, una superficie V_2, una varietà V_3 di questa quadrica si dicono, nello spazio ordinario, rispettivamente rigata, congruenza di rette, complesso di rette. Questi sistemi di rette diconsi *lineari* se gli enti che li rappresentano in S_5 appartengono a spazi (lineari).

Consideriamo una superficie immersa nella quadrica e le curve uscenti da un suo punto; si ha:

In una congruenza di rette le schiere quadriche osculatrici lungo una generatrice alle rigate della congruenza che passano per la generatrice e definiscono su di essa la stessa correlazione (di Chasles fra punti e piani ivi tangenti) appartengono ad una congruenza lineare che, contenendo le rette di quelle rigate nell'intorno di 2° ordine della generatrice considerata, può dirsi *osculatrice alla congruenza lungo la generatrice e secondo la correlazione assegnata. Il luogo delle congruenze lineari osculatrici alla congruenza data lungo una stessa generatrice (variando la correlazione) è un complesso di 2° ordine.*

Il luogo delle congruenze lineari osculatrici alle rigate di una congruenza passanti per una generatrice ed aventi lungo essa lo stesso iperboloide osculatore, è un complesso lineare. Al variare dell'iperboloide osculatore lungo la generatrice, ferma restando la correlazione di Chasles che esso definisce sulla stessa, il complesso varia in un fascio.

Teoremi analoghi sui complessi si ottengono considerando una V_3 immersa nella quadrica delle rette; alcuni di questi teoremi erano già stati dati dal Koenigs [16] come analoghi a quello di Meusnier per le curve tracciate sulle superficie dello spazio ordinario.

Un'ultima applicazione, limitandoci a un semplice cenno, faremo degli stessi teoremi ai sistemi di rette nello spazio a

[15] Cfr. per quel che segue la Memoria del Segre, *Sulla geometria della retta*..... (" R. Accademia delle Scienze di Torino, Memorie ", serie III, t. XXXVI, 1885).

[16] Cfr. l. cit., nn. 83, 87, 91.

quattro dimensioni. La retta di S_4 può venire considerata come punto di una varietà a sei dimensioni del 5° ordine, immersa in uno S_9. Ai sistemi lineari C_i ($i = 0, 1, ..., 5$) ([17]) corrispondono le sezioni della V_6^5 con uno S_{i+3} dello S_9. In particolare il sistema C_1 non speciale è una rigata ellittica del 5° ordine, mentre le rette del C_2 riempiono (in S_4) una varietà a 3 dimensioni del 3° ordine con 10 punti doppi.

Sistemi lineari osculatori ad una rigata lungo una generatrice sono quelli individuati da un numero sufficiente di generatrici infinitamente vicine.

Si ha allora dal n° 2:

Il luogo dei sistemi C_k ($k = 1, 2, 3, 4$) *osculatori alle rigate di una congruenza di* S_4 *passanti per una generatrice ed aventi ivi lo stesso sistema* C_{k-1} *osculatore è un sistema lineare* C_{k+1} *osculatore alla congruenza secondo la generatrice e il* C_{k-1} *assegnato.*

Il luogo dei sistemi C_k ($k = 1, 2, 3$) *osculatori alle rigate di un sistema triplamente infinito di rette passanti per una sua generatrice ed aventi lungo essa lo stesso* C_{k-1} *osculatore, è un sistema* C_{k+2} *osculatore al sistema proposto lungo la generatrice e secondo il* C_{k-1} *assegnato.*

Questi teoremi sono analoghi a quello di Meusnier. Teoremi che possono riguardarsi come estensioni di quello di Eulero si avrebbero traducendo gli altri enunciati dei nn. 2-5 ([18]).

Naturalmente questi enunciati sono ancora suscettibili d'interpretazione per i sistemi di rette in un ambiente a quante si vogliano dimensioni.

10 Febbraio 1912.

([17]) Questi sistemi furono studiati, dal punto di vista algebrico, dal Prof. Castelnuovo nella memoria: *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (" Atti Istit. Veneto di scienze, lettere ed arti ", t. II, s. VII, 1891).

([18]) Alcuni di questi teoremi sono stati dati di recente dal Sig. C. L. E. Moore nella nota: *Infinitesimal properties of lines in* S_4 *with applications to circles in* S_3 (" Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences ", vol. XLVI, n° 15, January 1911).

Sulle varietà di spazî con carattere di sviluppabili.

Nota di A. TERRACINI

La nozione di sviluppabilità si può estendere in parecchi modi diversi, quando, anzichè una ∞^1 di rette, si consideri più in generale una ∞^α di S_k (1). Si possono, p. es., considerare dei sistemi Σ di $\infty^\alpha S_k$, tali che uno S_k generico di Σ incontri in uno S_l $(l \geq 0)$ tutti gli S_k del sistema che gli sono infinitamente vicini (2). Il problema della determinazione di tali sistemi di spazî è stato risolto dal Prof. SEGRE nel caso che gli S_k di Σ infinitamente vicini a uno generico lo taglino in uno stesso S_l (3); nel caso di $\alpha = 1$ e k qualunque (4); nel caso di α qualunque e $k = 1$ (5); e infine nel caso di $\alpha = k = 2$ (6). Nel presente lavoro, dopo avere assegnato alcune proprietà generali dei sistemi Σ, esponiamo il modo di caratterizzare tali sistemi per $\alpha = 2$ e k qualunque, e anche in alcuni altri casi. Alla fine del lavoro poi, ci occupiamo in modo particolare del caso $\alpha \geq k + 1$, mostrando come, sotto certe ipotesi, il problema della determinazione dei sistemi Σ coincida con quello della determinazione delle varietà di $2k$ dimensioni, M_{2k}, che contengono $\infty^\alpha S_k$, a due a due incidenti, con $\alpha > k$; e risolviamo questo secondo problema in un caso di una certa generalità.

1. — Per ora supporremo che lo spazio di incidenza di due S_k di Σ infinitamente vicini sia un punto, che sia cioè $l = 0$; e che lo spazio ambiente sia uno S_{2k+1}. Assunto in esso un si-

(1) Cfr. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, " Rend. del Circ. Mat. di Palermo ", t. XXX (1910), n° 25.

(2) Ci avverrà spesso in seguito, parlando di un sistema Σ di S_k, di intendere precisamente che si tratti di un sistema dotato di tale proprietà.

(3) Loc. cit. (1), n° 26.

(4) Loc. cit. (1), nⁱ 4-5.

(5) Loc. cit. (1), n° 25.

(6) Loc. cit. (1), nⁱ 32-35. Cfr. però più avanti la nostra nota (15).

stema di coordinate proiettive non omogenee $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$, un punto della varietà costituita dagli S_k di Σ sarà dato da:

$$(1) \quad x_i = a_{0i}(\tau_1, \ldots, \tau_\alpha) + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_{ri}(\tau_1, \ldots, \tau_\alpha). \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k+1).$$

Fissiamo uno S_k, g, di Σ corrispondente ai parametri $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\alpha$: e consideriamo uno S_k di Σ ad esso infinitamente vicino, corrispondente ai parametri $\tau_1 + d\tau_1, \ldots, \tau_\alpha + d\tau_\alpha$. Poichè esso è incidente a g in un punto, si potrà trovare, e in una sola maniera, un sistema di valori per le λ per le $d\lambda$ in modo che risulti (tralasciando i secondi indici delle a):

$$(2) \qquad da_0 + \sum_{r=1}^{k} (\lambda_r \, da_r + d\lambda_r \, a_r) = 0 .$$

Sarà perciò nullo il determinante:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots\ldots a_{k1} & da_{01} & da_{11} \ldots\ldots da_{k1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots\ldots a_{k2} & da_{02} & da_{12} \ldots\ldots da_{k2} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,2k+1} & a_{2,2k+1} \ldots a_{k,2k+1} & da_{0,2k+1} & da_{1,2k+1} \ldots da_{k,2k+1} \end{vmatrix}$$

qualunque siano le $d\tau$, e la caratteristica di questo determinante, per valori generici delle $d\tau$, sarà proprio $2k$ e non minore. Scelte allora, in modo opportuno, $2k$ equazioni fra le $2k+1$ equazioni (2), siano per esempio quelle corrispondenti ai secondi indici $2, 3, \ldots, 2k+1$, si potranno da esse ricavare le λ in funzione delle τ e delle $d\tau$; precisamente, se con $\Omega(a_{11}), \ldots$ $\Omega(da_{01}), \ldots$ indichiamo i suddeterminanti complementari degli elementi $a_{11}, \ldots, da_{01}, \ldots$ nel determinante (3), si avrà:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \ldots : \lambda_k : 1 = \\ &= \Omega(da_{11}) : \Omega(da_{21}) : \Omega(da_{31}) : \ldots : \Omega(da_{k1}) : \Omega(da_{01}). \end{aligned}$$

Le (4) dànno le coordinate del punto di intersezione di g con un dato S_k di Σ infinitamente vicino a g; in modo analogo

si possono determinare le coordinate dello S_{2k} che unisce g con quello stesso S_k infinitamente vicino. Se $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2k+1}$ sono le coordinate di questo S_{2k}, e poniamo $(\xi, x) = \sum_{i=1}^{2k+1} \xi_i x_i$, sussisteranno le relazioni:

$$-(\xi, a_0) = 1; -(\xi, a_0 + da_0) = 1; (\xi, a_p) = 0; (\xi, a_p + da_p) = 0; \quad (p = 1, \ldots, k)$$

cioè:

$$(5) \qquad -(\xi, a_0) = 1; (\xi, da_0) = 0; (\xi, a_r) = 0; (\xi, da_p) = 0. \quad (p = 1, \ldots, k).$$

Le ultime $2k + 1$ fra queste uguaglianze mostrano nuovamente che il determinante (3) deve essere nullo; $2k$ tra esse scelte in modo opportuno permettono allora di ricavare le ξ, che saranno proporzionali ai suddeterminanti complementari degli elementi di una colonna del determinante (3), e il coefficiente di proporzionalità si determina ricorrendo alla $-(\xi, a_0) = 1$: se per es. quella colonna [7] è la $(k+1)^{\text{esima}}$, sarà:

$$(6) \qquad \xi_p = \frac{-\Omega(da_{0p})}{(\Omega(da_0), a_0)}. \qquad (p = 1, \ldots, 2k+1).$$

2. — D'ora in poi ci porremo nell'ipotesi $\alpha \leq k + 1$, che si intenderà mantenuta sino ad avvertenza in contrario.

La (2) del n° 1 si può scrivere in questo modo:

$$(7) \qquad \sum_{r=1}^{k} d\lambda_r a_r + \sum_{m=1}^{\alpha} d\tau_m \left(a_0^{(m)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(m)}\right) = 0$$

dove $a_0^{(m)} = \frac{\partial a_0}{\partial \tau_m}$, ecc.

---

[7] Che tale colonna si possa scegliere fra una delle ultime $k + 1$ del determinante (3), ciò che avrà importanza in seguito, risulta da questo fatto, che, se fossero nulli i suddeterminanti complementari degli elementi delle ultime $k + 1$ colonne, non potrebbe avvenire, nelle nostre ipotesi, che la caratteristica del determinante (3) fosse $2k$; poichè allora dovrebbe la matrice $\| a_{11}\, a_{12} \ldots\ldots a_{1k} \|$ essere nulla, cosicchè il punto $a_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r$ non descriverebbe più uno S_k (come si vede osservando che la somma dei prodotti degli elementi di una linea del determinante (3) pei suddeterminanti complementari dei corrispondenti elementi di ogni altra linea deve essere nulla).

La (7) rappresenta $2k+1$ equazioni lineari omogenee nelle $d\lambda$ e nelle $d\tau$; dunque la matrice:

$$(8) \qquad \| a_1, a_2, \ldots, a_k, a_0^{(1)} + \sum_r \lambda_r a_r^{(1)}, \ldots, a_0^{(\alpha)} + \sum_r \lambda_r a_r^{(\alpha)} \| = 0.$$

Precisamente tale matrice ha caratteristica $k+\alpha-i$ quando le λ che in essa compaiono sono tali che il sistema (7), ove si prendano per incognite le $d\lambda$ e le $d\tau$, ammetta i sistemi di soluzioni linearmente indipendenti. Ora, presa una ∞^1 di S_k di Σ passante per g e per uno spazio infinitamente vicino $g(\tau+\delta\tau)$, lo S_{k+1} tangente nel punto P di g corrispondente ai valori delle λ sopra considerati, alla V_{k+1} che così si ottiene, ha i suoi punti y dati da:

$$(9) \qquad y = a_0 + \sum_{s=1}^{k} \mu_s a_s + \mu (\delta a_0 + \sum_r \lambda_r \delta a_r).$$

Al variare della ∞^1 (cioè delle $\delta\tau$). il punto y viene a dipendere dalle $\mu_1, \ldots, \mu_k, \mu$, e dai rapporti fra le $\delta\tau$. La condizione affinchè esso descriva, anzichè uno $S_{k+\alpha}$, una varietà di minor dimensione. è precisamente che sia verificata, come effettivamente avviene, la relazione (8). Vediamo intanto che *le tangenti alle curve della varietà* V *costituita dagli* S_k *di* Σ, *passanti (in modo generico) per un foco di* g *ricoprono uno spazio a* $k+\alpha-i$ *dimensioni* (dove $i \geq 1$ ha il significato detto di sopra), spazio che possiamo chiamare tangente alla V in quel foco di g. Vediamo più precisamente in che modo questo avvenga. Consideriamo due S_k infinitamente vicini a g, siano $g(\tau+\delta\tau)$ e $g(\tau+\Delta\tau)$. I punti z dello S_{k+1} tangente in P a una ∞^1 di S_k di Σ per g e $g+\Delta g$ sono dati da:

$$(9') \qquad z = a_0 + \sum_{s=1}^{k} \nu_s a_s + \nu (\Delta a_0 + \sum_r \lambda_r \Delta a_r).$$

Le (9) e (9') si possono anche scrivere:

$$y = a_0 + \sum_{s=1}^{k} \mu_s a_s + \mu \sum_{m=1}^{\alpha} \delta\tau_m (a_0^{(m)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(m)});$$

$$z = a_0 + \sum_{s=1}^{k} \nu_s a_s + \nu \sum_{m=1}^{\alpha} \Delta\tau_m (a_0^{(m)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(m)}).$$

Se y e z coincidono,

$$(10) \qquad \sum_s (\mu_s - \nu_s)\, a_s + \sum_{m=1}^{\alpha} (\mu \delta\tau_m - \nu \Delta\tau_m)\,(a_0^{(m)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r\, a_r^{(m)}) = 0.$$

Vediamo se si possono assegnare $g + \delta g$ e $g + \Delta g$, in modo che i due S_{k+1} tangenti in P a una ∞^1 per y e $g + \delta g$, e a una ∞^1 per $g + \Delta g$ coincidano. Poichè la (10) non può differire dalla (7), dovranno allora, date ad arbitrio le $\mu_1, \ldots, \mu_k, \mu$, potersi determinare le $\nu_1, \ldots, \nu_k, \nu$ e ρ in modo che:

$$(11) \qquad \mu_s - \nu_s = \rho d\lambda_s \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

$$(12) \qquad \mu \delta\tau_m - \nu \Delta\tau_m = \rho d\tau_m \qquad (m = 1, \ldots, \alpha).$$

Ora, date $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, se $\alpha = 2$, le (12) permettono di ricavare ν e ρ, mentre, se $\alpha > 2$, dovrà essere soddisfatta la (13). In quanto a $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k$, esse sono date dalle (11). Dunque, se $\alpha > 2$, dovrà essere:

$$(13) \qquad \| \delta\tau_1 \;\; \Delta\tau_1 \;\; d\tau_1 \| = 0 .$$

Queste sono $k - 2$ relazioni fra le $\delta\tau$ e le $\Delta\tau$; quindi, quando sono date, oltre alle $d\tau$, anche le $\delta\tau$, si hanno ∞^1 sistemi di valori per le $\Delta\tau$. Concludiamo dunque:

Se P *è un foco di* g, *gli* S_{k+1} *tangenti in* P *alle* ∞^1 *di* S_k *di* Σ *passanti per* P *sono solo* $\infty^{\alpha-2}$: *per* $\alpha > 2$ *due* ∞^1 *collo stesso* S_{k+1} *tangente in* P *sono legate dalla* (13) [8].

3. — Ritorniamo ora al determinante (3) del n° 1: se alle da si immaginano sostituite le loro espressioni lineari omogenee nelle $d\tau$, si trova che le coordinate λ (entro g) del punto P di intersezione dello $S_k g$ con uno S_k infinitamente vicino, $g(\tau + d\tau)$, e così pure le coordinate dello $S_{2k}\,\xi$ che unisce g a $g(\tau + d\tau)$ si esprimono come rapporti di forme di grado $\leq k$ nelle $d\tau$. Se fissiamo un sistema generico di valori per le τ, vi sarà nel determinante (3) un suddeterminante d'ordine $2k$ che non sarà

---

[8] L'enunciato si riferisce al caso che per P passi un solo S_k di Σ infinitamente vicino a g; altrimenti gli S_{k-1} di cui parla il teorema sono meno di $\infty^{\alpha-2}$.

identicamente nullo rispetto alle $d\tau$, e possiamo supporre (cfr. la nota ([7])) che questo determinante sia $\Omega(da_{01})$. Poniamo:

$$\Omega(da_{01}) = \varphi^h \psi^k \dots \theta^t ,$$

dove $\varphi, \psi, \dots, \theta$ sono forme irriducibili nelle $d\tau$; e consideriamo quei valori di $q\,(1 \leq q \leq k)$ e di $r\,(2 \leq r \leq 2k+1)$ pei quali $\Omega(da_{q1})$ e $\Omega(da_{0r})$ non risultano identicamente nulli, cosicchè non sarà tale neppure $\Omega(da_{qr})$. Poichè il determinante (3) è identicamente nullo si ha:

$$\Omega(da_{01})\,\Omega(da_{qr}) = \Omega(da_{q1})\,\Omega(da_{0r});$$

e perciò, se φ^Q, φ^R sono le più alte potenze di φ che dividono rispettivamente $\Omega(da_{q1})$ e $\Omega(da_{0r})$, sarà:

$$Q + R \geq h .$$

Poichè questa relazione vale in particolare se si suppone di scegliere q e r in modo che Q e R risultino minimi, concludiamo che. per tutti i valori di q e di r che cadono tra i limiti detti di sopra, $\Omega(da_{q1})$ è divisibile per φ^{h_1}, e $\Omega(da_{0r})$ è divisibile per φ^{h_2}, essendo $h_1 + h_2 \geq h$. Ragionando in modo analogo su $\psi, \dots, \theta$, concludiamo che $\Omega(da_{01})$ si spezza nel prodotto di due forme, di cui una divide ogni $\Omega(da_{q1})$ e l'altra ogni $\Omega(da_{0r})$: la prima di queste forme divide il numeratore e il denominatore di ogni λ (quale è data dalle (4) del n° 1), e l'altra il numeratore e il denominatore di ogni ξ, data dalla (6) del n° 1. Conchiudiamo dunque:

Se una ∞^α di S_k (di uno S_{2k+1}) è tale che due S_k generici infinitamente vicini si incontrino in un punto, entro ogni S_k g della ∞^α le coordinate dei fochi si esprimono come rapporti di forme di grado m *in* α *parametri omogenei, e le coordinate (entro S_{2k+1}) degli S_{2k} che da* g *proiettano gli S_k della ∞^α infinitamente vicini si esprimono come rapporti di forme di grado* m' *negli stessi parametri, essendo* $m + m' \leq k$ ([9]).

([9]) Lo studio dei sistemi Σ si potrebbe pure fare partendo dalla teoria dei sistemi lineari di omografie degeneri (cfr. Segre, loc. cit. ([1]), n° 15, e la trattazione ivi fatta ai n^i 32-35 del caso $\alpha = k = 2$); in particolare per $\alpha = 2$ servirebbero i risultati del Kronecker sui fasci di omografie dege-

4. — Passiamo ora ad occuparci in particolare di un sistema Σ di $\infty^2 S_k$, tale che uno S_k generico di Σ incontri in uno S_l ($l \geq 0$) ciascuno degli S_k infinitamente vicini, lo spazio ambiente ([10]) essendo S_n, con $n \geq 2k + 1 - l$. Su uno S_k generico di Σ, sia g, si avrà come luogo degli S_l focali una varietà razionale di ordine $p \leq k - l$, appartenente a uno spazio S_m di dimensione $m \leq p + l$ ([11]). Di più sappiamo dal n° 2 che, supposto $p > 0$ (cfr. la nota ([11])), la varietà V_{k+2} luogo degli S_k di Σ, in un foco generico di g, non ammette che uno S_{k+1} tangente, che coincide collo S_{k+1} tangente in quel punto alla varietà costituita da una generica ∞^1 di S_k di Σ, passante per g ([12]). Ora ([13]), data una varietà V_{k+1} luogo di $\infty^1 S_k$, gli S_{k+1} ad essa tangenti nei punti di uno S_k generatore corrispondono omograficamente ai punti di contatto. Attualmente, avendosi su g uno S_l focale, quell'omografia è degenere (di specie $l + 1$) e perciò a uno S_m passante per lo S_l singolare di g corrisponderà uno S_{k+m-l}; cosicchè troviamo questo risultato: gli S_{k+1} tangenti singolari alla V_{k+1} nei fochi di uno S_k g stanno in uno S_{k+m-l}

---

neri (*Ber. der Kgl. Ak. der Wissenschaften zu Berlin*, 1868, pp. 339-46: (*Werke*, t. I, p. 163); 1890, pp. 1225-33; vedine anche l'esposizione in Muth, *Theorie und Anwendung der Elementarteiler*, Leipzig, 1899, § 8). Del resto si vede facilmente che le proprietà trovate fin qui costituiscono precisamente, sotto altra forma, dei risultati relativi a quella teoria.

([10]) Si noti che con questa ipotesi, se lo S_l focale di uno S_k generico della ∞^2 non è fisso (cfr. la nota ([11])), si esclude che sia $l = k - 1$. Infatti, supposto $l = k - 1$ e $n = 2k + 1 - l = k + 2$, al sistema Σ corrisponde per dualità entro S_n un sistema di ∞^2 rette, ciascuna delle quali incontra in un punto ognuna delle infinitamente vicine, cioè il sistema delle rette di un piano, oppure un sistema di ∞^2 rette per un punto. Dovendosi attualmente escludere la prima ipotesi, il sistema Σ sta in uno S_{k+1}.

([11]) Per $l = 0$ questo è stato dimostrato al n° 3. Per $l > 0$ basta osservare che, tagliando il sistema Σ con uno S_{n-l} si ottiene un sistema di ∞^2 S_{k-l} tale che due infinitamente vicini si incontrano generalmente in un punto.

L'ipotesi $p = 0$ equivale a supporre che lo S_l focale di uno S_k generico di Σ sia fisso. Questo caso si potrebbe trattare con un procedimento non molto diverso dagli altri: tuttavia noi lo escluderemo dalle nostre considerazioni, poichè esso è già noto (cfr. la nota ([3])) salvo a riprenderlo nell'enunciato che chiude questo numero.

([12]) L'ipotesi $l = 0$ che si era fatta al n° 2 non è infatti necessaria per stabilire questo risultato.

([13]) V. Segre, loc. cit. ([1]), n° 3.

(proprio in tale spazio e non in uno meno ampio, perchè se no il minimo spazio a cui appartiene la varietà focale di g non sarebbe uno S_m). Anzi, in questo S_{k+m-l} staranno, se $m > l+1$, gli S_{k+2} tangenti alla V_{k+2} in tutti i punti dello S_m a cui appartiene la varietà focale di g: infatti quello S_{k+m-l} contiene gli S_{k+1} tangenti nei punti di S_m alla V_{k+1} che abbiamo considerata, e quindi, poichè esso è determinato dagli S_{k+1} tangenti singolari nei fochi di g, contiene anche gli S_{k+1} che toccano in quei punti una qualsiasi V_{k+1} ottenuta in modo analogo a quella. Questo si può del resto confermare analiticamente nel seguente modo: se Ξ è un iperpiano che contiene quello S_{k+m-l} si avrà, qualunque siano le λ corrispondenti a un foco di g e qualunque siano le μ,

$$(\Xi\,,\, a_0 + \sum_{r=1}^{k} \mu_r a_r + \mu\,(a_0^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(1)})) =$$

$$= (\Xi\,,\, a_0 \sum_{r=1}^{k} \mu_r a_r + \mu\,(a_0^{(2)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(2)})) = -1$$

cioè:

$$(\Xi\,,\, a_0) = -1\,; \qquad (\Xi\,,\, a_i) = 0\,; \qquad (i = 1, \dots, k)$$

$$(\Xi\,,\, a_0^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(1)}) = (\Xi\,,\, a_0^{(2)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(2)}) = 0.$$

Le λ relative a un punto dello S_m considerato saranno della forma:

$$\lambda_r = \frac{\sum_{i=0}^{m} t_i \lambda_{ir}}{T}\,, \qquad (r = 1, \dots, k)$$

dove:

$$T = \sum_{i=0}^{m} t_i\,,$$

e dove $(\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0k})$, $(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1k})$, ..., $(\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mk})$ sono i sistemi di valori delle λ relativi a $m+1$ punti della varietà focale di g, tra loro linearmente indipendenti. I punti dello S_{k+2} tangente nel punto (λ) sono dati, al variare delle μ, da:

$$y = a_0 + \sum_{r=1}^{k} \mu_r a_r + \mu\left(a_0^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\sum_{i=0}^{m} t_i \lambda_{ir}}{T}\, a_r^{(1)}\right) + \mu'\left(a_0^{(2)} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\sum_{i=0}^{m} t_i \lambda_{ir}}{T}\, a_r^{(2)}\right)$$

Sarà:

$$(\Xi, y) = -1 + \mu\left(\Xi, a_0^{(1)} + \frac{1}{T}\sum_{i=0, r=1}^{m,k} t_i \lambda_{ir} a_r^{(1)}\right) + \mu'\left(\Xi, a_0^{(2)} + \frac{1}{T}\sum_{i=0, r=1}^{m,k} t_i \lambda_{ir} a_r^{(2)}\right)$$

$$= -1 + \frac{\mu}{T}\left(\Xi, Ta_0^{(1)} + \sum_{i=0, r=1}^{m,k} t_i \lambda_{ir} a_r^{(1)}\right) + \frac{\mu'}{T}\left(\Xi, Ta_0^{(2)} + \sum_{i=0, r=1}^{m,k} t_i \lambda_{ir} a_r^{(2)}\right)$$

$$= -1 + \frac{\mu}{T}\sum_{i=0}^{m} t_i\left(\Xi, a_0^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_{ir} a_r^{(1)}\right) + \frac{\mu'}{T}\left(\Xi, a_0^{(2)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_{ir} a_r^{(2)}\right)$$

$$= -1. \qquad \text{c. d. d.}$$

Ora gli S_m delle varietà focali dei singoli S_k di Σ dànno luogo a uno dei seguenti casi:

a) quegli S_m sono ∞^2, e ricoprono una varietà di $m+2$ dimensioni, U_{m+2};

b) essi sono ancora ∞^2, ma ricoprono una varietà di sole $m+1$ dimensioni, che sarà necessariamente uno S_{m+1};

c) essi sono soltanto ∞^1: ciascuno di essi corrisponde a una semplice infinità di spazî generatori;

d) quegli S_m coincidono tutti tra loro.

Nel caso *a)*, poichè, come abbiamo visto, gli S_{k+2} (o, se $l = m+1$, gli S_{k+1}) tangenti alla V_{k+2} nei punti dello S_m determinato dalla varietà focale di g stanno in uno S_{k+m-l}, la U_{m+2} è tale che gli S_{m+2} ad essa tangenti nei punti di uno S_m generatore stanno pure in uno S_{k+m-l}. In questo caso la ∞^2 di S_k costituente il sistema Σ si ottiene dunque partendo da un sistema di ∞^2 S_m, ricoprenti una U_{m+2}, che lungo ogni S_m generatore ha uno S_{k+m-l} tangente fisso, e tirando per ogni S_m uno S_k generico entro il corrispondente S_{k+m-l} tangente. Viceversa, ogni sistema Σ costituito in questo modo soddisfa alle condizioni imposte. Si consideri infatti una ∞^1 di S_m generatori della U_{m+2} e la corrispondente ∞^1 di S_k: questi costituiscono una varietà V_{k+1}, tale che gli S_{k+1} ad essa tangenti nei punti di uno S_m γ della ∞^1 considerata passano pel corrispondente S_k g, e stanno entro lo S_{k+m-l} tangente alla U_{m+2} lungo γ (poichè hanno in comune con esso anche lo S_{m+1} tangente nel punto in cui toccano la V_{k+1}, alla varietà luogo degli ∞^1 S_m considerati). Essi sono dunque al massimo ∞^{m-l-1}, e perciò la ∞^1 di S_k è sviluppabile (perchè altrimenti in ogni punto generico di uno S_k

generatore la V_{k+1} avrebbe uno S_{k+1} tangente, che non la toccherebbe in altri punti dello S_k, in virtù della proiettività non degenere che passerebbe tra i punti dello S_k e gli S_{k+1} in essi tangenti), e più precisamente su g si ha almeno uno S_l singolare (per un motivo analogo a quello ora detto). Effettivamente dunque in questo caso uno S_k generico della ∞^2 incontra almeno in uno S_l ciascuno degli S_k generici ad esso infinitamente vicini.

Verifichiamo la cosa analiticamente. Consideriamo una ∞^2 di S_m, ricoprenti una U_{m+2} dotata, lungo ogni S_m generatore, di uno S_{k+m-l} tangente fisso. I punti della U_{m+2} siano dati (in coordinate proiettive omogenee) mediante le formule:

$$(14) \qquad y = P_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i P_i$$

dove le P sono funzioni di due parametri τ_1, τ_2; per ipotesi i $3m+2$ punti:

$$(15) \qquad P_0, P_1, \ldots, P_m, P_0^{(1)}, P_1^{(1)}, \ldots, P_m^{(1)}, P_0^{(2)}, P_1^{(2)}, \ldots, P_m^{(2)}$$

stanno in uno S_{k+m-l}. Un punto x di una ∞^2 di S_k, ottenuta conducendo uno S_k generico per ogni S_m, entro il corrispondente S_{k+m-l} tangente si può supporre dato dalla:

$$x = P_0 + \sum_{i=1}^{k} v_i P_i ,$$

dove le P con indice $\leq m$ sono le stesse che compaiono nella (14), mentre le rimanenti sono combinazioni lineari degli ultimi $2m+2$ punti (15). Ora è facile vedere che, in coordinate omogenee, la condizione affinchè due S_k infinitamente vicini siano sempre incidenti, almeno in uno S_l, si traduce nel fatto che la matrice:

$$\| P_0, P_1, \ldots, P_k, dP_0, dP_1, \ldots, dP_k \|$$

sia nulla di caratteristica $\leq 2k+1-l$. E attualmente questa condizione è soddisfatta, perchè i $k+m+2$

$$P_0, P_1, \ldots, P_k, dP_0, dP_1, \ldots, dP_m$$

sono combinazioni lineari dei punti (14), cioè in sostanza di soli $k+m-l+1$ posti linearmente indipendenti.

In quanto alle ipotesi *b)*, *c)*, *d)*, fatte di sopra, scartata la *d)* (perchè allora sarebbe $m = l$, e su ogni S_k generico di Σ sarebbe fisso lo S_l focale), la *b)*, poichè due S_k di Σ si tagliano generalmente in uno S_l, e non in uno spazio più ampio, non può essere verificata se non è $m = l + 1$. Si avrà così una ∞^2 di S_k che tagliano in S_{l+1} uno S_{l+2} fisso: viceversa un tale sistema di S_k soddisfa ovviamente alle nostre condizioni ([14]).

Infine, per quello che riguarda il caso *c)*, si consideri uno S_k generico g di Σ, e il relativo spazio $S_m\,\gamma$: uno S_k di Σ infinitamente vicino a g passerà per uno S_m delle ∞^1 infinitamente vicino a γ, e incontrerà g proprio in un punto di γ. Se con S_c indichiamo lo spazio di intersezione di due S_m della ∞^1 infinitamente vicini tra di loro, sarà $-1 \leq c < l$ (poichè se fosse $c = l$, sarebbe fisso lo S_l in cui g è tagliato dagli S_k di Σ infinitamente vicini); quindi lo S_k di Σ infinitamente vicino a g, che abbiamo considerato, sarà tangente alla U_{m+1} luogo degli ∞^1 S_m lungo uno S_l (contenente l'eventuale S_c singolare dello S_m per cui passa lo S_k). In questo caso il sistema Σ si ottiene dunque partendo da una U_{m+1} luogo di ∞^1 S_m e conducendo per ogni S_m ∞^1 S_k, che tocchino la U_{k+1} lungo uno S_l di quello S_m (e non in uno spazio più ampio). Al medesimo risultato possiamo giungere in questo altro modo: abbiamo dimostrato più sopra che gli S_{k+2} (o S_{k+1}, se $m = l + 1$) tangenti alla V_{k+2} luogo degli S_k di Σ nei punti dello S_m relativo a g stanno in uno S_{k+m-l}. Perciò nel nostro caso la U_{m+1}, lungo ogni S_m generatore, ammetterà ∞^1 S_{k+m-l} tangenti fissi (eventualmente coincidenti in uno solo), entro ciascuno dei quali sta uno S_k corrispondente a quello S_m. Se quindi è S_q ($q \leq 2m + 1$) il minimo spazio che contiene gli S_{m+1} tangenti alla U_{m+1} lungo uno S_m generatore γ, S_q e uno $S_k\, g$ di Σ passante per γ si taglieranno in uno S_{q-m+l}, passante per γ; e quindi, poichè $q = 2m - c$, lo S_{q-m+l}, e perciò anche g, tocca la U_{m+1} lungo uno S_l. Viceversa, si verifica subito che ogni sistema ottenuto nel modo considerato è un sistema Σ; ma esso non soddisfa alle condizioni richieste, poichè su ciascuno S_k del sistema risulta fisso lo S_l singolare.

([14]) Più in generale si potrebbe considerare una ∞^2 di S_k, ciascuno dei quali tagli in uno S_p uno S_{2p-l} fisso con $l + 1 \leq p < k$, ma, quando $p > l + 1$, questi sistemi rientrano, come si vede facilmente, tra quelli considerati nel caso *a)*.

Raccogliendo i risultati ottenuti, e includendo anche quelli relativi al caso che sia $p = 0$ (cfr. la nota [11]); concludiamo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema Σ *di* ∞^2 S_k *sia tale, che due* S_k *di* Σ *infinitamente vicini si incontrino generalmente in uno* S_l, *è che sia verificata una delle seguenti condizioni:*

1) *gli* S_k *di* Σ *stanno in uno spazio di dimensione* $2k-1$, *oppure passano tutti per uno stesso* S_l, *oppure ancora essi tagliano in* S_{l+1} *uno* S_{l+2} *fisso* [15];

2) *gli* S_k *di* Σ *sono tangenti ciascuno lungo uno* S_l *a una* U_{l+1} *luogo di* ∞^1 S_l $(l < k-1)$;

3) *gli* S_k *di* Σ *si ottengono considerando una* ∞^2 *di* S_m $(l \leq m \leq k\,;\, l < k-1)$ *tale che la* U_{m+2} *loro luogo ammetta lungo ciascuno di essi uno* S_{k+m-l} *tangente fisso, e conducendo uno* S_k *generico per ogni* S_m *della* ∞^2 *entro il corrispondente* S_{k+m-l} *tangente.*

5. — Servendoci delle proprietà dimostrate nei n[i] 1-3, possiamo ancora determinare tutti i sistemi Σ costituiti da ∞^α piani, α essendo ora un numero qualunque. Se escludiamo le soluzioni banali costituite da sistemi di piani passanti per una retta fissa, o da sistemi di piani appartenenti a uno S_3, possiamo supporre $l = 0$. E così escludiamo anche il caso, noto, in cui è fisso il foco di un piano generico g, oppure lo S_4 che unisce g a un piano di Σ infinitamente vicino. I fochi di g potranno allora essere ∞^1, oppure riempire tutto g [16]. Nel secondo caso è certo $\alpha = 3$, e il sistema Σ è costituito, come risulterà da

---

[15] Nella trattazione da lui fatta del caso $k = 2$, il Prof. Segre (cfr. la nota [6]) suppone che, per $m = 1$, le ∞^2 rette luogo dei fochi ricoprano una varietà a tre dimensioni; e quindi, nel risultato che egli trova, al n° 34, non compaiono le ∞^2 di piani che incontrano in rette un piano fisso, per quanto questi sistemi rientrino in quelli, che egli cita, come esempi di sistemi Σ, nella nota [25].

[16] In questo secondo caso intendiamo che g sia riempito dai punti, che costituiscono la (completa) intersezione di g coi singoli piani di Σ infinitamente vicini a g: se questi punti fossero solo ∞^1, anche dato che vi siano dei piani di Σ infinitamente vicini a g che lo incontrano in rette, in modo che tali rette focali riempiano g, intenderemo che sia verificato il primo caso.

quanto diremo nel n° 7, da uno dei due sistemi ∞^3 di piani di una V_4^2 di S_5.

Per quello che riguarda il primo caso, si osservi che, presa una generica ∞^2 di piani entro Σ, gli ∞^1 fochi che, entro essa, si hanno su g e che saranno tra gli ∞^1 fochi di g entro Σ, costituiscono una retta (v. il n° 3). In un punto generico di questa retta, e di tutte le analoghe, qualunque sia la dimensione dello spazio ambiente, purchè ≥ 5, la varietà ricoperta dai piani di Σ non ammette al massimo che uno S_3 tangente (come si vede seguendo lo stesso procedimento adoperato in principio del n° 2), e perciò le rette del tipo indicato ricoprono una varietà la cui dimensione è al massimo uguale a 3 e che è toccata lungo ciascuna di esse da un medesimo S_3. Se quelle rette singolari costituissero un sistema ∞^4 (non possono costituire un sistema più ampio), esse riempirebbero uno spazio a tre dimensioni entro il quale dovrebbero cadere i piani del sistema Σ; ma in questo caso sarebbe $l = 1$, il che abbiamo escluso. Se quelle rette sono ∞^3, esse costituiscono una ∞^1 di piani (anche nel caso in cui quelle ∞^3 rette stessero sopra una quadrica, che dovrebbe necessariamente ridursi a un cono), che sarà una sviluppabile ordinaria: il sistema Σ si otterrà perciò considerando una ∞^1 di S_2 sviluppabile ordinaria, e conducendo $\infty^{\alpha-1}$ piani entro ogni suo S_3 tangente (cosicchè $\alpha \leq 4$); ma in questo caso è fisso lo S_4 di g e di un piano generico di Σ ad esso infinitamente vicino. Se le rette singolari sono ∞^2, e ricoprono una V_3 che ammette lungo ciascuna di esse uno S_3 tangente fisso, per ogni retta passeranno $\infty^{\alpha-2}$ piani situati entro il corrispondente S_3 tangente: dunque è certo $\alpha \leq 3$. Se poi quelle ∞^2 rette non ricoprono che un piano, si avranno ∞^α piani che incontrano in rette un piano fisso. Questi sistemi di piani soddisfanno entrambi alle condizioni richieste.

Se le rette singolari sono ∞^1 e non costituiscono una superficie sviluppabile, per ciascuna passano $\infty^{\alpha-1}$ piani situati entro lo S_3 tangente alla superficie lungo quella retta, e perciò $\alpha = 2$; se la superficie luogo di quelle ∞^1 rette è sviluppabile, per ognuna passeranno $\infty^{\alpha-1}$ piani, e si hanno così ∞^α piani tangenti a una curva; ma in questi due casi il foco di un piano di Σ è fisso. Concludendo:

Per $\alpha > 3$ *i sistemi* Σ *di* ∞^α *piani, tali che non sia fisso il*

punto in cui uno S_2 *generico* g *incontra i piani infinitamente vicini, nè lo* S_4 *che da* g *proietta questi piani, sono costituiti da piani che incontrano in rette un piano fisso; per* $\alpha = 3$ *si hanno anche i sistemi* ∞^3 *di piani di una* V_4^2 *di* S_5, *e i sistemi dei piani che passano per le singole rette di una* ∞^2 *ricoprente una* U_3, *dotata di* S_3 *tangente fisso lungo ogni generatrice, e situati entro i corrispondenti* S_3 *tangenti.*

6. — Il teorema enunciato alla fine del n° 4 riconduce in sostanza la costruzione dei sistemi Σ di ∞^2 S_k a sistemi noti, oppure alla costruzione di un sistema ∞^2 di S_m, tale che la U_{m+2} luogo di questi ∞^2 S_m sia toccata lungo ogni S_m da uno S_{k+m-l} fisso. Quando si sia costruita una ∞^2 di S_m dotata di questa proprietà, la costruzione di Σ non offre più nessuna difficoltà: essa si effettua immediatamente, e dipende solo più da elementi arbitrarii. Aggiungeremo ora alcune osservazioni sulle ∞^2 di S_m dotate della proprietà richiesta. Presa una qualsiasi ∞^2 di S_m ricoprente un U_{m+2}, gli S_{m+2} ad essa tangenti nei punti di uno S_m generatore stanno in uno spazio di dimensione $\leq 3m + 2$, cosicchè, se m è abbastanza piccolo rispetto a $k - l$, precisamente se

$$3m + 2 \leq k + m - l,$$

cioè se

$$m \leq \frac{k-l-2}{2}, \qquad (16)$$

una generica ∞^2 di S_m soddisfa alle nostre condizioni. Per avere il sistema Σ, in questo caso, si dovrà [condurre per ogni S_m uno S_k generico giacente in uno S_{k+m-l} passante per lo S_{3m+2} tangente alla U_{m+2} lungo lo S_m considerato, cioè si dovrà] condurre per ogni S_m uno S_k che incontri secondo uno S_{2m-l+2} lo S_{3m+2} tangente alla U_{m+2} lungo quello S_m.

Nel caso generale, è ovvio che gli S_m della ∞^2 si possono considerare come S_m congiungenti $m + 1$ punti, ciascuno dei quali descriva una superficie; queste superficie essendo riferite tra loro in modo, che i piani ad esse tangenti in punti corrispondenti stiano in uno S_{k+m-l}. Per quello che riguarda la costruzione effettiva di tali ∞^2 di S_m, ci limiteremo a dare una costruzione valida se è soddisfatta la (17), che, pur non essendo

atta a fornire tutte le soluzioni, è tuttavia dotata di una certa generalità. Posto $d = 2m + 2 - k + l$ (è certo $d > 0$, quando non sia verificata la (16)), si fissi un sistema generico di $\infty^2 S_q$, q essendo tale che risulti $d \leq 2q + 2$, e per ciascuno S_q si conduca uno S_m che tagli in uno S_{d+q} lo S_{3q+2} che tocca la varietà luogo degli $\infty^2 S_q$ lungo quello spazio generatore: il sistema degli $\infty^2 S_m$ così costruiti è tale, che gli S_{m+2} tangenti alla U_{m+2} lungo uno S_m generatore stanno in uno spazio di dimensioni $\leq 3m + 2 - d$ cioè $\leq k + m - l$. Se infatti quegli $\infty^2 S_q$ sono dati come congiungenti di $q + 1$ punti $B_0, \ldots, B_q$ funzioni di due parametri, si può supporre che d tra i rimanenti $m - q$ punti che servono a determinare gli $\infty^2 S_m$ siano combinazioni lineari dei punti B e dei loro primi derivati, cosicchè tra gli $m + 1$ punti che determinano i singoli S_m di Σ e tra i loro primi derivati passano almeno d relazioni lineari omogenee linearmente indipendenti. Naturalmente, perchè la costruzione sia possibile, deve essere ([17]):

$$(17) \qquad k + m - l \geq 2m + 1 + \frac{m+1}{3};$$

cioè lo spazio che deve essere tangente fisso alla U_{m+2} lungo uno S_m generatore deve avere dimensione $\geq 2m + 1 + \frac{m+1}{3}$.

Nel caso in cui quello spazio tangente ha dimensione $\leq 2m+1$, potrà forse servire il procedimento accennato nella nota ([17]) della mia Memoria " sulle V_k che rappresentano più di $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti " ([18]).

([17]) Infatti, per la possibilità della costruzione, occorre e basta che si possa determinare q in modo da soddisfare alle due condizioni

$$d \leq 2q + 2 \qquad \text{cioè} \qquad k + m - l \geq 3m - 2q$$
$$d + q \leq m \qquad \text{cioè} \qquad k + m - l \geq 2m + 2 + q$$

dalle quali segue subito la (17). Viceversa, se è soddisfatta la (17), si può prendere q uguale a $\frac{m-3}{3}$, o a $\frac{m-2}{3}$, o a $\frac{m-1}{3}$, secondochè $m \equiv 0$, o $m \equiv 2$, o $m \equiv 1$ (mod. 3).

([18]) " Rend. del Circolo Matem. di Palermo ", t. XXXIII (1912).

7. — Già nel caso affatto elementare dei sistemi Σ di ∞^α rette si vede come, passando dal valore 1 di α a valori maggiori, colla condizione che non sia fisso il punto in cui una retta generica di Σ incontra le infinitamente vicine, i sistemi Σ risultano caratterizzati in modo ben diverso: mentre per $\alpha = 1$ il sistema Σ è caratterizzato da condizioni non algebriche, nel secondo esso risulta addirittura definito in modo proiettivamente unico, in quanto deve essere necessariamente costituito dalle ∞^2 rette di un piano. Di più, se si riprende la dimostrazione di questa proprietà (cfr. la nota (5)), si vede che essa è intimamente connessa coll'altra, che i piani sono le sole superficie che contengano ∞^2 rette. Orbene, vedremo che cose in gran parte analoghe a queste sussistono anche se consideriamo un sistema Σ di ∞^α S_k, con $k > 1$ e $\alpha \geq k + 1$, tale che due S_k infinitamente vicini si incontrino in un punto, purchè sia soddisfatta la seguente condizione: un punto generico di uno S_k generico di Σ, g, sia la intersezione di g con $\infty^{\alpha-k-1}$ S_k di Σ infinitamente vicini a g, i quali non seghino necessariamente g in altri punti (19).

Supponiamo che lo spazio ambiente sia S_{2k+1}: analogamente a quanto si è visto al principio del n° 2 è:

$$(8) \qquad \| a_1, a_2, \ldots, a_k \;\; a_0^{(1)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(1)}, \ldots, a_0^{(\alpha)} + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r^{(\alpha)} \| = 0$$

qualunque siano le λ. Infatti, preso un sistema generico di valori per le τ e le λ, le $2k+1$ equazioni:

$$(7) \qquad \sum_{r=1}^{k} d\lambda_r a_r + \sum_{r=1}^{\alpha} d\tau_m \left(a_0^{(m)} + \sum_{m=1}^{k} \lambda_r a_r^{(m)}\right) = 0$$

permettono di ricavare almeno $\infty^{\alpha-k-1}$ sistemi di valori per le $d\lambda$, $d\tau$. E, poichè la condizione affinchè il punto:

$$(1) \qquad x = a_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r a_r$$

(19) Cfr. quanto si disse alla nota (16). Non rientra p. es. in questa categoria il sistema Σ ottenuto conducendo ∞^2 piani in ciascuno S_3 di una ∞^1 di S_3 sviluppabile ordinaria; poichè ogni punto di uno di quei piani, g, è bensì un foco, ma i punti di g che non sono situati sulla retta in cui g è tagliato dallo S_2 singolare dello S_3 a cui appartiene g, sono tali, che i piani infinitamente vicini a g, che passano per essi, incontrano g in una retta.

dipendente dai $k+\alpha$ parametri λ e τ descriva una varietà di dimensione $\leq 2k$ è che sia nulla la matrice jacobiana delle x, cioè che sia verificata la (8), concludiamo che gli S_k di Σ descrivono una varietà M di dimensione $\leq 2k$. Osserviamo però che nell'ipotesi fatta di sopra, che un punto generico di g sia intersezione di g con $\infty^{\alpha-k-1} S_k$ di Σ infinitamente vicini, tale dimensione sarà proprio $2k$ e non minore, poichè, presa una generica ∞^{k-1} di S_k entro Σ passante per g, le equazioni analoghe alla (7) che si avranno per questa ∞^{k-1}, permetteranno di ricavare un solo sistema di valori per le $d\tau$ e le $d\lambda$, perchè per un punto di g passerà un solo S_k infinitamente vicino a g, pel quale le $d\lambda$ avranno pure un valore univocamente determinato.

Per ogni punto della M passeranno dunque $\infty^{\alpha-k} S_k$ di Σ [20]. Ora, fissato lo $S_k\, g$, non potrà avvenire che gli S_k di Σ che passano per un punto generico di g lo incontrino necessariamente in altri punti, poichè abbiamo escluso che un tale fatto si presenti per gli S_k di Σ infinitamente vicini a g. Gli S_k di Σ incidenti a g saranno dunque ∞^{α} e perciò esauriranno il sistema Σ. Riassumendo, e passando al caso che lo spazio ambiente sia qualunque, arriviamo a questa conclusione: Nelle ipotesi fatte, per $l=0$, gli S_k di Σ ricoprono una varietà di dimensione $2k$ e sono a due a due incidenti, generalmente in un punto.

Se consideriamo più in generale il caso di $l\geq 0$ e se tagliamo il sistema Σ con uno S_{n-l} troviamo:

Per $l\geq 0$, $\alpha\geq k-l+1$, *i sistemi* Σ *tali che per un punto generico di uno* $S_k\, g$ *di* Σ *passino* $\infty^{\alpha-k-1+l} S_k$ *di* Σ *infinitamente vicini a* g, *i quali non seghino generalmente* g *in uno spazio di dimensione* $>l$, *stanno su una varietà di dimensione* $2k-l$, *e i loro* S_k *si segano a due a due generalmente in uno* S_l.

La ricerca dei sistemi Σ corrispondenti alle ipotesi fatte è così ricondotta alla ricerca delle varietà di $2k-l$ dimensioni che contengono $\infty^{\alpha} S_k$, a due a due incidenti in uno S_l, con $\alpha>k-l$, in modo che per un punto generico di uno S_k della M_{2k-l} passino $\infty^{\alpha-k+l} S_k$ della M, i quali generalmente non incontrino quello S_k in uno spazio di dimensione $>l$.

---

[20] È infatti attualmente da escludere che vi siano nella $M\, \infty^{2k-\rho}$ punti per ciascuno dei quali passino $\infty^{\alpha-k+\rho} S_k$ di Σ, con $\rho\geq 1$.

8. — Le varietà M_{2k-l} di cui si parla alla fine del n° precedente sono certo algebriche, come mostra un'osservazione fatta dal CASTELNUOVO in un caso analogo ([21]), in quanto si possono considerare come luogo di S_k soddisfacenti a certe condizioni algebriche (le condizioni di tagliare in S_l un certo numero di S_k del sistema Σ) ([22]).

La M_{2k-l} *appartiene a uno spazio di dimensione*

$$\leq \frac{(k-l)(k-l+3)}{2}+l.$$

Riduciamoci con una conveniente sezione al caso $l=0$; e osserviamo intanto che due S_k generici della M, a_0, a_1, stanno in uno S_{2k}, e che un terzo S_k generico a_2 di questa varietà taglia a_0, a_1 in punti distinti: cioè che, per $m=2$, le intersezioni di uno S_k generico della M_{2k} con altri m S_k generici sono linearmente indipendenti. Ora, se un tale fatto si verifica per un certo valore di $m\leq k$, esso si verifica anche per $m+1$: siano infatti $a_0 \dots a_m$ degli S_k generici della M, e supponiamo che le loro intersezioni con un altro S_k generico sia a_{m+1}, non siano linearmente indipendenti, e stiano perciò in uno S_{m-1}, che si può, per quello che abbiamo supposto, ritenere determinato dai punti $a_0 a_{m+1}, \dots, a_{m-1} a_{m+1}$. Allora, facendo variare a_m, avverrebbe che, per posizioni generiche di questo S_k, l'intersezione $a_m a_{m+1}$ starebbe in uno S_{m-1} fisso, mentre per le ipotesi fatte sulla M_{2k}, le intersezioni di a_{m+1} con S_k generici di queste varietà devono riempire tutto a_{m+1}. Da questo segue che, fissati m S_k generici delle M_{2k} ($m\leq k+1$), la dimensione δ_m dello spazio da essi determinato soddisfa alla relazione:

$$\delta_m \leq mk - \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Infatti questo è vero per $m=2$: dimostriamo che, se è vero per un certo valore di $m\leq k$, è vero anche pel valore succes-

([21]) Cfr. MARLETTA, *Sulle varietà a quattro dimensioni di* S_r *i cui* S_4 *tangenti si incontrano a due a due*, "Rend. del Circolo Mat. di Palermo", t. XXVII (1909), v. la nota ([19]).

([22]) Non occorre far notare che questo non implica l'algebricità dei sistemi Σ soddisfacenti alle ipotesi sopra enunciate; poichè un sistema Σ potrebbe non esaurire la totalità (algebrica) degli S_k di una M_{2k-l}.

sivo. Ora questo discende da quanto abbiamo detto, poichè sarà certo:

$$\delta_{m+1} \leq \delta_m + k + 1 - m \leq (m+1)k - \frac{m(m-1)}{2}.$$

In particolare, per $m = k + 1$, troviamo che $k + 1$ S_k generici della M_{2k} stanno in uno spazio di dimensioni $d \leq \frac{k(k+3)}{2}$, che conterrà anche gli altri S_k della M_{2k} e perciò la stessa M_{2k}.

9. — Supponiamo ora che sia $l = 0$ e che sia proprio $d = \frac{k(k+3)}{2}$; e proponiamoci di determinare tutte le varietà M_{2k} relative a queste condizioni.

Incominciamo a trattare il caso $\alpha = k + 1$, e osserviamo che *gli* ∞^1 S_k *della* M *che escono da un suo punto* P *incontrano un altro* S_k *generico di quella varietà in punti di una retta.* Infatti, gli S_k per P stanno nello S_{2k} tangente alla M in P; e poichè, conformemente alle nostre ipotesi, gli S_k per P incontrano uno S_k della M, g, in punti variabili, lo S_{2k} tangente in P incontrerà g in uno S_i con $i \geq 1$, e precisamente sarà $i = 1$, perchè, se no, la M_{2k} starebbe in uno spazio di dimensione $< \frac{k(k+3)}{2}$ (in quanto tre S_k generici della M starebbero in uno spazio di dimensione $< 3k - 1$).

Presi due S_k generici della M, siano a_0, a_1, indichiamo con (a_0, a_1) il sistema degli ∞^1 S_k della M che passano per il punto $a_0 a_1$: se a_2 è un altro S_k generico non appartenente al sistema (a_0, a_1), indichiamo con (a_0, a_1, a_2) il sistema degli ∞^2 S_k della M che incontrano a_2 in un punto dove questo S_k sia incontrato da uno S_k del sistema (a_0, a_1). Se m e n sono due S_k generici di quel sistema ∞^2, esso contiene il sistema (m, n) (perchè o avviene che m, n incontrino a_2 nel medesimo punto, appartenente alla retta a_0a_2 a_1a_2, e allora gli S_k per un tale punto appartengono effettivamente al sistema (a_0, a_1, a_2), o ciò non avviene e allora gli S_k del sistema (m, n) incontrano a_2 in punti della retta ma_2 na_2, che coincide colla retta $a_0 a_2$, $a_1 a_2$). Gli S_k del sistema (a_0, a_1, a_2) tagliano perciò gli S_k g della M in punti che riempiono uno spazio lineare, e precisamente in punti di un piano, o in punti di una retta, secondochè g non appartiene,

oppure appartiene a (a_0, a_1, a_2). Si può pure definire in modo analogo il sistema (a_0, a_1, a_2, a_3), o, più in generale, $(a_0, a_1, ..., a_p)$ $(p \leq k)$ e dimostrare che, se m e n appartengono a $(a_0, ..., a_p)$, a questo sistema appartengono tutti gli S_k del sistema (m, n); e che gli S_k di un tale sistema tagliano gli S_k generici della M non giacenti in esso nei punti di uno S_p, e quelli che giacciono in esso nei punti di uno S_{p-1}.

Ciò premesso consideriamo i due sistemi:

$$\Pi_1 \equiv (a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k).$$
$$\Pi_2 \equiv (a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a'_k).$$

Per un punto generico della M, sia P, passa uno S_k di Π_1. e uno S_k di Π_2 (poichè la retta luogo delle intersezioni di a_k (o di a'_k) cogli S_k per P incontra generalmente in un punto lo S_{k-1} luogo delle intersezioni di a_k (o di a'_k) cogli S_k del sistema $(a_0, a_1, ..., a_{k-1})$). Viceversa uno S_k generico di Π_1 e uno S_k generico di Π_2 si incontrano in un punto della M. In questo modo la M si rappresenta. come luogo di punti, sulle coppie di S_k della M appartenenti uno a Π_1 e uno a Π_2. Sia ora g uno S_k generico della M (non appartenente a Π_1 nè a Π_2): uno S_k generico di Π_1, sia l_1. incontra g in un punto L_1, che non proviene in generale che da un solo l_1; analogamente a uno S_k l_2 di Π_2 corrisponde in modo generalmente biunivoco la sua intersezione L_2 con g. Consideriamo poi in uno S_{k-1}. sia R_{k+1}, due S_k. ω_1 e ω_2, e riferiamoli omograficamente ω_1 a $g \equiv (L_1)$ considerato come luogo di L_1. e ω_2 allo stesso $g \equiv (L_2)$ considerato come luogo di L_2: precisamente le due omografie siano tali da far corrispondere entrambe allo S_{k-1} β, in cui g è tagliato dagli S_k del sistema $(a_0 ... a_{k-1})$, lo S_{k-1} $\beta' \equiv \omega_1 \omega_2$. tali anzi da subordinare tra questi S_{k-1} corrispondenti la stessa proiettività [23]. In questo modo, detto L un punto generico della M. l_1 e l_2 i due S_k appartenenti rispettivamente a Π_1 e a Π_2 che passano per L. L_1 e L_2 le loro traccie su g. L'_1 e L'_2

[23] Questo è sempre possibile in infiniti modi: si conduca per es. uno R_{k+1} per g. e si prenda $\omega_1 \equiv g$. i due sistemi ω_1 e (L_1) essendo identici: come S_k ω_2 si assuma uno S_k passante per β e si riferisca prospettivamente ω_2 a (L_2).

i punti che su ω_1 e ω_2 corrispondono rispettivamente a L_1, L_2, si rappresentano i punti L della M colle coppie di punti di ω_1, ω_2; o, se vogliamo, i punti generici L della M si rappresentano in modo biunivoco sulle rette dello R_{k+1}, ove alla coppia $L'_1 L'_2$ si faccia corrispondere la retta che li congiunge, λ, e viceversa.

Quando il punto L descrive uno S_k generico della M, sia n, ciascuno dei punti L_1, L_2 descrive lo $S_k\, g$; e a ogni posizione di L_1 viene allora a corrispondere un punto L_2 e viceversa (in quanto L debba stare su n). La corrispondenza che così si viene a porre tra L_1 e L_2 è una omografia. Infatti, quando L_1 si muove su una retta, l_1 passa per un punto fisso della M, poichè, se L_1, H_1 sono due posizioni di L_1, e l_1, h_1 le corrispondenti posizioni di l_1, il sistema Π_1 contiene, come abbiam visto sopra, il sistema (l_1, h_1), e gli S_k di questo sistema tagliano g precisamente in punti della retta $L_1 H_1$: quindi L descrive una retta di n, e quindi ancora, per un motivo perfettamente analogo, L_2 descrive anche una retta. E perciò anche i corrispondenti L'_1 e L'_2 risultano riferiti in una omografia. Nella proiettività tra L_1 e L_2 i punti di β corrispondono a sè stessi; quindi nella proiettività tra ω_1 e ω_2 i punti di β' sono uniti e perciò ω_1 e ω_2 risultano riferiti prospettivamente tra loro: la retta $\lambda \equiv L'_1 L'_2$ passa dunque per un punto fisso. La corrispondenza che abbiamo posto tra i punti della M e le rette di R_{k+1} è dunque tale che *a punti di uno* S_k *corrispondono rette per un punto* $\mathfrak{H}$. Più precisamente, quando L si muove su una retta di n, L_1 si muove su una retta di g, L'_1 sulla corrispondente retta di ω_1, cosicchè λ descrive il piano di $\mathfrak{H}$ e di questa retta. La corrispondenza tra i punti di n e le corrispondenti rette per $\mathfrak{H}$ è dunque proiettiva. Viceversa, dato in modo generico un punto $\mathfrak{H}$ dello R_{k+1}, ad esso corrisponde sulla M uno $S_k\, n$ ben determinato.

Consideriamo ora una sezione iperpiana della M_{2k}. Ai punti L di una tale sezione corrisponderanno ∞^{2k-1} rette λ: alle rette λ che passano per un punto $\mathfrak{H}$ corrispondono nella M i punti di uno $S_k\, n$, e i punti di questo S_k che stanno su quella sezione iperpiana stanno su uno S_{k-1}: le rette corrispondenti a questi punti, per la proiettività che, come abbiamo visto, intercede tra lo $S_k\, n$ e la stella $\mathfrak{H}$, staranno dunque in uno S_k. Il complesso delle rette che corrispondono ai punti di una sezione iperpiana della M è dunque tale che le rette per un punto stanno in uno S_k,

ed è perciò lineare. La corrispondenza che abbiamo tra i punti della M_{2k} e le rette di R_{k+1} è quindi tale, che alle sezioni iperpiane della M corrispondono complessi lineari di rette, cosicchè la M non differisce dalle varietà dello $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$ che rappresenta, nella nota maniera di GRASSMANN, la totalità delle rette di R_{k+1}. D'altra parte, che queste varietà soddisfacciano alle nostre condizioni, è ben chiaro; cosicchè conchiudiamo:

Le M_{2k} *dello* $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$ *contenenti un sistema di* ∞^{k+1} S_k *a due a due incidenti generalmente in un punto, in modo che per ogni punto della* M_{2k} *passino* ∞^1 S_k *del sistema, due qualunque dei quali non abbiano necessariamente ulteriori punti in comune, sono tutte, e sole, quelle che rappresentano, nel noto modo di Grassmann, la totalità delle rette di uno* R_{k+1} (24).

Da questo segue subito:

Per $\rho > 0$ *non esistono nello* $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$ *delle varietà* M_{2k} *che contengano un sistema* $\infty^{k+1+\rho}$ *di* S_k *a due a due incidenti generalmente in un punto, in modo che per ogni punto della* M_{2k} *passino* $\infty^{1+\rho}$ S_k *del sistema, due qualunque dei quali non abbiano necessariamente altri punti in comune.*

10. — Limitandoci al caso $\alpha = k+1$, osserviamo che il punto essenziale della dimostrazione del teorema che abbiamo stabilito al n° precedente è questo, che gli S_k della M_{2k} passanti

(24) L'ordine della M_{2k} è perciò $\frac{1}{2k+1}\binom{2k+1}{k+1}$: cfr. SCHUBERT, *Die n-dimensionalen Verallgemeinererungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes,* " Math. Ann. ", t. 26 (1886), v. la pag. 47.

Nella Nota di S. KANTOR, *Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von r Dimensionen* (" Journal für die reine und angewandte Mathematik ", Band 118, 1897, pp. 74-122), si trovano parecchie rappresentazioni su uno S_{2k} di uno R_{k+1} rigato, e quindi anche della varietà M_{2k} di cui si tratta in questo teorema. Ricordiamo in particolare una rappresentazione, molto semplice (Erstes Abbildungsverfahren-Theorem, LX), in cui alle sezioni iperpiane della M corrispondono sullo S_{2k} le quadriche che passano per una H_k^k (di uno S_{k-1}). Alcuni cenni su quelle varietà (che non compaiono esplicitamente nel lavoro del KANTOR) si trovano anche nella Memoria di B. LEVI, *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica* (" Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino ", serie II, t. 48 (1899), v. il § 4), insieme con altre citazioni.

per un suo punto generico P incontrano uno S_k generico della M_{2k}, g, in punti di una retta; mentre l'ipotesi che la M_{2k} fosse immersa in uno spazio di dimensione $d = \frac{k(k+3)}{2}$ non interveniva ulteriormente nella dimostrazione. Ora quella proprietà sussiste anche per altri valori di d, minori di $\frac{k(k+3)}{2}$, e precisamente per $d > \frac{k(k+1)}{2} + 1$.

Infatti, come abbiamo visto più sopra, l'ipotesi che gli S_k della M_{2k} passanti per P taglino uno $S_k\, g$ in punti non situati su una stessa retta, conduce a quest'altra, che tre S_k generici della M, siano a_0, a_1, a_2, stiano in uno spazio S_{3k-s}, con $s > 1$. Supposto che ciò avvenga, un quarto S_k generico della M, a_3, taglierà lo $S_{2k}\, a_0\, a_1$ in uno spazio di dimensione s, che in generale non conterrà il punto $a_2\, a_3$, e quindi a_3 taglierà lo $S_{3k-s}\, a_0\, a_1\, a_2$ almeno in uno spazio di dimensione $s+1$, cosicchè $a_0\, a_1\, a_2\, a_3$ staranno in uno $S_{4k-s'}$, con $s' \geq 2s+1$. Così continuando, si trova che $k+1$ S_k generici della M, e perciò la stessa M, stanno in uno spazio di dimensione $\leq \frac{k(k+1)}{2} + 1$, contrariamente alla nostra ipotesi.

Si potrà perciò continuare a ragionare come al n° precedente giungendo al seguente risultato:

Se $d > \frac{k(k+1)}{2} + 1$, *le* M_{2k} *dello* S_d *contenenti un sistema* ∞^{k-1} *di* S_k *a due a due incidenti in un punto, in modo che per un punto della* M *passino* ∞^1 S_k *del sistema, due qualunque dei quali non abbiano necessariamente altri punti in comune, sono tutte e sole le proiezioni della* M^*_{2k} *di* $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$ *rappresentante, al modo di Grassmann, uno* R_{k+1} *rigato* (*proiezioni eseguite da spazî esterni o comunque incidenti alla* M^*_{2k}).

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 2 Febbraio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: RENIER, STAMPINI, D'ERCOLE, BRONDI, SFORZA, EINAUDI, BAUDI DI VESME e DE SANCTIS Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 19 gennaio 1913.

Il Presidente offre la *Miscellanea di Studi storici in onore di Antonio Manno* (voll. 2, Torino, O. p. e. s.), a nome del Comitato che ne curò la pubblicazione.

Il Socio DE SANCTIS presenta per la inserzione negli *Atti* una nota del sig. Augusto ROSTAGNI, intitolata: *Lo stile, la lingua, il metro dell'idillio VIII di Teocrito* e una del Dr. Bacchisio MOTZO sopra *Il κατὰ 'Ιουδαίων di Apione.*

LETTURE

Lo stile, la lingua, il metro dell'idillio VIII di Teocrito.

Nota di AUGUSTO ROSTAGNI.

L'idillio, la cui unità di creazione è indubitabile, e che, nella sua tradizione e nel suo carattere, ci apparve perfettamente teocriteo (1), offre per altra parte il fianco alla critica? Consideriamolo dunque di nuovo, come opera organica, verso per verso, parola per parola, in ciò che può destare sospetto ed in ciò che può dare affidamento di autenticità.

La *messa in scena*, contenuta nei primi cinque versi, ricorda molto da vicino la *messa in scena* dell'idillio VI.

Ma, abbiamo buon fondamento per determinare se si tratti di un imitatore vestito delle spoglie teocritee, oppure di Teocrito stesso uso a ripetersi nei suoi varî componimenti? (2). Io non credo. Certo l'un passo non è indipendente dall'altro (chi vorrebbe sostenere il contrario?), ma coincidenze verbali sorprendenti mancano: e tali non sono nè *βουκόλος* e *βουκολέοντι*, nè *ποκά* e *ὡς φαντί*, nè, tanto meno, *συνάγαγον* e *συνάντετο*; mancano coincidenze di pensiero e d'immagine, e gli è solo la situazione generale che crea questa rassomiglianza. Qui un incontro, sul pendìo dei monti, dei due giovani che, ambo biondi e belli, ambo impuberi, ambo esperti a sonare e a cantare, si sfidano. Là i due giovani sospingono le greggie ad uno stesso

(1) V. la nota su *L'idillio VIII di Teocrito nella sua tradizione e nel suo carattere*, sopra p. 253 sgg.

(2) Il Brinker *De Theocr. vita etc.* p. 23 notò l'imitazione naturalmente da parte dell'idillio VIII. Il Kattein *Theocr. idyll. VIII et IX etc.* pp. 13 sgg. la volle dimostrare così radicale che anche il Rannow " Woch. f. kl. Phil. „ col. 1283 osservava come, nel ravvicinare le frasi, egli vedesse ciò che gli altri non vedevano, ad es.: *εἰς ἕνα χῶρον* = *κατ' ὤρεα μακρά*.

luogo — l'un d'essi mette il primo pelo, l'altro ha a mezzo la barba — e, seduti ad una fonte, la state e sul meriggio cominciano a cantare: come si vede, maggior lusso di particolari e, tratteggiata, tutta una descrizione d'ambiente. Si ammetta pure lo studio di allontanarsi dal modello; ma in quale componimento questo studio? Anche qui, lasciando impregiudicata ogni altra questione, è più probabile scorgerlo nell'idillio VI, il quale col suo minuto sviluppo, col suo distinguere, par veramente germogliato dall'VIII. *Ὁ μὲν αὐτῶν πυρρός, ὃ δ' ἡμιγένειος* (vv. 2-3) è una sottile determinazione di ben poco conto, introdotta per non dire lo stesso di entrambe le persone come se ne è detto nell'idillio VIII, *ἄμφω ἀνήβω*. Nè queste mie osservazioni si possono verisimilmente capovolgere, dal momento che riconosciamo proprio dell'imitatore lo sviluppare, l'analizzare, l'intensificare. Quanto a *πυρροτρίχω* (VIII 3), non è certo lo stesso che *πυρρός* (VI 3), *pubescente* (1), ma accenna alla capigliatura bionda, segno di bellezza e di gioventù; d'altronde, sappiamo che questo è, nel ritratto, uno dei colori preferiti dalla tavolozza di Teocrito: I 34 *καλὸν ἐθειράζοντες* V 91 *λιπαρά..... ἔθειρα* XIII 7 *τοῦ τὰν πλοκαμῖδα φορεῦντος* e 36 *Ὕλας ὁ ξανθός* XVII 103 *ξανθοκόμας* XVIII 1 *ξανθότριχι*. La corrispondenza poi nel numero dei versi (1-5 in entrambi gli idilli) vuol dire assai poco, perchè nell'VIII non si ha con essi che una breve parte del prologo, laddove nel VI vi seguono immediatamente i canti; di più il 5° verso che in entrambi gl'idilli comincia con *πρᾶτος*, nel VI, dopo le parole *τοιάδ' ἄειδον* (v. 4), è inutile e, secondo vari editori, da espungere (2), — quindi, foggiato su quello dell'VIII, che regge molto meglio al proprio posto. Nulla che non possa provenire da Teocrito. Se *νέμειν* (v. 2), attivo, nel senso di *pascolare*, occorre solo in questo carme e negli altri *νομεύειν* (3), difficilmente il poeta siracusano si sarà fatto un divieto di usare una parola che occorre giusto in

(1) Questo ammise anche il Brinker l. c. p. 23 (cfr. lo scoliaste a questo id.), mentre il Kattein l. c. pp. 19 sgg. 92 sgg., seguendo il Koechly *Op.* I p. 484, il Fritzsche a q. l. ed altri, sostenne il contrario. Cfr. Rannow l. c. col. 1286.

(2) Meineke *Bucol. Graeci*³ a q. l.

(3) Kattein l. c. p. 21.

Omero (ι 233, nella stessa forma di participio: *νέμων*) — sicchè appar probabile di là l'abbia ricavata chi di là era solito ricavare molte parole e frasi — in Euripide (*Cicl.* 28: *νέμουσι μῆλα*), nel *Reso* (v. 551 *νέμουσι ποίμνια*), ed altrove. L'osservazione del Brinker (1) (ed è l'unica ch'egli faccia ai cinque versi), riguardo all'uso di *ὦν* (v. 5), è ancora di minor conto (2). Se Teocrito adopera questa particella solo nel corso della narrazione, mi sembra che non sia in fondo diverso il nostro caso: cfr. XIV 29 V 21..... Non ci offendono, nè la consonanza interna *ὦν..... ἰδών* (v. 5), che appare frequente nella metrica greca e latina e che ha riscontro in altri idilli (3); nè gli iati numerosi dei due versi 3 e 4, in quanto, già, Teocrito suole accumularne parecchi in breve spazio (cfr. ad es. III 35-6 X 13-4), e, poi, essi hanno qui una ragione ritmica e stilistica, occorrendo nelle medesime parole ed in sedi corrispondenti. La parola *ἄμφω*, ripetuta quattro volte, giova all'effetto poetico, ed è noto quale largo uso dell'anafora faccia Teocrito (per casi simili cfr. I 12-5, 74-5...) specialmente negli idilli di tono più delicato, più lirico; e neanche creano difetto i sette *ω* finali di parola, in quanto sono dovuti all'anafora ed alla desinenza del duale, e sull'anafora e sul duale al poeta preme di insistere (4).

Ed allora? Teocrito è avvezzo a ripetersi, non solo nelle parole e nelle frasi, ma ancor più nelle situazioni e nelle descrizioni d'ambiente (cfr. particolarmente I 67 sgg. e V 32-3, I 13 e V 101...); è possibile che si sia ripetuto a questo modo trattando due volte un argomento nel primo spunto identico, e che se l'idillio VIII è, come a me sembra, tra i suoi primi, ad esso si sia richiamato con compiacenza.

---

(1) Cfr. l. c. p. 23.

(2) Il Kattein stesso l. c. p. 22: " de usu theocriteo particulae *ὦν*... vereor quidquam pro certo statuere ".

(3) Cfr. l'edizione del Fritzsche a q. l.

(4) Il Kattein l. c. p. 21 aggiunge ancora che la maggior parte delle parole, delle frasi, delle immagini occorrono od hanno qualcosa di analogo or nell'uno or nell'altro idillio, ad es.: *κατ' ὤρεα μακρά* I 23 *ἀν' ὤρεα* VII 87 *βουκολέοντα* VII 92. Ma, se così non fosse, se l'autore dell'id. VIII non avesse lo stesso vocabolario e frasario da che son provenuti gli altri idilli, si vedrebbe qui, a ragione, un grave indizio contro l'autenticità. Con questi metodi incoerenti non è dato giungere a capo di nulla.

Il dialogo di introduzione ai canti si apre con quello stesso brio e con quella stessa giocondità di cui Teocrito possiede il segreto:

Men. *μυκητᾶν ἐπίουρε βοῶν Δάφνι, λῇς μοι ἀεῖσαι;*
φαμί τυ νικασεῖν ὅσσον θέλω αὐτὸς ἀείδων.

Daf. *ποιμὴν εἰροπόκων ὀίων συρικτὰ Μενάλκα,*
οὔποτε νικασεῖς μ', οὐδ' εἴ τι πάθοις, τύγ' ἀείδων.

Già avvertii rapidamente come siano da intendere queste allocuzioni. Menalca getta una sfida formale (*φαμί τυ νικασεῖν*) al compagno, interpellandolo nella maniera che crede più solenne, sia pure di una solennità un poco burlesca, con la specificazione del suo ufficio (*μυκητᾶν ἐπίουρε βοῶν*), ed aggiungendo un *ὅσσον θέλω* per maggiormente stuzzicarlo. L'altro risponde sullo stesso tono, parafrasando egli pure la dignità dell'amico (*ποιμὴν εἰροπόκων ὀίων*), e pronunciando non meno formale una specie di smentita (*οὔποτε νικασεῖς*), ma l'acerbità, che non vuole neppur lui risparmiare, è dall'affetto inconsciamente temperata in una espressione eufemistica (*εἴ τι πάθοις*).

Ora, qual significato, qual valore mai può avere l'appunto di taluno (1), che Teocrito nei carmi bucolici scrisse sempre *βουκόλος* o *βούτας*, mai *ἐπίουρος βοῶν*, mai *ποιμήν* o *αἰπόλος* seguito da un genitivo *ὀίων*? L'autore di quei versi era troppo artista, era troppo Teocrito per servirsi di uno smorto *βούτας*, come gli suggeriscono i suoi dottissimi critici; e per far rispondere con un semplice *ποιμήν*, piuttostochè con espressione sia anche in sè stessa enfatica, anzi ridevolmente enfatica, ma quanto mai pittoresca ed appropriata allo scopo suo: *ποιμὴν εἰροπόκων ὀίων*. In varî idillî, specialmente in quelli di carattere mimico, Teocrito pone sulla bocca dei suoi personaggi apostrofi ironiche e pungenti: V 5, 8 *δῶλε, ὠλεύθερε*, ed altre solenni ed intinte di lieve umorismo: XIV 1 *χαίρειν πολλὰ τὸν ἄνδρα Θυώνιχον* (cfr. Euripide *Ippol.* v. 113, ironicamente: *Κύπριν πόλλ' ἐγὼ χαίρειν λέγω*), sempre acconce alle speciali contingenze. Non meno, quelle di cui trattiamo. Chè, se sono ricavate da Omero (*E* 137), lo sono a bella posta onde il lettore vi veda

(1) Cfr. BRINKER l. c. p. 23 e KATTEIN l. c. pp. 22-3.

qualcosa più che il senso letterale. E se il porre Omero sulla bocca di due pastori pecca contro la verisimiglianza, il nostro poeta ha pur l'abitudine di non curarsi di questa verisimiglianza: il suo stesso linguaggio glielo impone (cfr. ad es. XI 51 IV 8) anche dove manchino ragioni d'arte speciali (1). Così il v. 8 *τὸν δ' ἄρα χὼ Δάφνις τοιῶιδ' ἀπαμείβετο μύθωι* ha dell'omerico (cfr. ζ 67), ma non diversamente che il v. 20 dell'idillio VI.

Nella frase *λῇς μοι ἀεῖσαι* nulla di strano, nulla di ambiguo: nè intendo come fosse necessario un *ἐρείδω* o simili (2); *ἀεῖσαι* è richiesto dallo *ἀείδων* del verso seguente: *Vuoi tu provarti a cantare? Ben t'affermo che ti vincerò le mille volte prendendo a cantare io stesso.* E vedi: V 22 *ἀλλ' ἄγε τοι διαείσομαι*, dove, per di più, si tratta di una sfida violenta e non fra amici.

Veniamo ad *εἴ τι πάθοις* (v. 10), luogo che si ritiene contenga un'offesa alla metrica di Teocrito e dei poeti classici: la cesura trocaica in quarto piede, sebbene segua una parola non monosillaba (3).

Intanto non è da dimenticare che *εἴ τι πάθοις* poggia solo sopra una congettura, sia anche credibilissima, leggendo i codici o *εἰ παθέοις* (K P S¹ H) o simili; e si dovrebbe avere qualche scrupolo a considerar fra gli indizi decisivi riguardo alla provenienza dell'idillio una forma che può sempre darsi il caso derivi, non dall'antico innocente poeta, ma dal moderno editore.

---

(1) Anche qui non sarebbe il caso di insistere tanto, se tanto lontano dal vero non fossero gli avversarî dell'autenticità. Al Kattein l. c. p. 23 osservava il Ribbeck: " horum versuum orationem hilaritate quadam esse conspersam ,; ma quegli non consentiva, adducendo il fatto della inverosimiglianza: " ineptissime fecit quod simplices pueros pastorales fingit peritos Homeri et loquentes ritu Homeri ". Come se l'autore di quei versi volesse davvero farci credere i pastori esperti d'Omero!

(2) Il Brinker l. c. p. 23: " insolens dictio "; il Kattein l. c. p. 24: " inesse ambiguitatem quandam loquendi negari non potest ". Il Meineke o. c. p. 264 aveva proposto *λῇς μοι ἐρεῖσαι.*

(3) Cfr. Brinker l. c. p. 23. Questa regola sarebbe sempre osservata da Teocrito negli idillî composti (*scil.* secondo il Brinker stesso) in Sicilia: I, III-V. Restringendo a questo modo il campo di confronto, sono presto trovati gli indizî contro l'autenticità. Cfr. anche Meineke o. c. p. c. e l'edizione del Fritzsche-Hiller a XXIV 1. Il Wilamowitz *Textgesch. d. griech. Buk* p. 122 considera questo fra gli argomenti di maggior peso.

Sia anche *εἴ τι πάθοις*: non porrei però la cesura dopo *εἴ τι*, come non credo ve la ponessero nè Teocrito nè chi altri si fosse (il verso ha già la cesura semiquinaria e la novenaria). Sia anche la cesura: essa ad ogni modo non v'è più che in questi altri versi di Teocrito, dove parimenti la seguono vocaboli più che monosillabi XIV 21 *ἐμεῦ . τὶν' ἔχειν* XV 31 *μεῦ τὸ χιτώνιον* XVIII 15 *Μενέλαε τεὰ νυός* (qui solo per congettura del Meineke si corresse *Μενέλα τεὰ ἁ νυός*) (1). D'altra parte, se un quarto piede come *εἴ τι πάθοις* dai migliori poeti è, in generale, evitato, e se Teocrito in qualche luogo lo consente, non è ragionevole riconoscere in esso un'impronta del suo stile poetico più che la storditaggine di un imitatore? Poichè, affermiamolo sin d'ora: anche trattandosi di un imitatore, data l'eccellenza della poesia e l'età a cui in ogni caso essa risale, non bisogna pretendere, come molti fanno, errori da ultimo bizantinismo, ma dubitare più di noi, della tradizione manoscritta, che non, sia pure, dell'imitatore.

Allo stesso modo non possiamo accogliere l'osservazione che si fa nei vv. 11-2 ad *ἐσιδεῖν*, adoperato nel significato di *provare*, laddove — dicono — Teocrito adopera questo verbo sempre nel significato originario di *vedere* (con gli occhi) riservandosi *θάομαι, θεάομαι* per *vedere*, *sentire*, *provare* (con gli altri sensi) (2). Disamina parziale! Se a X 41 leggo: *θᾶσαι δὴ καὶ ταῦτα τὰ τῶ θείω Λιτυέρσα*, per *sentire*, *vedere*, *provare un canto*, a VII 50-1 trovo invece: *ὅρη φίλος, εἴ τοι ἀρέσκει τοῦθ' ὅτι πρᾶν ἐν ὄρει τὸ μελύδριον ἐξεπόνασα*. Teocrito dunque sapeva ricorrere ad *ὁράω* per *sentire, vedere un canto*, non diversamente che noi. La frase è infatti di uso popolare e, intensificata con la preposizione *ἐς*, comunica vivacità al dialogo (molto più che l'arido *experiri* di Virgilio *ecl.* III 29), qui, dove i ragazzi si accendono rimbeccandosi parola per parola. La ripetizione verbale e la ripercussione del ritmo a vv. 11-2 giova all'effetto poetico, proseguendo quel primo atteggiamento di vv. 6-10 (3).

---

(1) Altri esempi di infrazione in Kunst *De Theocriti versu heroico* Lipsiae 1886 (" Dissert. philol. Vindob. „ I). Quanto a XVIII 15 è forse l'unico caso dove ci sia, col distacco del senso, la cesura.

(2) Brinker l. c. p. 23 e Kattein l. c. pp. 27-8.

(3) Contrariamente Kattein l. c. p. 28: " insulsa intelligitur horum verborum iteratio „. Cfr. l'ediz. del Fritzsche a q. l.

I vv. 13-15 sono corrotti e quindi di poco fondamento alla nostra indagine. Particolarmente corrotto il v. 13, che si cercò di restituire in vario modo (1). La lezione più divulgata è quella dell'Ahrens: *καὶ τίνα θησεύμεσθ', ὅτις ἁμὶν ἄρκιος εἴη;* (il Wilamowitz: *καὶ τίνα θησεύμεσθα; τίς ἁμῖν ἄρκιος εἴη;*), donde si deduce essere usato dal poeta *ἄεθλος* maschile (vv. 11-2), non *ἄεθλον* neutro, come sempre in Teocrito, nel senso di premio della vittoria. La testimonianza di due grammatici (2) conferma l'uso di *ἄεθλος* in luogo di *ἄεθλον*, ma negli scrittori esso manca assolutamente (3); sicchè malvolentieri si presta fede a quella restituzione, per quanto sia fondata sui codici migliori (K P S), e si pensa che ricordo del testo originario conservino forse *καὶ τί* (A), o meglio ancora *ἀλλὰ τί* (H) *ὅ κεν ἄρκιον* (H) (4).

Più gravi sono le questioni che i vv. 14-5 suscitano riguardo al metro:

μόσχον ἐγὼ θησῶ, τὺ δὲ θὲς ἰσομάτορα ἀμνόν.
οὐ θησῶ ποκα ἀμνόν, ἐπεὶ χαλεπὸς ὁ πατήρ μευ.

Nell'uno e nell'altro verso abbiamo il prolungamento di una sillaba breve terminante in consonante: *θές* e *χαλεπός*; prolungamento in tempo forte, quale è abbastanza frequente presso Teocrito come, più o meno, presso qualsiasi poeta. Il caso di *χαλεπός* (nella 5ª tesi: cfr. XV 100 XXIV 42), sebbene manchi la cesura, che spesso concorre con l'*ictus* al prolungamento, sfugge ad ogni sospetto quando si considerino, oltre i due versi testè indicati, anche III 12 XV 90..... Quanto a *θές*, i monosillabi sono raramente prolungati, tranne se forme del pronome relativo e dell'articolo; anzi il più delle volte si crede lo siano solo per corruttela incorsa nei manoscritti. Perciò varî editori accolsero di buon grado la lezione offerta da qualche codice

(1) Cfr. l'ediz. del Fritzsche a q. l.

(2) Vedi Bekker *Anecdota* pp. 210, 214 e pp. 349, 321.

(3) Cfr. Meineke o. c. p. 476: " neque *ἄεθλος* unquam pro *ἄεθλον* dictum, quamvis affirment grammatici ". Cfr. anche Brinker l. c. p. 24.

(4) Il Brinker l. c. p. 24 trova ancora a ridire sullo spondeo in quarto piede *ἁμῖν*, che Teocrito, negli idillî composti in Sicilia (*sic*) I, III-V, ammette soltanto allorchè la seconda sillaba sia un monosillabo, e indifferentemente negli altri: cfr. X 18, 38 XI 1, 41, 42. Ognun vede quanto abbia ragion d'essere una tale restrizione.

(H ed altri) *θές γ'* (1). Non è necessario; e si doveva pensare che la parola seguente a *θές*, la parola *ἴσος* (in *ἰσομάτορα*) cominciò originariamente per consonante, e digammata compare frequentissima in Omero (2). Dunque imitazione di un uso omerico, e lirico altresì. Tant'è vero che nell'epopea stessa, perdutosi il senso del digamma, furono introdotte, come nel nostro luogo, numerose particelle *γέ, τέ, δέ, ῥά* per mascherare e riparare quella perdita (3). Piuttosto, ci si può chiedere se Teocrito altra volta consente che si scusi qualche prolungamento mediante il digamma. E di fatto, se alcuni casi di tale prolungamento si può dubitare siano al pari del nostro scomparsi, ne sopravvivono alcuni come VII 85: *κηρία φερβόμενο̄ς ἔτος*... (4).

E nell'uno e nell'altro verso abbiamo anche un iato davvero singolare. Riferiamoci ad *ἰσομάτορα ἀμνόν*, donde è provenuto, subito appresso, *ποκὰ ἀμνόν*.

Nessuna difficoltà se *ἀμνός* avesse avuto un tempo il digamma; ma così non è (5), e l'incontro della vocale breve con altra vocale, senza interpunzione, senza cesura che le separi, in generale, viene evitato. Tuttavia, l'offesa alla prosodia non è poi così grave, da non offrire riscontro e da non essere assolutamente attribuita a Teocrito. Il quale è meno di altri poeti alessandrini scrupoloso in fatto di iati, e tutte mostra accogliere le libertà suggeritegli dall'epopea omerica: cfr. ad es. VI 12 *καχλάζοντα ἐπ' αἰγιαλοῖο* VII 8 *πτελέαι τε ἐΰσκιον* (l'unica scusa è la cesura *κατὰ τρίτον τροχαῖον*) XVI 2 *κλέα ἀνδρῶν* (clausola

---

(1) Lo Rzach *Neue Beiträge zur Technik des nachhomerischen Hexameters* in " Sitzungsberichte der Akad. d. Wissensch. in Wien " C (1882) p. 416, accennando a *θές*: " Diese von Ahrens aufgenommene Lesart ist unmöglich zu halten, da die Längung eine ganz singuläre wäre ". — Altri codd. P D Q danno *θές τ'*.

(2) Cfr. Monro *Homeric Grammar*[2] p. 369 e Kühner-Blass *Griech. Gramm.*[3] I 1, p. 96. Sono circa trenta casi di *ἴσος* digammato.

(3) Cfr. Monro o. c. p. 362 e Thumb *Handbuch der griechischen Dialekte* Heidelberg 1909 pp. 321 sgg.

(4) Dell'idillio XXV si potrebbero citare: v. 2 *παυσάμενο̄ς ἔργοιο* e v. 49 *ᾧι κε τὸ μὲν εἴποιμι*.

(5) Digammato lo credettero il Jacobs, il Wüstemann: cfr. l'edizione di quest'ultimo: *Theocriti idyllia* rec. ill. E. F. Wüstemann Gothae 1830 p. 136.

omerica) (1). Molto nel Siracusano, riguardo allo stile, alla lingua, al metro, viene giustificato da qualche o da un solo precedente omerico, e può essere anche questo il caso quando si pensi allo *ἄφθιτα αἰεί* di *N* 22 (addotto da Fritzsche-Hiller a q. l. dell'id. VIII), il medesimo iato nella identica posizione; la quale poi (uscita del 5° piede), per sè stessa, iati ne accoglie abbastanza frequentemente in tutti gli idillî.

Ma altro si può aggiungere. Talora i poeti classici considerarono come aventi il digamma parole che non lo ebbero mai, purchè legate da analogia di suono o di concetto ad altre che lo avevano avuto: e questo forse anche non per errore, ma per licenza che loro sembrasse ammissibile (2). Se non altro, era effetto della falsa analogia popolare, cui i glottologi assegnano così larga azione. In Teocrito possiamo pensare a qualcosa di simile? (3). Io credo. Egli scrisse pure a XV 149 *χαῖρε Ἄδων* ed in una posizione non molto frequente (è il principio del verso), per l'analogia di frase e di concetto con *χαῖρε Fάναξ*: chè certo non riteneva *Ἄδων* digammato (cfr. vv. 144, 86). Così assai probabilmente non ritenne digammato *ἀμνός*, ma lo adoperò, sino ad un certo punto, come tale, per l'identità di significato con **Fαρήν* di esso complementare (4). D'altronde, c'è ragione di credere che questo non facesse Teocrito come o più di qualsiasi versificatore alessandrino? Sappiamo che il dialetto dorico conservava traccie vitali del digamma. Ma il ricorrere or sì or no a codesta lettera era nei poeti del tempo un semplice espediente metrico, un uso letterario, che non cercava il suo fondamento sulla pronunzia reale, bensì soltanto sull'esempio d'Omero. Male m'induco a credere che il nostro, poeta d'arte com'era, attribuisse o no il digamma a seconda che questo esisteva nel

(1) Altri esempi nel citato lavoro del Kunst pp. 120-1. Quanto a VI 12 alcuni editori scrivono *καχλάζοντος*.

(2) Cfr. ad es. Bacchilide (Taccone) V 75 *ἐξείλετο Fιόν* XVII 131 *φρένα Fιανθείς*. Discusso anche II 7 *αὐχένι Fισθμοῦ*: il medesimo iato in Pindaro *Isthm.* I 9-10 e altrove.

(3) Il Wilamowitz o. c. p. 122 opina questo impossibile in Teocrito, dorico di stirpe.

(4) Qualcosa di più diremo in seguito, a proposito di v. 35: saranno indizi anch'essi insufficienti a definire la questione, ma sufficienti certo ad infirmare ogni affermazione basata sull'esistenza di questo iato.

dialetto patrio, e non piuttosto seguisse quell'educazione letteraria rispetto ad un incerto riflesso epico. Fatto sta che ad Alessandria studiosi quali Aristarco e Zenodoto cadevano spesso in errore e ricorrevano a correzioni metriche del testo (1).

A v. 16 richiamiamo l'attenzione sulla forma avverbiale *ποθέσπερα*, che Teocrito adopera due volte (IV 3 e V 113), accompagnandola con l'articolo: *τὰ ποθέσπερα*. Ma alcuni fra gli altri avverbi della stessa natura, come *μεσαμέριον, μεσονύκτιον, ἀκρέσπερον* (cfr. VII 21 XIII 69 XXIV 11), occorrono parimenti ora con, ora senza l'articolo. E siccome, questo di tralasciarvi l'articolo, lo si considera un uso isolato e caratteristico del poeta siracusano (2), *ποθέσπερα*, non solo non offende, ma torna a sostegno dell'autenticità.

L'altra frase avverbiale, a v. 17, *τὸ πλέον* (il *τό* come in *τὸ καλὸν πεφιλημένε* di III 3) occorre più volte: I 20 III 47 V 71. Essa non ha da sola un significato definito, ma acquista colore e specificazione diversi da ciò cui nei diversi casi si accompagna (3). Così a V 71 viene ad indicare il vantaggio, il favore che un giudice parziale può fare all'uno piuttosto che all'altro dei due contendenti; a I 20 il grado maggiore che si possa raggiungere in un'arte, e così via. È naturale che qui, ove si tratta di un premio per la vittoria e non si vuole ripetere la parola *ἄεθλον*, si ricorra a questa locuzione imperfetta, la quale, rischiarata dal contesto e soprattutto da *ὁ νικῶν*, vi ha la stessa ragion d'essere e vi si trova a pari condizione che le altre altrove.

Poco più rimane ad osservare in questa parte riguardo la lingua, lo stile, il metro.

A v. 20 leggiamo con la maggior parte degli editori, Ahrens, Meineke, Wilamowitz, *κα θείην*: lievissima e comprensibile mutazione, dove i codici danno *κατ- κατα- θείην*. Ad accoglierla non ci fa difficoltà il trovare sulla fine del medesimo

---

(1) Cfr. Monro o. c. l. c.

(2) Cfr. Cobet in “Mnemosyne„ X (1861) pp. 345 sgg. Il Cobet cerca persino di emendare il testo e restituirvi l'articolo.

(3) Il Kattein l. c. p. 34 osserva che a V 71 *τὸ πλέον* significa *vantaggio*, e non *premio della vittoria*. Ed è troppo giusto!

verso *καταθησῶ* (1). Il poeta evita una corrispondenza formale che finirebbe col divenire eccessiva, ed è effetto d'arte, qui più adatto della *concinnitas*, lo stesso verbo, a chiudere il primo emistichio, semplice, a chiudere il secondo, composto: del che non mancano riscontri (2). Leggendosi *κατθείην*, il potenziale rimarrebbe privo della particella *κέν (κά, ἄν)*. Ora, negli altri idilli bucolici tale particella non manca. Non bisogna però dimenticare che in varî luoghi essa fu restituita, al pari che in questo, dall'Ahrens, con ugualmente lievi correzioni, ad es. di *καί* in I 60; altrove non fu restituita perchè si considerò il verbo come ottativo, non come potenziale: cosa che non è poi così chiara. A questo modo viene a mancare ogni fondamento ad una critica contro l'eventuale *κατθείην*: se il *κά* è da restituirsi dove manca, del che abbiam ragione di dubitare, il nostro luogo a buon diritto richiede parità di trattamento.

A v. 26 leggiamo *ἦν, καλέσωμες* intendendo *ἦν*, non come la particella condizionale, ma come interiezione, l'interiezione con valore esortativo, che compare frequentemente in *ἠνίδε* (3). Questo ci suggerisce uno scoliaste: *ἄγε δή πως ἐκεῖνον ἐφ' ἡμᾶς καλέσωμεν* (4), e questo, che senza dubbio corre meglio per semplicità, chiarezza e vivacità di eloquio, si sarebbe dovuto da molti considerare ad evitar tante discussioni su *ἦν* per *αἴ κα* (5).

---

(1) Così il Fritzsche nella sua citata edizione, a q. l.: " compositum verbum *κατθείην* necessarium est propter concinnitatem versus extremi *καταθησῶ* ".

(2) Ad es. in Euripide *Iph. Taur.* 744-5 *δώσω... ἀποδώσω* *Or.* 149 *πρόσιθ' ἀτρέμας, ἀτρέμας ἴθι* e 307-8 *θανεῖν αἱρήσομαι... ἤν σὺ κατθάνῃς*. Non parlo di quello che è vero e proprio *σχῆμα εὐριπίδειον*, ad es. *Hec.* 167 *ἀπωλέσατ' ὠλέσατε*.

(3) Così credo intenda il Wilamowitz con la sua punteggiatura, che è appunto quella data sopra.

(4) Cfr. nella citata edizione dell'Ahrens il II volume contenente gli scolî, p. 289 e p. 528; Ziegler *Codicis Ambros. 222 scholia in Theocr.* Tübingen 1867 p. 63.

(5) A v. 24, si legga coi codd. *ἐπεὶ κάλαμός με διασχισθεὶς διέτμαξεν*, oppure, come corresse il Meineke ed accettarono il Wilamowitz ed altri, ...*διασχισθεὶς νιν ἔτμαξεν*, non c'è nulla di alieno a Teocrito (cfr. invece Kattein l. c. p. 37 sgg.).

Rifacendoci ora un momento su tutto il dialogo introduttivo, mettiamolo a raffronto con quello, più ampio, dell'idillio V. Anche qui la discordia nella scelta dei premi e la chiamata del giudice, un legnaiuolo. Ma è la parte convenzionale e formale, che, non solo deve presentare delle analogie, ma suole ripetersi. E si ripete, con l'aggiunta nel carme V di un altro elemento, la scelta del luogo. Invece, quanto di diverso nell'arte e nell'espressione! Dafni e Menalca, del cui atteggiamento non sto a ridire, non hanno nulla che fare coi due villani che s'attaccano grossolanamente, giocando di lazzi e di lubricità; la loro contesa per la equivalenza del pegno (e contesa non la si potrebbe neppur chiamare), originata da un po' di puntiglio giovanile, si acqueta subito, e il discorso non è affatto rabbioso e maligno. Questo, non per mancanza di vivacità, non perchè si tratti di una smorta copia, ma per l'indole diversa e quasi repugnante dell'ambiente e dei giovani. Le anafore e le ripetizioni non sono così frequenti nell'idillio V, e da esse in parte deriva il diverso movimento del nostro carme; non spiacciono perchè conformi a questo diverso movimento (dissi come siano numerose negli idilli meno rustici, ad es. nel I) e perchè tutte significative (1). Ora, se alcune frasi dell'idillio VIII ricordano alcune frasi dell'idillio V, il supposto imitatore, a queste ultime ricorrendo, tenendo presente un modello, sarebbe riuscito a cambiare così sapientemente il tono, senza contraddizioni, senza contrasti, a far opera corrispondente per valore, nuova ed originale? È possibile, forse, ma, mancando buoni motivi a crederlo, a pieno improbabile. I riscontri stessi sono pochissimi, e di poco conto, in quanto si riferiscono solo alle linee convenzionali della situazione. Così è anche dell'unico notevole: VIII 25 *ἀλλὰ τίς ἄμμε κρινεῖ;* V 61 *ἀλλὰ τίς ἄμμε, τίς κρινεῖ;* il quale non può dar luogo a sospetto, quando si pensi che Teocrito è solito in ogni idillio richiamarsi, or tale e quale, or con lievi variazioni, in un motivo o in una frase o in un verso (cfr. fra gli esempi più caratteristici I 38 e VII 48, II 126 e XI 55, III 52 e XI 29 (1)). Qualsiasi idillio e non in un solo punto, ma via via, qua e là, offre esempi di questo fatto.

---

(1) Vedine in gran numero presso LEGRAND *Étude s. Théocr.* pp. 353-4.

Osservano ancora cosa che mostrerebbe nell'autore del nostro componimento l'ignoranza della vita e dei costumi pastorali (1). Una *σῦριγξ ἐννεάφωνος* (v. 18) doveva essere un oggetto straordinario e forse al tutto fittizio, poichè sempre gli altri poeti fan parola di zampogne a sette canne soltanto (cfr. Virgilio *ecl.* II 36, Ovidio *metam.* II 681 sgg., e così via). Ma, la determinazione mancando nell'opera teocritea, non è possibile il confronto, e, d'altra parte, nuove scoperte hanno dimostrato che quella forma di strumento fu abbastanza diffusa. Infatti, essa si trova rappresentata oltre che sulla già nota moneta di Siracusa (cfr. Voss presso Virgilio *ecl.* II 36, e Fritzsche-Hiller a q. l. del nostro idillio), su numerose monete arcadiche del 4° sec. (2). Sembra che il numero delle canne sia estremamente variabile, e che quello di nove si introduca e diffonda quando il medesimo numero di corde è raggiunto nella lira (5°-4° sec.) (3). Se notizie più precise avessimo sulla patria, sul tempo, sulla diffusione delle varie specie di *σῦριγξ*, qualcosa ne potremmo concludere per il componimento di cui ci occupiamo. Ad ogni modo, essendo manifestamente la *σῦριγξ ἐννεάφωνος* una zampogna di pregio superiore, lo scrittore non volle per l'appunto intendere tale ricompensa che si confacesse all'importanza della gara, nè contrastasse troppo col *μόσχος* e collo *ἀμνός* di prima?

È inverisimile, osservano altresì, che dei ragazzi fabbricassero essi, come per trastullo, oggetti di tal fatta. Inverosimile forse, ma non contrario agli usi del poeta siracusano, il quale nel colorire oggetti campestri esagera ben altra volta. Nessun pastore mai ebbe come Tirsi nell'idillio I una coppa così artisticamente lavorata e meritevole di tanta descrizione; anzi una coppa simile forse non potè mai esistere nella realtà (4).

Alcuni versi narrativi congiungono il dialogo ai canti (vv. 28-32); come è da aspettarsi in un idillio che presenta la

---

(1) Così Kattein l. c. pp. 34-5.

(2) Cfr. Th. Reinach art. *σῦριγξ* in Daremberg et Saglio " Dict. d. antiq. gr. et rom. „ IV 2 (1909) col. 1596 sgg.

(3) Cfr. Th. Reinach art. *λύρα* nel citato dizionario di Daremberg et Saglio III 2 col. 1444.

(4) Cfr. Legrand o. c. pp. 222 sgg. ed i lavori ivi citati.

messa in scena, uno sfondo leggendario, e che, per conseguenza, deve di tanto in tanto accompagnare i personaggi oggettivamente nelle loro azioni. Solo che questi versi mi paiono di varia natura. I primi due (28-9) sono necessarî e tornano benissimo: *i fanciulli chiamano, ed il capraio viene ad ascoltare; i fanciulli cantano, ed il capraio si dispone a giudicare.* Nulla, sia per il pensiero che per la lingua ed il metro, è discorde da quanto esaminammo sinora; nulla è tale che, per sè, non possa essere attribuito a Teocrito. A proposito di ἦνθ' ἐπακοῦσαι si è detto che gli idillì sicuramente autentici non ammettono codesto uso sintattico. Ma XXIV 26 φευγέμεν ὁρμαίνων, XIII 47 βάψαι ἐπειγόμενος mostrano che esso non spiaceva al poeta, tanto più, in quanto compare frequente nei poemi omerici: cfr. δ 282-3 ὁρμηθέντες..... ὑπακοῦσαι, esempio caratteristico pel riscontro che offre col nostro luogo (1). Tutt'altra fattura e tutt'altra provenienza tradiscono i tre versi rimanenti, e ad espungerli consigliano varie ragioni. Essi sono oziosi, perchè lo ἄειδον di v. 29 introduce già benissimo i canti, e non fa aspettare nulla di più; inoltre, pur non presentando mende speciali veramente gravi (tali non sono nè ἀμοιβαίαν, sebbene non si trovi altra volta in Teocrito, nè ἄ̄ειδε, mentre al verso precedente ᾰ̆ειδον (2)), riescono di una lentezza e di uno stento di cui non è traccia nel resto dell'idillio, soprattutto con quel riprendersi a v. 32, che proviene senza dubbio dal bisogno di riempire il metro, e

(1) Non è dunque necessario ricorrere alla variante ἐπακούσας offerta da alcuni codd. (P S.....), la quale d'altra parte non regge per la mancata *concinnitas* con κρίνειν del verso precedente. — É. Fairon *De l'authenticité de l'id. VIII* in " Revue de l'instr. publ. en Belgique „ XLIII (1900) p. 248 osserva (e con lui consente il Kattein l. c. p. 42) un controsenso nel v. 29: " il est absurd de dire que les enfants ont chanté avant que le chevrier ait consenti d'être leur arbitre „. Ma questo non è detto nel testo, dove i concetti sono giustapposti e indipendenti l'uno dall'altro, come è proprio dell'andamento anaforico; nè ἤθελε κρίνειν significa che il capraio volesse dare allora il suo giudizio: e i fanciulli cantavano e il capraio si disponeva a giudicare. Per ἐθέλω cfr. XI 65.

(2) Appunti mossi dal Brinker l. c. pp. 25-6 e dal Kattein l. c. p. 42. In Teocrito ἀμοιβαδίς I 34. Quanto ad ᾰ̆ειδε, lo scambio della quantità in uno stesso verso o in versi vicini ricorre più volte: VI 19 τὰ μὴ κᾰλὰ κᾱλὰ πέφανται XVIII 51 e nel medesimo id. VIII v. 22 ἶσον ... ἴσον.

che mostra, meglio di qualsiasi altro fatto, la differenza fra le anafore e le ripetizioni dell'artista e quelle dell'interpolatore. Interpolati i tre versi furono per spiegare la distribuzione delle parti cantate (ciò che originariamente doveva esser fatto dai semplici nomi apposti), come, per la stessa ragione e probabilmente dalla stessa mano, altri nei varî idillî.

Del modo onde si succedono e si connettono le strofe elegiache e della loro indole dissi già distesamente. Quanto alla trasposizione della terza e della quarta strofe, quale da tempo si impose agli editori, essa non può dar luogo a dubbî. E vediamo se questi canti, a differenza dei vv. 1-29, in qualcosa ancora ci riserbino solidi argomenti contro l'autenticità.

Parecchie delle osservazioni che furono fatte si raccolgono attorno a v. 35. A proposito di *βόσκοιτ'*: non esser mai da Teocrito adoperato *βόσκεσθαι* transitivamente (1). Giustissimo, ma, a farlo apposta, *βόσκοιτ'* non viene da *βόσκεσθαι*, bensì da *βόσκειν*, non è il medio ma l'attivo, non *βόσκοιτο* ma *βόσκοιτε*, come può vedere chiunque confronti il testo: data la corrispondenza assoluta con la strofa seguente, col *πιαίνετε* (v. 39), col pensiero stesso, quel verbo non si riferisce a Menalca, bensì ad *ἄγκεα καὶ ποταμοί* (2). E non si tratta neppure di due interpretazioni possibili, ma di un'interpretazione unica e di un abbaglio.

A proposito di *ἤν* (ripetuto, col ripetersi della frase, a v. 39): adoperarsi da Teocrito in suo luogo, negli idillî bucolici e mimici, *αἴ κα*, *αἴ κε*... (3). Anche di questo, che pure sarebbe col precedente uno degli indizî più gravi, qual conto si può tenere, leggendo a VII 106 *κἤν*..... *ἔρδοις*, dove in base ad un codice solo (S) e contro gli altri concordi l'Ahrens volle *κεἰ*..... *ἔρδοις*? E a XII 25 *ἤν*..... *δάκῃς*, dove, sebbene il componimento sia intinto di ionismo (*ἰάδι διαλέκτῳ*, dice lo scoliaste), pur sono frequenti le forme doriche? (4). È precisamente il carattere mul-

(1) Così Brinker l. c. p. 26 e Legrand o. c. p. 15.

(2) Anche Fritzsche-Hiller a q. l. avvertivano (se pur era necessario): *βόσκοιτ'* = *βόσκοιτε*, *pascatis* (nicht *pascat*).

(3) Cfr. Brinker l. c. p. 27 e Kattein l. c. pp. 50 sgg.

(4) Il Rannow nella citata recensione col. 1282 con pieno diritto osservava al Kattein non aver peso l'argomento di *ἤν*.

ticolore del linguaggio teocriteo, che ci fa dubitare colgano nel vero quanti pretendono di disciplinarne ed uniformarne troppo gli usi.

Ciò che invece non può non offendere è il τάς prolungato in tempo debole, cosa che, specialmente nei monosillabi, accade rarissima (la si ascrive a guasto nei manoscritti), presso qualsiasi scrittore, tranne quelli della bassa decadenza e soprattutto Tzetze: certo mancano esempî di un monosillabo in -ας prolungato a questo modo (1). Dunque, qui esula la questione dell'autenticità, e il prolungamento, come l'abbiamo considerato ora, non può che provenire da un errore invalso nella tradizione manoscritta: probabilissima la congettura del Fritzsche *τάσδ' ἀμνάδας*, consigliata anche dal *τοῦτο τὸ βουκόλιον* della strofe seguente (v. 39).

Ma altro ancora è possibile: che abbiano ragione i codici ed il prolungamento sia legittimo, per essere *ἀμνάδας* considerato digammato. A pensar questo sono condotto, non tanto da *ἰσομάτορα ἀμνόν* di v. 14, quanto da una ben più sorprendente combinazione, che per mio conto non so attribuire al caso, e che mi permetterebbe di concludere: aver proprio Teocrito considerato *ἀμνός* e derivati come recanti il digamma. A V 144 e 149 i codici, ed i codici migliori, quasi concordemente leggono *τὸν ἀμνόν* e non *τὰν ἀμνόν* (2): *τόν* si troverebbe parimenti prolungato in tempo debole, non per altro certo che per quella ragione (3). Dunque, sarebbe codesto di *τόν* in *τάν* uno degli emendamenti cui allusi essere andato soggetto, come il testo dei poemi omerici, così il testo di Teocrito, per essersi misconosciuta l'esistenza del digamma (avesse poi questo motivo o no di esistere): emendamento che qui ci è dato di cogliere nel suo formarsi, se, come vogliono lo Ziegler (4) ed i Fritzsche-Hiller, in K (l'Ambrosiano 222, il codice di gran lunga più autorevole)

---

(1) Cfr. RZACH: i citati *Beiträge zur Technik des nachhomer. Hexameters* in " Sitzungsberichte der Wiener Akad. d. Wiss. „ C (1882) pp. 418-20.

(2) A v. 144 nessun cod. dà *τάν*.

(3) La medesima combinazione sarebbe offerta dalla lezione tradizionale a XI 41 *πάσᾱς ἀμνοφόρως* (che fu corretta dai più in *πάσας μαννοφόρως*).

(4) *Theocriti idyllia* ed. CHR. ZIEGLER Ed. III Tübingen 1879.

il *τάν* venne scritto di seconda mano su *τόν*. Se anche altro non si possa aggiungere (1), se anche non si possa stabilire il vero, certo quegli esempî vietano di procedere contro l'idillio VIII, almeno, a chi voglia procedere con imparzialità scrupolosa e serena.

Estranea a Teocrito vien detta la struttura del v. 41:

παντᾶι ἔαρ, παντᾶι δὲ νομοί, παντᾶι δὲ γάλακτος

e propria di poeti della decadenza, che pongono studio a simili giuochi, come nell'idillio spurio XX 6 (2). — Anche questo è falso. Se per struttura si intende semplicemente quella che proviene dalle cesure, le cesure *τριτημιμερής* ed *ἑφθημιμερής* sono ammesse assai bene negli idillî; se quella che proviene dalla ripetizione di *παντᾶι*, Teocrito ripete or due or tre volte una parola in uno stesso verso col medesimo effetto e con la medesima apparenza di un *lusus* che nel nostro luogo (cfr. particolarmente III 42 I 80) (3). Ma badiamo anche all'una ed all'altra cosa insieme, al concorso delle cesure e dell'anafora, all'anafora nelle identiche posizioni, onde il verso venga ad essere tagliato pel ritmo e pel senso, come qui, in luoghi corrispondenti. Non è un *lusus* evitato dai classici; Omero ne offre esempî (cfr. il noto verso *Z* 181 *πρόσθε λέων, ὄπιθεν δὲ δράκων, μέσση δὲ χίμαιρα*, e *Λ* 225 e altrove), e da Omero può averlo tolto Teocrito, se mostra in altri idillî di non esserne schivo:

XV 5 *Πραξινόα, πολλῶ μὲν ὄχλω, πολλῶν δὲ τεθρίππων*
VII 35 *ἀλλ' ἄγε δή· ξυνὰ γὰρ ὁδός, ξυνὰ δὲ καὶ ἀώς.*

Certo, nelle strofe elegiache che abbiamo innanzi, è struttura la quale corrisponde alla intonazione enfaticamente lirica delle apostrofi.

A v. 43 impugnasi la particella *ἄν* (ripetuta, col ripetersi della frase, a v. 47), cui Teocrito preferisce la particella *κά, κέν*.

---

(1) Convien forse ricordare che, su testimonianza di Eustazio, *ἀμνός* ebbe anche lo spirito aspro: cfr. Eust. *Comment.* a *ι* 398: *Ἀττικώτερον δέ φασι τὸ καὶ ἄμφω δασύνειν, καὶ γὰρ καὶ τὸ ἀλεαίνειν δασύνουσιν Ἀττικοί, ὡς καὶ τὸ ἀμίς, καὶ ἅμαξα, καὶ ἀμνός.*

(2) Così Meineke o. c. p. 432 e Brinker l. c. pp. 20, 27.

(3) Cfr. Bücheler " Jahrbb. f. kl. Phil. „ 1860 pp. 348-9.

Preferisce soltanto, e non, secondo altri pretenderebbe (1), sostituisce del tutto. Si vedano infatti: XXIV 116 XXII 62 XVIII 25 XVI 48, 54 XI 59 (in quest'ultimo luogo i codd. unanimi leggono *οὐκ ἄν*, per congettura si volle *οὔ κα*). Siamo nuovamente di fronte, come per *ἦν* a v. 35, alla questione del miscuglio dei dialetti: molto probabilmente queste forme che il poeta non evitò, ma adoperò più di rado, gli furono qui suggerite, a preferenza delle altre, dal metro lirico.

Certo siffatti argomenti, che sono poi quelli di cui si tiene maggior conto, hanno valore tutt'altro che decisivo.

Così è pure di quello (l'ultimo pei distici elegiaci) che riguarda *ὤν* (v. 52): *καὶ θεὸς ὢν ἔνεμεν*. Gli idilli autentici conoscono solo la forma *ἐών* (2); ma, per quanto io credo, una ragione speciale, oltre a quella del metro, ch'è importantissima e rende naturale l'uso di altre forme dialettali che negli esametri, richiese *ὢν* in questo passo. Senza dubbio la frase intera fu trasportata di peso da un inno omerico, dall'*Inno a Pane* v. 32: *καὶ θεὸς ὢν ἐνόμευεν* (3). Nè il dialetto, sempre elastico ed arrendevole, potè obbligare il poeta a trasformare la frase che richiamava, tanto più in quanto essa si adagiava nel verso. Ora l'*Inno a Pane*, sebbene fra i più recenti della raccolta e da riportarsi probabilmente al 5° sec. (alcuni dotti, senza solide ragioni, lo ritennero dell'età alessandrina) (4), per il suo carattere idillico, per le sue pitture pastorali, per essere delle più belle e delle prime notevoli manifestazioni di poesia della natura (5), riuscì forse non ultima fonte di inspirazione a Teocrito: notevole l'analogia di molte immagini ed anche di alcune frasi (6).

Due versi (61-2) servono di passaggio dal canto elegiaco al canto esametrico. Questi convengo siano dovuti alla stessa

---

(1) Kattein l. c. pp. 50 sgg. Contrariamente Rannow l. c. col. 1282.

(2) Cfr. Brinker l. c. pp. 27-8 e Kattein p. 54.

(3) Verso citato anche da Fritzsche-Hiller a q. l.

(4) Per questo problema cfr. Ludwich *Der homerische Hymnus auf Pan* in " Rheinisches Museum „ XLII (1887) pp. 547-558.

(5) Cfr. la prefazione di Allen a. Sikes nell'edizione *The homeric hymns* ed. with notes a. appendices London 1904.

(6) Cfr. soprattutto: *Inno* v. 15 e *Theocr.* I 16-7, v. 12 e I 123, v. 25 e VI 35.

penna che i versi, non già 28-32, ma, secondo dissi, 30-32 soltanto. Ad essi si rimprovera giustamente la sciattezza estrema e l'uso di *ᾠδά* laddove in Teocrito ricorre sempre *ἀοιδά* (1). E. certo, provennero anche dalla stessa preoccupazione che i vv. 30-2, coi quali hanno a stare alla pari, e che il v. 71, da aggiungersi per coerenza agli altri tutti.

Il canto esametrico ha offerto poca materia alla critica. Qualche prolungamento di sillaba breve, sempre in tempo forte e conforme al modo degli idilli autentici. Il prolungamento a v. 65 *κύῶν* è aiutato dalla cesura, dalla punteggiatura e, per di più, dall'aver luogo in una forma di vocativo (le finali dei vocativi sono facili a prolungarsi, sull'esempio omerico (2)). Così non ci fa difficoltà a v. 68 *ὄκκᾱ πάλιν,* nè sentiamo il bisogno di ricorrere alla correzione del Meineke *ὄκκ' αὖ πάλιν* (fondata sulla lezione di alcuni codd. *ὄκκ' ἂν*) in quanto si crede che la quantità naturale ed originaria sia *ὄκκᾱ* e quindi non si tratti di un prolungamento (3).

Ad ogni sospetto sfugge a v. 66 *νέμοντα,* adoperato assolutamente, senza complemento: perchè lo stesso è di *νομεύω* a VII 113.

Vale invece la pena di soffermarci sulla forma verbale *ἀπεκρίθην* a v. 74. La dicono propria della grecità tarda e quindi indizio sfavorevole all'autenticità (4). In ogni caso, siccome il verso porta segni evidenti di guasti, a questi si dovrebbe imputare una forma di bassa epoca. Ma lasciamo. Se, nel senso di *rispose*, *ἀπεκρίθην* manca agli scrittori classici, si diffonde però nell'età alessandrina. Trovandosi proprio nei comici (cfr. *Comic. graec. fragm.* Kock I p. 159), trovandosi due volte in Macone, poeta press'a poco contemporaneo di Teocrito e vissuto ad Alessandria (5) (cfr. Ateneo *Dipnos.* XIII p. 582 *d*), vuol dire che

(1) Cfr. Brinker l. c. p. 29 e Kattein l. c. p. 57. Veramente *ᾠδά* non vorrebbe dir molto, occorrendo, non nella parte organica dell'idillio, ma in una semplice designazione di parti.

(2) Cfr. Monro o. c. p. 360-1.

(3) Da *ὄκα κα.* Cfr. Fritzsche-Hiller a q. l.; Meyer *Griech. Gramm.*[3] 1896 p. 259 e Brugmann *Griech. Gramm.*[3] p. 254.

(4) Brinker l. c. p. 30 e Kattein l. c. p. 59.

(5) Cfr. Ateneo *Dipnos.* VI p. 241 *f* e XIV p. 664 *a b*.

era una forma popolare e perciò solo nella decadenza levata in onore. È ben possibile che in qualità di forma popolare se ne appropriasse Teocrito (1), quegli stesso che adoperò l'equivalente ἀμείφϑην per ἀμειψάμην (VII 27) e che era solito mescolare con accortezza, anche nell'espressione, elementi realistici agli ideali; meno probabile lo facesse un imitatore scrupoloso di avvicinarsi al modello, non potendogli invero avvenire di introdurre ἀπεκρίϑην per pura sbadataggine (2).

Pochissime sono le traccie di una supposta imitazione. Se τὰς δαμάλας παρελάντα (v. 73) ricorda τὰς αἶγας παρελάντα (V 89), questo non esce dai limiti dei reciproci richiami, quali sono di tutti gli idillî: una semplice frase che si anima in un'altra ed altrettanto bella pittura. Perchè, le immagini di questo canto sono tutte nuove ed originali, e si confanno mirabilmente alle attitudini del Siracusano di obliarsi un momento in singoli schizzi. La σύνοφρυς κόρα non demerita della γυνά dell'idillio I 31, nè della Galatea dell'id. VI, pur essendo in se stessa una creazione diversa; naturale anche l'attribuire alle pecore svogliate la preoccupazione del pascolo futuro; e così il resto, chè tutto vieta di dare importanza a scarsi riscontri verbali, non eccedenti, neppure con gli altri di prima, la proporzione solita.

Terminate le due serie di canti, ecco il giudizio del capraio, anch'esso nuovo accanto all'analogo giudizio dell'idillio I 146-52; e la chiusa, nuova accanto a quella dell'idillio VI 42-6. Nessun appiglio, o quasi, contro la forma. Se Teocrito non adopera altra volta il verbo μέλπεσϑαι (v. 83) (3), aveva la libertà di adoperarlo ora, trattandosi di un ottimo verbo, frequente, così al

---

(1) Il Meineke o. c. p. 479 dice non doversi attribuire importanza a Macone, poeta ignobile, che quella forma adoperò in un componimento scritto in volgare (ἐν ταῖς ἐπιγραφομέναις Χρείαις Athen. XIII 577 d). Mi sembra sia precisamente ciò che si vuole. — Anche il Bücheler l. c. p. 348: " gehört späterer Graecität an ".

(2) A v. 91 seguiamo la correzione dell'Ahrens, accolta dal Wilamowitz e da altri, δμαϑεῖσ' (per γαμεϑεῖσ').

(3) Cfr. Brinker l. c. p. 30: " versus 81-91 Theocrito abiudicandi sunt propter verbum μέλπεσϑαι v. 83, quod Theocritus nusquam praebet ". È presto fatto! Cfr. Kattein l. c. p. 64. — In Teocrito ben occorre ἀναμέλψαι (XVII 113): anche Omero accanto al medio presenta l'attivo: cfr. A 474...

medio, in Omero (la formula più volte ripetuta *ἐμέλπετο θεῖος ἀοιδός* Σ 604...) ed altrove, nell'*Inno a Pane* sopra menzionato, v. 21, e dovunque. I correlativi *ὡς..... οὕτως*, nei due paragoni, vv. 88-91, se possono sembrare ad alcuno un po' faticosi (1), tali non risultano a chi abbia famigliarità con lo stile dei paragoni teocritei.

Che la chiusa sia parte organica dell'idillio ho già cercato di porre in rilievo, in quanto essa continua lo svolgimento dei caratteri senza contraddizioni e contrasti, ma con quella unità di creazione che è propria dell'artista. Non c'è d'altra parte la più piccola ragione che giustifichi l'idea di un brandello aggiunto da qualche interpolatore. Non esser necessarî quei versi e l'idillio chiudersi benissimo senza di essi. Come dissi, data la natura del componimento e la differenza dai mimi e dai componimenti rustici, il poeta imprese a rappresentarci anche oggettivamente, nei loro atti, i personaggi, al modo che, per la stessa ragione, fa negli idillî I, VI, XI. Dunque, al contrario, se la chiusa mancasse, la desidereremmo perduta.

Piuttosto, si potrebbero pensare aggiunti, al pari dei vv. 30-2, 60-1, 71 e dei due ultimi distici elegiaci, i soli vv. 92-3, che sono gli ultimi del carme e che stanno a sè. Non che a ciò inducano motivi di lingua o di tecnica. *Παρὰ ποιμέσι* vi è detto in senso generico per *παρὰ νομεῦσι*; ma sta a vedere se Teocrito con *ποιμήν* intende sempre *pastore di pecore* in senso specifico (2): ciò che non credo così evidente. Evidente la specificazione è là solo dove è necessaria, dove accanto al *ποιμήν* compare il *βουκόλος*, lo *αἰπόλος*...; ma, dove non è necessaria, verisimilmente *ποιμήν* vale talvolta *νομεύς*. Nell'idillio XVI 90-5, parlandosi e di *μῆλα* e di *βόες*, vengono nominati i *ποιμένες*, non perchè vadano esclusi i *βουκόλοι*, ma perchè in questo passo si può senza confusione attribuire al nome valore generico: ed in questo passo i *ποιμένες* sono realmente *pastori*, *νομεῖς*. Così, stento a credere che nell'idillio VII i *ποιμένες*, i quali canteranno a Licida (v. 71), abbiano proprio ad essere pecorai e non pastori; che nell'idillio I vv. 22-3 il *θῶκος ποιμενικός* debba essere un sedile riservato ai pecorai.

---

(1) Kattein l. c. p. 64.

(2) Come vuole il Kattein l. c. p. 65.

Invece ammetto che i due versi possano sollevare qualche dubbio pel contenuto, in quanto, cioè, hanno lo scopo di informazione mitologica. Essi, a mio avviso, non si trovano in legame diretto con l'argomento dell'idillio: voglio dire che la *νύμφα Ναΐς*, che Dafni sposa, non è per nulla la *καλὰ παῖς* di v. 43 (1), allo stesso modo che la *καλὰ παῖς* non ha da fare con la *σύνοφρυς κόρα* di v. 72. L'idillio non è per nulla una storia d'amore, non presenta nient'affatto un intreccio, ma solo ritrae con compiacenza la giovinezza di Dafni, i suoi sentimenti, la sua bontà, l'eccellenza del suo canto: quelli, sono motivi subordinati: grandi dal punto di vista artistico, inspirati ad un concetto supremo di unità, ma indipendenti, saltuari, improvvisi nella loro essenza. Supporvi un rapporto significa falsare il carattere del carme.

È possibile tuttavia in altro senso, — è possibile, anzi non è disforme dalla maniera di Teocrito — che il poeta, questo quadro già in fondo perfetto come opera d'arte, lo abbia voluto localizzare nella leggenda dalla quale aveva tolto lo spunto. Così, non sento la necessità di escludere i due versi: mi pare anche qui consentaneo un briciolo di erudizione (e la parola non è neppur meritata), il desiderio di una determinazione mitologica.

Di fatto, c'è poi un argomento perentorio il quale cancella il sospetto di un'aggiunta: la distribuzione strofica esastica (vv. 82-7 accanto a vv. 88-93), comprovata, come mai in altro luogo accade, da antica testimonianza. Il codice Q (Parisinus 2887) presenta scritto di fianco a v. 88, in margine e perfettamente chiaro, *αντιστροφη* (2).

Ora, stando i due versi, neanche è lecito affermare, quella specie di determinazione mitologica che contengono, esca dalla forma della leggenda di Dafni nota a Teocrito (3). Teocrito, a proposito di Dafni, il suo eroe prediletto, procede sempre per allusioni: quale sia la forma intera della leggenda da lui seguita, non abbiamo elementi sufficienti per determinare; nè è nel mio

---

(1) Tanto più è un errore accettare, come fanno molti editori, a v. 43 la congettura del Meineke *καλὰ Ναΐς* per *καλὰ παῖς*.

(2) Cfr. WENDEL *Theocritea* in " Philologus " LXIV (1905) p. 279.

(3) Così sostengono BRINKER l. c. p. 30 sgg. e KATTEIN l. c. p. 65 sgg.

intento esporre qui un'opinione personale (1). Certo, se nell'idillio I e nel VII (vv. 73-7) il poeta narra o ricorda di sfuggita la pietosa morte di Dafni per causa d'amore, nell'idillio VI e nell'VIII ne ritrae la fiorente giovinezza: che le notizie riguardo alla morte per amore siano in contraddizione con le notizie dell'idillio VIII riguardo a tutt'altro momento della vita, non appare; se anche apparisse, aggiungiamo, non si concluderebbe nulla, potendo Teocrito, come altra volta e come ogni altro poeta, seguire sur uno stesso soggetto mitico tradizioni diverse.

***

Dopo questo lento esame vale ancora la pena di sottoporre alla nostra attenzione la struttura metrica dell'idillio tutto, se per avventura vi si manifesti una tecnica diversa da quella di Teocrito.

Cominciando dalla proporzione fra il numero dei dattili e quello degli spondei, essa risulta, nei primi cinque piedi dei settantuno esametri giudicati autentici, di 2, 36: corrisponde cioè alla proporzione solita degli idillî sicuramente genuini (2, 1 XI; 2, 5 IV; 3, 4 VII; 3, 11 VI (2); la media data dal Kunst per gli idillî bucolici è di 2, 6 (3)), laddove, ad esempio, nello spurio *Βουκολίσκος* la proporzione oscilla fra 5 e 6.

Quanto alla distribuzione dei dattili e degli spondei, non occorre alcuna forma di esametro che Teocrito escluda; per contro compaiono alcune forme che Teocrito qua e là ammette, e che Callimaco ed in generale molti poeti alessandrini (così, quasi costantemente, Mosco e Bione) escludono (4). Sono esclusi da Callimaco gli esametri: vv. 9, 53 (*sdssd*), 91 (*dsssd*); dal medesimo ammesso una volta sola (*Inno* VI 73): v. 79 (*ddssd*).

(1) Cfr. Reitzenstein *Epigr. u. Skol.* pp. 193-263; Helm *Theokritos und die bukolische Dichtung* in " Neue Jahrbb. f. kl. Phil. „ 1896 pp. 457-472 e Legrand o. c. pp. 144-9.

(2) Cfr. Legrand o. c. p. 329 n. 1.

(3) Netta citata dissertazione *De Theocriti versu heroico*, p. 10.

(4) Cfr. Benkke *De arte metrica Callimachi* Strassburg 1880 p. 14 sgg. e Kunst l. c. p. 11. — Per Bione e Mosco cfr. Kunst l. c. p. 12-3.

Frequenti, come negli idillî sicuramente genuini, le infrazioni a quelle leggi generali della metrica alessandrina, che furono formulate dal Meyer (1): alla I legge vv. 65, 69, alla II 25. 68, 74, alla III 10, 24, 75, 90 (nessuna nei versi che abbiamo giudicato interpolati).

In un verso, nel v. 64, manca la cesura in terzo piede: ciò che è evitato generalmente dagli altri poeti ed in Teocrito accade talvolta. Le varie cesure sono distribuite con la stessa frequenza e con lo stesso ordine: pari ricchezza di cesure bucoliche, alla cesura semiquinaria accoppiata la bucolica a preferenza della semisettenaria.

Gli iati (giacchè di essi abbiamo dovuto spesso far parola) nella somma non superano la frequenza ordinaria: contando anche le semielisioni, in tutti i 93 versi (è notevole, nei versi interpolati mancano assolutamente), ammontano a 19: cifra che può corrispondere a quella di 13 su 81 versi dell'idillio XI, di 16 su 58 versi dell'id. X.

Questo ancora una volta ci conferma nella convinzione di aver davvero a che fare, non con un'imitazione (se anche la si voglia riconoscere abilissima ed altamente poetica), ma con un'opera originale, recante nell'arte, nella lingua, nel metro l'impronta del suo autore; ci conferma nell'idea, che gli argomenti sollevati contro l'autenticità siano tutt'altro che credibili e tutt'altro che sufficienti. Poichè, diciamolo pure ora, essi non possono neanche impressionare pel loro numero: la maggior parte colgono completamente a vuoto, ed in complesso sono tali che, chi li cerchi come in questo con buona volontà, ne può trovare di equivalenti negli idillî più teocritei.

---

(1) In " Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissensch. zu München „ 1884 p. 980 sgg.

Il *κατὰ Ἰουδαίων* di Apione.

Nota di BACCHISIO MOTZO.

L'esistenza di uno scritto di Apione *κατὰ Ἰουδαίων* era generalmente ammessa sulla fede delle testimonianze di Clemente Alessandrino (*stromata*, I, 21, anche in Euseb., *praep. evang.*, X, 12, 2), di Giulio Africano (in *praep. evang.*, X, 10, 16), del pseudo Giustino (*cohortatio ad Graecos*, c. 9), di Eusebio (*hist. eccl.*, III, 9, 4), delle Omilie Clementine (V, 2), di S. Girolamo (*de viris inlustr.*, 13) e di Suida (*lexicon*, s. v. *Ἰώσηπος*); ma per opera dello Schürer (1) prevale ora l'idea che le accuse contro i Giudei non formassero uno scritto a sè, ma un semplice capitolo dell'opera maggiore, le *Αἰγυπτιακά*, dove trattando la storia di Egitto, Apione aveva agio di parlare dei Giudei: l'accenno ad uno scritto *κατὰ Ἰουδαίων* sarebbe nato da un'arbitraria deduzione di Clemente e degli altri scrittori ecclesiastici, che si basavano su Giuseppe Flavio. Esaminando i testi relativi di Clemente, dell'Africano e del pseudo-Giustino, risulta che gli ultimi due derivano dal primo, il quale alla sua volta trascrive un passo di Taziano (*oratio ad Graecos*, 38) introducendovi di suo due notizie letterarie: che Apione era *φιλαπεχθημόνως πρὸς Ἑβραίους διακείμενος, ἅτε Αἰγύπτιος τὸ γένος, ὡς καὶ κατὰ Ἰουδαίων συντάξασθαι βιβλίον*, e che Tolomeo Mendesio scrisse le imprese de' re egiziani in tre libri.

Toglie valore alla testimonianza di Clemente il fatto che essa è attinta quasi certamente da Giuseppe, come indica la spiegazione dell'odio di Apione contro i Giudei, con la circostanza che egli era un egiziano (*c. Apion.* II, 29, 41, 69-70). A questo può aver attinto, come vuole lo Schürer, Eusebio quando afferma che il *c. Apion.* fu scritto *πρὸς Ἀπίωνα τὸν γραμματικὸν κατὰ Ἰουδαίων τηνικάδε συντάξαντα λόγον* (l. c.), e da Eusebio alla loro volta dipenderebbero S. Girolamo e Suida. Da ultimo può anche lasciarsi del tutto da parte la testimo-

(1) Schürer *Geschichte d. jüd. Volkes* III 4ª ediz. p. 539-544.

nianza delle Omilie Clementine, che Apione avesse scritto *πολλὰ βιβλία* contro i Giudei, quantunque l'autore appaia abbastanza ben informato sul carattere e le idee di Apione.

Ma ridottici così alla sola testimonianza di Giuseppe, vi sono in questo dei dati sufficienti per mostrare che, se la trattazione contro i Giudei potè far parte delle *Αἰγυπτιακά* di Apione, aveva però una fisionomia tutta sua propria, tale da permettere ad essa di andare anche separata tra le mani del pubblico. Dopo aver esposto il dubbio se valga la pena di confutare Apione, perchè in parte non aveva fatto che ripetere il detto da altri, in parte aveva inventato delle cose sciocche e ridicole, Giuseppe si decide tuttavia a trattarne, perchè il volgo dà più retta a calunnie del genere di quelle di Apione, il quale aveva scritto contro i Giudei come un'accusa giudiziaria: *κατηγορίαν ἡμῶν ἄντικρυς ὡς ἐν δίκῃ γεγραφότα* (*c. Apion.* II, 4). I termini di *κατηγορία*, *κατηγορεῖν* sono usati da Giuseppe frequentemente in tutto questo brano (§ 6, 7, 33, 148, 56 *accusare*, 63 *accusatio*, 68 *accusat*).

Giuseppe aggiunge (*c. Apion.* II, 6 e 7) che " non è facile leggere il suo discorso (*οὐ ῥᾴδιον αὐτοῦ διελθεῖν τὸν λόγον*) e intendere ciò che voglia dire. Ma a un dipresso, nella molta confusione e in quel rovescio di menzogne, una parte riguarda i punti già esaminati intorno all'esodo de' nostri progenitori dall'Egitto, una parte è un'accusa de' Giudei che abitano Alessandria: vi mescola poi un terzo elemento intorno al culto del nostro tempio e calunnie sulle altre nostre leggi ". Non è da prestar fede all'affermazione che lo scritto di Apione fosse privo di ordine. Giuseppe tratta l'avversario dall'alto in basso, con molto disprezzo, dispensandogli dello sciocco, dell'incapace, dell'ignorante, raccoglie le leggende (1) che correvano tra i Giudei sul suo conto, come quella di essersi inutilmente fatto circoncidere per scampare da una vergognosa malattia venutagli in puni zione di aver deriso la circoncisione, dubita che valga la pena di

(1) Tra queste insinuazioni maligne è probabilmente quella che Apione fosse egiziano nato nell'Oasi (*c. Apion.* II 23, 41) impugnata dal Willrich (*Juden und Griechen vor der Makkab. Erhebung* 1895 p. 172-176) difesa dallo Schürer (*Geschichte* III⁴ p. 539 n. 81). Eliconio in Suida (*lexicon* s. v.) lo diceva Cretese, Gellio (*noctes Atticae* V, 14) " *Graecus homo* " per lasciar da parte le testimonianze che lo dicono alessandrino, poichè tale potè esser detto per aver ottenuta la cittadinanza, il che Giuseppe non nega.

discuter le sue accuse e, viceversa, v'impiega maggior tempo e più diligenza e minuziosità, sebbene non sempre scrupolosa ed equa, che non ne impieghi con gli altri avversari. Lo scritto di Apione aveva certamente il suo ordine e forse era anche molto ben disposto; la divisione che Giuseppe ne dà, deve corrispondere press'a poco a quella che l'autore stesso aveva adoperato. In un altro passo Giuseppe dice che lo scritto era principalmente diretto contro i Giudei di Alessandria. " Il nobile Apione sembra abbia voluto dare le ingiurie contro di noi come un compenso agli Alessandrini, della cittadinanza accordatagli; e conoscendo l'avversione che essi hanno verso i Giudei che abitano con loro, si propose di oltraggiar questi, ma coinvolge anche tutti gli altri, mentendo spudoratamente contro gli uni e gli altri „ (1).

La parte centrale e più importante dello scritto era diretta ad impugnare il diritto dei Giudei alessandrini alla cittadinanza e Giuseppe impiega nel confutarla i §§ 33-78: tutto il resto, le notizie sulla loro origine, le calunnie sul loro culto e i costumi, era parte secondaria. Se questi dati si mettono in rapporto con la notizia (*antiq.*, XVIII, 257-9) che Apione fu nel 39 d. C. l'avvocato degli Alessandrini al tribunale di Caligola, in cui si discuteva la grave questione del diritto dei Giudei alla cittadinanza di Alessandria, e che fu egli precisamente il portatore dell'accusa contro i Giudei, che più loro nocque rappresentandoli in modo assai sfavorevole a Caligola, noi abbiamo tutta la ragione di affermare che la *κατηγορία ὡς ἐν δίκῃ* da lui scritta, che trattava principalmente dei Giudei di Alessandria e impugnava il loro diritto alla cittadinanza, era o rappresentava il discorso tenuto da Apione davanti a Caligola o preparato per tale circostanza. Ciò è confermato dal fatto che uno dei punti su cui Apione aveva maggiormente insistito era che i Giudei *τῶν Καίσαρος τιμῶν περιορᾶν*, e la stessa accusa era nella *κατηγορία* (*c. Apion.* II, 73: *itaque derogare nobis Apion conatus est, quia imperatorum non statuamus imagines*).

Tattica di Apione appare dai frammenti esser stata quella di aggravare la condizione dei Giudei alessandrini sotto il peso

(1) Ib. § 32 cfr. anche § 68: *is autem etiam seditionis causas nobis apponit: qui si cum veritate ob hoc accusat Judaeos in Alexandria constitutos, cur omnes nos culpat ubique positos, eo quod noscamur habere concordiam?*; § 56: *Apion autem omnium calumniator.*

del giudizio generale sfavorevole che si dava dei Giudei. Ricordare le leggende calunniose sulle loro origini, le favole sulle loro leggi e culto, gettare il ridicolo sulle loro usanze, rilevare il separatismo sociale e l'intolleranza religiosa, mostrarli ribelli e sediziosi, in opposizione con la politica romana come nel caso della successione di Evergete II a Filometore, tutto servì ad Apione per ottenere vittoria nella questione particolare che allora propriamente si dibatteva.

Egli aveva un ambiente assai favorevole, e in Caligola un giudice già prevenuto contro i Giudei per il rifiuto di questi di tollerare sue statue ed altari. Ciò spiega come le *'Υποθετικά* di Filone, che sono la difesa e la risposta dei Giudei alle accuse di Apione, discutessero, in un discorso di cui abbiamo frammenti in Eusebio (*praep. evang.* VIII, 6-7) e che è imitato nella seconda parte del II *c. Apion.*, le accuse contro i Giudei in genere, la loro storia, religione e morale (1); mentre in un altro discorso, di cui abbiamo qualche traccia nella prima parte dello stesso libro di Giuseppe, si discuteva la questione giuridica del diritto di cittadinanza dei Giudei alessandrini e li si purgava dalle altre colpe loro addebitate. La questione della cittadinanza era abbastanza intricata per le pretensioni delle due parti, e per risolverla occorreva distinguere, come poi fece Claudio, i Giudei detti *'Αλεξανδρεῖς* ch'erano veramente cittadini, dai Giudei in genere, *οἱ 'Ιουδαῖοι*, col qual termine si designavano quelli che non godevano la cittadinanza. Ma nel dibattito, Apione da una parte si studiò di mostrare che i Giudei, appunto perchè Giudei, non potevano essere Alessandrini, e si meravigliava come fossero potuti esser detti *'Αλεξανδρεῖς* (in senso giuridico, non nel senso di abitante in Alessandria, che non era cosa da meravigliarsene) e rilevava come i Giudei non avessero avuto parte alle distribuzioni di grano fatte ai cittadini, il che nulla nuoceva ai Giudei *'Αλεξανδρεῖς*, che come *'Αλεξανδρεῖς* vi partecipavano, e che essi non adoravano le stesse divinità degli Alessandrini, il che era requisito inevitabile per i cittadini iscritti nei demi e tribù, ma non per gli *'Αλεξανδρεῖς* in senso ristretto che non vi erano iscritti.

(1) Cfr. la mia nota *Le 'Υποθετικά di Filone*, in " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. 47 (1912) p. 572.

Dall'altra parte Filone (il suo modo di argomentare possiamo immaginarlo da Giuseppe) sosteneva che i Giudei avevano ricevuto la cittadinanza *ad omnes* e sin da Alessandro e i primi Lagidi, che furono tutti protettori ed ammiratori dei Giudei.

La causa in cui erano a litigio la cittadinanza della capitale del mondo ellenistico, Alessandria, e una nazionalità così diffusa e odiata come la giudaica, era sotto ogni aspetto la più interessante e grave che un avvocato desideroso di fama potesse augurarsi, e s'intende come Apione retore, celebre per la sua immensa vanità, non rinunziasse a pubblicare la sua *κατηγορία*, tanto più dopo che la sentenza di Caligola dette vittoria agli Alessandrini da lui sostenuti. Le circostanze storiche in cui egli ebbe a prestare la sua opera contro i Giudei spiegano perchè il suo nome sia giunto sino a noi come quello del maggior rappresentante dell'antisemitismo antico.

La data dello scritto d'Apione resta così fissata al 39 d. C. Più tardi, dopo la sentenza di Claudio del 41 in favore dei Giudei, non poteva saltare in mente ad Apione di pubblicarlo, tanto più che i capi degli Alessandrini, suoi colleghi nell'ambasciata a Caligola, furono da Claudio processati e condannati (1),

(1) Ritengo del 41 il processo contro Isidoro ginnasiarca e Lampone, ambasciatori di Alessandria, che secondo il racconto di alcuni papiri (cfr. il testo in Wilcken *Chrestomathie der Papyruskunde*, I n° 14 p. 24) si svolge davanti al tribunale di Claudio, e in cui è in causa il re Agrippa. Noi dobbiamo ammettere due ambasciate degli Alessandrini, una nell'inverno 38/39 a Caligola e una nel 41 a Claudio occasionata dalla nuova sommossa che avviene appena, ucciso Caligola, i Giudei assalgono gli avversari con le armi. Mentre durante la prima legazione ginnasiarca è Lampone e Apione è l'avvocato degli Alessandrini, in questa seconda a cui si riferiscono i papiri, ginnasiarca è Isidoro e Apione non compare affatto. Difficilmente nel passo in cui Isidoro prende la parola *κατὰ Ἀγρίππου βασιλέως* (col. II r. 2) si ha da intendere che Isidoro pretenda accusare il re Agrippa favorito dell'imperatore, poichè il seguito mostra che Isidoro usa un tono molto umile e flebile finchè non perde ogni speranza. Sembra piuttosto che Isidoro parli contro ciò che aveva detto Agrippa, il quale probabilmente aveva accusato gli Alessandrini e specialmente Isidoro e Lampone come istigatori delle sommosse di Alessandria. I primi tempi del regno di Claudio, per il processo, indicano le frasi in cui Claudio accusa Isidoro di aver cagionato la morte di troppi suoi amici, e la risposta di Isidoro che egli ciò fece per comando dell'imperatore precedente e di essere pronto a far da accusatore pubblico per conto di lui: è noto che Claudio prese in principio del suo regno provvedimenti contro i denunziatori.

Il piano del *κατὰ Ἰουδαίων* possiamo ricostruirlo seguendo la confutazione del *c. Apionem*, II:

Origine dei Giudei	Erano egiziani lebbrosi, tignosi, malati, impuri (§ 8-9, 15). Mosè un Eliopolitano (§ 10). Cacciati dall'Egitto nel 752 avanti Cristo: sono quindi un popolo di origine recente (§ 17). Aneddoti ed episodi relativi all'esodo, all'origine del sabato (§ 20-21), alla promulgazione della Legge (§ 25).
La questione alessandrina	Lo stabilirsi dei Giudei in Alessandria: tollerati per scarsità di abitanti, hanno per loro abitazione un quartiere a parte (§ 33, 42). Si son chiamati sempre Giudei: non potevano avere la cittadinanza alessandrina (§ 38). Ricordo dei fatti di Onia e Dositeo, della opposizione contro Tolomeo Fiscone (§ 49). Essi non partecipavano alle distribuzioni di grano che si facevano ai cittadini; così non ne ricevettero dall'ultima Cleopatra (§ 56). Germanico per loro colpa non potè distribuire a tutti il grano: onde fu loro tolta l'amministrazione di questo (1). Se sono cittadini perchè non adorano gli stessi dèi che gli Alessandrini? (§ 65). I Giudei sediziosi (§ 68) e ribelli: non innalzano statue agl'imperatori (§ 73).
Il culto e la morale dei Giudei	Viceversa adorano nel tempio di Gerusalemme una testa d'asino (§ 80) e fanno sacrifizi umani, come si provò al tempo di Antioco Epifane (§ 91). Favola di Zabido (§ 112). Il giuramento di odio contro i Greci e gli altri uomini (§ 121). L'empietà e la malvagità han sempre reso i Giudei disgraziati (§ 125). Son gente inutile: non han prodotto uomini grandi, nè nulla di buono (§ 135). Hanno usanze ridicole: uccidono animali miti, non mangiano carne porcina, si circoncidono (§ 137) (2).

Se tale era il piano ed il contenuto del *κατὰ Ἰουδαίων λόγος*, resta da spiegare perchè Giuseppe incominciando la sua

(1) Interpreto così il § 63, che è di dubbio significato: potrebbe voler dire che Germanico non distribuì grano ai Giudei perchè non li ritenne cittadini, oppure che Germanico non potè distribuire grano a tutti gli abitanti in Alessandria, perchè i Giudei ai quali era affidata la cura di provvederlo e di amministrarlo non ne procurarono la quantità necessaria, onde fu loro tolta tale amministrazione. Quel che segue nel § 64 induce a ritenere questa seconda interpretazione. Se si avesse il testo greco il senso sarebbe più chiaro.

(2) I frammenti sono raccolti in Reinach *Textes d'auteurs grecs et romains relatifs au Judaïsme* p. 123 seg.; Müller *F. H. G.* III p. 512 seg.

confutazione (*c. Apion.* II, 10) citi non questo discorso, ma il III delle *Αἰγυπτιακά*. Non sarebbe impossibile immaginare che in questa opera fossero contenute le leggende calunniose riguardanti l'esodo, mentre il *κατὰ Ἰουδαίων* avrebbe trattato in modo speciale la questione alessandrina. È questa l'ipotesi del Gutschmid (1), contro della quale non ha invero nessuna forza l'argomento che lo Schürer deduce dal confronto che Giuseppe istituisce tra gli scritti di Apollonio Molone e di Apione contro i Giudei, rilevando che *τὴν κατηγορίαν ὁ Ἀπολλώνιος οὐκ ἀθρόαν ὥσπερ ὁ Ἀπίων ἔταξεν ἀλλὰ σποράδην... ποτὲ μὲν ὡς ἀθέους καὶ μισανθρώπους λοιδορεῖ, ποτὲ δ' αὖ δειλίαν ἡμῖν ὀνειδίζει.....* (*c. Apion.* II, 148), dal che risulterebbe che Apione aveva parlato contro i Giudei in un sol libro, e in un sol punto di questo, non in diverse opere o in diverse parti di uno stesso scritto. In realtà la differenza unica che Giuseppe pone tra i due scritti con quell'*ἀθρόα* si riferisce alla maniera in cui le accuse erano presentate: Apollonio nella sua *συσκευὴ κατὰ Ἰουδαίων* le aveva disseminate a spizzico ora qua, ora là, secondo che si offriva il destro nell'esposizione, che come appare da questo passo di Giuseppe e dal frammento conservatoci attraverso Posidonio da Eusebio (*praep. evang.*, IX, 19), aveva un contenuto storico oggettivo, in cui l'autore mostrava buona conoscenza dell'antica storia giudaica; Apione invece aveva fatta una trattazione ch'era interamente da capo a fondo un'accusa, come è naturale che fosse quella che è detta *κατηγορία ὡς ἐν δίκῃ*. Tale, a mio parere, il significato vero della frase di Giuseppe, la quale non impedirebbe che Apione, pur avendo scritto a parte un'accusa piena e formale contro i Giudei, ne parlasse anche occasionalmente nel III libro delle *Αἰγυπτιακά*, ed in altre opere.

Vi è però un modo di conciliar le cose, e dare in parte ragione allo Schürer, tenendo conto del carattere delle *Αἰγυπτιακά*. Difficilmente quest'opera può essere considerata come una storia propriamente detta. L'identificazione di essa con l'*Ἱστορία κατ' ἔθνος*, unico titolo che Suida ricordi delle opere di Apione, è del tutto arbitraria. Dai frammenti (2) essa ci appare come una

(1) *Vorlesungen über Josephos' Bücher gegen Apion* in " Kleine Schriften ", IV 369.

(2) In Müller *F. H. G.* III p. 506 seg.

raccolta di curiosità, tradizioni, leggende, aneddoti d'ogni genere, notizie sui templi, i monumenti, la geografia, i costumi, il culto degli dèi e degli animali, le cerimonie dell'Egitto, in cui l'autore aveva libero campo di sfoggiare la sua erudizione, di raccontar casi a lui capitati, o di cui vantava di esser stato spettatore, come quello di Androcle e del leone in Roma, del delfino che ama un giovinetto in Pozzuoli, ch'egli narrava nel V libro. Data questa natura dell'opera, non è impossibile ch'egli, presentatasi l'occasione di parlare de' Giudei nel III libro, ne approfittasse per inserirvi con la storia degli ultimi avvenimenti riguardanti i loro rapporti con gli Alessandrini anche la *κατηγορία* da lui composta.

Gli Alessandrini dovettero essere indotti a scegliere Apione come loro avvocato (questa è propriamente la parte che egli fa nella causa), per la celebrità ch'egli si era acquistata, e per le molte aderenze che aveva in Roma, dove aveva insegnato.

Per quel che riguarda la questione giuridica, il materiale gli era fornito dai fatti stessi di cui era contemporaneo e dai capi degli Alessandrini: per ciò che spetta alla storia e alla legge giudaica, le sue fonti erano Manetone, Cheremone, ma specialmente Lisimaco, Mnasea, Apollonio Molone, Posidonio. Vi sarebbe stato tuttavia un punto in cui Apione si allontanava dai suoi predecessori, e questo era la data dell'Esodo.

Uno dei motivi che spinsero Giuseppe a comporre i due libri *c. Apionem* è la poca fede che si prestava all'antichità del popolo giudaico, e alla storia da lui esposta nelle *antiq.* seguendo la Scrittura. Si riteneva che fosse un popolo d'origine recente: come mai, se fosse stato tanto antico, gli scrittori greci non ne avrebbero parlato? (*c. Apion*, I, 1 seg.). Autore di questa calunnia sarebbe specialmente Apione, il quale assegnava l'esodo, o meglio la cacciata di quella turba di lebbrosi ed impuri egiziani al 752 av. C., in cui pure sarebbe stata fondata Cartagine. Giuseppe si diverte a canzonarlo, mostrando il disaccordo che vi è tra lui *ὁ γραμματικὸς ὁ ἀκριβής* e gli altri scrittori. " Manetone infatti dice che i Giudei si partirono d'Egitto durante il regno di Totmes, 393 anni prima della fuga di Danao in Argo; Lisimaco sotto il re Boccori, cioè 1700 anni fa; Molone ed alcuni altri come a lor piacque. Ma di tutti il più degno di fede, Apione, determinò l'esodo esattamente alla settima olim-

piade, e in questa al primo anno, nel quale, dice, i Fenici fondarono Cartagine „ (*c. Apion.* II, 16-17).

Ora è accaduto a Giuseppe, nella foga di combattere il suo avversario, di cadere in una negligenza simile a quella che gli rimprovera. I 393 anni dall'esodo alla partenza di Danao per Argo non sono dati da Manetone, ma calcolati da Giuseppe, sommando gli anni di regno che quello dà ai re da Totmes sino a Set il fratello di Armai o Danao (*c. Apion.* I, 103).

Lisimaco alla sua volta non indicava altra data se non quella, che i Giudei eran stati espulsi sotto Boccori (*c. Apion.* I, 305); la cifra di 1700 anni deriva, come nel caso precedente, da un calcolo di Giuseppe. Egli deve aver identificato il Boccori di Lisimaco con qualcuno dei sovrani della XVIII dinastia, secondo la teoria che al tempo di questa metteva l'esodo. Ma le cose stavano diversamente. Apione il quale toglieva i dati relativi all'esodo da Lisimaco, come ci dice Giuseppe stesso (*c. Apion.* II, 20), quanto alla data non se n'è allontanato, ma l'ha precisata; egli non trovando altro Boccori che quello della XXIV dinastia Saidica, al tempo di costui fissò l'esodo. Seguendo i dati di Manetone, quali risultano dal Canone di Eusebio (1), Boccori regnò per 44 anni, dal 778 al 735. Dentro questi termini Apione ha scelto il 752, perchè faceva contemporanea la fondazione di Roma e di Cartagine e ricollegava il partirsi dei Fenici dalla Palestina con l'invasione dei Giudei. In base a quali dati poi Lisimaco assegnasse la cacciata de' Giudei al regno di Boccori, non possiamo saperlo: probabilmente su leggende che correvano in Egitto a carico degl'Israeliti. Anche Tacito (*hist.*, 5, 3), seguendo Lisimaco ed Apione, fissa al regno di Boccori l'uscita de' Giudei e il loro costituirsi in nazione.

Risolta questa difficoltà, ne sorge un'altra. Se si desse retta alle testimonianze di Giulio Africano (2) e del pseudo-Giustino, Apione si sarebbe contradetto quanto alla data dell'esodo, poichè

---

(1) *Chronic.* II p. 77 Schöne. — Eusebius *Die Chronik aus dem Armenischen übersetzt* ed. Karst (Lipsia 1911) p. 182.

(2) In Euseb. *praep. evang.* X. 10, 16 *Ἀπίων δὲ ὁ Ποσειδωνίου, περιεργότατος γραμματικῶν, ἐν τῇ κατὰ Ἰουδαίων βίβλῳ καὶ ἐν τῇ τετάρτῃ τῶν ἱστοριῶν φησι, κατὰ Ἴναχον Ἄργους βασιλέα, Ἀμώσιος Αἰγυπτίων βασιλεύοντος, ἀποστῆναι Ἰουδαίους ὧν ἡγεῖσθαι Μωσέα.* — Lo stesso in pseudo-Iustinus *cohortatio ad Graecos* c. 9.

nel IV delle *Αἰγυπτιακά* e nel *κατὰ Ἰουδαίων* avrebbe assegnato l'esodo al regno di Amosi della XVIII dinastia. Ma questi autori, come s'è detto, derivano la notizia da Clemente Alessandrino (1), il quale alla sua volta attinge a Taziano (2). Questi, che andava raccogliendo testimonianze sull'antichità di Mosè e degli Ebrei, dice che Tolomeo Mendesio aveva messo l'esodo al tempo di Amosi: ma cita il testo di Tolomeo, e questo in realtà non contiene altro se non che Amosi era contemporaneo d'Inaco. Dipoi cita Apione che nel IV libro delle *Αἰγυπτιακά* diceva tra l'altro che " Auari fu distrutta da Amosi, contemporaneo dell'argivo Inaco, come nei *Χρόνοι* scrisse Tolomeo Mendesio ". Ora se tanto Tolomeo che Apione avessero contenuto nei passi citati qualche cosa di più esplicito su Mosè e sugli Ebrei, Taziano non si sarebbe certo contentato di quelle due misere indicazioni, che non dimostravano il suo assunto se non congiungendole con la teoria ammessa dagli apologisti seguendo Manetone, che l'esodo fosse avvenuto al tempo della presa di Auari per parte di Amosi; ma avrebbe citato i dati più espliciti che questi autori avessero fornito. Ad ogni modo, qualunque potesse essere l'opinione di Tolomeo sulla data dell'esodo, il testo di Apione non parlava punto degli Ebrei, ma riguardava solo la distruzione di Auari, della quale poteva parlare per altri motivi che ignoriamo.

Clemente, trascrivendo Taziano, ha introdotto le due notizie letterarie sul *κατὰ Ἰουδαίων* di Apione e sul numero dei libri dell'opera di Tolomeo Mendesio sulle imprese de' re egiziani: inoltre egli ha lasciata la prima citazione di Tolomeo Mendesio che gli è sembrata di minor importanza, contentandosi di quella riportata da Apione, il quale, citato per primo, pare diventi garante che secondo Tolomeo l'esodo avvenne sotto Amosi, mentre questa non è che induzione di Taziano.

Giulio Africano, compendiando negligentemente Clemente, ha detto che Apione metteva l'esodo sotto Amosi, e per giunta che ciò affermava tanto nel IV delle *Αἰγυπτιακά*, quanto nel *κατὰ Ἰουδαίων*, e fu seguìto dal pseudo-Giustino.

---

(1) *Stromata* I 21 = Euseb. *praep. evang.* X 12 1-4.
(2) *Oratio ad Graecos* ed. Schwartz c. 38 = *praep. evang.* X 11 13-14.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Febbraio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI e SEGRE Segretario. — Scusano l'assenza i Soci D'OVIDIO, NACCARI e PARONA.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente è lieto di poter oggi dare notizia della guarigione del Socio FOÀ, la cui grave e lunga malattia aveva fatto trepidare gli animi dei Colleghi. La Classe unanime dà incarico al Presidente di comunicare al Socio FOÀ il suo compiacimento e i suoi auguri.

Il Presidente, ricordando quanto fu detto nell'adunanza del 29 dicembre scorso, intorno alle onoranze che si vogliono fare alla memoria di ASCANIO SOBRERO, interroga la Classe se non crederebbe opportuno che in quell'occasione venisse pubblicata da un Socio, nelle nostre raccolte accademiche, una Nota biografica commemorativa del SOBRERO. La Classe unanime accoglie quest'idea, e dà incarico al Socio GUARESCHI di redigere questa Nota.

Il Socio SEGRE, per incarico del Collega PARONA, presenta, per la stampa negli *Atti*, una Nota del Dr. Pietro BAROCELLI su *L'Egitto ed il Sinai nel giornale di viaggio di Vitaliano Donati (1759-1762)*.

Il Socio MATTIROLO, anche a nome del Socio PARONA, legge la relazione sulla Memoria del Dr. A. CASU, presentata nella precedente adunanza. Si accolgono ad unanimità le conclusioni favorevoli alla stampa della Memoria.

LETTURE

L'Egitto ed il Sinai nel Giornale di viaggio di Vitaliano Donati (1759-62).

Nota di PIETRO BAROCELLI.

I.

Erano cessate appena le lunghe guerre che per tutta la prima metà del '700, salvo poche interruzioni, avevano desolato il Piemonte, e Carlo Emanuele III si era volto a sanarne le piaghe promovendo le arti della pace e gli studi. All'incremento di questi e di quelle pensò potesse tornar utile una esplorazione scientifica e commerciale nei paesi di Levante, e destinò una cospicua somma perchè fosse eseguita. Occorreva trovar l'uomo cui affidarne l'incarico.

Da qualche anno era stato chiamato ad insegnar botanica nell'Università di Torino il padovano Vitaliano Donati, medico e naturalista già molto noto nel mondo dei dotti per fortunate ricerche, per esplorazioni scientifiche eseguite e per pubblicazioni su svariati argomenti. A Padova egli era stato allievo ed amico di naturalisti e di geografi quali il Poleni, il Carli-Rubbi, il Vallisnieri figlio. Aveva composto una *Tavola topografica* dell'Illiria, nella quale regione si era recato per parecchi anni di seguito per istudi di botanica e di zoologia. Frutto di tali studi era stata anche una *Storia naturale marina dell'Adriatico* (Venezia, 1750), in cui, fra l'altro, è affermata la natura animale dei coralli.

A Torino nuova fama egli erasi acquistato con escursioni scientifiche nelle Alpi. I momenti di ozio egli dedicava al culto delle antichità; e quale tempra d'uomo inoltre egli fosse, aveva dimostrato fin da quando esplorava i paesi dell'Illiria, dove

in una certa occasione aveva dato prova di possedere in grado eminente l'energia ed il coraggio necessari in viaggi non scevri di pericoli.

A quest'uomo Carlo Emanuele III affidò la missione scientifica e commerciale che gli stava a cuore.

Il Donati doveva recarsi in Egitto, e di là passare in Asia. Una *Memoria istruttiva* della segreteria di Stato gli tracciava chiaramente gli scopi da raggiungere.

" Sua Maestà ha determinato che il detto Signor Professore " faccia l'accennato Viaggio... per due oggetti:

" Uno è per raccogliere quanto può esservi nelle cose na- " turali di raro e conveniente per un Museo e il Giardino di " Botanica.

" L'altro per osservare quello che appartiensi all'Agricol- " tura, ed al Commercio onde se ne possa far qualche uso per " questo paese..... Oltre la ricerca e raccolta di tutte le Cose " Naturali proprie per il Museo, se incontrerà qualche occa- " sione di fare acquisto di qualche pezzo d'Antichità o mano- " scritto raro od anche di qualche Mumia delle più conservate, " o una serie di medaglie Siriache, Phenizie od Egiziache non " lascierà di comperarle „.

Il Donati si imbarcò a Venezia per l'Egitto nel giugno 1759. Sbarcato ad Alessandria, cominciò quivi le sue ricerche, ma quasi subito cadde in un tranello tesogli da un suo compagno di viaggio, tantochè perdette per qualche tempo la libertà personale. Liberatosi a stento, ed ottenuti non senza difficoltà sussidi e dilazioni per il suo viaggio, risalì, solo, la valle del Nilo fino poco oltre la prima cataratta. Visitò pure la penisola del Sinai.

Nell'aprile del 1761 partì da Damietta per la Palestina, la Siria e quindi per l'India, ma, prima di giungervi, il 26 febbraio 1762, morì di febbre maligna sulla nave che lo trasportava.

Delle sue raccolte botaniche, zoologiche, mineralogiche, dei suoi appunti pochissimo, dopo parecchi anni, giunse a Torino. Vi arrivò, frammentario, il suo *Giornale di viaggio,* riguardante in molta parte l'Egitto e il Sinai; e se ne conserva una copia nella biblioteca reale di Torino, copia, per mala sorte, eseguita da mano indotta, come è dimostrato dai molti errori di orto-

grafia e dalle storpiature dei nomi proprii. Un'altra copia andò perduta nell'incendio della biblioteca nazionale di Torino del 1904. Del Donati la biblioteca reale possiede pure un manoscritto (copia) sulla *Storia naturale d'Egitto* (titolo aggiunto) (1), descrizioni di animali e di piante.

Il Donati si era preparato al suo viaggio collo studio delle relazioni pubblicate dai viaggiatori che lo avevano preceduto, e che egli onestamente e ripetutamente cita nel suo giornale (I, 5, 7, 19, 21, 30, 103, 133, 145, 265, 318, 343; II, 31, 47, 72, 74, 79, ecc.).

In ordine cronologico il primo descrittore dell'Egitto che il Donati cita — e con frequenza — è il Belonio, ossia Pierre Bélon (2) che dal 1546 al 1549 fu in Grecia, in Asia e nell'Egitto inferiore. Botanico e zoologo di professione, si occupò, a preferenza, di piante e di animali.

Allo stesso secolo appartiene Prospero Alpino, medico e botanico veneto come il Donati, e autore di parecchie opere (3) frutto di un lungo suo soggiorno in Egitto.

Nel secolo successivo lasciò descrizione dei suoi viaggi in Egitto il romano Pietro della Valle, conoscitore delle antichità e giudicato dall'Amat de Saint Philippe il più grande dei viaggiatori italiani di quel secolo (4).

Dopo di lui si recò in Egitto, e scrisse una relazione (5) ricca di notizie il francese Giovanni Thévenot (1657-59), ed allo stesso secolo appartengono il frate Francesco Quaresmio da Lodi che illustrò l'Egitto inferiore dal punto di vista reli-

---

(1) P. Revelli, *Il viaggio in Oriente di V. D.* (1759-62), nel " cosmos ", XII. Il R. riprendendo studi già iniziati dal Bonola e dal Lumbroso pose grandissima cura nel ricercare tutte le opere, edite e manoscritte, e le lettere del D. Pubblicò alcuni passi del giornale di viaggio, e diede abbondanti notizie sulla vita, sull'attività scientifica e sui viaggi del D.

(2) Petri Belonii, *Observationes plurimarum singularium et memorabilium rerum etc*, trad. dal francese del Clusius, Raphaelengii, MDCV.

(3) *De medicina Aegyptiorum*, 1591; *De plantis minus notis Aegypti*, 1592; *Historia naturalis Aegypti*, 1735, ecc.

(4) *Viaggi di Pietro della Valle il Pellegrino, descritti da lui medesimo in 54 lettere famigliari*, Roma, appresso Vitale Mascardo, MDCL. Lettere 11, 12, 13.

(5) *Relation d'un voyage fait au Levant etc.*, Paris, 1665, p. II, cap. I sgg.

gioso (1), il le Bruyn che viaggiando da artista giunse fino alle Piramidi (2) e Francesco de Maillet che in sedici anni di soggiorno in Egitto quale console di Francia vi raccolse numerose e svariate osservazioni (3).

Verso la fine del '600, con l'incremento degli studi geografici derivato dal fiorente pensiero scientifico, più numerosi furono i viaggiatori scienziati. Nel 1694 il de Chazelles prendeva misure geodetiche in Egitto per incarico della francese accademia delle scienze. Un altro accademico, Paolo Lucas, per ordine della corte di Francia viaggiò in Egitto nel 1716-17 allo scopo di vederne e descriverne i monumenti, ricercare ed acquistare medaglie, pietre scolpite, manoscritti antichi, fare collezioni di animali e di piante. Potè egli rimontare il Nilo fino a Kurna, ma gravi difficoltà gli impedirono di procedere oltre. Ad ogni modo riuscì a dare una prima descrizione sommaria (4) di tutto l'Egitto, la quale insieme alla relazione del Thévenot fornì il materiale per la voluminosissima opera del Salmon citata dal Donati, *Stato presente di tutti i paesi ecc.* (VI, 22, 1740).

Dal 1697 al 1724 fu in Egitto il padre Sicard, dotto gesuita, di cui furono pubblicate lettere contenenti molte notizie (5) e poco appresso due inglesi, il Pochoke, che si spinse fino a Siene raccogliendo messe di nuove cognizioni, e il Shaw. che, con lodevole disegno, non raccontò i suoi viaggi, ma ne pubblicò i risultati distribuendo le osservazioni in capitoli secondo le materie (6). Anche un botanico svedese, l'Hasselquist, viaggiò in Egitto verso la metà del '700, ed essendo egli morto in viaggio, i suoi appunti furono riordinati e pubblicati dal Linneo per ordine del re di Svezia.

---

(1) *Historica theologica et moralis Terrae Sanctae elucidatio*, 1639, XVIII.

(2) *Voyage au Levant*, Paris, 1725, I, 23, 24; II, 27-45.

(3) Maillet-Mascrier, *Description de l'Égypte*, La Haye, 1740; Maillet, *Telliamed*, entretien d'un philosophe indian avec un missionaire françois sur la diminution de la mer (1755).

(4) Lucas, *Troisième voyage fait en Levant*, Rouen, 1719.

(5) *Mémoires du Levant*, lettres édifiantes et curieuses écrites des missions étrangères.

(6) Pochoke, *A description of the East and some other countries*, London, MDCCXLIII; Shaw, *Voyages en plusieurs provinces de la Barbarie et du Levant, etc.*, La Haye, 1743.

Una missione ufficiale analoga a quella già affidata in Francia al Lucas, fu l'incarico dato nel 1737 al Norden, ufficiale della marina danese, il quale per ordine del suo re, Cristiano VI, risalì il Nilo fin oltre la prima cataratta occupandosi molto di antichità ma facendo anche osservazioni di fenomeni naturali e disegnando in varie carte ad una grande scala il corso del Nilo (1).

Non era pertanto un fatto nuovo la missione affidata al Donati dal re di Sardegna. Era nuovo in Italia perchè nessun altro principe italiano ne aveva dato l'esempio.

Mentre il Donati eseguiva il suo viaggio, Federico V di Danimarca faceva preparare la grande spedizione in Egitto e in Arabia che fu capitanata dal Niebuhr, e quarant'anni dopo il generale Bonaparte si faceva accompagnare in Egitto da quella numerosa schiera di scienziati, che poi pubblicò la celebre *Description de l'Égypte*.

II.

Le notizie geografiche, archeologiche, geologiche, commerciali che intorno all'Egitto troviamo negli scritti rimastici del Donati altro non sono, per la maggior parte, se non semplici annotazioni gettate da lui giorno per giorno frettolosamente sul suo giornale di viaggio. Sarebbe pertanto fuor di luogo cercarvi una trattazione ordinata e completa di qualche argomento. Spesso troviamo non completo il suo pensiero, e per farci un'idea dell'importanza dei suoi studi e di ciò che egli avrebbe potuto darci se la fortuna gli fosse stata più propizia, dobbiamo spigolare qua e là e procurar di connettere quanto sullo stesso argomento si trova sparso in varie parti dei suoi scritti.

" L'Egitto, egli scrive, altro propriamente non è se non una valle. Incomincia questa dalla prima cataratta, cioè dal luogo ove unite si trovano le due catene di monti, l'una delle quali chiude la valle in tutta la sua larghezza dalla parte di levante e l'altra dalla parte di ponente... ". Le due catene " ora più ora meno discoste fra loro ritrovansi e quanto più una o l'altra

(1) F. L. Norden, *Voyage d'Égypte et de Nubie* (traduzione dal danese), Copenhague, 1755.

è discosta dal Nilo, tanto maggiori sono le pianure..... la maggiore parte di tali pianure nel tempo della maggiore altezza del Nilo rimangono coperte d'acqua..... „. Esse non sono di terra uguale ed uniforme, ma vi sono “ gran tratti di sabbia e di ghiaia ancora, particolarmente sotto la montagna „ (*giornale di viaggio*, I, p. 390 sgg.).

Come vedesi, il D. chiama “ catene „ i due altipiani arabico e libico, ed infatti i loro margini dirupati verso il Nilo dànno l'immagine, a chi guarda dal basso della valle, di due catene; quanto ai depositi di sabbia non appare che il D. si sia reso conto della loro origine desertica, come se ne rese poi conto il de Rozière (1), il dotto mineralogista che accompagnò Napoleone in Egitto.

Fino dall'antichità si era conosciuta, sommariamente, ma con verità di concezione, la natura geologica dell'Egitto.

Non si erano certamente messe in chiaro le successive trasgressioni e regressioni del mare: si riteneva però che una volta esso era un *κόλπος θαλάσσης* (Erodoto, *'Ιστορίαι*, II, 10) riempito dalle alluvioni del Nilo. Il mare aveva lasciato traccie di sè nelle afflorescenze saline e nelle numerose conchiglie fossili dei due altipiani (Strabone, *Geogr.*, I, III, 4).

Anche Prospero Alpino opinò che il suolo egizio una volta fosse *longe humilius* (2), e che il Nilo colmando paludi avesse resa la terra abitabile. Il de Maillet (3), constatata vera l'affermazione degli antichi circa l'esistenza di conchiglie fossili nelle montagne vicino a Memfi, conchiuse che il delta in principio non era che un golfo. Secondo lui, il delta continuerebbe ad avanzare sempre più verso nord; il che effettivamente avviene, ma in misura più limitata di quella che il de Maillet credeva.

Il primo che, sebbene invano, tentò esperienze scientifiche per constatare l'aumento progressivo del suolo egizio fu il Shaw (4). Presso Alessandria trovava, ed era vero, poche tracce dell'innondazione del Nilo. Facendo vela verso est scorgeva monticelli sabbiosi: erano quegli argini marini di sabbia,

(1) *Description de l'Égypte*, 2ª ed., 1824, vol. XX, pp. 328-9.

(2) *Rerum aegyptiarum*, I, Cap. II.

(3) *Descr.*, p. 91; *Telliamed*, p. 75, p. 91 ecc.

(4) *Voyages*, II, 22, 182.

di alghe, di limo sormontati da dune che difendono tutta la base del delta dalle acque del Mediterraneo. Egli suppose che fossero originariamente isolette le quali dovevano aver facilitata la deposizione del limo del Nilo.

Contro la tradizionale opinione seguita fino allora si pronunciò nel 1741 il Fréret (1).

Ammetteva egli bensì una primitiva maggiore estensione del mare, ma avendo saputo che ad occidente del ramo di Rosetta viene a terminare una lunga zona rocciosa, si affrettò — veramente troppo presto — a concludere che le alluvioni del Nilo non dovevano aver per nulla contribuito alla formazione del delta.

Alla soluzione di questo problema il D. avrebbe certamente potuto portare un largo contributo; ma delle sue indagini ed osservazioni ben poco ci resta. Oltre professar botanica egli aveva grande amore alla zoologia, nuova scienza allora molto in fiore nelle scuole venete. Il D. diffidava però delle grandi ipotesi generali, sicchè essendogli stato chiesto da dotti inglesi qual sistema giudicasse adatto a spiegare la formazione e struttura della terra, rispose che quello del mare sopra la terra era sicuramente il migliore; ma che non era sufficiente a spiegare tutti i fenomeni (2).

Il D. non poneva in dubbio che nel basso Egitto un dì si trovasse il Mediterraneo " ciò che dimostrato viene dalle conchiglie... somigliantissime a quelle che gittate dal mare veggonsi sul lido fra Alessandria e Rossetto " (*giorn.*, I, 126); ed ugualmente crede alla formazione alluvionale della pianura egizia. Egli riporta, sebbene in modo non chiarissimo, le parole di Seneca (3): " l'Egitto era già dalle acque coperto, ed un poco di sodo fondo aveva nel mezzo, al quale pian piano tenacissimamente si accostò il fango del fiume " (*giorn.*, I, 70). Forse, come il Shaw, il D. ammetteva che gli scogli e le isolette avessero cagionata la deposizione del limo intorno a loro. Parla

(1) *De l'accroissement ou élévation du sol de l'Égypte* (mémoires de l'académie des Inscriptions).

(2) Lettera al Vallisnieri 9 aprile 1756, in *Lettere inedite ecc. di* L. Muratori, V. Donati, G. M. Lancisi, ecc., raccolte dal dottor Roncetti, Milano, Silvestri, 1845, p. 130.

(3) *Quaest. natur.*, VI, 26.

anche di monticelli sabbiosi del delta che dovettero sorgere quando in quei luoghi si ritrovava il Mediterraneo, opinione questa non molto diversa da una ipotesi del Dolomieu (1) che studi recenti esclusero.

III.

La città di Alessandria, fondata sull'ultima propagine del deserto libico, sorge in un terreno di calcari marini con fossili di fauna marina odierna. Lunghe e strette dorsali corrono parallelamente alla costa mediterranea. Di calcare, fortemente cementato, probabilmente pliocenico, è una dorsale che limita a nord la palude del Mariut e che termina sul mare ad Abukir, a levante di Alessandria. Su questa dorsale venne fondata la città antica e su di essa la moderna nuovamente si estese. Raggiunge in qualche punto l'altezza di circa 40 m. sul mare. A nord, lungo il mare, corre un'altra dorsale molto più bassa, di un calcare più recente, meno cementato, soggetto continuamente all'erosione marina. Ne sono avanzi gli scogli e le isolette, fra cui l'antica Faro, che stanno avanti ad Alessandria, e ne formano i porti naturali. Ambedue le dorsali sono sormontate da formazioni eoliche. Come lungo tutta la costa della Tripolitania, anche qui va continuamente in molti punti formandosi una banchina calcarea con i materiali dell'erosione marina trasportati dalle correnti di est e con le conchiglie marine.

In vari luoghi il D. osservò questo calcare sia antico, sia in via di formazione: già l'avevano ricordato il Shaw ed il Fréret senza fare però osservazioni così precise e minute: " Il terreno di Alessandria è tutto formato da una sottilissima arena portata dal mare in grandissima copia, dalla deposizione della quale va continuamente estendendosi verso il mare la spiaggia di questa città. Mi dicono che la medesima spiaggia dalla parte del Levante avrà avuto accrescimento di cento passi comuni da 25 anni non più e che per conseguenza il porto detto nuovo si andava imbonindo (?) " (*giorn.*, I, 34 sgg.).

Alessandria ai suoi tempi era ridotta ad un gruppo di case serrantisi sulla banchina artificiale con cui i Greci avevano unito

(1) *De la constitution physique de l'Égypte*, nel " journ. de physique ", 1793.

il continente all'isola di Faro ed intorno alla quale da secoli andava formandosi una banchina naturale. È però esagerata la misura dell'accrescimento indicata dal D.

Circa la natura del fondo marino ecco le sue parole: " Tutti i fondi non solo verso Alessandria ma in tutta la Barberia formati sono in parte da sabbie sciolte, in parte da sabbia ridotta in pietra sabulosa. Bene è vero che al porto nuovo d'Alessandria si ritrovano de' scogli ed inoltre in molti luoghi bagnati da questo mare ad altezze di poco superiori alla comune; e nel fondo del mare ancora trovasi qualche strato di pietra, ma questa non è che sabbia... ". Il che " si conosce dalla facilità con cui detta pietra esposta all'aria si decompone e si risolve in sabbia. Una tal sabbia portata si crede dal Nilo; il che è molto probabile, poichè il Nilo in tempo di piena trasporta al mare grandissima torbida. Ma siccome detta pietra è piena di nummuscoli ed altri corpi marini, dei quali ve ne sono d'assai bene conservati come conchiglie ed altri testacei ed altri impietriti, come una specie di madrepora non rara nelle medesime spiaggie, così è facile conoscere che il Nilo depose sempre le sue sabbie al mare e che dal mare poi sono e furono rigettate, ed in tal modo forse si formò gran terreno in Egitto. Dal mare veggonsi in alcuni luoghi rigettate e, separatamente o unite alle sabbie, ghiaie, fra le quali sono calcedoni, diaspri, lave, pomici, ecc.

" Ritrovai pure qualche pezzo di legno impietrito e qualche pezzo pure ne ebbi dal fondo del mare e dallo stesso fondo ebbi pure qualche pezzo non impietrito. I legni furono e sono tuttora trasportati dal Nilo nel mare... ".

Probabilmente il D. non aveva ancora visto a Rosetta la foce di quel ramo del Nilo, altrimenti non avrebbe dato tanta importanza ai materiali da esso fluitati. Ben osservò il Girard che i detriti accumulantisi sulla spiaggia alessandrina provengono in gran parte dall'erosione marina (*description de l'Égypte*, XX, 152 sgg.).

Lungo la stessa spiaggia il D. trovò pure pezzi di corallo gettati sul lido insieme a piante marine; il che lo persuase che in vicinanza vi fossero banchine di coralli (*giorn.*, I, 35). Ed infatti questi non mancano lungo tutta la costa africana mediterranea.

Altrove parla dei fossili e delle rocce dei dintorni della città. " Dalla colonna di Pompeo dirigendo il cammino per ponente ritrovasi una elevazione, che però non molto s' innalza sopra la pianura, in cui..... sono le catacombe. L'elevazione è d'un solo masso di pietra arenaria facilissima a tagliarsi e che facilmente si decompone in sabbia marina. La sabbia adunque di cui viene formata tal pietra è similissima a quella che si ritrova alla spiaggia, e nell'impasto della stessa pietra ritrovansi frantumi di conchiglie, come pure conchiglie intiere... Li testacei che nella medesima pietra ritrovansi convengono pure totalmente con quelli che ai lidi vicini del mare gettati si veggono " (*giorn.*, I, 49).

Il D. forse per il primo avvertì il lento abbassamento della costa di Alessandria. " Molti residui di fabbriche antiche si ritrovano, i pavimenti delle quali sono affatto coperti dal mare, il che fa conoscere che il mare è cresciuto di superficie. Il terreno poi di Alessandria in alcun luogo anche più basso, da me misurato da una gran base di colonna piantata ancora sopra un gran muro, fu ritrovato da venti (?) piedi in circa accresciuto dalle ruine anzidette " (*giorn.*, I, 19). I fenomeni di bradisismo del terreno di Alessandria furono dalla scienza moderna confermati (1).

IV.

Da Alessandria il D. si diresse per terra a Rosetta. Dopo aver attraversato un terreno che era quasi tutto sabbia sterile, trova " la campagna di Rossetto in parte piana in parte collina; la piana è terreno nerissimo, molto pingue e talmente cretoso, che per ridurlo a coltivazione conviene mescolarlo con moltissima arena. Le colline sono tutte formate da una minutissima arena, che ne' gran venti trasportata da un luogo all'altro danneggia assaissimo le piante coltivate. Vidi dei palmeti tutti subissati dall'arena medesima e alcune volte dai venti medesimi una collina di arena viene trasportata da un luogo all'altro, cioè il vento disfa una collina di sabbia e con la stessa sabbia ne va a formare un'altra " (*giorn.*, I, 119 sgg.).

(1) A. Issel, *Le oscillazioni lente del suolo o bradisismi*, Genova, 1883, p. 310 sgg.

Così il D. dà una chiara idea delle dune litoranee egizie. Vedrà in seguito quelle continentali nelle vicinanze di Sakkara e delle Piramidi (*giorn.*, II, 78).

Anche la regione del delta tra Rosetta ed il Cairo è dal D. descritta minutamente e con osservazioni nuove. " Il Nilo ha larghezza assai irregolare, poichè in alcuni luoghi comparisce della espansione del Po, in altri di molto maggiore. La sua direzione è pure irregolare assaissimo ed in tutto il suo corso serpeggia incurvandosi a zig-zag ad ogni piccolo tratto. Moltissime sono le isole racchiuse nel Nilo, molte delle quali si coltivano con grandissimo vantaggio dell'agricoltura. Le acque di questo fiume scorrono con moto assai lento e perpetuamente sono torbide, nulla di meno però sono migliori a bere di quello siano le acque di qualunque fiume d'Italia.

" Le sponde di questo fiume sono tutte a strato sopra strato e d'ordinario tutti gli strati si trovano paralleli alla superficie dell'acqua: in alcun luogo però osservai strati... non paralleli... inarcati. ricurvi o d'altra disposizione, ciò che deve sicuramente essere nato dalle diverse correnti o cadute d'acqua avute dal Nilo medesimo. Il che ci fa conoscere come gli strati, benchè nati da deposizione d'acqua, possano alcuna volta essere di disposizione assai varia „ (*giorn.*, I, 124 sgg.).

Il materiale delle alluvioni del Nilo sia nel delta come nell'alto Egitto è in gran parte finissimo, ma vi è anche sabbia più grossolana, quarzosa, talora con nummuliti. I materiali nella sedimentazione si raggruppano variamente secondo la loro pesantezza; i banchi di sabbia non si dispongono in istrati orizzontali ma in banchi inclinati contro la corrente del fiume. Il limo invece si depone in istrati quasi orizzontali, paralleli alla superficie dell'acqua. Nelle sezioni longitudinali è talora messa in evidenza la disposizione degli strati da vere striscie di minerali di ferro (1), ricordati essi pure in un altro luogo del giornale (I, 395). " Osservai molte volte qualche strato d'ocra o terra marziale. Il marte poi si ritrova, benchè in molto minor quantità, in tutto quasi il terreno d'Egitto „. Questa stratifica-

(1) Blankenhorn, *Ueber die Geologie Aegyptens*, nella " Zeitschrift der deutschen geol. Gesellschaft „, vol. LII e LIII, con alcune cartine, Berlino, 1900-1901.

zione diagonale doveva certo essere già stata molte volte osservata dal D. nei fiumi europei.

Anche Leonardo da Vinci fin dai suoi tempi aveva notato la ineguale distribuzione dei materiali fluitati (1).

" Dopo le innondazioni, continua il D., si trovano spesso isole trasportate e disfatte, come pure mutazioni nel letto medesimo „. La pianura tagliata dal Nilo è nel delta formata " per tratti vastissimi... da una marga nera di grana impalpabile e di somma fecondità.

" Ben è vero che in qualche luogo si ritrova qualche deposizione di arena o talcosa e fina o quarzosa e grossetta: giammai per altro vidi un terreno o una deposizione ghiaiosa. Veggonsi pure delle prominenze o colline assai basse, tutte arenose, quali sembrano assai antiche, perchè nate in tempo in cui in quei luoghi si ritrovava il Mediterraneo, ciò che dimostrato viene dalle conchiglie... „. Sono invece, senza dubbio, le dune fluviali caratteristiche del delta.

" La prima collina di pietra „, annota più oltre il D., " è quella che si vede al Cairo... È di un'altezza considerevole ed estendentesi per lo spazio di qualche miglio... Formata viene da una pietra calcare di mediocre consistenza, ripiena tutta di pietre nummismali, come si conosce da pezzi della medesima pietra ritrovati in Alessandria, dove se ne vedono dei massi grandissimi, dai quali si riconosce che gli antichi nel fabbricare Alessandria fecero grandissimo uso della pietra suddetta „ (*giorn.*, I, 134). Non ebbe forse modo il D. di accorgersi che i massi calcari con cui gli edifici di Alessandria erano fabbricati potevano essere — come infatti furono — tratti dalla dorsale calcarea del Mariut.

Il gebel Mokattam, alto c. 250 m., innalzantesi con rapidissimo fianco a destra del Nilo sopra il Cairo, attrasse sempre l'attenzione dei viaggiatori e specialmente quella dei naturalisti. Vi si può facilmente studiare il calcare nummulitico caratteristico dell'Egitto. Gebel Mokattam significa in arabo " montagna tagliata „, certo per i grandi scoscendimenti. Dovrebbesi

(1) M. Baratta, *Leonardo da Vinci ed i problemi della terra*, Torino, Bocca, 1903, p. 135.

quindi riconoscere con relativa facilità la direzione degli strati. Tuttavia la determinazione non è così semplice (1).

Il D. a questo proposito disse la prima parola e, non cercando di stabilire un sistema completo di stratigrafia, fu nel vero. " La collina che dal Cairo si distende verso l'Egitto superiore è tutta composta di strati paralleli e quasi orizzontali, alquanto però più elevati dalla parte del mare. Tali almeno furono da me osservati in faccia a Giza [Ghizeh] vicino al Cairo.

" Viene composta una tal collina da pietra calcarea bianchiccia non molto dura per lavorarsi, ma che nelle fabbriche sussiste moltissimo. In alcuno strato della medesima ritrovai corpi marini ". Di questi raccolse alcuni che nel suo giornale enumera. Probabilmente qualche campione esiste ancora al museo geologico di Torino in una raccolta di fossili del g. Mokattam. " Nelle sabbie di altri luoghi dell'Egitto, come pure nelle sabbie deposte dal Nilo medesimo ", continua il Donati, " ritrovai testacei..... comuni al Mediterraneo. Ma nella pietra della collina ritrovai molti corpi esotici ". Allude qui certamente ai fossili eocenici studiati dal nostro Bellardi, dallo Zittel e dall' Oppenheim (2).

" La... collina su cui furono costrutte le Piramidi, continua il D., è della stessa qualità di quella vicina al Cairo, cioè una calcarea in alcuni luoghi non molto dura e resistentissima al tempo, d'ordinario bianca, alcuna volta tendente al bigio ed ancora rossastra. Poca però se ne vede di questi due colori.... In questa pietra frequentissimi sono i massi lenticolari e nummismali. Vi sono delle terebratole, mantili, echini, spatagi, tuboli marini, cariofilli marini assai lunghi.... ed altri corpi che sembrano dell'Oceano. Li luoghi che continuano le Piramidi sono

(1) WALTER, *Die Denudation in der Wüste etc.*, " Abhandl. d. math.-phys. Kl. d. sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften ", XXVII, Leipzig, 1891; FOURTAU, *Notes sur la stratigraphie du Mokattam*, in " Bull. de la soc. géol. de France ", 1897, pp. 208-11; BLANKENHORN, op. cit., LIII, III, 332 sgg.; SCHWEINFURTH, *Ueber die geol. Schichtengliederung des Mokattam etc.*, " Zeitschrift d. deutschen geol. Gesell. ", XXXV, IV, 709 sgg.

(2) L. BELLARDI, *Catalogo dei fossili nummulitici d'Egitto del R. Museo di Torino*, in " mem. acc. d. Scienze di Torino ", s. II, t. XV, 1855; C. ZITTEL, *Beiträge zur Geol. und Paläont. d. libischen Wüste*, in " Paläontografica ", 1883; P. OPPENHEIM, *Zur Kenntnis alttertiären Faunen in Aegypten*, in " Paläontografica ", 1903.

tutti di sabbie quarzose ed in queste ritrovai qualche litosilo, moltissimi cogoli detti breccie d'Egitto, qualche sardonica, molti calcedoni e moltissime lumachelle in cogolo per lo più gialle, nelle quali osservai corpi marini bellissimi per lo più assai minuti. Fra le medesime sabbie ritrovai una breccia dura composta di granito giallastro, calcedoni, quarzo ed agata capace di ottimo pulimento. I cogoli di questi luoghi sono per lo più opachi. Se ne trovano però anche di semi-trasparenti o quasi affatto trasparenti e questi sono d'agata o di quarzo „ (*giorn.*, I, 87, sgg.).

E altrove: “ Trovai legni fossili, breccie ed altre pietre, come pure alcune erbe particolari „ (*giorn.*, I, 143). Tutto ciò era sommariamente noto: sapevasi che i venti accumulavano sabbie intorno alle piramidi. Pietro della Valle ricorda come esse ingombravano continuamente l'ingresso della maggiore Piramide (*lett. XI*) ed il Norden aveva pure osservato la grande quantità di conchiglie fossili (II, pp. 76-77). Ma il D. fu il primo che dedicò tante cure ad analizzare queste rocce, sabbie e fossili; e ne raccolse campioni, più di un centinaio, da spedirsi a Torino.

Il calcare, ben vide il D., talora è grigio o rossiccio, non bastando le pioggie a sciogliere ed a trasportare via i sali, il gesso, ecc. (1). Alla scarsità di precipitazione atmosferica è collegata in Egitto anche la presenza di laghetti e di stagni salati osservati da tutti i viaggiatori. È sale marino appartenente a formazioni anteriori al periodo diluviale (2). Chiamasi con vocabolo locale “ natron „, “ e a me sembra, scrisse il D., il nitro e l'afronitro degli antichi „ (*giorn.*, I, 183).

Infatti Plinio (*N. h.*, XXXI, 43) ne parla. Si nota specialmente carbonato e solfato di sodio. Notissimi erano e sono i laghetti della valle detta appunto di Natron nel basso Egitto dove si mette in commercio molto di questo sale; ad essi accenna anche il D. (*giorn.*, I, 103-4), come ricorda le abbondantissime efflorescenze saline dopo il ritiro dell' innondazione, i pozzi che in qualunque luogo d'Egitto dànno acque salmastre (*giorn.*, I, 394), i laghetti salati frequenti presso le antiche rovine (*giorn.*, I, 394).

(1) Blankenhorn, op. cit., LIII, III, 339 sgg.

(2) Walther, *Die Denudation etc.*, 529, 195.

V.

Per l'Egitto superiore le notizie geologiche consegnate nel giornale del D. poco aggiungono alle cognizioni che già si avevano. Visitando le " tombe dei re „ presso l'antica Tebe la prima cosa che il D. osserva è che quelle montagne sono di pietra calcare (I, 332). A proposito del gebel Silsile dice che è " di pietra arenaria, simile alla colombina di Firenze della quale è fabbricato il palazzo granducale: questa è più grossolana... „ (I, 314). Dello stesso gebel Silsile " la crosta superiore altro non sembra che un ferro abbruciato, la cui superficie è tubercolosa „ (I, 324-5). Il che fu poi confermato dal De Rozière (*descr. de l'Égypte*, XXI, 18).

Ad Assuan il D. seppe per informazioni assunte che l'arenaria domina anche a sud della prima cataratta (*giorn.*, I, 343). E quivi fu a vedere " le cave di granito rosso, cioè di quello da cui furono tagliate le guglie tutte sia di Roma, che d'Alessandria e del Said... Detto granito... da Plinio vien nominato sienite e riferisce che un tal nome gli era dato perchè si cavava appunto presso Siene. Osservai che tra la montagna della cava ed il Nilo vi era una specie di profondo catino formato da colline. Esaminato... tal luogo attentamente, vidi in un sito un certo abbassamento di terreno per cui detto catino poteva facilmente comunicare con il Nilo e per cui forse l'architetto... che ritrovò per il primo l'arte di trasportare le guglie dalla lapicidina al Nilo, fece... detto scavamento e condusse le acque del Nilo nel catino medesimo „ (*giorn.*, I, 315-6). È un ricordo di Plinio (*N. h.*, XXXVI, 14).

Come già il Pochoke, il D. potè anche esaminare le frequenti traccie dell'abilità degli antichi scalpellini egizi.

Nel ritorno da Assuan ebbe notizie delle miniere di smeraldi; troppo ne avevano parlato Strabone, Tolomeo ed i geografi arabi perchè il D. potesse tralasciare di occuparsene, quantunque non abbia potuto attraversare il deserto arabico. Per giungervi " la strada si prende da Ghene (Kene) o da Gus (Kuft); la più corta è però da Gus. La strada si fa sempre per monti col viaggio di tre o quattro giorni „. " Il monte ove sono le miniere è vicino al mar Rosso. La cava è aperta nel dorso verticale della montagna con aperture... le quali internamente comunicano

l'una con l'altra; la cavità è vastissima ed è sostenuta da pilastri scavati nel masso medesimo e vi sono cave delle quali alcune discendono, altre ascendono assai regolari. L'altezza è ineguale. La pietra interna è un quarzo bianco, alcune volte tinto di rosso, nel quale vi sta qualche vena di talco in cui si racchiudono gli smeraldi „ (*giorn.*, I, 381 sgg.). Le informazioni del D. sono molto buone. Il Lucas nel 1714 non sapeva dove fossero queste miniere (*voyage*, III, 158-9), ed i dotti della spedizione bonapartiana non poterono ricercarle (*descr. de l'Égypte*, XXI, 116 sgg. e 144 sgg.). Solo nel 1816 il Caillaud le rinvenne nel gruppo della Zabara dopo sei giorni di comoda marcia da Edfu sul Nilo, e rintracciò gli smeraldi nei filoni di mica, talco e di scisti che penetrano nelle masse di granito, di cui quelle montagne sono costituite. Ai giorni nostri sono ancora visibili i profondi cunicoli di cui parla Strabone, scavati a varie riprese nella montagna e diramantisi in ogni senso ora orizzontalmente ora quasi verticalmente, in alcuni luoghi strettissimi, in altri allargantisi quasi in grandi sale (1).

Di un'altra pietra dura ebbe ad interessarsi il D., la basanite (*giorn.*, I, 346), di cui parlarono i geografi classici, una specie di basalto.

VI.

Il D. da Nakade presso Kuft voleva recarsi a Kosseir sul mar Rosso, ma ne fu dissuaso; gli arabi guerreggianti senza tregua rendevano il transito troppo pericoloso. Solo la presenza in Egitto di un forte esercito poteva permettere l'esplorazione dell'altipiano orientale: era perciò riservato ai membri della spedizione francese di intraprenderla per i primi; ed il D. per le notizie geografiche che desiderava raccogliere a coordinamento di concetti generali dovette fare esclusivo assegnamento sull'intelligenza e veridicità dei suoi informatori indigeni. “ A fianco del mar Rosso che bagna l'Egitto v'è una catena di montagne assai alte, che forse si estendono a tutta la lunghezza del medesimo mare. Queste sono formate a strati orizzontali e

---

(1) E. Schiaparelli, *La catena orientale dell'Egitto*, Roma, 1890, 71 sgg.

sembrano di calcarea. La medesima corona di montagne..... si estende a fianco del Nilo forse per tutta la lunghezza sua e s'innalza..... sopra i deserti del Cairo....., dove pure si osserva tutta a strati orizzontali.... Al di sotto delle dette montagne tutto è colline e pianura, questa di sabbia e quelle di pietra calcarea bianca, di selenite e gesso, e ve ne sono che hanno qualche piccolo filone di miniere di ferro „ (*giorn.*, II, 60-1).

Il D. parla di calcare. Infatti egli non aveva potuto in nessun modo vedere le roccie cristalline costituenti l'ossatura della catena costiera del mar Rosso. La catena cristallina, prodotta da un sollevamento o da più sollevamenti successivi, mostra i suoi strati contorti e ripiegati. Ed anche non è esatto che gli strati calcarei dell'altipiano siano tutti orizzontali, che vi manchino affatto dislocazioni tectoniche, come affermava ancora ai giorni nostri lo Zittel (1). Il Walter (2) ed il Blankenhorn vi notarono strati variamente inclinati, anche nella parte più settentrionale.

Chi confronta gli studi geologici odierni con quelli della seconda metà del '700 e del principio dell'800 vede quali progressi furono fatti nel campo della tectonica. In Egitto, ad es., dove un secolo fa si considerava una debole inclinazione di strati adesso si trova un vasto sistema tectonico (3).

Allora lo studio accurato delle singole roccie e delle loro reciproche relazioni di giacitura cominciava appena; ed il D., come si è visto, era accuratissimo.

A lode del D. dobbiamo inoltre osservare l'attenzione che egli pone allo studio dei fossili, fondamento della moderna geologia sia storica che tectonica. Tuttavia per i primi tentativi di teorie generali tectoniche dobbiamo venire all'opera già ricordata del Dolomieu, che tentò spiegare il parallelismo della valle del Nilo e della fossa del mar Rosso, ed ai naturalisti che seguirono Napoleone (*descr. de l'Égypte*, XX-XXI, passim).

---

(1) Op. cit., p. 90.

(2) *Die Denudation*, 399.

(3) Blankenhorn, *Neues zur Geologie Palästinas und d. ägyptischen Niltales*, in " Zeitschr. d. d. geol. Gesell. „, LXII, 1910.

VII.

Interessante sotto l'aspetto fisico-geografico è la narrazione che il Donati ci fa del suo viaggio a Sues ed alla penisola del Sinai, compiuto nel gennaio e nel febbraio del 1761.

Passò gli ultimi terrazzi dell'altipiano libico, a nord del Gebel Mokattam e del Gebel Ataka. Era questa la solita via carovaniera dal Cairo a Sues (*giorn.*, II, 5 sgg.).

Poco dopo oltrepassata questa città trovò i così detti pozzi di Mosè. Non vi è viaggiatore che nella descrizione di quella regione estremamente arida abbia dimenticato Ain Musa. Il Bonaparte stesso, i suoi ufficiali e gli studiosi che lo seguivano, osservarono quivi rovine di antiche fabbriche, di acquedotti, di cisterne e anche di una piccola cinta fortificata, avanzo a loro parere di uno stabilimento fortificato costruito dai Veneziani allorchè commerciavano colle Indie, per la via del mar Rosso (*descr. de l'Égypte*, XI, 183).

Ma il D. a questo punto parla di una città distrutta, poi sommersa dal mare, e ricordata nella sacra scrittura, forse qualche città nominata nell'*Esodo*. Ma gli appunti rimastici non sono sufficienti a farci comprendere la sua idea. Ad ogni modo egli non va d'accordo con Pietro della Valle (*lett. XI*, p. 411) là dove tratta del luogo in cui gli Ebrei passarono il mar Rosso. Era questo un problema che tutti i viaggiatori inutilmente si proponevano (1).

Le rovine di cui sopra è cenno, come tutto il piano calcare di Sues, erano coperte di sabbia e di conchiglie. Questa è opera delle maree, là fortissime, e dei venti.

Fra le conchiglie il D. raccolse anche frammenti di corallo, ma benchè si trattasse di un prodotto marino, che gli era stato occasione di acquistare fama, pure egli viaggiava troppo in fretta per indugiarsi a studiare i banchi di corallo, che hanno tanta importanza nella formazione costiera della penisola del Sinai. E forse gli dolse di non poter dedicarsi a qualche nuova

(1) A. Magnaghi, *Il golfo di Suez e il mar Rosso in una relazione inedita di Filippo Pigafetta (1576-77)*, nel " bollettino società geog. ital. ", 1910, n. 2 e 3.

ricerca. A quei banchi di corallo tutti i viaggiatori si erano interessati fin da quando nel 1630 il Monconnys (1) spinse il suo amore per lo studio della natura fino a pescare egli stesso i coralli presso Tor.

Nelle pagine seguenti del *giornale* mancano notizie fisico-geografiche. Raggiungiamo quindi il D. nel cuore delle montagne cristalline della penisola del Sinai, al piede della vetta più alta della regione (*giorn.*, II, 44 sgg.).

" La montagna detta di Santa Caterina si innalza sopra al piano del monastero del monte Sinai a perpendicolo da piedi veneti quattromila duecento ".

Questa cifra, dice il D., fu ottenuta mediante ripetute osservazioni barometriche.

" Viene questa [montagna] tutta formata di granito a strati perpendicolari, ed il granito è per la maggior parte rosso o specie di sienite. In alcuni luoghi però se ne ritrova di nero punteggiato di bianco; e trovai pure qualche pezzo di porfido, ma non già in carriera. Vidi pure qualche picciol masso assai simile all'olivella, e questo al piede della stessa montagna. Tutte dunque le pietre componenti la montagna stessa o che attorno della medesima si ritrovano sono silicee, e nelle medesime, non rari si veggono gli strati di quarzo, nei quali si ritrovano dei cristalli bellissimi, ed io ne presi due pezzi... In non molta distanza del buco detto della Pernice ritrovai un granito nerastro puntato di bianco con quarzo di colore di perfetto smeraldo; e se in questo vi fosse stata cristallizzazione forse sarebbe o smeraldo o grisolita. Verso la sommità della montagna medesima ritrovai molte scaglie o frantumi di granito tinto esternamente d'un color verde oscuro, ed in questi casi vi si trovano dendriti assai belle penetranti, ma superficiali e nate fra le rime del sasso, quali sono quelle di Demonte e quali si ritrovano in tutte le pietre silicee.

" Tutta la superficie della sommità della montagna stessa è come inverniciata di ferro...

" Ritrovasi qualche masso con minerale aderente d'un ferro ematitico, ed un Arabo mi fece vedere un bel pezzo di ematite ritrovato nella montagna stessa ".

(1) MONCONNYS, *Journal des voyages etc.*, Lyon, 1665-66, vol. IV (I, 245).

Anche il Figari (1) al piede del monte Sinai, come in altri luoghi della penisola, notò la presenza di minerali di ferro.

Quanto alla composizione delle montagne centrali della penisola del Sinai il D. vide giusto: il granito vi predomina con tutta la sua serie di rocce (2); vi sono porfidi, dioriti, gneiss. Talora, come succede nella catena costiera egizia del mar Rosso, strati di arenaria sormontano trasversalmente il granito e le altre roccie ignee.

La penisola del Sinai fu, fin dal periodo carbonico, soggetta a molte dislocazioni tectoniche. Ben notò il D. nel suo ritorno (*giorn.*, II, 58 sgg.): " Dalle montagne di Santa Caterina verso il Suez per sei giorni ritrovai montagne tutte di granito a strati verticali, quali strati frequentemente tagliati vengono da altri strati di granito verde, oscuro o rosso, e la sezione è alcune volte ad angolo retto, ma per lo più irregolare; e tali strati secanti si distendono alcune volte a grandissime distanze ".

I banchi delle montagne granitiche del Sinai infatti sono diretti da nord-ovest a sud-est, e l'angolo di inclinazione spesso è fortissimo.

Filoni di porfido sovente li attraversano quasi ad angolo retto (3). Nel gebel Ginne, presso il wadi Mokatteb, ad es., il granito è attraversato da un gran numero di roccie eruttive inclinate di circa 80° con direzione da nord-est a sud-ovest.

" Dovunque si trova acqua, continua il D., nei monti di granito ella è ottima a bere. Nella sera dello stesso giorno (sesto) ci trattenemmo in una valle, posta fra montagne di granito, tutta d'arena di mare, in cui ritrovai qualche echino e molti calcedoni per lo più neri ".

Probabilmente la sera del sesto giorno di viaggio egli pose il campo o nel wadi Mokatteb, di cui i fianchi sono da un lato di granito e dall'altro di arenaria della Nubia e il fondo si

(1) Figari, *Carta geologica della penisola del Sinai*, pubblicata in " Studi scientifici sull'Egitto ", Lucca, 1864-5.

(2) Walther, *Die Korallenriffe der Sinaihalbinsel*, in " Abh. d. math.-phys. Kl. d. sächsischen Gesell. d. W. ", XIV, Leipzig, 1888. — Ha una carta geologica con scala di 1:655.000; R. Weill, *La Presqu'île du Sinai*, Paris, 1908. " bibl. de l'école des Hautes études ", vol. 177°.

(3) Walther, *Die Korallenriffe etc.*, p. 448.

compone di sabbia e detriti rotolati, oppure nella pianura sabbiosa che si stende sotto i fianchi granitici del gebel Marcha fino al mare coperta di detriti delle vicine montagne granitiche, calcari e marnose.

La via carovaniera abbandona poi le montagne granitiche e dirigendosi verso Sues incontra colline e montagne superanti in alcuni punti i mille metri, e infine una zona pianeggiante alluvionale.

Domina qui l'arenaria, il calcare; numerose le nummuliti, non manca il gesso.

Gli strati non sono tutti, come vuole il D., orizzontali, talora sono inclinati quantunque meno di quelli delle montagne cristalline.

Nella parte pianeggiante, fra i detriti portati dai numerosi wadi, notansi anche quelli delle vicine montagne granitiche. Specialmente lungo le rive, sono frequenti sabbie marine con la fauna marina, cosa questa già osservata dal D., che egli qui ripete. " Nel settimo giorno ritrovai qualche montagna d'arenaria pietra, e la maggior parte di pietra calcarea o rossastra o bianca, tutta a strati orizzontali. Ed in alcuni luoghi vidi la selenite e il gesso. Vidi in alcune montagne arenarie una superficie tubercolosa nera formata di ferro, e nella pietra pure calcarea v'è qualche filone di minerale di ferro. In una valle posta fra queste montagne ritrovai tutta la sabbia ricoperta di sale ed un'acqua salmastra della quale dovemmo bere fino all'arrivo nostro in Cairo ".

In tutta quella regione, come ad Ain Musa, non trovansi che fonti d'acqua salmastra.

" Nell'ottavo giorno ritrovammo colline di gesso e selenite, pianure grandi. Nel 9° giorno vidimo colline di gesso non consistente e che sembra una terra dura con piccole cristallizzazioni in forma di gesso opaco. Più verso il mar Rosso ritrovai tutto il terreno sparso di conchiglie e singolarmente ostriche e frondipore consistenti che formano colline, al piede delle quali trovai qualche pianura sparsa di piccoli buccini.

" Il giorno seguente si fece il giro del Mar Rosso dalla spiaggia dirimpetto al Suez verso il Castello. Osservai ivi una pianura posta fra colline..... Il fondo di tal pianura è del descritto sgretoloso gesso ".

In continuazione del golfo di Sues si protende infatti l'istmo omonimo costituito principalmente di arena e di marne gessose, il quale, secondo l'Issel, è tutt'ora in via di emersione (1), e sul quale si accumulano le sabbie del deserto. Non possiamo dire se il D., come poco dopo il Niebuhr e più tardi i dotti della spedizione francese, abbia intuito che il mare in epoche passate poteva spingersi più al nord.

Il D. parla poi del " Traianus amnis „ celebre negli scrittori latini, il quale univa il mar Rosso al Mediterraneo e più precisamente ad un ramo del Nilo. Quasi tutti i viaggiatori ne ricercarono le traccie, compreso il Pigafetta (2) nel suo viaggio al Sinai (1576-77). Il Bonaparte avrebbe voluto riaprirlo e fece eseguire all'uopo molti studi. I suoi ingegneri credevano di aver trovato il luogo dove l'amnis metteva nel mar Rosso (*descr. de l'Égypte*, XI); il D. invece non ne scoprì indizio alcuno.

Sulle rive del golfo il D. bene osservò anche i banchi di formazione si può dire quotidiana in cui sono agglomerate conchiglie in gran copia e frantumi di madrepora e asteri con sabbia calcare e silicea.

" Il giorno 11° ritrovai... le montagne e colline, e cominciai a rincontrare qualche breccia detta d'Egitto e qualche pezzo di litosilo. Vidi pure una collina tutta di pietra calcarea giallastra o rossa ripiena di piccole dendriti penetranti.

" Nel 12° ascendemmo un colle, su cui sta una pianura tutta coperta di litosili, de' quali ve ne sono pezzi lunghi da 20 a 30 piedi, ma però tutti trasversalmente in pezzi da 2 a 4 piedi. Sembravami di vedere una selva di tronchi d'albero tagliati, ma però non comparisce radice o tronco d'albero piantato verticalmente, e crederei che tali legnami sieno dalle correnti stati trasportati dalla vicina montagna. Nelle montagne del Gossaer [Kosseir] vi sono litosili in gran quantità come pure nelle montagne del Seid [Sahid].

" Nel 13° ritrovai molte colline poco innalzate sopra la pianura tutte di calcarei ripiene di conchiglie ed altri corpi marini perfettamente impietriti.

" Nel 14° vidi colline basse in buona parte formate da una

---

(1) Issel, *Le oscillazioni, etc.*, p. 314 segg.

(2) Magnaghi, op. cit., p. 296 segg.

pietra silicea formata da breccie racchiuse nel granito. Una mostra di questa è quella ritrovata verso le piramidi. Sopra tali colline si ritrovano pure molti pezzi di litosilo non però sì grandi come quelli della collina indicata „.

Negli ultimi ed isolati terrazzi terziari dell'altipiano arabico numerosi sono i legni pietrificati, o, come li chiama grecamente il D., litosili. Non fu il primo a vederli. Giovanni Thévenot, il de Maillet, il padre Sicard ne avevano fatta conoscere l'esistenza in parecchi luoghi dell'Egitto; ma per loro non erano che avanzi pietrificati di navi.

Dopo il D. i legni fossili egiziani furono studiati dal Volney in occasione del suo viaggio dal Cairo a Suez, e pochi anni dopo se ne occupò il de Rozière nelle sue numerose traversate di quel tratto di deserto. Ricercò egli a quale specie di alberi appartenessero, in quale terreno si trovavano e cercò quindi di determinarne la provenienza (*descr. de l'Égypte*, V, 21, 189 sgg.).

Egli concluse che " ce sont des arbres entiers et préexistants à l'arrivée des cailloux, qui se sont trouvés enveloppés dans ce terrain lors de la formation et sur la place même où ils croissaient „.

Come si vede, la soluzione data al problema dal dotto francese è diversa da quella pensata dal D. il quale anche presso la spiaggia di Alessandria aveva visto pezzi di legname in via di pietrificazione (*giorn.*, I, 35).

Il problema continuò ad essere studiato dai naturalisti europei: particolarmente essi rivolsero la loro attenzione alla cosidetta grande foresta pietrificata che trovasi sul fianco occidentale del gebel Mokattam e che il D. probabilmente non vide.

Anche là fra ciottoli arrotondati e sabbia, sul terreno collinoso, trovasi un gran numero di pezzi, grandi e piccoli, di *nicolia aegyptiaca*, i quali spesso sono l'uno accanto all'altro, così, che si può determinare talora la lunghezza dei tronchi a 25-27 metri.

Secondo l'opinione oggi prevalente, e sostenuta dal Walther (1), questi legni fossili appartengono alla flora posteocenica, probabilmente miocenica. Riguardo alla loro origine l'opinione più accreditata — proposta dallo Schweinfurth — è che quei tronchi

(1) Walther, *Die Denudation*, ecc., p. 469 segg.

abbiano avuto le loro fibre gradualmente cambiate in silice sotto l'azione di acque termali: queste sgorgano anche oggi in diverse parti dell'Egitto, specialmente nelle oasi; ma anche tra l'arenaria della Nubia — nel Seid, come dice il D. — trovansi legni fossili, che il Walther crede di essere avanzi di flora precretacea, e pensa che siano tronchi d'alberi rimasti presi nel muoversi delle dune fra le masse di sabbia che loro avrebbero tolto rami e foglie.

VIII.

Il 25 novembre 1759 il D. (*giorn.*, I, 67 sgg.) in Alessandria alle ore 7 $^{1}/_{2}$ di sera (temperatura + 15°) avverte due scosse di terremoto a distanza di due minuti, con moto orizzontale da ovest ad est. Ciascuna scossa aveva avuto " sei o otto oscillazioni „ che decrescendo l'una dopo l'altra terminavano nella quiete. " In quel giorno il mare fino verso la sera era stato in totale bonaccia e nella sera cominciò a spirar greco, ma con poca forza. Il cielo nella mattina fino alle ore 8 fu caliginoso; dopo si alzarono le nubi, ma tutto il giorno fu nuvoloso... „. Tre anni prima, il 13 febbraio secondo notizie raccolte dal D., era avvenuto in Egitto un altro terremoto di cui gli furono riferiti molti particolari. Proveniva forse dalla Palestina, e si manifestò con tre scosse le quali, benchè gagliarde, non fecero cadere al Cairo che pochissime fabbriche.

Con la stessa cura il D. aveva già descritto al Trembley, naturalista inglese, due terremoti avvenuti in Torino il 9 dicembre 1755 e l'8 marzo 1756. Anche allora aveva ampiamente enumerati i fenomeni meteorologici che li avevano accompagnati (1), ma si era astenuto dal parlar di cause. Il D. era per natura circospetto e prudente. Non credeva tuttavia che dei terremoti fossero causa forze elettriche, una delle teorie allora proposte. Quale forza elettrica, dice egli, è capace di scuotere una regione del globo?

Si limita quindi ad affermare, ricordando alcune affermazioni degli scrittori classici (Seneca, *Quaest. nat.*, VI), che " non

(1) Estract of a Letter from. D^r. V. D. to M^r. A. T. — " Philosophical Transactions „, 1756, XLIX, II, 612-6, London, 1757.

può l'Egitto tremare sì agevolmente, e s'egli poco o di rado trema è perchè il terremoto vi viene impedito dall'essere la terra dell'Egitto tenace e fatta di fango... tanto secco che non si può rompere se non con grandissima violenza. Un'altra ragione sarebbe che nel sottosuolo dell'Egitto inferiore non vi sono caverne, perchè non vi sono monti „. Così il D. non aveva detto più del de Maillet, che descrisse un terremoto da lui sentito al Cairo il 2 ottobre 1698 (*descr.*, 18-19).

Nella *descr. de l'Égypte* sono ricordate sommariamente parecchie centinaia di terremoti che hanno scosso l'Egitto in venticinque secoli (V, 131).

In realtà furono sempre di poca gravità. In quello descritto dal D. pare che le case di Alessandria non abbiano subito danni. Noi, moderni, ritornando quasi a Seneca, riconosciamo che la valle del Nilo per la sua natura geologica non può avere grande sismicità, non essendovi mai state grandi convulsioni tectoniche (1).

Nel campo delle osservazioni meteorologiche il D. precede le pazienti giornaliere cure dei moderni scienziati. A quei tempi si cominciava appena a segnalare nei vari paesi la temperatura media, i venti predominanti, la varia pluviosità. Non è molto il materiale a questo riguardo lasciatoci qua e là dal D.: molto ne aveva raccolto, ma quasi tutto andò perduto. Procedeva egli col barometro e col termometro alla mano e prendeva nota delle indicazioni. Cito, come esempio, quanto egli osserva intorno ai venti etesii. Prima di arrivare ad Alessandria egli si accorge che il cielo è appannato come da una nebbia più fitta nelle ore del mattino e della sera. Giunto ad Alessandria trova che l'aria in queste ore è d'una umidità grandissima. Benchè fossero i mesi di luglio e di agosto grossissime nubi erano sparse per l'aria: qualche giorno non apparve il sole che dopo mezzodì (*giorn.*, I, 33). Accenna altrove ai venti desertici apportanti calore e sabbia, al fulmine, alla grandine e pioggia, rarissime (I, 217, 267, ecc.).

---

(1) Montessus de Ballore, *Les tremblements de la terre, géographie sismologique*, Paris, 1906, pp. 160-1; Id., *La science scismologique, les tremblements de la terre*, Paris, 1907.

IX.

Come si è potuto rilevare dalla già citata “ memoria istruttiva „ consegnata al Donati dalla Segreteria di Stato prima della sua partenza, il compito a lui assegnato non era limitato allo studio fisico e geografico delle regioni che doveva percorrere; anzi questa parte non era che implicitamente racchiusa in tutto il resto della sua missione.

A lumeggiare l'opera del Donati come viaggiatore scienziato resterebbe da esaminare come egli abbia corrisposto al compito affidatogli di riportare dai paesi di Levante informazioni utili all'agricoltura e commercio degli Stati Sardi e materiali di cui arricchire i regi musei.

A questo riguardo basterà qui accennare che le notizie commerciali ed economiche da lui lasciate, per quanto frammentarie ed incomplete, potrebbero essere anche oggi documento delle condizioni dell'Egitto alla metà del secolo XVIII, e che delle antichità egiziane egli si occupò, se non con dottrina molto profonda, certo con genialità. Nelle carte da lui lasciate si conservano disegni di piramidi, di edifici e di ipogei che egli tracciò di sua mano da Gizeh fino ad Assuan; gli oggetti e statue da lui raccolte costituirono il primo nucleo del Museo egizio di Torino (1), e le narrazioni che egli ci fa di qualche scavo da lui eseguito sono una viva rappresentazione del suo ardore di archeologo.

Quando poi nelle sue lettere e nel suo giornale ci descrive monumenti e rovine, per esempio i sepolcreti di Tebe, improvvisa pagine disadorne sì, ma di schietta e verace poesia.

Vitaliano Donati fu una di quelle intelligenze versatili, di quelle attività infaticabili e tenaci, che appaiono ugualmente atte a perseguire le idealità dello spirito come gli scopi più positivi della vita pratica.

(1) P. Barocelli, *Il viaggio del Dr. V. D. in Oriente in relazione colle prime origini del Museo egiziano in Torino*, in “ atti della r. accad. delle Scienze di Torino „, XLVII.

Relazione sulla Memoria del Dott. ANGELO CASU dal titolo: *Lo Stagno di S^ta Gilla* (Cagliari) *e la sua vegetazione*. (Ricerche bio-chimiche sull'adattamento fisiologico ed ecologico delle piante palustro-stagnali all'azione dell'acqua salata).

È questa la terza Memoria sull'argomento che l'A. presenta alla nostra Accademia, ed è il complemento delle due precedenti.

I risultati di queste ricerche sono esposti in forma sobria e precisa; essi rispondono ad alcuni problemi che spuntarono quali corollarii di quelli già studiati dall'A.

Il lavoro consta di quattro capitoli, nei quali l'A. espone lo studio sull'adattamento delle piante fluviali all'acqua salata e viceversa; ne esamina la composizione chimica sopratutto per riguardo al *sodio* ed al *potassio*; nota la resistenza ultima possibile alle *soluzioni anisotoniche* ed *ipertoniche* e giunge a conclusioni interessanti.

I metodi di ricerca si dimostrano rigorosi; ordinate le osservazioni di diversa natura, anatomiche, fisiologiche e morfologiche; le quali permettono all'A. di formulare alcune proposizioni, che egli espone in forma di leggi.

Tali sono la *Legge delle quantità armoniche* e quella della *Capacità sodica*; quella dei rapporti *armonici ed antagonistici* (secondo i casi) fra *sodio* e *potassio* nelle piante marine e di acqua dolce ecc. ecc.

Tutto sommato, questo lavoro è, in alcuni punti, un bel capitolo di fisiologia vegetale, corredato da esperienze numerose ed esaurienti, le quali permettono di rispondere ad altre questioni di fisiologia di ordine più generale rimaste finora insolute.

Per questi motivi la Commissione sottoscritta ritiene degno questo lavoro di essere accolto nei volumi delle Memorie Accademiche.

Torino, 9 Febbraio 1913.

C. F. PARONA
O. MATTIROLO, *relatore*.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 16 Febbraio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: CARLE, RENIER, PIZZI, STAMPINI, BRONDI, SFORZA, EINAUDI e DE SANCTIS, Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 2 febbraio 1913.

Si delibera d'invitare il Socio corrispondente WALTER DE GRAY BIRCH a rappresentare la nostra Accademia al Congresso internazionale di studi storici che si terrà in Londra nel prossimo aprile.

È presentato un invito del Comitato per le onoranze al nostro compianto Socio non residente Giovanni SCHIAPARELLI per contribuire alla erezione di un monumento e di una lapide con medaglione nel palazzo Brera in Milano. La scheda di sottoscrizione rimane a disposizione dei Soci.

Si comunica pure un invito a partecipare alla sottoscrizione a favore della famiglia del prof. Giuseppe CALLIGARIS. Anche quest'invito è tenuto a disposizione dei Soci.

Il Socio DE SANCTIS presenta per la inserzione negli *Atti* una nota del Sig^{r}. Aldo FERRABINO, intitolata: *Curione in Africa: 49 a. C.*

LETTURE

Curione in Africa: 49 a. C.

Nota di ALDO FERRABINO.

I.

La campagna militare, che da C. Scribonio Curione fu condotta in Africa l'anno 49 a. C. a pro di Cesare contro il pompejano P. Azio Varo assistito dal re numida Giuba, ci è narrata da CESARE *de bello civ.* II 23-44, da APPIANO *'P. 'Εμφυλίων* II 44-46, da DIONE CASSIO infine *hist. Rom.* XLI 41-42. Per procedere a una seria critica di queste fonti, e ricostruire la verità che dietro esse si travede, giova aver dinanzi le carte 11 e 16 che sono unite al vol. III parte II del KROMAYER-VEITH *Antike Schlachtfelder* (1912).

Fra i testi rassegnati or ora l' ultimo deve però esser lasciato da canto, come quello che non è da gli altri due indipendente. Questione in vece è da farsi su l'importanza, e reciproca e relativa ai fatti, di Cesare e di Appiano. Il primo dové acquistar notizia degli avvenimenti da quegli stessi suoi uffiziali, che, dopo avervi partecipato, erano poi usciti salvi dalla disfatta: Marcio Rufo e Cn. Domizio. Ma aveva, per altro rispetto, buone ragioni a scemar la responsabilità di Curione suo amico e, se non trasfigurare, almeno diversamente prospettare le cose. Il secondo ha attinto a fonti intorno a cui la critica è ancor troppo mal sicura, e che sono del resto troppo intricate fra loro, perché sia possibile formarsene un giudizio a priori. È quindi necessario sottoporre il suo racconto, come il cesariano, a un esame attento; e raccoglier solo di poi le conclusioni. Ora, poiché gli avvenimenti di Curione in Africa si distinguono assai bene, quantunque compiutisi in brevissimo volger di giorni, in due periodi; l'un dei quali comprende tutto che seguí appresso lo

sbarco di lui, fin che ebbe a fronte il solo Azio Varo; e il secondo racchiude tutto che avvenne dopo l'annunzio dell'approssimarsi di Giuba, fino al disastro decisivo: questi due periodi bisogna studiare a parte, confrontando per ciascuno i due autori.

E la ricerca è specialmente utile. Critici diversi si son per vero occupati fin qui di condurla: e pajono da ricordar in particolare, — oltre il TISSOT *Géographie comparée de l'ancienne Afrique* per quel che si attiene alle notizie geografiche, — lo STOFFEL *Histoire de Jules César, la guerre civile* (1887), il DRUMANN-GRÖBE *Geschichte Roms* u. s. w. III (1906) 403-5, il VEITH nella già cit. opera del Kromayer a pagg. 730 sgg. Tutti però son mossi dalla opinione che Cesare fosse in ogni punto pienamente attendibile e che scarsissima importanza competesse ad Appiano. Ora, dopo che il BELOCH " Rhein. Mus. „ LIV (1899) 414 sgg. ha mostrato in qual modo Cesare esagerasse, per i suoi fini, le cifre delle popolazioni galliche; dopo che il DELBRÜCK *Geschichte der Kriegskunst* I² (1908) 477 ha ammonito a servirsi con cautela dei *Commentarii*; è lecito, — se non necessario, — riprendere l'esame con più grande indipendenza rispetto all'uno dei testi e con minor prevenzione di fronte a l'altro.

II.

Curione sbarca ad *Anquillaria* (cap. 23, 1-2) che si suol porre a breve distanza dal Capo Bon (*Hermaeum Prom.*). Di lí muove verso Utica fino al fiume Bagradas. La marcia era di 110 km. e non sappiamo in quanto tempo fosse compiuta: già che il *biduique iter* del testo (cap. 24) è senza dubbio corrotto. Da questo punto Curione muove con la sola cavalleria e ascende il lene declivio dei *Castra Cornelia*, " quod is locus peridoneus " castris habebatur „: Castra, onde studia, con la positura di Utica, il campo trincerato di Varo, e vede tra esso promontorio e la città una *sebcha* cosí fatta, da costringer truppe di fanteria a raggiunger gli avversarii solo per mezzo d'un giro di 9 km. circa. Della ricognizione approfitta per lanciare i suoi cavalieri a scompigliar quegli abitanti della regione che, spaventati, andavano con le robe loro a rifugiarsi presso l'esercito pompejano. e per infligger gravi perdite a un corpo di 600 cavalieri numidi

e 300 fanti inviato da Varo in soccorso degl'indigeni. Dai Castra pure il comandante romano ordina alle navi onerarie del porto di Utica che, a rischio d'esser da lui trattate come nemiche, passino dalla sua parte: 200 l'obbediscono (cap. 25).

Da questo racconto di Cesare appar chiaro che Curione era salito ai Castra per far una ricognizione in forze e ad un tempo per studiare se il luogo fosse " castris idoneus „ siccome " habebatur „. Vide che dominava le posizioni avversarie; vide che la fanteria poteva col nemico, di là su, prender contatto con soli 9 km. di marcia, mentre la cavalleria aveva liberi movimenti anche traverso la *sebcha* guadabile a cavalli; vide che gli sarebbe riuscito di tenersi in contatto col mare e le navi onerarie. Tutto quindi lascerebbe supporre ch'egli scegliesse quel posto pel suo campo. Al contrario " his rebus gestis " Curio se in castra ad Bagradam recipit..... posteroque die " Uticam exercitum ducit „ (cap. 26). Perché? Il motivo è, in Cesare, implicito: Curione volle ai Pompejani esser, piú che vicino, vicinissimo, per serrarli da presso e colpirli a fondo nella prima favorevole circostanza. Si pose loro di fronte, e mirava al cuore.

Vediamo Appiano (cap. 44): *ἔτι δὲ τοῦ Κουρίωνος ἐπιπλέοντος ἐκ Σικελίας, οἱ ἐν τῇ Λιβύῃ, νομίσαντες αὐτὸν διὰ δοξοκοπίαν ἀμφὶ τὸν χάρακα τὸν Σκιπίωνος κατὰ δόξαν τῆς ἐκείνου μεγαλουργίας στρατοπεδεύσειν, τὸ ὕδωρ ἐφάρμαξαν. καὶ ἐλπίδος οὐ διήμαρτον· ὅτε γὰρ Κουρίων ἐστάθμευσεν ἐνταῦθα, καὶ ὁ στρατὸς εὐθὺς ἐνόσει... ὧν δὴ χάριν ὁ Κουρίων παρ' αὐτὴν Ἰτύκην μετεστρατοπέδευε κτλ.* Questo racconto è respinto dal Veith *op. cit.* pag. 733 n. 3 come errato: non si avvelena, egli dice, il Bagradas stabilmente. E sta bene. Ma bisogna guardar meglio il testo di Appiano e sceverarne due elementi. L'uno: senza dubbio Curione non pose il campo su i Castra Cornelia, e Appiano confonde qui la ricognizione della cavalleria con l'impianto vero e proprio d'un accampamento o, ancor meglio, confonde, — egli o la sua fonte, — l'intenzione di accamparsi colà con l'atto effettivo dell'accamparsi. In vece quindi di dire " egli si mosse dai Castra „ avrebbe dovuto esprimersi " egli non credé di porre l'esercito su i Castra „. Ma eliminato questo equivoco che spetta alla poca chiarezza mentale dello storico, rimane però la notizia che le truppe si ammalarono:

notizia fededegna, quando si pensi che nessun esercito può percorrere marce in Africa durante l'estate (s'era in Giugno) senza andar soggetto a epidemie intestinali; e quando si rifletta che nessun esercito romano poteva esser colpito da una di esse, senza che corressero piú o men vaghe o concrete dicerie su veleni sparsi nell'acque o simili. In particolare possiamo credere che l'epidemia scoppiasse fra i cavalieri, mentr'erano ancòra su i Castra o poco dopo il loro ritorno al Bagradas: la qual cosa è resa anche piú probabile dalla facilità con cui di analoghi mali soffrono anche i cavalli. Il testo di Appiano ci dà quindi, in ciò, un dato genuino su quel che avvenne e quel che si mormorò, forse con qualche rumore e insistenza, fra gli uomini di Curione, nel punto in cui questi aveva a decidere se insediarsi o pur no su i Castra: ci fornisce un elemento credibile e una notizia di buona lega che integrano Cesare e non ne dipendono.

Trasportato a Utica il campo, avviene un primo scontro con i soccorsi di cavalleria e fanteria inviati da Giuba a Varo; nel quale scontro i cavalieri riescono a sfuggire, e dei fanti molti cadono (cap. 26). Il fatto d'armi dovette essere di pochissima importanza: giacché dallo stesso Cesare appare come i soccorsi del Re si ponessero in salvo con vittime relativamente scarse, specie tra i cavalieri, ancor prima che tutte le truppe romane si fossero messe in moto e impegnate nella lotta. Poco notevole per sé, valse tuttavia come indizio di quel che poteva accadere ove diverse fosser le condizioni del combattere. Se, pur col vantaggio d'un assalto improvviso, i Romani non avevan ottenuto di vietar ai cavalieri numidi l'accesso in Utica. il loro generale doveva a buona ragione preoccuparsi degli eventuali rischi del suo esercito, quando i sussidii di Giuba fosser piú rilevanti e si proponessero di entrare *armata manu* nella città di Varo. Da quel momento dunque la situazione diveniva, non difficile se si vuole, ma né pur sicura; e cominciava ad imporsi la necessità di sopraffare i Pompejani prima che nuove circostanze sopraggiungessero a favorirli. Era questa la conseguenza immediata del non aver scelto i Castra Cornelia pel proprio campo: Curione, che s'era posto lo scopo di muover diritto verso Varo, vedeva adesso quello scopo diventare urgente, a rischio di soffrirne egli stesso.

Di ciò Cesare, buon stratega, non ha né meno una parola. Narra in vece a lungo di tentativi che gli avversarii avrebbero fatto per sottrarre a Curione a dirittura le sue truppe. Erano queste composte di due legioni che Domizio aveva a Corfinio dovuto cedere, disfatto, a C. Cesare: passate quindi da l'un partito a l'altro (cap. 28, 1). Che non fossero per ciò sicurissime è troppo ovvio. Ma che la loro fede fosse a bastanza provata dimostrano due fatti: in primo luogo, il non aver Cesare stesso esitato a valersene; in secondo luogo, l'aver Curione condotto per la sua impresa esse sole due legioni, senza prendersi nessuna cura di modificarne la organizzazione (cap. 28, 1), né di contemperarle con truppe di origine diversa e di saldezza piú cimentata (cap. 23, 1). Cominciando dunque fra le coorti domiziane un moto sedizioso, Curione radunò consiglio di guerra. Gli venne proposto dagli uni di espugnar senz' altro il campo di Varo, fra Utica, il teatro e il mare; dagli altri di ritirarsi su i Castra Cornelia e attender gli eventi. Egli respinse entrambi i consigli; e preferí attaccar tosto il nemico dopo aver con un'abile concione, parafrasata nel cap. 32, rinfrancato gli animi dei suoi. La battaglia per tanto avrebbe avuto per primissimo scopo il desiderio, — se non la necessità, — di por fine ai mormorii dei soldati, che sembravano inizii di rivolta. Allo scopo, però, sembra ed è inadeguato il mezzo prescelto: per quanto possa esser grande l'impressione fatta su l'animo dei soldati dall'arringa del capo, se il moto sedizioso fosse stato da vero di quella entità su cui Cesare insiste, non v'ha dubbio che sarebbe da giudicar imprudente e perfin temerario l'atto del generale. Sperimentar l'effetto delle proprie, sia pure efficacissime, parole con una battaglia forse decisiva è, non solo un aver pazza fede in sé medesimo, ma altresí un confidar estremo su quelle stesse truppe, che poc'anzi parevano prossime ad ammutinarsi. È assai verisimile quindi che Cesare narri un particolare vero solo nella sostanza, ma lo alteri in quanto alla luce in cui lo pone, e al valore delle conseguenze che ne fa derivare. La defezione di due centurioni con 22 uomini ad Azio Varo, qualche accenno di " alienatio militum ", furono certo; ma non da questi Curione fu mosso ad attaccare i Pompejani. Può dirsi del testo *de bello civili* a un dipresso quel che Curione medesimo nel discorso che gli vien finto: " quae de

" exercitus alienatione dicuntur..... aut omnino falsa aut certe " minora opinione esse confido „ (cap. 31, 5).

Eliminato l'ammutinamento come movente diretto della battaglia di Utica, ne va scelto un altro. E uno se ne trova súbito ripensando allo scontro fra Romani e Numidi di cui parlammo, e di cui mettemmo in rilievo, mentre Cesare ne sorvola, il valore indiziale. Dall'istante in cui, non ancor compiute le trincee del campo, il capitano s'accorse di tutto il rischio che dalla sua positura gli derivava pel caso di rilevanti soccorsi provenienti da Giuba a Varo, uno solo poté essere il suo scopo: attaccar Varo prima che Giuba, o un suo luogotenente, sopravvenisse; prostrar uno dei due alleati avanti che l'altro lo rendesse invitto. Lievi moti d'indocilità fra i suoi uomini indussero il legato di Cesare a confermarsi nel proposito di tradurre al piú presto in atto quella esigenza; perché col salvare la sua situazione strategica riusciva, in caso di vittoria, — e la vittoria era probabile, — a prevenire, ch'è assai diverso dal reprimere, una qual siasi rivolta delle coorti domiziane.

Il combattimento è raccontato nei capp. 34-36. Varo spinse innanzi la sua ala sinistra costituita della cavalleria frammista con uomini di leggera armatura. Curione gli mosse contro, alla sua volta, la cavalleria e due coorti di Marrucini. I Pompejani non resistettero, persero terreno, si volsero in fuga; nella quale, specie la fanteria leggera ebbe a soffrire assai. Dopo di che, un ulteriore attacco del grosso delle legioni di Cesare diveniva inutile e persino impossibile: " priusquam telum adigi posset aut " nostri propius accederent, omnis Vari acies terga vertit seque " in castra recepit „. Di espugnar il campo avversario Curione non poté far nulla, sia per la natura del luogo, sia per non esser i soldati forniti degli attrezzi necessarii al bisogno. Nella notte, " de tertia vigilia „, Varo raccolse tutto il suo esercito in Utica. E il dí seguente i Romani ne impresero l'assedio: " de deditione omnes iam palam loquebantur „. La vittoria fu dunque, giusta lo storico, grande e insigne: quale in somma l'aveva potuta desiderare il capo che l'aveva tentata.

Il giudizio, per contro, che dobbiam darne noi è proprio l'opposto. Se, — come dicemmo e crediamo, — Curione aveva voluto stroncar le forze di Varo prima che sussidii di Giuba gli pervenissero, egli aveva mancato del tutto il suo fine. Varo.

accortamente, vista la fortuna favorir l'avversario, ritirò le sue truppe; le sottrasse alla disfatta; e rese nulla quella vittoria cesariana, che a pena s'era delineata e sùbito sfumava nell'inconsistenza. A stento la sinistra di Varo e la destra di Curione avean preso contatto; né i centri e l'altre due ale s'eran scontrati. Non accadde la battaglia voluta: e il vincitore apparente fu il vero sconfitto. Si comprende quindi ch'egli si affrettasse, " postero die ", ad assediar Utica, da poi che il dí innanzi non gli era stato possibile escluderne i Pompejani con l'invadere il campo loro. E si comprende del pari che giocasse da allora di abilità diplomatica tentando di inimicare a Varo gli Uticensi e di riallacciar rapporti con qualcuno fra essi amico di Cesare. Della resa si parlò molto; ma soltanto perché a Curione premeva assai; com'era premuta, prima, la battaglia. Della quale le vittime sarebber queste: 600 morti fra i Pompejani; fra i Cesariani un morto (Appiano II 44; Cesare cap. 35, 5): feriti non sappiamo quanti, però che Appiano dice solo *ἔτι πλείονες* e in Cesare il *mille* è dinanzi a " vulneratis " aggiunto in due soli codd. non de' migliori. Ad ogni modo non grandi perdite si ebbero né dall'una né dall'altra parte; onde anche per questa via si sminuisce il valore del combattimento, tanto piú se si ricorda che molti dei Pompejani perirono o si ferirono nella confusione stessa della ritirata. E si conchiude che né pure a infligger danno rilevante al suo avversario riuscí Curione.

Finisce qui il primo periodo della sua campagna.

III.

Il secondo periodo comincia quando " nuntii praemissi ab " rege Juba venerunt qui illum adesse cum magnis copiis di" cerent " (cap. 36). Curione da prima non vi presta gran fede. Ma poi " certis auctoribus comperit minus v et xx milibus ab " Utica eius copias abesse ". Decise allora sùbito di trasportarsi ai Castra Cornelia, di fortificarvisi, di raccogliervi provvigioni; e mandò in Sicilia con l'ordine a l'altre due legioni, — ché quattro in tutto erano al suo comando, — di muovere a lui: " itaque omnium suorum consensu Curio reliquas copias " exspectare et bellum ducere parabat " (cap. 37). Però di lí a

poco apprese “ ex perfugis quibusdam oppidanis „ che Giuba aveva dovuto ritornarsene in patria e che un prefetto di lui, Saburra, con poche truppe si avvicinava ad Utica: “ his aucto- “ ribus temere credens consilium commutat et proelio rem com- “ mittere constituit „ (cap. 38).

I dati di fatto fondamentali di questi capp. sono: lo spostarsi di Curione da Utica ai Castra; il suo decidersi a combattere prima di aver ricevuto rinforzi dalla Sicilia. Tentiamo di valutarli prescindendo dalle spiegazioni di Cesare. Rimanere a Utica mentre Giuba avanzava, era un voler farsi prendere in mezzo fra Varo e i Numidi: errore palesissimo quindi. Ma posto una volta il campo su i Castra, il problema militare si affacciava con due risoluzioni, entrambe possibili, entrambe tali da dar buona speranza di vittoria. Di là il capo romano avrebbe difatti potuto: o attender le due legioni dalla Sicilia per affrontare poi, con le truppe sue tutte, le truppe unite di Varo e Giuba: o vero tentar d' impedire tra Varo e Giuba il congiungimento e abbatter questo avanti che giungesse a quello; capovolgere in somma il piano concepito, ma non attuato, prima intorno a Utica; applicar lo stesso principio di eliminare uno alla volta i due nemici. Quando Curione abbandonò l'assedio della città, Giuba era annunziato a 39 km. circa: se si voleva quindi prendere la seconda di quelle due risoluzioni possibili, bisognava proceder con energia e prontezza. Né la scelta fra l'una di esse era indifferente: il criterio per decidere e preferire era dato dalle forze stesse di Giuba. Ove difatti queste fossero state a pena superiori alle romane o pari o inferiori sia pur di poco. il meglio era attenersi al partito di assalirle sùbito mentr'eran sole. Nel caso contrario, migliore la decisione opposta: la quale tuttavia non poteva non preoccupare, perché, lasciando unirsi le truppe di Varo con quelle di Giuba, accresceva di queste ancor piú la efficienza e rendeva meno probabile la superiorità anche di quattro legioni. Che cosa deliberò Curione? Cesare gli fa preferire l'un piano prima, l'altro poi: e dell'improvviso mutamento adduce causa la notizia falsa del ritorno di Giuba. Al lettore in vece, che si è reso conto della strategia di lui nella prima fase della campagna, parrebbe tosto piú probabile che, sùbito ch'egli si mosse verso i Castra Cornelia, concepisse il proposito di arrestare i Numidi nella loro marcia verso Utica, gittandosi fra

essi e Varo, a una distanza dalla città sufficiente e con prontezza bastevole, perché i Pompejani non potessero sopravvenire a prenderlo alle spalle, mentr'egli attaccava i loro alleati. Bisogna proceder nella lettura prima di confermare o respingere tale giudizio.

Nel principio della notte Curione invia la cavalleria contro " castra hostium „ sul fiume Bagradas. Precedeva Saburra: e distante 9 km. da lui, Giuba " cum omnibus copiis „. I cavalieri assalgono il nemico e ne distruggono gran parte: " magnum " eorum numerum interficiunt; multi perterriti profugiunt „. Ciò fatto i cavalieri ritornano da Curione e gli recano i prigionieri (cap. 38). Curione fra tanto con tutte le sue forze aveva nella " quarta vigilia „ lasciato il campo e s'era spinto verso il Bagradas per 9 km. Qui incontrò la cavalleria reduce e vittoriosa. Decise di proceder sùbito innanzi, senza né meno indugiar a chieder piú minute informazioni ai suoi (cap. 39, 2), e senza badare che i cavalieri, " itinere totius noctis confecti „, non erano in grado di seguirlo: " alii alio loco resistebant „. Giuba, avvertito nel frattempo da Saburra dell'accaduto, gli invia 2000 cavalieri e una fidata parte della fanteria. Dietro, piú lento, muove egli stesso col rimanente e con 60 elefanti. Curione si lascia illudere dalle truppe di Saburra che, per ordine ricevuto dal loro capo, fingono di ritirarsi: e le insegue a tutta possa. Fin che i suoi sono tanto affranti di fatica che dopo 24 km. deve fermarsi e tollerare la battaglia (capp. 39, 3-41, 1).

Ora tutto intero questo racconto conferma il giudizio sopra espresso: che Curione volesse attaccare Giuba prima del congiungimento con Varo. Difatti Cesare gli attribuisce, per restare coerente alle premesse sue, una condotta a dirittura pazzesca. Dopo che la cavalleria romana aveva distrutto l'avanguardia di Saburra con uccider molti e volger in fuga gli altri, un inseguimento diveniva affatto inutile. Anzi tutto, fra inseguitori e inseguiti questi avevano un vantaggio di 12 km. almeno, la somma cioè di quanti avevan dovuto percorrerne, i cavalieri per ritornare dal luogo dello scontro a Curione, Curione per recarsi in esso luogo. Inoltre v'era pochissima speranza di raggiunger con la fanteria pesante i Numidi, e in ispecie nessuna di raggiungerne i cavalieri. In fine non valeva la pena di stancare le truppe e di avventurarsi sul suolo infido dell'avversario per

sterminare i pochi avanzi del corpo di Saburra. E che pochi o pochissimi gli avanzi fossero, attesta Cesare non pure a capo 38, 5 ove narra lo scontro, ma anche a capo 40, 1 ove asserisce che Giuba dovette fornire nuove truppe al suo luogotenente perché il nemico potesse esserne allettato. Se quindi da vero Curione avesse creduto di muovere contro il solo Saburra, Giuba assente, — come Cesare esplicito afferma, — egli non avrebbe mai in nessun modo deciso la marcia al di là dei primi 9 km. fuor dei Castra Cornelia. Se per contro, — come noi supponemmo, — Curione volle, per un suo proprio piano, attaccare di notte improvviso e rapido i Numidi, tutto il suo agire diviene logico e coerente. Dopo, difatti, essersi insediato su i Castra dové ricevere notizie esatte, cosí su la distanza a cui si trovava il nemico, come su i suoi contingenti. Queste devono averlo indotto a non indugiar piú oltre aspettando la venuta dell'altre due legioni e a sorprendere Giuba nella sua marcia. Per ciò spinse innanzi la cavalleria: per sgominare, supponiamo, l'avanguardia numida e recare all'avversario un primo colpo assai piú morale che materiale; o pure per non compromettere inutilmente, nel caso che il primo approccio riuscisse sfavorevole, il nerbo delle sue forze. I suoi cavalieri volsero in fuga i Numidi e si ritennero vittoriosi recando la buona novella a Curione; il quale allora decise sùbito l'avanzata totale con lo scopo preciso, non di disperder meglio que' pochi avanzi delle truppe di Saburra, bensí di attingere tutto l'esercito di Giuba e sbaragliarlo.

Riprova che Cesare falsa l'interpretazione dei fatti e che il giudizio nostro è corretto ci offre il calcolo delle distanze. La fanteria di Curione comincia a combattere dopo 24 km. di marcia (cap. 41, 1) compiuta nella notte, a partir dalla quarta vigilia, e nel principio del mattino. La cavalleria poi percorre in tutto km. $24 + 12 = 36$: dei quali gli ultimi 20 circa dopo la vittoria. Tali distanze appajono già per sé in nulla eccessive; quando anche si ricordi che le milizie erano ben approvvigionate (cap. 37, 6), che la frescura notturna temperava i disagi dell'estate, che in fine il Bagradas forniva sufficiente l'acqua e comoda all'uso. Ma ancor piú esigue si rivelano le marce e della fanteria e dei cavalieri, ove ci s'indugi a computare l'ore impiegate a compierle. Sappiamo che l'avanguardia partí pel primo attacco sul far della notte (cap. 38,3); o sia (Veith 740

n. 1) verso le 21. Sappiamo poi che il grosso dell'esercito si mosse " quarta vigilia „; che vale, le 3 del mattino. L'ora dello scontro con Giuba Cesare non dice; ma Appiano ha una fonte che la sposta assai verso il meriggio; e che, pur essendo da ritenersi esagerata (v. sotto), dà tuttavia qualche indizio. Onde si può, senza larghezza eccessiva di computo, fissar quell'ora alle 9-10 del mattino. Se ne deduce che la fanteria compié i suoi 24 km. in 6-7 ore: che costituisce una media di men che 4 km. per ora; media bassa, la quale lascia ampio margine per il riposo, i beveraggi, ecc. ecc. E i cavalieri percorsero i loro 36 km. in 12 ore; con una media di km. 3 per ora: bassissima questa, e tale da conceder spazio opportuno per il combattimento con Saburra, che fu breve, e l'inseguimento successivo. E si può specificare ancor meglio. La fanteria impiegò per i primi 9 km., avanti che si ricongiungesse con i cavalieri reduci, al massimo ore 2 1/2 - 3. Le rimasero quindi da 3 a 4 ore per la marcia, che è da ritenersi piú rapida, dei successivi 15 km. fino a Giuba. Al termine, la sua stanchezza non poteva non esser moderata e tale da non pregiudicar senz'altro le sorti della battaglia che stava per impegnare. La cavalleria per converso si accelerò senza dubbio ne' primi 15 km., dai Castra a Saburra, e nei seguenti 6, da Saburra a Curione: quelli percorrendo con l'anelito dell'attacco, questi con la gioja della vittoria. Se adunque pervenne al grosso delle milizie dopo che esso marciava da 2 1/2 - 3 ore, ossia verso le 5-6 del mattino, le due sue marce di andata e di ritorno, insieme con il combattimento notturno e le conseguenze, occuparono da 8 a 9 ore: a tutto assai bene bastevoli, senza eccessi di fatica, ché vi è interstizio anche per il riposo. I 15 km. poi, durante i quali accompagnò verso Giuba le legioni romane, le presero, quindi, da quattro ore: molte per la distanza. Né pur essa per tanto ebbe a iniziar la battaglia coi Numidi in condizioni di troppo grande inferiorità, che ne infirmassero gravemente il valor militare. Va conchiuso allora che Cesare, quando narra di " equites... itinere " totius noctis confecti „ i quali " alii alio loco resistebant „ (cap. 39, 6) e di " milites defessi „ (cap. 41, 3), esagera molto un particolare che i reali fatti gli offrivano spunto propizio alla difesa del suo luogotenente; e che lo esagera per serbar coerenza alle premesse del suo proprio racconto intorno all'inganno, in

cui l' " adolescentia „, la " magnitudo animi „, i " superioris tem-
" poris proventus „, la " fiducia rei bene gestae „ (cap. 38, 2) avrebbero indotto C. Scribonio Curione. Chi per contro a quelle premesse non si attenga non avrà né meno bisogno di adulterare quella realtà che si presenta perspicua a ogni indagine attenta.

Come l'estrema stanchezza che Cesare asserisce delle truppe romane, cosí conferma la ipotesi nostra su gl'intenti effettivi del lor generale il racconto di Appiano, falso sott'altro aspetto. Ripete egli pure che la errata voce di Giuba allontanatosi avrebbe ingannato Curione. Soggiunge (cap. 45) *καὶ τῷδε τῷ λόγῳ πίσυνος ὁ Κουρίων θέρους θερμοῦ περὶ τρίτην ὥραν ἡμέρας ἦγε τὸ κράτιστον τῆς στρατιᾶς ἐπὶ τὸν Σαβούρραν, ὁδὸν ψαμμώδη καὶ ἄνυδρον· εἰ γάρ τι καὶ νᾶμα χειμέριον ἦν, ἐξήραντο ὑπὸ τῆς φλογὸς τοῦ ἡλίου, καὶ ὁ ποταμὸς ὑπό τε Σαβούρρα καὶ ὑπ' αὐτοῦ παρόντος κατείχετο τοῦ βασιλέως.* Sùbito colpisce lo sbaglio dell'ora in cui la marcia sarebbe cominciata: Cesare la contradice, e non v'è dubbio, per molte ragioni troppo evidenti, su la scelta. Ma esagerato è anche quel che vi si riferisce intorno all'arsura della state e all'impossibile uso del Bagradas. Di questo i *Commentarii* nulla dicono; ed è certo che non avrebber passato in silenzio un particolare di tanta importanza per giustificar quel Curione che in essi si cerca di difendere con tutti gli accorgimenti. Sull'eccesso del caldo poi in quei luoghi e in quel mese giova riferire le testuali parole del Veith che alla competenza militare specifica unisce l'esperienza acquisita negli appositi viaggi (pag. 515): " [im Nord-Africa] das Klima ist im
" allgemeinen der Kriegführung nicht ungünstig. Die Sommer-
" hitze ist im Manövriergebiet nicht so arg, um die Operationen
" vollkommen zu lähmen; sicher nicht ärger als im südlichen
" Karste oder auf manchen anderen südeuropäischen Kriegs-
" schauplätzen „. In verità coteste esagerazioni sul calore vanno ravvicinate allo spostamento dell'ora; e insieme spiegate come un tentativo, — analogo al cesariano, — di cercar in un dato reale, e in quello sol tanto, la causa della disfatta di truppe romane a fronte di milizie numide. Se non che ancor questo, diverso e simile, tentativo presupponeva non poca leggerezza in Curione, che avrebbe trascurato di tener conto di elementi essenziali per il prospero esito d'una marcia offensiva: indi il bisogno di mostrare ch'egli fu deluso da una falsa diceria.

I precedenti della battaglia ci sono dunque pervenuti sotto luce alterata in due fonti non identiche. La battaglia medesima poi è presso che omessa. Sol tanto, Cesare ci dice che i legionarii romani non riuscirono a tener testa alla tattica dei Numidi combattenti. Ovunque si spingessero i cavalieri romani, gli africani si volgevano in rapida fuga ch'era impossibile inseguire. Se la fanteria di Curione si manteneva ferma nelle file, gli avversarii si affrettavano a circondarla; quando poi essa tentava l'assalto, i nemici sfuggivano, si ricomponevano poco piú in là, e finivan per tagliar fuori dal grosso gli assalitori (cap. 41, 4-7): " sic neque in loco manere ordinesque servare neque procurrere " et casum subire, tutum videbatur „. Apprendiamo adunque una nuova causa, — accanto alla mediocre stanchezza delle truppe e alla comparativa molestia dell'estate, — per cui i Romani risultarono nel fatto inferiori all'aspettazione contro Giuba: l'estrema mobilità agile e sfuggevole degli Africani.

Appiano ce ne apprende una quarta. Curione avrebbe occupato prima certi colli (*λόφους*); dai quali l'avrebber indotto a scendere inconsideratamente (*ἀφρόνως μάλα καὶ καταφρονητικῶς*) i nemici, traversando, nel piano sottostante, il Bagradas. Piú tardi, circondato *ὑπὸ τῶν Νομάδων ἱππέων*, sarebbe rifuggito novamente su i colli. Di queste due mosse l'una sola trova riscontro nei *Commentarii*, la seconda; della prima non essendo là né pure un cenno. Ora, che Curione tentasse, dopo la sconfitta, di raggiungere i colli è troppo ovvio: su quelli gli sarebbe stato piú facile evitar la catastrofe e sottrarre, suddividendo per la ritirata verso il mare le sue truppe secondo favoriva il terreno, i legionarii alla strage dei Numidi: il particolare è dunque fededegno in sé, e non stupisce quindi il ritrovarlo in entrambe le fonti. Ma altr'e tanto credibile è che il comandante romano cercasse sul principio di occupare quelle medesime alture, onde avrebbe avuto la preminenza sul nemico e potuto, — che piú giovava, — osservarne le posizioni, a lui ignorate. Scenderne però dovette tosto che, per avere Giuba e Saburra traversato il fiume, diveniva imminente il rischio di aver tagliata la via ai Castra Cornelia e tronco il contatto con la spiaggia. Possiamo per tanto supporre che, salito colà non conoscendo ancora l'esatta postura dei nemici, fosse poi costretto d'improvviso a discenderne quando ne ebbe scorte le mosse e ad accettare per

la battaglia un campo da lui non scelto. Anche una volta dunque Appiano sembra fornire una notizia esatta che integra il racconto di Cesare e, gittando assai lume, adduce l'ultima importante causa del disastro romano. Errato è sol tanto il giudizio che delle singole mosse vien formulato e che ignoranza e passione spiegano a bastanza.

IV.

Facile, ora, raccoglier in breve le conseguenze della nostra indagine su i testi paralleli di Cesare e Appiano, e narrare in rapida sintesi l'impresa di Curione.

In Appiano è traccia, oltre che dei *Commentarii*, di una fonte ch'è in parte diversa da quelli e ci dà in piú due particolari credibili intorno a malattie delle milizie cesariane e alla tattica del loro capo durante la battaglia. Entrambi rivelano ch'essa fonte ha meno interesse, che non Cesare, a giustificar Curione; sovra tutto, che quell'interesse si appiglia a circostanze reali di cui Cesare, preferendone altre, non credette valersi. In ispecie piú largamente volle essa permettersi di alterare l'ora della marcia contro Giuba ed esagerare l'estiva calma: anche qui, a ogni modo, ricalcando, sia pure con mano greve, linee vere del quadro. Del tutto analogo appare il procedere di Cesare: si serba veritiero nella sostanza, solo permuta a suo giudizio l'ombre e le luci; e in quell'unico punto deforma sensibilmente la realtà in cui anche la fonte diversa si concede d'adulterarla: la marcia notturna e i suoi effetti. Oltre a ciò non insiste, o tace a dirittura su circostanze che non ritiene notevoli. Di là da lui, avvicinato alla seconda fonte di Appiano, gli avvenimenti si veggono svolgersi con serrata concatenazione, salvo la lacuna intorno alle fasi della battaglia al Bagradas, e con evidenza sufficiente perché il ricostruirli sia lecito in forma assai probabile.

Che è, in somma, questa. La campagna tutta si distingue in una preparazione seguita da due fasi. La preparazione comprende lo sbarco su la costa africana, la marcia al Bagradas, la sosta del grosso quivi, l'avanscoperta della cavalleria su i Castra Cornelia. Per tutto cotesto tempo Curione non ha ben chiaro in mente un piano: suo solo proposito, muovere diritto ed energico al nemico e porglisi a fronte. Difatti, osservato il

terreno dall'alto dei Castra, apparsi fenomeni epidemici fra i suoi, si trasporta sotto le mura di Utica, stringendo da sud-ovest la città che Varo tiene da nord-est. Ma una scaramuccia gli rivela tutta la situazione e gli presenta e formula quel concetto strategico che domina entrambe le due fasi successive: impedire che Giuba e Varo si congiungano e sbaragliare l'uno dei due avanti l' unione. La prima fase si svolge in tentativi per abbattere anzi tutto Varo; ma la battaglia è attaccata, non proseguita; l' avversario si ritira a tempo tra le mura; e non v'è piú speranza se non in un assedio rapidissimo. Questo è a pena iniziato allor che Giuba si annunzia vicino. Comincia la seconda fase dopo un breve periodo d'incertezza: saputo che i Numidi non sono superiori per numero alle due legioni romane, conosciuta l'approssimativa loro distanza, Curione calcola di poterli sorprendere, arrestare e distruggere con una marcia notturna prima che Varo n'abbia pur sentore. Non s'arrischia tuttavia sùbito con tutte le forze: spinge innanzi i cavalieri che volgono in fuga l'avanguardia con Saburra. Ciò gli pare un buon indizio e l'induce a proseguire. Senza lentezza nociva, ma anche senza spossare i suoi uomini, egli raggiunge nel mattino, dopo alquante ore di sole, i Numidi. Non gli riesce però di attirarli in campo a lui favorevole e deve accettare battaglia ai piedi di certi colli su la riva del Bagradas. Tal circostanza, insieme con la sveltezza incomparabile delle mosse e della " tattica individuale " in cui eccellono i Numidi, rende assai piú gravi la fatica delle milizie e la vampa solare. Le legioni gli cedono. Tenta salvarle dalla strage occupando le colline prossime, piú acconce a celare una ritirata e a raffrenare l'impeto avversario. Saburra lo previene. E la sorte è decisa senza piú scampo.

Nel complesso Curione mostrò intelligenza e prontezza. Fu suo unico errore, ma fondamentale, l'aver ritenuto che le sue truppe, romane, potessero risultar superiori all'avversarie, barbare, sempre non ostanti caldo e stanchezza. Nel fatto, delle due tattiche prevalse la numidica. Tuttavia certo gli storici che tentarono di giustificar il disastro avrebbero giovato assai meglio al giovane generale narrando la sua campagna come effettivamente la condusse, senza deformazioni che gli nocquero sol tanto.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSI UNITE

Adunanza del 28 Febbraio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, Salvadori, D'Ovidio, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana e Fusari;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Manno, Direttore della Classe, Renier, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Socio Carle.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 23 giugno 1912.

Invitato dal Presidente, il Socio D'Ercole dà lettura della relazione della Commissione dei premi Gautieri per la Filosofia (triennio 1909-1913). La relazione, a firma di Chironi, Ruffini e D'Ercole, propone che il premio venga conferito in parti uguali a Benedetto Croce, pel volume *La Filosofia della pratica: Economia ed etica* e per l'altro su: *La Filosofia di Giambattista Vico*; e a Bernardino Varisco per l'opera *I massimi problemi*.

Apertasi la discussione, ad alcune osservazioni di Soci risponde dando schiarimenti il relatore.

Il voto sul conferimento del premio è riservato, giusta i regolamenti, ad una prossima adunanza.

Relazione della Commissione dei Premii Gautieri

per la Filosofia (triennio 1909-1911).

ILLUSTRI COLLEGHI,

Già nel passato triennio la Commissione da voi nominata pel conferimento del premio Gautieri per la Filosofia cominciò la Relazione coll'espressione di viva gioia pel progresso degli studi filosofici. Questa volta, benchè a distanza di soli tre anni, la gioia è assai più grande, perchè le produzioni filosofiche del testè compiuto triennio, sia presentate come concorrenti al Premio sia no, son cresciute non solo di numero, ma anche d'importanza.

E va, inoltre, notato che il progresso fatto dalla Filosofia, come ne fan fede le produzioni filosofiche mentovate, non è solo pel rispetto teoretico, ma anche pel rispetto storico: il che è sommamente naturale e razionale; perchè l'evoluzione della coscienza filosofica è stata sempre e da per tutto storica e teorica ad un tempo, in quanto Storia della Filosofia e Teorie sistematiche filosofiche si son sempre concordemente sviluppate e formate insieme.

Venendo ora alla giudicazione di tali opere e al corrispondente conferimento del Premio, la Commissione rileva volentieri che tra esse non una o due si mostrano meritevoli di questo, ma parecchie. Se non che ella ha dovuto restringersi a quelle che più spiccano per merito tra le medesime; e tra siffatte si è fissata su quelle di due già noti ed insigni produttori di opere filosofiche, cioè di Benedetto Croce e Bernardino Varisco.

Quanto al Croce, egli ha pubblicato nel triennio il volume intitolato: *La Filosofia della Pratica: Economia ed Etica*. Questo volume, già importante per sè solo, cresce d'importanza quando lo si considera nella sua connessità co' due altri volumi dell'autore, *Estetica come scienza dell'Espressione*, e *Logica* (2ª ediz.), coi quali costituisce tutta una concezione filosofica, che si può accogliere o non accogliere, accogliere in tutto ovvero in parte,

ma che è indubitabilmente una delle concezioni filosofiche che negli ultimi tempi ha improntata, avvivata e intensificata la coscienza filosofica italiana. E concezione filosofica, per giunta, che, oltre all'estendersi ad un àmbito assai largo, ha in ogni branca e punto di questo toccato, discusso e cercato di spiegare e conciliare tutte le relative quistioni ed esigenze, sì storiche che teoriche.

Se accanto al volume predetto si prende in considerazione l'altra opera del Croce pubblicata nel 1911 su " *La Filosofia di Giambattista Vico* " (opera, detto in parentesi, che si arricchisce e compie col " *Secondo Supplemento alla Bibliografia Vichiana* " dello stesso anno), questa non può che ulteriormente e maggiormente appoggiare il favorevole giudizio della Commissione.

Infatti, benchè non siano nuovi nè gli studi nè le esposizioni e giudicazioni intorno al grande filosofo napoletano, specialmente quelli notevoli del nostro Giuseppe Ferrari, pure è a dire e convenire che il novello studio e la novella esposizione e giudicazione del Croce si raccomandano eminentemente siccome un'opera, che allarga, compenetra e spiega la mente del Vico in modo assai migliore di quel che si era antecedentemente fatto.

La mente del Vico, che in non pochi punti e talvolta persin ne' principali si mostra qua e là oscura, è stata dal Croce chiarita ed esposta in modo ordinato ed istruttivo. A tal riguardo sono notevoli specialmente i punti che riguardano la Gnoseologia, la Coscienza morale e giuridica, la Provvidenza, la Metafisica e i Ricorsi, ne' quali tutti, per quanto lo studio del Croce è fine ed acuto, altrettanto ne è lucida l'esposizione; e, per giunta, ne vengono accuratamente rilevati e giudicati non solo i pregi e le verità, ma anche i difetti e gli errori.

Passando al Varisco, anche questo, come il Croce, non è nuovo nè alle produzioni filosofiche nè agli onori ad esse resi, essendo stata, per esempio, l'opera di lui " *Scienza ed opinioni* " già premiata dall'Accademia de' Lincei, che la giudicò opera " di grande originalità di pensiero ".

Rispetto a questo filosofo noi ci troviamo dinanzi ad una individualità filosofica ben diversa, potrebbe persin dirsi opposta a quella del Croce.

La concezione del Croce, infatti, versa sopratutto sullo studio

dello Spirito umano come indagante, determinante e sistemante la realtà delle cose prevalentemente dal punto di vista *estetico*, *logico* e *spirituale* della medesima, e con poca o punta considerazione della manifestazione naturale di essa.

Il Varisco, al contrario, fissa la sua speculazione prevalentemente nel *campo naturale*, indagandolo con tutti i mezzi e metodi, non escluso il mezzo e metodo matematico, essendo egli stato per trent'anni insegnante di matematica, ma ad un tempo pur studioso di problemi filosofici. E, quanto al campo della natura, tra i varii studii e investigazioni di lui, vanno ricordati i suoi " *Studi di Filosofia naturale* „ del 1903. Sicchè non è inesatto il dire che la concezione filosofica di Varisco sorge, si forma e si basa sulla conoscenza e investigazione della natura.

Ora di tale speculazione l'ultimo importante frutto da prendere in considerazione rispetto al Premio Gautieri è la sua opera intitolata: " *I massimi problemi* „, edita nel 1910. E la Commissione afferma subito di essa, come già la Commissione de' Lincei per quella di " *Scienza e Opinioni* „, che anche i " *Massimi problemi* „ mostrano originalità di pensiero.

Quanto al contenuto e trattazione di essi, l'autore prende a considerare i cinque Problemi seguenti: quello della *Sensazione*, che, considerato dal doppio punto di vista del senziente e del sentito, costituisce il problema del mondo sensibile; quello della *Conoscenza*, pur questo considerato dal doppio punto di vista del soggetto conoscente e dell'oggetto conosciuto; quello che oggi è comunemente designato come il Problema de' *Valori*; quello che l'autore appella il Problema di " *Realtà e Ragione* „, e che costituisce il Problema del Causalismo universale e delle corrispondenti leggi degli avvenimenti; e finalmente quello dell'*Essere*.

Siffatti problemi tutti egli investiga, analizza e dibatte con molto acume e con scientifica serenità di mente. E nel far ciò va notato un fatto molto importante, che, cioè, i predetti Problemi, già trattati da tutti i filosofi in genere, sono stati poi trattati in modo speciale e proprio al nostro tempo da Kant, iniziatore e fondatore di questo, da Fichte, Schelling, Hegel, Herbart, Schopenhauer, Lotze, Spencer, Eduard von Hartmann. Rosmini e qualche altro. Or bene, dalla lettura dell'opera del Varisco si scorge subito che egli ha studiato e messo a profitto

i diversi principii propugnati da tutti questi ultimi. Però nel profittarne egli non ha messo insieme accozzandoli e assommandoli siffatti principii, ma li ha fusi ed unificati in un suo proprio pensiero: il che è certamente un merito non comune.

Da tal pensiero testè accennato egli ha infine tratto delle *conclusioni* assai degne di nota: ha, cioè, concluso che " l'unità dell'Essere (pag. 227), l'esistenza di un universale, d'un razionale, d'un eterno, d'un divino che penetra le cose, non sono più da mettere in contestazione "; che il " regno de' valori non è quello de' piaceri e delle sofferenze sensibili, ma quello dell'attività razionale cosciente "; e, per ricordare ancora la conclusione più importante, che " è superato il concetto volgare della creazione, secondo il quale Dio ed il mondo sarebbero l'uno fuori dell'altro ", ma che invece " il divino è immanente nelle cose, e le cose hanno esistenza nel divino ".

Tali sono i pensieri propugnati nell'opera del Varisco, dal breve cenno de' quali avrete subito potuto scorgere quella diversità e persino opposizione che essi hanno rispetto a quelli del Croce.

Se non che, ad onta della evidente differenza di concezioni, la Commissione, giudicandole serenamente e obbiettivamente, non può a meno di riconoscere l'alto pregio di entrambe. E in questo caso ella vi propone di dividere il Premio in due parti eguali, e di conferirne una per ciascuno al Croce ed al Varisco, che colle loro opere fanno onore all'Italia ed alla Filosofia.

La Commissione
G. P. Chironi
F. Ruffini
P. D'Ercole, *relatore.*

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 23 Febbraio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, e Segre Segretario.

Vien letto ed approvato il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente comunica la lettera del Socio Foà con cui ringrazia la Classe per le felicitazioni ed auguri inviatigli.

Il Comitato per le onoranze a Giovanni Schiaparelli ha inviato una lista di sottoscrizione per un monumento al grande Astronomo.

Il Socio Guareschi offre in omaggio i suoi *Cenni biografici su Leonardo Doveri*.

Il Socio Guidi presenta per la stampa negli *Atti* una sua Nota *Sulle deformazioni dei tubi di grande diametro per condotte d'acqua*; ed i Soci Guareschi, Fileti e Somigliana presentano, pure per gli *Atti*, rispettivamente le seguenti Note:

M. Ghiglieno, *Su alcuni nuovi derivati della piperazina*;

G. Charrier e G. Ferreri, *Eterificazione di o-ossiazocomposti*. Nota II;

E. Laura, *Sulla formola di Kirchhoff per la propagazione delle onde*.

Infine il Presidente, interpretando il pensiero della Classe, esprime al Socio Parona il compiacimento dei Colleghi per l'onorifica missione affidatagli dal Governo, per lo studio geo-agrologico della Tripolitania; e gli fa i migliori auguri pel periodo della sua permanenza in quella regione. Il Socio Parona ringrazia il Presidente ed i Colleghi.

LETTURE

Sulle deformazioni dei tubi di grande diametro per condotte d'acqua.

Nota del Socio CAMILLO GUIDI

In due Note pubblicate in questi stessi *Atti* nell'aprile e nel giugno 1912, aventi per titolo: *Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro,* ci siamo occupati della determinazione degli sforzi interni che si verificano nei tubi di grande diametro per condotte d'acqua, per effetto dell'acqua senza pressione contenuta nel tubo e del peso proprio del medesimo. Col presente scritto vogliamo studiare le deformazioni che subisce un tubo di ferro per le stesse cause, e supporremo che lo spessore del medesimo sia $0{,}02\,r$ ovvero $0{,}01\,r$, dove r è il raggio del tubo; considereremo un anello lungo l'unità lineare, che si assume di 1 cm. Supporremo nel lettore la conoscenza della prima delle ricordate Note, e manterremo l'ipotesi che il tubo, disposto orizzontalmente, sia appoggiato al basso per un arco di 40° e che tale appoggio fornisca una reazione verticale uniformemente distribuita lungo il detto arco.

Tubo di spessore $0{,}02\,r$. — Dalla prima delle due Note sopra ricordate si ha che nella sezione al vertice si sviluppa una tensione orizzontale H ed un momento M_0 che per un *centimetro corrente* di tubo sono espressi da

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} H &= (0{,}001 \times 0{,}73055 + 0{,}0078 \times 0{,}02 \times 0{,}461102)\,r^2 = \\ &= 0{,}00080248\,r^2 \\ -M_0 &= (0{,}001 \times 0{,}24071 + 0{,}0078 \times 0{,}02 \times 0{,}48142)\,r^3 = \\ &= 0{,}00031581\,r^3 \end{aligned} \right.$$

e quindi il punto d'applicazione della H è definito dalla

$$\frac{M_0}{H} = -0,394\, r. \tag{2}$$

Le quantità analoghe per la sezione infima sono

$$(3)\quad \begin{cases} H_1 = (0,001 \times 1,26945 - 0,0078 \times 0,02 \times 0,46110)\, r^2 = \\ \qquad = 0,00134138\, r^2 \\ -M_1 = (0,001 \times 0,5071 + 0,0078 \times 0,02 \times 1,01396)\, r^3 = \\ \qquad = 0,00066528\, r^3 \end{cases}$$

$$\frac{M_1}{H_1} = -0,496\, r. \tag{4}$$

Le sollecitazioni essendo simmetriche, lo saranno anche le deformazioni, e se ne limiterà perciò la ricerca al semianello che rimane alla sinistra della verticale media.

Il momento flettente per una sezione del detto semianello, inclinata dell'angolo φ alla sezione al vertice (se φ è compreso fra 0 e 160°) è espresso da

$$(5)\quad M = M_0 + Hr(1 - \cos\varphi) - 0,001\, r^3\left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi \operatorname{sen}\varphi\right) + \\ + 0,0078 \times 0,02\, r^3 [\varphi \operatorname{sen}\varphi - (1 - \cos\varphi)].$$

Fra 160° e 180°, osservando che l'intensità della reazione è per l'acqua:

$$\frac{0,001\, \frac{\pi r^2}{2}}{\frac{1}{9}\pi r} = 0,001 \times 4,5\, r = 0,0045\, r$$

e per il peso proprio del tubo:

$$\frac{0,0078\, \pi r \times 0,02\, r}{\frac{1}{9}\pi r} = 9 \times 0,0078 \times 0,02\, r = 0,001404\, r$$

si aggiunge all'espressione del momento il termine positivo

$$(6)\quad 0,005904\, r^3 [\cos\varphi_1 - \cos\varphi - (\varphi - \varphi_1) \operatorname{sen}\varphi]$$

nel quale $\varphi_1 = 160°$.

Immaginando divisa la semicirconferenza, asse geometrico della semisezione sinistra del tubo, in 18 tronchi di eguale lunghezza, corrispondenti perciò ad un angolo al centro di 10°, si sono calcolati di 10 in 10 gradi i valori delle funzioni trigono-

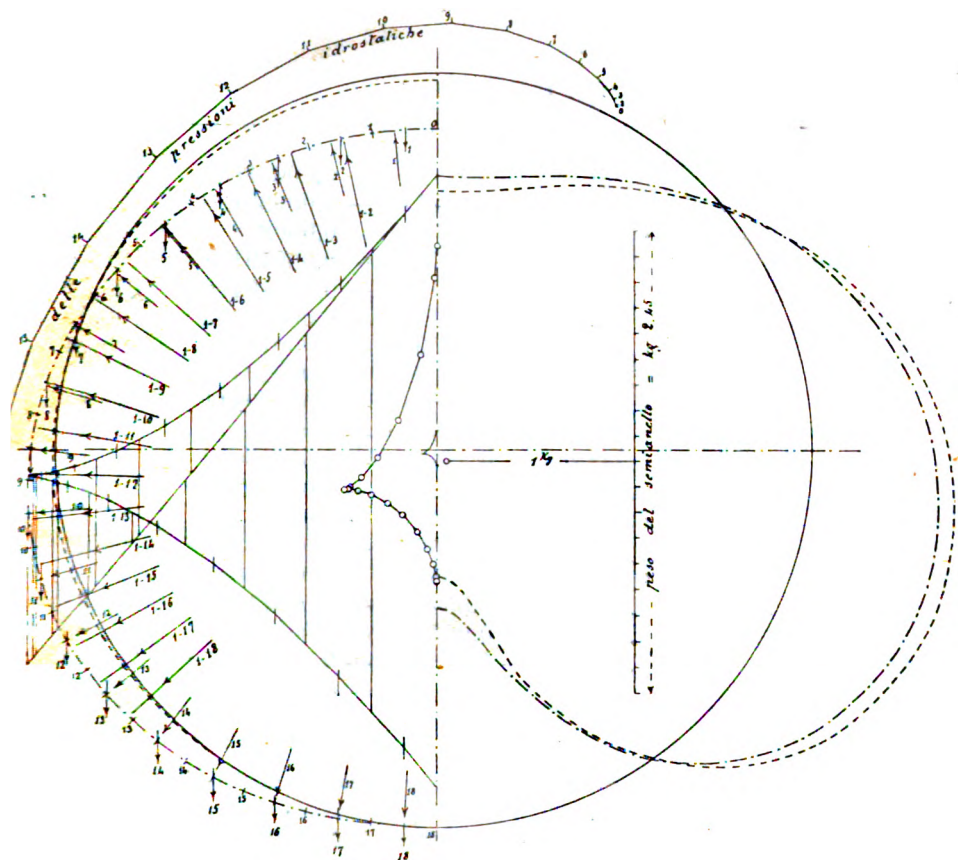
metriche che figurano nella (6) e quindi i corrispondenti valori di $\frac{M}{r^3}$. Tutti questi valori sono registrati nella seguente Tabella I, ed i momenti furono portati nell'annessa figura come ordinate radiali a partire dalla semicirconferenza destra: verso l'interno quelli negativi, verso l'esterno quelli positivi. La linea

continua che ne unisce le estremità, rappresentata nella figura a piccoli tratti, mostra la legge di variazione del detto momento.

TABELLA I.

φ	$1 - \cos\varphi$	$1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi \operatorname{sen}\varphi$	$\varphi \operatorname{sen}\varphi - (1 - \cos\varphi)$	$\frac{M}{r^3}$	r_1 $(r = 100)$
					cm.
0	0	0	0	— 0,00031581	102,43
10	0,01519	0,00004	0,01511	— 0,00030130	102,31
20	0,06031	0,00061	0,05909	— 0,00025880	101,98
30	0,13397	0,00307	0,12783	— 0,00019143	101,46
40	0,23396	0,00960	0,21477	— 0,00010416	100,79
50	0,35721	0,02295	0,31131	— 0,00000355	100,03
60	0,5	0,04655	0,40697	+ 0,00010237	99,24
70	0,65798	0,08397	0,49004	+ 0,00020469	98,49
80	0,82635	0,13881	0,54874	+ 0,00029411	97,84
90	1	0,21460	0,57080	+ 0,00036111	97,36
100	1,17365	0,31426	0,54514	+ 0,00039680	97,11
110	1,34202	0,43997	0,46209	+ 0,00039325	97,14
120	1,5	0,59309	0,31381	+ 0,00034377	97,49
130	1,64279	0,77376	0,09528	+ 0,00024360	98,21
140	1,76604	0,98071	— 0,19538	+ 0,00009021	99,33
150	1,86603	1,21153	— 0,55703	— 0,00011679	100,88
160	1,93969	1,46215	— 0,98460	— 0,00037500	102,89
170	1,98481	1,72719	— 1,46957	— 0,00059199 (*)	104,65
180				— 0,00066528	105,25

(*) Il termine dovuto alla reazione è $0,005904 \left[\cos 160 - \cos 170 - \frac{\pi}{18} \operatorname{sen} 170\right] =$ $= 0,00008749$ e quindi $\frac{M}{r^3} = - 0,00067948 + 0,00008749 = 0,00059199$.

Esso è massimo, in valore assoluto, nella sezione infima, nella quale il metallo sopporta lo sforzo unitario massimo dato da

$$\sigma' = \frac{0,00134138\, r^2}{0,02\, r} + \frac{0,00066528\, r^3}{\frac{1}{6}\, 1 \,.\, (0,02\, r)^2} =$$
$$= 0,067\, r + 9,979\, r = 10,046\, r.$$

Ricordando ora l'espressione approssimata della variazione di curvatura di un solido ad asse curvilineo:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ} \tag{7}$$

accettabile nel caso nostro in grazia del piccolo rapporto fra lo spessore ed il raggio del tubo, se ne deduce il nuovo raggio di curvatura per i singoli tronchi del semianello:

$$r_1 = \frac{r}{1 + \frac{Mr}{EJ}} = \frac{r}{1 + \frac{Mr}{2000000 \frac{1}{12} 1 (0,02\, r)^3}} = \frac{r}{1 + 0,75 \frac{M}{r^2}} \,. \tag{8}$$

Nell'ultima colonna della Tabella I figurano i valori di r_1 *nella ipotesi di* $\mathrm{r} = 100$ *cm.* In quest'ipotesi risulta:

$$\sigma' = 1004,6 \ {}^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2} \text{ ammissibile.}$$

Coi valori forniti dall'ultima colonna della precedente tabella, e partendo dalla sezione infima del tubo si è costruita per il semianello sinistro una policentrica disegnata a piccoli tratti, i cui diversi archetti hanno tutti la lunghezza $\frac{\pi r}{18}$. Essa rappresenta con grande approssimazione la deformata dell'asse geometrico della semisezione del tubo.

Colla detta costruzione risulta al vertice del tubo, di 100 cm. di raggio, un abbassamento di cm. 2,13, e questo può essere facilmente verificato col teorema delle derivate del lavoro, supponendo che il semianello, oltre alle sollecitazioni effettive, già considerate, venga anche caricato di un carico concentrato verticale P fittizio applicato al vertice, il cui valore si manderà poi a zero nel risultato finale. In tali condizioni l'abbassamento cercato δ, adottando i consueti simboli, viene espresso notoriamente dalla

$$\delta = \frac{\partial L}{\partial P} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P} ds \tag{9}$$

potendosi trascurare le deformazioni prodotte dallo sforzo assiale e dallo sforzo di taglio rispetto a quelle generate dal momento flettente.

Tenendo presenti le espressioni (1), (5) e (6) ed osservando che il momento prodotto dal carico P è $Pr \operatorname{sen} \varphi$ e quindi $\frac{\partial M}{\partial P} = r \operatorname{sen} \varphi$, ed annullando nell'espressione finale il termine in P, si ottiene:

$$(10) \quad \delta = \frac{r^5}{EJ} \Big[- 0{,}00031581 \int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi + \\ + 0{,}00080248 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi - \\ - 0{,}001 \int_0^\pi \left(1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \varphi\right) \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi + \\ + 0{,}0078 \times 0{,}02 \int_0^\pi [\varphi \operatorname{sen} \varphi - (1 - \cos \varphi)] \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi + \\ + 0{,}005904 \int_{\varphi_1}^\pi [\cos \varphi_1 - \cos \varphi - (\varphi - \varphi_1) \operatorname{sen} \varphi] \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \Big].$$

Ora si ha:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = 2$$

$$\int_0^\pi \left(1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \varphi\right) \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = 2 - \frac{1}{2} \int_0^\pi \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi,$$

ma:

$$\int \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{4} \varphi \operatorname{sen} 2\varphi - \int \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi\right) d\varphi = \\ = \frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \frac{\varphi^2}{4} + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \\ = \frac{\varphi^2}{4} - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

e però:

$$\int_0^\pi \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi^2}{4},$$

quindi:

$$\int_0^\pi \left(1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen} \varphi\right) \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = 2 - \frac{\pi^2}{8} = 0{,}7663.$$

Si ha poi:

$$\int_0^\pi [\varphi \operatorname{sen}\varphi - (1 - \cos\varphi)] \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = -2 + \int_0^\pi \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 = 0{,}4674 ,$$

e finalmente:

$$\int_{\varphi_1}^\pi [\cos\varphi_1 - \cos\varphi - (\varphi - \varphi_1) \operatorname{sen}\varphi] \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \cos\varphi_1 \int_{\varphi_1}^\pi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi - \int_{\varphi_1}^\pi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi -$$

$$- \int_{\varphi_1}^\pi \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi + \varphi_1 \int_{\varphi_1}^\pi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi ,$$

e per $\varphi_1 = 160^\circ$:

$$\int_{\varphi_1}^\pi [\cos\varphi_1 - \cos\varphi - (\varphi - \varphi_1) \operatorname{sen}\varphi] \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \cos 160 \, (1 + \cos 160) + \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 160 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{81} =$$

$$= -0{,}056673 + 0{,}087733 - 0{,}0304617 = 0{,}000598.$$

Con questi valori la (10) diviene:

$$(11) \qquad \delta = \frac{r^5}{EJ} [-0{,}00031581 \times 2 + 0{,}00080248 \times 2 -$$

$$- 0{,}001 \times 0{,}7663 + 0{,}000156 \times 0{,}4674 + 0{,}005904 \times 0{,}000598] ,$$

ossia, facendo $E = 2000000 \ ^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2}$:

$$\delta = \frac{0{,}0002835 \, r^5}{2000000 \, \frac{1}{12} \, 1 \, (0{,}02 \, r)^3} = 0{,}0002126 \, r^2.$$

Questa formola, *valevole per qualunque raggio*, purchè lo spessore del tubo sia $0{,}02\, r$, nell'ipotesi di $r = 100$ cm., fornisce ancora

$$\delta = \text{cm. } 2{,}13.$$

Tubo di spessore 0,01 r. — In tal caso le (1), (2), (3), (4), (5) e (6) divengono

$$(12)\begin{cases} H = (0,001 \times 0,73055 + 0,0078 \times 0,01 \times 0,461102)\, r^2 = \\ \qquad = 0,00076652\, r^2 \\ M_0 = -(0,001 \times 0,24071 + 0,0078 \times 0,01 \times 0,48142)\, r^3 = \\ \qquad = -0,00027826\, r^3 \end{cases}$$

$$(13) \qquad \frac{M_0}{H} = -0,363\, r$$

$$(14)\begin{cases} H_1 = (0,001 \times 1,26945 - 0,0078 \times 0,01 \times 0,46110)\, r^2 = \\ \qquad = 0,00130541\, r^2 \\ M_1 = -(0,001 \times 0,5071 + 0,0078 \times 0,01 \times 1,01396)\, r^3 = \\ \qquad = -0,0005862\, r^3 \end{cases}$$

$$(15) \qquad \frac{M_1}{H_1} = -0,449\, r$$

$$(16) \quad M = M_0 + Hr(1 - \cos\varphi) - 0,001\, r^3 \left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi \operatorname{sen}\varphi\right) + \\ + 0,000078\, r^3 \left[\varphi \operatorname{sen}\varphi - (1 - \cos\varphi)\right]$$

$$(17) \qquad 0,005202\, r^3 \left[\cos\varphi_1 - \cos\varphi - (\varphi - \varphi_1) \operatorname{sen}\varphi\right].$$

Immaginando divisa ancora la semicirconferenza in 18 tronchi di eguale lunghezza, corrispondenti ad un angolo al centro di 10°, si sono calcolati i momenti per le sezioni terminali dei detti tronchi, utilizzando i valori numerici registrati nella 2ª, 3ª e 4ª colonna della Tabella I, e si sono ottenuti i valori che vedonsi riportati nella seguente Tabella II.

La (8) poi diviene:

$$(18) \qquad r_1 = \frac{r}{1 + \dfrac{Mr}{2000000 \, \dfrac{1}{12}\, 1\, (0,01\, r)^3}} = \frac{r}{1 + 6\, \dfrac{M}{r^2}}.$$

Fatta ancora l'ipotesi di $r = 100$ cm., si calcolarono i valori di r_1 che sono registrati nell'ultima colonna della stessa Tabella II. Nella figura vedesi disegnato a *tratti e punti* per la metà destra dell'anello il diagramma di M costruito nel modo

stesso già indicato per l'altro caso. Coi valori di r_1 si è costruita poi per la metà sinistra dell'anello e nel modo già spiegato, la policentrica rappresentante l'asse deformato del tubo; questa curva è disegnata a *tratti e punti* [1].

TABELLA II.

φ	$\frac{M}{r^3}$	r_1 ($r = 100$)
		cm.
0	— 0,00027826	120,04
10	— 0,00026548	118,95
20	— 0,00022803	115,85
30	— 0,00016867	111,26
40	— 0,00009178	105,83
50	— 0,00000312	100,19
60	+ 0,00009019	94,87
70	+ 0,00018034	90,24
80	+ 0,00025914	86,54
90	+ 0,00031818	83,97
100	+ 0,00034963	82,66
110	+ 0,00034650	82,79
120	+ 0,00030291	84,62
130	+ 0,00021464	88,59
140	+ 0,00007949	95,45
150	— 0,00010289	106,58
160	— 0,00033040	124,73
170	— 0,00052159 (*)	145,55
180	— 0,00058620	154,25

(*) Il termine dovuto alla reazione è:

$$0{,}005202\left[\cos 160 - \cos 170 - \frac{\pi}{18}\,\mathrm{sen}\,170\right] = +0{,}00007709.$$

In questo secondo caso, come vedesi, le deformazioni sono notevolmente maggiori; l'abbassamento del vertice risulta di cm. 15, ed allo stesso risultato si giunge anche qui applicando

[1] In questa costruzione si è supposto, in via di approssimazione, che la deformazione dell'appoggio concordasse con quella del tubo.

il teorema delle derivate del lavoro. La (11) diviene infatti in tal caso:

$$\delta = \frac{r^5}{EJ}(-0,00027826 \times 2 + 0,00076652 \times 2 - 0,001 \times 0,7663 + \\ + 0,000078 \times 0,4674 + 0,005202 \times 0,000598)$$

ossia:

$$\delta = \frac{0,00024978\, r^5}{2000000 \frac{1}{12} 1\,(0,01\, r)^3} = \sim 0,0015\, r^2 .$$

Questa formola valevole per qualunque raggio, purchè lo spessore del tubo sia $0,01\, r$, fornisce ancora, nell'ipotesi di $r = 100$ cm., $\delta =$ cm. 15.

Le deformazioni che subisce il tubo in questo secondo caso non essendo trascurabili, è interessante la ricerca della variazione nelle sollecitazioni apportata dalle dette deformazioni. Procediamo perciò ad una nuova determinazione delle quantità iperstatiche H ed M_0 prodotte dalle stesse cause precedentemente contemplate, cioè dall'acqua contenuta nel tubo senza pressione, e dal peso proprio del medesimo, prendendo come nuovo asse geometrico del semianello la deformata testè costruita per il tubo di cm. 100 di raggio.

La pressione idrostatica contro l'emmesimo dei 18 tronchi Δs di eguale lunghezza in cui è diviso il semianello deformato sinistro, se s'indica con y_m la profondità del baricentro della sezione m^{esima} sotto l'orizzontale pel baricentro della sezione al vertice è data da

$$S_m = 0,001 \frac{y_{m-1} + y_m}{2} 1 \,.\, \Delta s ,$$

ed essendo $\Delta s =$ cm. 17,45 [1] risulta:

$$S_m = 0,01745 \frac{y_{m-1} + y_m}{2} = 0,008725\,(y_{m-1} + y_m).$$

---

[1] La lunghezza dell'arco si ritiene eguale a quella della corda, la differenza essendo soltanto dell'1 °/₀₀ circa.

Nella seguente Tabella III sono riportati i valori di y, di y^2 e di S.

TABELLA III.

Sezioni	y	y^2	S	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}y$
	cm.	cm²	Kg.	Kgcm.	Kgcm²
0	0	0		0	0
1	1,3	2	0,01	1	1
2	5,0	25	0,05	4	20
3	11,5	132	0,14	8	92
4	20,0	400	0,27	10	200
5	31,2	973	0,45	7	218
6	44,4	1972	0,66	— 3	— 133
7	59,5	3540	0,91	— 28	— 1666
8	76,0	5776	1,18	— 70	— 5320
9	93,5	8742	1,48	— 137	— 12809
10	111,1	12343	1,79	— 231	— 25664
11	128,2	16435	2,09	— 354	— 45383
12	143,4	20564	2,37	— 499	— 71557
13	157,0	24649	2,62	— 682	— 107074
14	167,6	28090	2,83	— 884	— 148158
15	175,6	30835	2,99	— 1102	— 193511
16	180,8	32689	3,11	— 1361	— 246069
17	184,0	33856	3,18	— 1554(*)	— 285936
18	185,0	34225	3,22	— 1631(*)	— 301735

(*) I momenti $\mathfrak{M}$ relativi alle sezioni 17 e 18 comprendono anche il termine positivo dovuto alla reazione d'appoggio, il quale per la sezione 17 vale $8,91 \times 8,7 = 77,52$ e per la sezione 18 vale $17,82 \times 17,4 = 310$.

Le linee d'azione delle spinte S furono trovate graficamente colla ben nota costruzione; disegnata poi la poligonale delle singole S, come vedesi nella figura, fu agevole determinare, con una composizione successiva, le linee d'azione delle risultanti progressive S_{1-m}. Da queste e col sussidio di un poligono funicolare connettente i pesi eguali dei singoli tronchi Δs che risultano di $0,0078 \times 1 \times 1 \times 17,45 =$ Kg. 0,13611 si dedussero i momenti $\mathfrak{M}$ per le varie sezioni terminali dei tronchi, anche

essi registrati nella Tabella III, l'ultima colonna della quale contiene i prodotti $\mathfrak{M}y$.

Indicando con n il numero dei tronchi di eguale lunghezza Δs in cui è stato diviso il semianello, le quantità iperstatiche M_0 ed H vengono determinate notoriamente dalle equazioni

$$n M_0 + H \sum y = -\sum \mathfrak{M}$$
$$M_0 \sum y + H \sum y^2 = -\sum \mathfrak{M} y .$$

Calcolando le sommatorie colla formola di Simpson si ottiene:

$$18\, M_0 + 1683\, H = 7687$$
$$1683\, M_0 + 238200\, H = 1293123$$

od anche:

$$M_0 + 93{,}5\; H = 427{,}05$$
$$M_0 + 141{,}5\; H = 768{,}34$$

dalle quali si ricava:

$$H = \text{Kg. } 7{,}11\;; \qquad M_0 = -238 \text{ Kgcm.}\;; \qquad \frac{M_0}{H} = -33{,}5 \text{ cm.}$$

e quindi per la sezione infima:

$$M_1 = M_0 + H\, 185 - 1631 = -554$$
$$H_1 = \frac{1}{2}\, 0{,}001 \times 1 \times 185^2 - H = 17{,}11 - 7{,}11 = 10$$
$$\frac{M_1}{H_1} = -55{,}4 \text{ cm.}$$

mentre le (12) a (15) per $r = 100$ forniscono:

$$H = 7{,}67 \qquad M_0 = -278 \qquad \frac{M_0}{H} = -36{,}3$$

$$H_1 = 13 \qquad M_1 = -586 \qquad \frac{M_1}{H_1} = -44{,}9.$$

Dal confronto di questi valori emerge la diminuzione nelle sollecitazioni derivante dalla deformazione del tubo. Cosicchè la deformazione effettiva e quindi anche la diminuzione nelle sollecitazioni saranno un poco minori di quelle calcolate.

Tutto ciò però suppone che la deformazione sia elastica, mentre ammessi anche i valori finali di H, M_0, H_1 ed M_1 sopra calcolati, il metallo sopporterebbe nella sezione infima uno sforzo unitario eccedente il limite di elasticità. Si ha infatti:

nella sezione al vertice $\sigma' = \frac{7,11}{1^2} + \frac{238}{\frac{1}{6} 1^3} = 1435 \ {}^{Kg}/_{cm^2}$

" infima $\sigma' = \frac{10}{1^2} + \frac{554}{\frac{1}{6} 1^3} = 3334$ "

Vero è che quest'ultimo sforzo verrà alquanto ridotto dalla resistenza del sostegno, il quale subirà effettivamente una deformazione minore di quella supposta.

Dal presente studio emerge la notevole differenza nell'entità delle deformazioni prodotte dall'acqua che riempie il tubo senza pressione e dal peso proprio del medesimo per i due valori attribuiti allo spessore del tubo di 100 cm. di raggio. Mentre nel tubo di 2 cm. di spessore, pel quale il metallo è cimentato non oltre l'ordinario carico di sicurezza, le deformazioni rimangono molto limitate, per quello di 1 cm. (e nella pratica se ne progettano di spessore anche minore), pel quale il metallo è soverchiamente cimentato, le deformazioni raggiungono proporzioni tali da modificare sensibilmente il regime statico corrispondente alla forma primitiva del tubo.

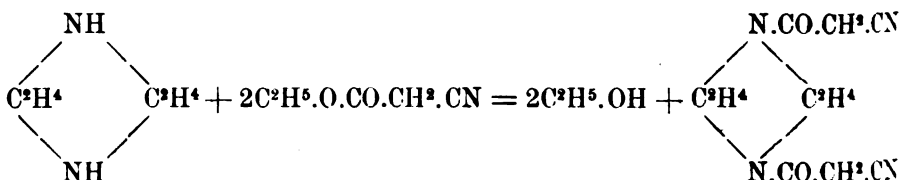
Torino, 22 febbraio 1912.

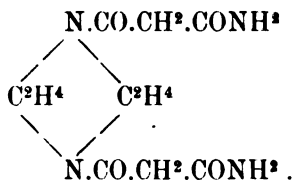
Su alcuni nuovi derivati della piperazina.

Nota del Dott. MARIO GHIGLIENO.

Già da parecchi anni erano state fatte dal prof. Guareschi delle esperienze preliminari sulle reazioni che avvengono fra la piperazina e l'etere cianacetico in diverse condizioni. Per consiglio dello stesso prof. Guareschi io ho proseguito queste ricerche, sui risultati delle quali riferirò qui brevemente.

La piperazina reagisce facilmente coll'etere cianacetico alla temperatura di 100°-120°, formando, con eliminazione di due molecole di alcool, un composto di condensazione fra una molecola della base e due dell'etere, secondo l'equazione seguente:

$$\begin{array}{ccc} & NH & \\ \diagup & & \diagdown \\ C^2H^4 & & C^2H^4 \\ \diagdown & & \diagup \\ & NH & \end{array} + 2C^2H^5.O.CO.CH^2.CN = 2C^2H^5.OH + \begin{array}{ccc} & N.CO.CH^2.CN & \\ \diagup & & \diagdown \\ C^2H^4 & & C^2H^4 \\ \diagdown & & \diagup \\ & N.CO.CH^2.CN & \end{array}$$

Però la reazione avviene in questo modo soltanto quando si fa agire l'etere cianacetico sulla piperazina privata della sua acqua di cristallizzazione (p. fus. 104°). Se invece si opera colla base cristallizzata, contenente 6 molecole di acqua di cristallizzazione, quest'acqua agisce subito sopra i due gruppi —CN. e invece del composto soprascritto si ottiene il corrispondente derivato di-amidico:

$$\begin{array}{ccc} & N.CO.CH^2.CONH^2 & \\ \diagup & & \diagdown \\ C^2H^4 & & C^2H^4 \\ \diagdown & & \diagup \\ & N.CO.CH^2.CONH^2 & \end{array} .$$

La condensazione tra piperazina ed etere cianacetico in soluzione alcoolica avviene anche alla temperatura ordinaria e in questo caso, colla piperazina idrata, si forma una miscela dei due prodotti sopra accennati. Questo fatto è degno di particolare attenzione, in quanto esso dimostra che l'idratazione dei gruppi nitrilici del derivato bicianico, che si deve evidentemente formare per primo, avviene con straordinaria facilità.

Si osserva poi invece, come già in varî altri casi di derivati cianacetilici preparati in questo laboratorio, che il composto diamidico resiste fortemente agli agenti idratanti quando si tenta di trasformare i suoi due gruppi amidici in carbossili. Infatti, in varie ore di ebollizione con acqua di barite non fu possibile ottenerne la quantità di ammoniaca corrispondente all'accennata idratazione, e prolungando ancora l'ebollizione il prodotto si scompose profondamente con formazione di acido malonico. Anche al trattamento con acido nitroso in soluzione solforica il composto reagisce con una certa difficoltà per dare la quantità di azoto corrispondente a due gruppi amidici.

Se la piperazina che si fa reagire sull'etere cianacetico contiene solo una parte dell'acqua di cristallizzazione normale (p. fus. 70°-80°) si ottiene semplicemente il di-cianacetilderivato non idrolizzato.

Disidratazione della piperazina a temperatura ordinaria sul cloruro di calcio.

Grammi 14,03 di piperazina Bayer cristallizzata e compressa prima fra carta bibula, lasciati per 2 mesi e mezzo in disseccatore a cloruro di calcio perdettero 66,3 % del proprio peso. Un mese e mezzo dipoi la perdita di peso ammontava al 76,6 % e dopo 6 mesi dal principio dell'esperienza la perdita totale era del 93 %. La sostanza residua fondeva a 102°-104° come la piperazina anidra.

La quantità di acqua che corrisponde alla formola dell'idrato $C^4H^{10}N^2 + 6H^2O$ è uguale al 55,7 %.

In un'altra esperienza con 24 gr. di piperazina cristallizzata si ebbe in 70 giorni una perdita di peso dell'85 %. Il cloruro di calcio del disseccatore non aveva odore alcuno e trattato con potassa concentrata dava manifesto sviluppo di vapori al-

calini con odore aminoide. In una terza esperienza, fatta pesando anche il cloruro di calcio, l'aumento di peso di quest'ultimo corrispondeva molto bene alla perdita subita dalla sostanza. In un mese circa si raggiunse la perdita del 55 %, corrispondente alle 6 molecole di acqua, ma la piperazina non era ancora completamente anidra perchè fondeva a 80°-85°. Dunque con tutta probabilità il cloruro di calcio assorbe insieme coll'acqua anche la piperazina, formando un composto che non ho ancora separato e studiato.

Condensazione fra etere cianacetico e piperazina anidra.

Grammi 4,03 di piperazina anidra, fusibile a 104°, (ottenuta lasciando a lungo in disseccatore a cloruro di calcio la piperazina cristallizzata del commercio) vennero introdotti con 10,5 cm^3 di etere cianacetico in un piccolo apparecchio distillatorio, scaldando a 100°-115° per un'ora circa e cioè fintanto che non distillava più alcool. Dopo alcuni minuti di riscaldamento la piperazina si scioglie e tosto comincia a separarsi la nuova sostanza cristallizzata, che va sempre aumentando finchè il tutto diventa una densa poltiglia cristallina giallognola.

Fatto macerare in poco alcool il prodotto della reazione e separato quindi dal liquido, si ottennero gr. 5,7 di una polvere cristallina leggermente giallognola.

Ricristallizzata dall'alcool a 60° la sostanza si presenta in minuti aghetti incolori o appena giallognoli. Ha reazione neutra. è solubile più o meno facilmente in acqua, alcool, etere e benzene, e fonde con scomposizione ed annerimento a 248°-250°.

All'analisi diede i seguenti risultati:

I. — Da gr. 0,1170 di sostanza seccata a 100° si ebbero cm^3 23,6 di azoto a 0° e 760 mm.;

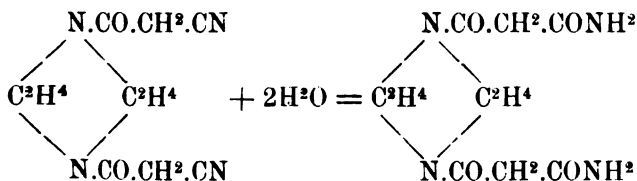
II. — Da gr. 0,1590 di sostanza, gr. 0,3190 di CO^2 e gr. 0,0822 di H^2O

	Trovato		Calcolato per $C^{10}H^{12}N^4O^2$
	I	II	
C %	—	54,71	54,51
H %	—	5,78	5,49
N %	25,22	—	25,45

Condensazione fra etere cianacetico e piperazina idrata.

La piperazina del commercio, quale venne fornita dalle case Fr. Bayer e Schering, si presenta in cristallini leggermente umidi, che, compressi fortemente fra carta bibula, fondono a 44°-45° com'è indicato per l'idrato $C^4H^{10}N^2.6H^2O$ da Berthelot (1) che studiò le proprietà di questa sostanza.

Riscaldandola a 100° per circa due ore con la quantità di etere cianacetico corrispondente a due molecole, si ha sviluppo di alcool in quantità molto prossima a quella calcolata per due molecole, mentre si forma un denso magma cristallino. Da questo si può separare subito già quasi pura la sostanza prodottasi nella reazione, sotto forma di minuti aghetti bianchi. Con una sola cristallizzazione dall'alcool a 60°-70° si ottiene questa sostanza affatto pura in bei prismi tabulari striati perfettamente bianchi o in sottili aghetti incolori, che si scompongono con vivo schiumeggiamento e sviluppo di gas ad una temperatura che varia, a seconda della velocità del riscaldamento, da 175° a 185°. Immergendo la sostanza nel bagno già scaldato a 100° e innalzando poi rapidamente la temperatura fin presso al punto di fusione si ha la decomposizione abbastanza regolarmente sempre verso 174°-175°. Neanche sul blocco Maquenne si può avere un dato molto preciso. La cosidetta fusione o decomposizione istantanea, nel senso inteso dal Maquenne stesso, si ha verso i 192°-195°.

All'analisi questa sostanza diede dei risultati che corrispondono al derivato diamidico del composto che si ha colla piperazina anidra, quale si forma da quest'ultimo per assorbimento di due molecole d'acqua:

I. — Gr. 0,1163 di sostanza diedero cm³. 20,2 di azoto a 0° e 760 mm.;

II. — Gr. 0,2340 di sostanza asciutta all'aria diedero gr. 0,3958 di CO^2 e gr. 0,1324 di H^2O;

---

(1) C. R., 129, pag. 688.

III. — Gr. 0,2128 della stessa, seccata a 110°, diedero gr. 0,3664 di CO^2 e 0,1226 di H^2O.

	Trovato			Calcolato per $C^{10}H^{16}N^4O^4$
	I	II	III	
C %	—	46,13	46,95	46,84
H %	—	6,39	6,45	6,30
N %	21,72	—	—	21,87

La sostanza non contiene acqua di cristallizzazione; come si vede anche dai risultati dell'analisi. Ha reazione nettamente acida, inverte il saccarosio e scompone i carbonati; è molto solubile in acqua, meno in alcool, etere, benzene, ecc. Le soluzioni acquose non troppo diluite precipitano coll'acetato di piombo, col cloruro mercurico, ecc. Col nitrato d'argento e col solfato di rame si formano dei sali ben cristallizzati. Trattata con un eccesso di nitrito di sodio in soluzione solforica dà una quantità di azoto corrispondente molto prossimamente al calcolato per due gruppi $CONH^2$ (23,7 % invece di 21,8 %).

Come già ho fatto notare, mentre questo composto si forma con tanta facilità dal corrispondente dinitrile, resiste poi in modo speciale alla ulteriore idratazione per trasformarsi in derivato bicarbossilico.

In due esperienze fatte a questo scopo, mediante ebollizione con un eccesso di acqua di barite, occorsero circa 11 ore di ebollizione per ottenere la quantità di ammoniaca calcolata per l'idratazione dei due gruppi amidici, ma intanto la sostanza si scompose profondamente con formazione di acido malonico.

La condensazione fra etere cianacetico e piperazina avviene anche a temperatura ordinaria. Sciogliendo nell'alcool le due sostanze e lasciando a sè la soluzione, si vede già dopo alcune ore iniziarsi un deposito di cristalli che va sempre via via aumentando fino a dare dopo alcuni giorni un denso magma cristallino, che, nel caso della piperazina idrata, è costituito dalla miscela dei due prodotti di condensazione descritti dianzi.

Dunque anche a temperatura ordinaria basta la presenza nell'alcool dell'acqua di cristallizzazione della piperazina per far sì che una parte del cianacetilderivato si idrolizzi assorbendo due molecole d'acqua per formare il composto diamidico.

Torino. R. Università, Laboratorio di Chimica farmac. e tossic. Gennaio 1913.

Eterificazione di o-ossiazocomposti.

Nota II[a] dei Dottori G. CHARRIER e G. FERRERI.

Continuando lo studio degli eteri che si ottengono per azione dei solfati alchilici, in presenza di soluzioni alcaline concentrate, sugli o-ossiazocomposti, derivanti dalla copulazione dei sali di diazonio col β-naftol, descriviamo nella presente nota alcuni nuovi composti di questa serie. Dall'esame di essi e di quelli descritti nella Nota I[a] (1) si può dedurre che le proprietà basiche di questi corpi sono accresciute dalla presenza dell'ossidrile o di gruppi ossidrilici eterificati (metossile, etossile) nel nucleo benzenico, mentre sono fortemente diminuite, cosa facile a prevedersi, dall'entrata di gruppi negativi (nitrogruppo, alogeni, ecc.): infatti mentre i derivati degli anisil-, fenetil- e ossifenil-azoβnaftoli si sciolgono facilmente negli acidi diluiti, e forniscono, per es., cloridrati capaci di cristallizzare dall'acido cloridrico diluito, i derivati del fenilazoβnaftol e omologhi sono meno solubili negli acidi diluiti, e infine i derivati contenenti nel nucleo benzenico atomi di alogeni o nitrogruppi sono quasi insolubili negli acidi diluiti, e i loro sali possono solamente venir preparati operando in soluzioni in etere assoluto. Anche la loro stabilità di fronte agli agenti di saponificazione (acidi diluiti) va crescendo in ragione diretta del loro potere basico.

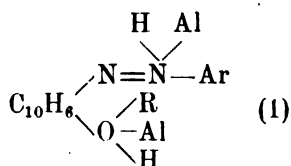
Per quanto concerne la loro basicità, gli eteri degli arilazoβnaftoli si comportano generalmente come basi biacide: facendo agire in soluzione in etere assoluto una quantità sufficiente di idracido si ottengono sempre dei sali del tipo $C_{10}H_6\begin{cases}N=N-Ar\\OR.2HAl\end{cases}$: soltanto operando in condizioni speciali questi composti possono funzionare da basi monoacide. I sali, che gli eteri degli arilazoβnaftoli dànno cogli idracidi, contenenti due molecole di questi, sono in generale sostanze ben cristallizzate, solubili in

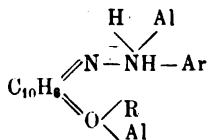
(1) " Atti ,, vol. XLVII, 811 (1911-12).

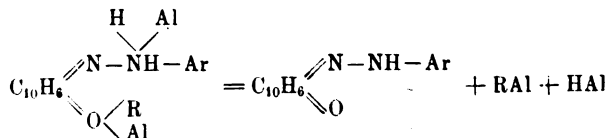
alcool e negli altri solventi organici con parziale dissociazione, insolubili in etere e in benzolo in presenza di acido cloridrico, decomposti istantaneamente dall'acqua. All'aria secca sono abbastanza stabili, mentre perdono rapidamente l'acido all'aria umida, e dopo poco tempo sono decomposti completamente.

La struttura di questi sali, a nostro avviso, si può dedurre dal loro comportamento al riscaldamento, poichè scaldati a 100° si scindono in una molecola dell'arilazoβnaftol, da cui derivano, in una di idracido e in una dell'alogenuro del radicale alcoolico che contengono. Ammettendo per gli eteri degli arilazoβnaftoli la struttura di veri azocomposti, struttura ammessa generalmente per gli eteri degli altri o-ossiazocomposti e da noi dimostrata per questa nuova serie colla riduzione e coll'azione dell'acido nitrico, e inoltre considerando come sali di ammonio sostituiti i sali descritti nella Nota I[a], per le ragioni colà esposte, dobbiamo attribuire a questi sali, contenenti due molecole di idracido, la struttura di sali di ammonio e di ossonio sostituiti, formulandoli collo schema seguente:

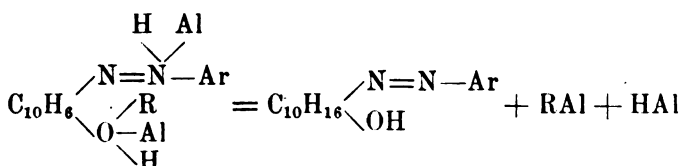
```
              H  Al
               \/
          /N=N—Ar
C10H6  <     /R
          \O—Al
            \H
```

(1)

(1) Facciamo notare come anche colla formola chinonica

```
              H  Al
               \/
         //N—NH—Ar
C10H6 <
         \\O<R
             \Al
```

si possa interpretare la scissione prodotta dal calore sui sali degli eteri degli arilazo-βnaftoli cogli acidi alogenici, che avverrebbe in questo caso secondo l'equazione:

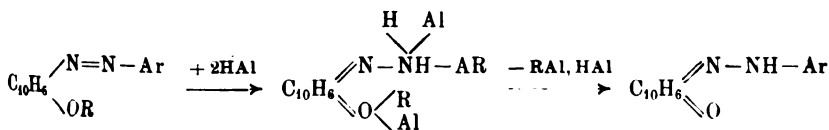
```
           H  Al
            \/
      //N—NH—Ar                  //N—NH—Ar
C10H6                 = C10H6                 + RAl + HAl
      \\O<R                      \\O
          \Al
```

anzi come questa formulazione permetta di rappresentare il passagigo dalla

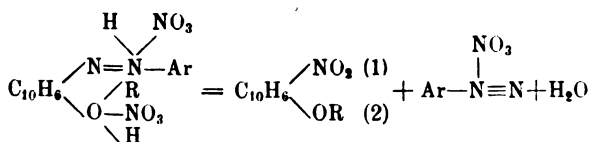
L'azione del calore su questi sali può venir così facilmente rappresentata dall'equazione:

$$C_{10}H_6\begin{cases} N=\overset{H\;\;Al}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}-Ar \\ \quad\diagup R \\ O-Al \\ \;\diagdown H \end{cases} = C_{10}H_{16}\begin{cases} N=N-Ar \\ OH \end{cases} + RAl + HAl$$

La struttura, che noi proponiamo per i sali degli eteri degli arilazoβnaftoli, si fonda dunque sulla formazione dell'alogenuro alchilico, dovendosi ammettere che il radicale alcoolico e l'atomo di alogeno siano legati allo stesso atomo nella molecola, ed essendo dimostrato che il primo è legato all'atomo di ossigeno dell'ossidrile naftolico. Una trasposizione intramolecolare del radicale alcoolico nell'atto della formazione del sale va esclusa per la natura dei prodotti di riduzione che abbiamo ottenuto dal cloridrato dell'etere etilico del fenilazoβnaftol in soluzione cloridrica con polvere di zinco e pel fatto, del quale

---

struttura evidentemente azoica degli eteri alla struttura chinonica da molti attribuita agli arilazoβnaftoli:

$$C_{10}H_6\begin{cases} N=N-Ar \\ OR \end{cases} \xrightarrow{+2HAl} C_{10}H_6\begin{cases} \!/\!\!/ N-\overset{H\;\;Al}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}H-AR \\ \diagdown O\begin{cases} R \\ Al \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{-RAl,\,HAl} C_{10}H_6\begin{cases} \!/\!\!/ N-NH-Ar \\ \diagdown\!\diagdown O \end{cases}$$

Però attribuendo in modo generale ai sali degli eteri degli arilazoβnaftoli, la struttura chinonica, non si spiega in modo soddisfacente, nè l'azione dell'acqua sui cloridrati, nè la decomposizione dei nitrati degli stessi eteri, di cui stiamo ora occupandoci e che avviene, adottando la formola azoica, verisimilmente secondo lo schema seguente:

$$C_{10}H_6\begin{cases} N=\overset{H\;\;NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}-Ar \\ \quad\diagup R \\ O-NO_3 \\ \;\diagdown H \end{cases} = C_{10}H_6\begin{cases} NO_2\;(1) \\ OR\;\;(2) \end{cases} + Ar-\overset{NO_3}{\overset{|}{N}}\equiv N + H_2O$$

Ai sali degli ossiazocomposti ed eteri cogli idracidi venne attribuita, partendo generalmente da considerazioni teoriche, la struttura di sali di ossonio da Fox ed Hewitt [" Journ. of Chem. Soc. ", *93*, 333 (1908)] e da Hantzsch [B. *42*, 2134 (1909)].

sarà parola nella parte sperimentale, che i sali degli eteri degli arilazoβnaftoli, trattati con acqua o con soluzioni alcaline, ridanno gli eteri corrispondenti.

Coll'acido nitrico in soluzione in etere, gli eteri degli arilazoβnaftoli dànno composti ben cristallizzati, stabili all'aria, poco solubili in etere, più solubili in alcool e cloroformio, insolubili in benzolo e ligroina, del cui comportamento riferiremo in una Nota III[a].

Etere metilico del fenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N{-}C_6H_5 & (1) \\ OCH_3 & (2) \end{cases}$

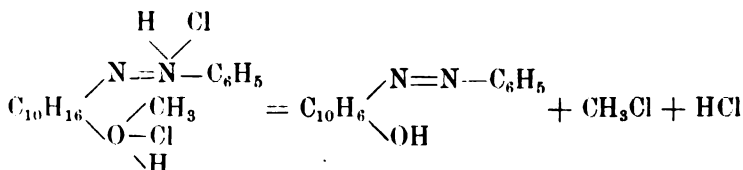
Cloridrato $C_{17}H_{14}N_2O.2HCl$: si ottiene facilmente per azione di un eccesso di acido cloridrico sciolto in etere assoluto su una soluzione eterea del composto ed è costituito da una sostanza cristallina rosso-bruna a riflessi verde-cantaride.

Gr. 0,3592 di sostanza diedero gr. 0,3120 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,077142 di cloro.

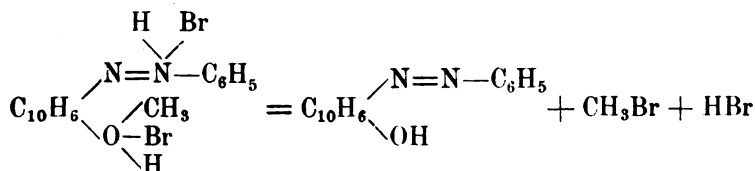
Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O.2HCl$
Cloro	21,47	21,19

Il cloridrato avanti descritto è dotato di poca stabilità: fuma all'aria umida, svolgendo acido cloridrico, è decomposto istantaneamente dall'acqua. Scaldato verso 100° si scinde in fenilazoβnaftol fusibile a 132°-133°, cloruro di metile e acido cloridrico, secondo l'equazione seguente:

$$C_{10}H_{16}\begin{cases} N{=}\overset{H\ \ Cl}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}{-}C_6H_5 \\ \overset{\diagup CH_3}{O}{-}Cl \\ \diagdown H \end{cases} = C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N{-}C_6H_5 \\ OH \end{cases} + CH_3Cl + HCl$$

Bromidrato $C_{17}H_{14}N_2O.2HBr$: è una sostanza cristallina rossa, che venne ottenuta impiegando una soluzione eterea di acido bromidrico. Per riscaldamento a 100° il bromidrato dell'etere metilico del fenilazoβnaftol si scinde in fenilazoβnaftol fusibile

a 132°-133°, in bromuro di metile che bolle a + 4° e in acido bromidrico, secondo l'equazione:

$$C_{10}H_6\begin{matrix} N{=}\overset{H\ \ Br}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}{-}C_6H_5 \\ O\overset{\diagup CH_3}{-}Br \\ \diagdown H \end{matrix} = C_{10}H_6\begin{matrix} N{=}N{-}C_6H_5 \\ OH \end{matrix} + CH_3Br + HBr$$

Etere etilico del fenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{matrix} N{=}N{-}C_6H_5 \ (1) \\ OC_2H_5 \ (2) \end{matrix}$

Per ottenere questo composto allo stato puro e cristallizzato si operò nel modo seguente: il fenilazoβnaftol venne trattato con eccesso di solfato di etile in pallone, e alla miscela si aggiunse un forte eccesso di soluzione di idrato potassico al 50 % bollente (nell'eterificazione di questi ossiazocomposti con solfato di etile è preferibile l'uso della potassa caustica al 50 % invece che della soda caustica al 30 % impiegata nella Nota I[a]): si iniziò tosto una viva reazione e al disopra della soluzione alcalina si separò uno strato oleoso contenente l'etere etilico formatosi e l'eccesso di solfato di etile che non entrò in reazione: si aggiunse alcool per decomporre questo e quando la reazione con formazione di etere etilico risultò finita, e la massa liquida diventò fredda, si aggiunse etere etilico per sciogliere il prodotto della reazione, la soluzione eterea si lavò con acqua sino a scomparsa della reazione alcalina, si seccò accuratamente su cloruro di calcio fuso, e si addizionò di una quantità sufficiente di acido cloridrico sciolto in etere in modo da precipitare il cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HCl$: questo venne raccolto, lavato accuratamente con etere anidro contenente acido cloridrico, quindi decomposto in imbuto a robinetto con soluzione diluita di idrato sodico in presenza di etere: agitando, l'etere etilico del fenilazoβnaftol, messo così in libertà dal cloridrato, si sciolse nell'etere, e la soluzione eterea, lavata con soluzione diluita di idrato sodico e seccata su cloruro di calcio fuso, fornì per distillazione dell'etere, l'etere etilico del fenilazoβnaftol allo stato di olio denso. Quest'olio di color rossocupo, lasciato a bassa temperatura per parecchie settimane in contatto con ligroina, fornì cristalli, costituenti l'etere etilico del fenilazoβnaftol, for-

mati da tavole prismatiche quadrate di color rosso-granato, fusibili a 79°.

Gr. 0,1512 di sostanza diedero cc. 13,5 di azoto (H_0=732,288 t = 17°) ossia gr. 0,015192.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O$
Azoto	10,04	10,14

È molto solubile nell'alcool, nell'etere, nel cloroformio, nel benzolo, meno nella ligroina: la sua cristallizzazione presenta grandi difficoltà. Si scioglie negli acidi minerali diluiti e nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa. L'etere etilico del fenilazoβnaftol, scaldato con acidi diluiti, si scinde in alcool etilico e in fenilazoβnaftol fusibile a 132°-133°. Alla riduzione con zinco e acido acetico dà anilina e etere etilico dell'1-amido-2-naftol, fusibile verso 50°.

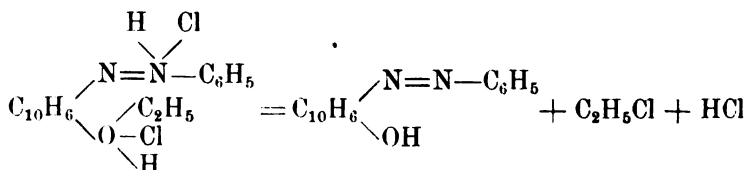
Il cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HCl$ è costituito da fogliette pesanti di color verde metallico: fu ottenuto aggiungendo ad una soluzione eterea dell'etere etilico acido cloridrico sciolto in etere assoluto.

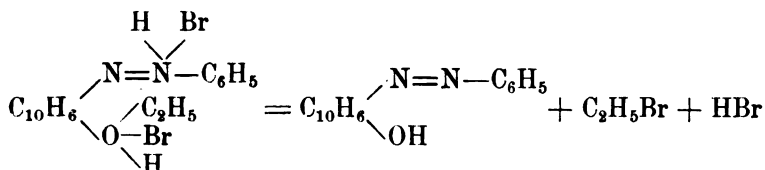
Gr. 0,8440 di sostanza diedero gr. 0,6712 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,165954 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O.2HCl$
Cloro	19,66	20,34

Il cloridrato dell'etere etilico del fenilazoβnaftol, ridotto con zinco in soluzione cloridrica, fornì anilina e etere etilico dell'1-amido-2-naftol, caratterizzato dal punto di fusione 50° e dalla reazione colorata con cloruro ferrico. Scaldato verso 100° il cloridrato dell'etere etilico si scinde in fenilazoβnaftol (P. F. 132°-133°), in cloruro di etile e in acido cloridrico secondo l'equazione seguente:

$$C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}\overset{H\ \ Cl}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}{-}C_6H_5 \\ O{<}^{C_2H_5}_{Cl}\ \diagdown H \end{cases} = C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N{-}C_6H_5 \\ OH \end{cases} + C_2H_5Cl + HCl$$

Il bromidrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HBr$ si ottiene coll'acido bromidrico sciolto in etere anidro e forma una polvere cristallina pesante di color caffè, che per evaporazione dell'etere può assumere riflesso metallico verde. Scaldato a 100° si scinde in fenilazoβnaftol, fusibile a 132°-133°, bromuro di etile che bolle a 38°-39°, e acido bromidrico, secondo l'equazione:

$$C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N=\overset{H\ \ Br}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}-C_6H_5 \\ O\overset{\diagup C_2H_5}{-}Br \\ \ \ \diagdown H \end{array}\right. = C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N=N-C_6H_5 \\ OH \end{array}\right. + C_2H_5Br + HBr$$

Il iodidrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HI$, ottenuto con una soluzione eterea di acido iodidrico, forma una polvere cristallina pesante di color caffè scuro. Scaldato verso 100° fonde e dà luogo a una decomposizione tumultuosa e più complessa di quella dei casi osservati precedentemente. Però abbiamo potuto isolare, sebbene in piccola quantità, del fenilazoβnaftol e del ioduro di etile, tanto che non esitiamo a considerare la reazione come analoga alle precedenti.

Etere etilico dell'o-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N=N(1)C_6H_4(2)CH_3 \\ OC_2H_5 \end{array}\right.$

Venne ottenuto operando in modo analogo a quello descritto per l'etere etilico del fenilazoβnaftol. Cristallizzato dall'alcool, si ha in aghi piatti, di color rosso granato, fondenti a 36°.

Gr. 0,1521 di sostanza diedero cc. 13 di azoto ($H_0 = 738,806$ $t = 13°$) ossia gr. 0,015011.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O$
Azoto	9,86	9,65

È molto solubile in tutti i solventi, eccettochè nell'alcool, dal quale si separa in bei cristalli. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa: è pure solubile negli acidi minerali diluiti con colorazione rossa e con formazione di sali.

Sciogliendo dell'etere etilico dell'o-tolilazoβnaftol in etere assoluto, e aggiungendovi in eccesso una soluzione eterea di acido cloridrico si ottiene un precipitato costituito da finissimi aghetti rossi, costituenti il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HCl$: operando in soluzione diluita si può ottenere questo corpo in forma di aghi pesanti di color verde metallico.

Gr. 0,4905 di sostanza diedero gr. 0,3784 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,093554 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O.2HCl$
Cloro	19,07	19,55

Il cloridrato dell'etere etilico dell'o-tolilazoβnaftol ha le proprietà e il comportamento dei precedenti. Scaldato a 100° si scinde in o-tolilazoβnaftol, fusibile a 132°, cloruro di etile e acido cloridrico.

L'etere etilico dell'o-tolilazoβnaftol scaldato all'ebollizione con acidi diluiti fornisce o-tolilazoβnaftol (P. F. 132°), ridotto con polvere di zinco e acido acetico si scinde in o-toluidina e in etere etilico dell'1-amido-2naftol.

Etere metilico del m-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6 \langle {N=N-(1)C_6H_4(3)CH_3 \atop OCH_3}$

Si ottiene per azione del solfato di metile in eccesso sul m-tolilazoβnaftol in presenza di soluzione di idrato sodico al 30 °/₀ col solito metodo di preparazione comune a tutti gli eteri metilici degli arilazoβnaftoli descritti. Cristallizzato dall'alcool forma grandi cristalli tabulari, di color rosso granato, fusibili a 81°.

Gr. 0,1563 di sostanza diedero cc. 13,5 di azoto (H_0=739,522 t = 14°), ossia gr. 0,015510.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O$
Azoto	9,92	10,14

È molto solubile in alcool a caldo, poco a freddo: si scioglie molto nell'etere, nel cloroformio, nel benzolo, meno nella ben-

zina. Solubile negli acidi minerali diluiti, nei concentrati si scioglie molto con intensa colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HCl$, ottenuto per azione di un eccesso di soluzione di acido cloridrico in etere assoluto su una soluzione eterea del composto, è costituito da minutissimi cristalli rossi, con riflesso dorato. Scaldato a 100° si decompone in m-tolilazoβnaftol, fusibile a 141°, cloruro di metile e acido cloridrico.

L'etere metilico del m-tolilazoβnaftol saponificato dà m-tolilazoβnaftol fusibile a 141°, ridotto con polvere di zinco e acido acetico fornisce m-toluidina ed etere metilico dell'1-amido-2-naftol.

Etere etilico del m-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N(1)C_6H_4(3)CH_3}_{OC_2H_5}$

Preparato per azione del solfato di etile e soluzione di idrato potassico al 50 % sul m-tolilazoβnaftol, si ha dalla ligroina per evaporazione parziale del solvente in fogliette rosse fusibili a 84°.

Gr. 0,1690 di sostanza diedero cc. 14 di azoto ($H_0 = 734,407$ $t = 14°$), ossia gr. 0,015971.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O$
Azoto	9,45	9,65

Si scioglie molto nell'alcool, nell'etere, nel cloroformio, nel benzolo e nella ligroina. È solubile negli acidi con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HCl$ è costituito da una sostanza cristallina pesante di color caffè, facilmente decomponibile dall'aria umida e dall'acqua, ma abbastanza stabile all'aria secca. Scaldato a 100° si scinde, secondo la reazione generale dei cloridrati degli eteri degli arilazoβnaftoli, in m-tolilazoβnaftol (P. F. 141°), cloruro di etile e acido cloridrico.

L'etere etilico del m-tolilazoβnaftol saponificato dà m-tolilazoβnaftol, fondente a 141°, ridotto con polvere di zinco ed acido acetico fornisce m-toluidina ed etere etilico dell'1-amido-2-naftol.

Etere etilico del p-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N=N-(1)C_6H_4(4)CH_3\\OC_2H_5\end{cases}$

Preparato come gli eteri etilici descritti precedentemente, si ha cristallizzato dall'alcool in aghi prismatici, rossi, fusibili a 48°.

Gr. 0,1879 di sostanza diedero cc. 16 di azoto (H_0 = 739,328 t = 14°), ossia gr. 0,018377.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O$
Azoto	9,78	9,65

Solubilissimo nell'etere, nel benzolo e nel cloroformio, si scioglie meno, ma sempre abbondantemente nell'alcool, nell'etere di petrolio e nella benzina. Solubile nell'acido solforico concentrato con colorazione rosso rubino, si scioglie pure negli acidi minerali diluiti con colorazione rossa e con formazione di sali.

Il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HCl$, sostanza cristallizzata in aghetti rosso-bruni, con riflesso dorato, venne ottenuto trattando una soluzione del composto in etere assoluto con acido cloridrico sciolto in etere.

Gr. 0,4448 di sostanza diedero gr. 0,3441 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,085094 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O.2HCl$
Cloro	19,13	19,55

Il cloridrato dell'etere etilico del p-tolilazoβnaftol, scaldato a 100°, si scinde in p-tolilazo βnaftol (P. F. 135°), cloruro di etile ed acido cloridrico.

L'etere etilico del p-tolilazoβnaftol, scaldato all'ebollizione con acidi diluiti si saponifica facilmente in p-tolilazoβnaftol, fusibile a 135°. Riducendolo con polvere di zinco e acido acetico si ottengono p-toluidina ed etere etilico dell'1-amido-2naftol, le cui soluzioni acquose si colorano intensamente in azzurro con cloruro ferrico.

Etere metilico del m-clorfenilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N-(1)C_6H_4(3)Cl}_{OCH_3}$

Cristallizzato dall'alcool è costituito da piccoli prismetti od aghi di color rosso-vivo, fusibili a 77°.

Gr. 0,4241 di sostanza diedero gr. 0,2034 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,050290 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{13}N_2OCl$
Cloro	11,85	11,97

È molto solubile nell'alcool, nell'etere, nel benzolo e negli altri comuni solventi: quasi insolubile negli acidi minerali diluiti, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{17}H_{13}N_2OCl.2HCl$ è costituito da una massa di finissimi aghetti rossi: scaldato a 100° si scinde in m-clorfenilazoβnaftol, fusibile a 158°, cloruro di metile e acido cloridrico.

L'etere metilico del m-clorfenilazoβnaftol è facilmente saponificato dagli acidi diluiti all'ebollizione, formando m-clorfenilazoβnaftol, fusibile a 158° e alcool metilico; ridotto con polvere di zinco e acido acetico fornisce m-cloranilina ed etere metilico dell'1-amido-2naftol.

Etere etilico del m-clorfenilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N(1)C_6H_4(3)Cl}_{OC_2H_5}$

Si ottiene come gli eteri etilici descritti precedentemente per azione del solfato di etile ed eccesso di soluzione di potassa caustica al 50 °/₀ sul m-clorfenilazoβnaftol.

Cristallizzato dall'alcool forma fini aghi rossi, fusibili a 35°.

Gr. 0,3928 di sostanza diedero gr. 0,1780 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,044010 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{15}N_2OCl$
Cloro	11,20	11,43

È molto solubile nell'alcool, nell'etere, nel benzolo e nella benzina di petrolio: dall'alcool diluito si separa in mammelloni di finissimi aghi rossi con riflesso dorato, dalla ligroina si ha in aghi prismatici rossi. Poco solubile negli acidi minerali diluiti, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{18}H_{15}N_2OCl.2HCl$ è costituito da finissimi cristalli, di color rosso granato scuro, con riflesso metallico dorato. Scaldato a 100°, si scinde in m-clorfenilazoβnaftol (P. F. 158°) cloruro di etile e acido cloridrico.

L'etere etilico del m-clorfenilazoβnaftol saponificato per ebollizione con acidi diluiti fornisce alcool etilico e m-clorfenilazoβnaftol fusibile a 158°, ridotto con polvere di zinco e acido acetico dà m-cloranilina ed etere etilico dell'1-amido-2naftol.

Etere metilico del p-clorfenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N(1)C_6H_4(4)Cl \\ OCH_3 \end{cases}$

Cristallizzato dall'alcool, si separa in fini aghi lucenti, di color rosso, fusibili a 65°.

Gr. 0,3196 di sostanza diedero gr. 0,1588 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,039263 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{13}N_2OCl$
Cloro	12,28	11,97

È in generale meno solubile dell'etere etilico nei comuni solventi organici: nell'etere, nel benzolo e nel cloroformio si scioglie molto, meno nell'alcool e nella ligroina. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{17}H_{13}N_2OCl.2HCl$ si ottiene sotto forma di una sostanza cristallina rossa aggiungendo una soluzione di acido cloridrico in etere assoluto alla soluzione del composto in etere anidro.

Gr. 0,6796 di sostanza impiegarono per la neutralizzazione cc. 36,2 di idrato sodico $\frac{N}{10}$, corrispondenti a gr. 0,132130 di acido cloridrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{13}N_2OCl.2HCl$
Acido cloridrico	19,44	19,75

Scaldato a 100° il cloridrato dell'etere metilico del p-clorfenilazoβnaftol si scinde in p-clorfenilazoβnaftol (P. F. 162°), cloruro di metile e acido cloridrico.

L'etere metilico del p-clorfenilazoβnaftol scaldato con acidi diluiti si saponifica facilmente, dando origine ad alcool metilico e a p-clorfenilazoβnaftol, fusibile a 162°. Per riduzione con polvere di zinco e acido acetico fornisce p-cloranilina ed etere metilico dell'1-amido-2naftol, che venne caratterizzato alla colorazione azzurra con cloruro ferrico e al precipitato giallo con bicromato potassico, ottenuto dalle sue soluzioni acquose.

Etere etilico del p-clorfenilazoβnaftol $C_{10}H_6<^{N=N(1)C_6H_4(4)Cl}_{OC_2H_5}$

Ottenuto come i precedenti eteri etilici, forma, cristallizzato dall'alcool, finissimi aghi rossi, con riflesso dorato, fusibili a 53°.

Gr. 0,2717 di sostanza diedero gr. 0,1228 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,030362 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{15}N_2OCl$
Cloro	11,17	11,43

Molto solubile in tutti i comuni solventi organici, si scioglie negli acidi minerali concentrati con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{18}H_{15}N_2OCl.2HCl$, ottenuto nel modo solito con acido cloridrico in soluzione eterea, è costituito da una polvere cristallina finissima di color rosso bruno. Scaldato a 100° si scinde in p-clorfenilazoβnaftol (P. F. 162°), cloruro di etile ed acido cloridrico.

L'etere etilico del p-clorfenilazoβnaftol saponificato dà p-clorfenilazoβnaftol, fusibile a 162°, ridotto con polvere di zinco ed acido acetico p-cloranilina ed etere etilico dell'1-amido-2naftol.

Etere metilico del 2-4-diclorfenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N(1)C_6H_3(2.4\\OCH_3\end{cases}$

Cristallizza dall'alcool in fogliette di color rosso granato, fusibili a 98°.

Gr. 0,2796 di sostanza fornirono gr. 0,2468 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,061021 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{12}N_2OCl_2$
Cloro	21,82	21,45

È relativamente poco solubile nell'alcool, più solubile nell'etere e nel cloroformio. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{17}H_{12}N_2OCl_2.2HCl$ è costituito da una polvere cristallina di color rosso mattone, con riflessi metallici. Scaldato a 100° si scompone in 2-4-diclorfenilazoβnaftol fusibile a 190°, cloruro di metile e acido cloridrico.

L'etere metilico del 2-4-diclorfenilazoβnaftol saponificato fornisce 2-4-diclorfenilazoβnaftol (P. F. 190°), ridotto con polvere di zinco e acido acetico dà 2-4-dicloranilina ed etere metilico dell'1-amido-2naftol, che presenta le note reazioni con cloruro ferrico e con bicromato potassico.

Etere etilico del 2-4-diclorfenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N(1)C_6H_3(2.4)\\OC_2H_5\end{cases}$

Cristallizzato dall'alcool, si separa in aghi ben sviluppati di color rosso granato, fusibili a 102°.

Gr. 0,5504 di sostanza fornirono gr. 0,4576 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,113141 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{14}N_2OCl_2$
Cloro	20,53	20,57

È poco solubile nei comuni solventi organici, anche nell'etere: si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{18}H_{14}N_2OCl_2.2HCl$, costituito da piccolissimi cristalli rosso-bruni con riflesso metallico, è facilmente idrolizzato dall'acqua e anche all'aria umida dimostra la poca stabilità dei cloridrati precedentemente descritti.

Riscaldato a 100° si decompone in 2-4-diclorfenilazoβnaftol (P. F. 190°), cloruro di etile e acido cloridrico.

L'etere etilico del 2-4-diclorfenilazoβnaftol saponificato dà 2-4-diclorfenilazoβnaftol fusibile a 190°, ridotto con polvere di zinco e acido acetico fornisce 2-4-dicloranilina ed etere etilico dell'1-amido-2naftol.

Etere metilico del m-bromofenilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle^{N=N-(1)C_6H_4(3)Br}_{OCH_3}$

Cristallizzato dall'alcool forma densi aghi di color rosso granato scuro, fusibili a 92°.

Gr. 0,3456 di sostanza diedero gr. 0,1894 di bromuro di argento, corrispondenti a gr. 0,080602 di bromo.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{13}N_2OBr$
Bromo	23,32	23,46

È molto solubile in alcool a caldo, poco a freddo: si scioglie molto in benzolo, cloroformio, etere, meno in ligroina. Quasi insolubile negli acidi minerali diluiti, si scioglie nei concentrati con intensa colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{17}H_{13}N_2OBr.2HCl$ è costituito da una sostanza cristallina rossa, dotata di riflesso metallico dorato. Scaldato a 100° si scompone in m-bromofenilazoβnaftol (P. F. 172°), cloruro di metile ed acido cloridrico.

L'etere metilico del m-bromofenilazoβnaftol saponificato dà m-bromofenilazoβnaftol, fusibile a 172°, ridotto fornisce m-bromoanilina ed etere metilico dell'1-amido-2naftol.

Etere etilico del m-bromofenilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle^{N=N-(1)C_6H_4(3)Br}_{OC_2H_5}$

Si ha dall'alcool diluito in mammelloni di finissimi aghetti di color giallo dorato, fusibili a 52°.

Gr. 0,3140 di sostanza fornirono gr. 0,1676 di bromuro di argento, corrispondenti a gr. 0,071325 di bromo.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{15}N_2OBr$
Bromo	22,74	22,53

È molto solubile in tutti i solventi organici: si scioglie negli acidi minerali concentrati con colorazione rossa, formando sali.

Il cloridrato $C_{18}H_{15}N_2OBr.2HCl$, ottenuto col metodo solito, è costituito da minutissime fogliette, di color verde metallico. Scaldato a 100° si decompone in m-bromofenilazoβnaftol, fusibile a 172°, cloruro di etile e acido cloridrico.

L'etere etilico del m-bromofenilazoβnaftol saponificato fornisce m-bromofenilazoβnaftol (P. F. 172°), ridotto dà m-bromoanilina ed etere etilico dell'1-amido-2naftol.

Etere etilico del p-anisilazoβnaftol $C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N(1)C_6H_4(4)OCH_3 \\ OC_2H_5 \end{cases}$

L'etere etilico del p-anisilazoβnaftol, al quale nella Nota I[a] per errore venne attribuito il punto di fusione 52-53°, fonde invece, cristallizzato dalla benzina, a 55-56°. Anche in questa preparazione si può sostituire con vantaggio la soda caustica al 30 %, colla potassa al 50 %.

Il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O_2.2HCl$, polvere cristallina di color rosso bruno con riflesso metallico verde, scaldato verso 100° si scinde in p-anisilazoβnaftol fusibile a 137°, cloruro di etile e acido cloridrico.

Etere dietilico dell'o-ossifenilazoβnaftol $C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5 \\ OC_2H_5 \end{cases}$

Questo composto che è identico con quello ottenuto nella Nota I[a] per azione del solfato di etile sull'o-fenetilazoβnaftol in presenza di soluzione di idrato sodico al 30 %, si può ottenere facendo agire il solfato di etile sull'o-ossifenilazoβnaftol sciolto in eccesso di soluzione di idrato potassico al 50 %. Cristallizzato dall'alcool forma piccoli aghi rossi fusibili a 102°.

Il cloridrato $C_{20}H_{20}N_2O_2.2HCl$ è costituito da una polvere cristallina di color rosso granato scuro, che si ottiene precipitandola da una soluzione eterea dell'etere con acido cloridrico in eccesso sciolto in etere assoluto. Scaldato a 100° si scinde in o-fenetilazoβnaftol, fusibile a 138°, cloruro di etile ed acido cloridrico.

Etere dietilico del p-ossifenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N(1)C_6H_4(4)OC_2H_5\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix}$

Identico coll'etere etilico del p-fenetilazoβnaftol descritto nella Nota I[a], questo composto si ottiene fusibile a 81° per azione del solfato di etile su una soluzione in potassa caustica al 50 $^0/_0$ del p-ossifenilazoβnaftol.

Il cloridrato $C_{20}H_{20}N_2O_2.2HCl$, costituito da minutissime fogliette rosse con riflesso dorato, si scompone, scaldato a 100° in p-fenetilazoβnaftol, fusibile a 132°, cloruro di etile e acido cloridrico.

Etere metilico del m-nitrofenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N(1)C_6H_4(3)NO_2\\ \diagdown OCH_3\end{matrix}$

Si ottiene facilmente per azione del solfato di metile in eccesso sul m-nitrofenilazoβnaftol in presenza di un eccesso di soluzione di idrato sodico al 30 $^0/_0$. Cristallizzato ripetutamente dall'alcool si ha sotto forma di piccoli aghi rossi fusibili a 94-95°.

Gr. 0,1077 di sostanza diedero cc. 12,6 di azoto (H_0=734,407 t = 14°), ossia gr. 0,014374.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{13}N_3O_3$
Azoto	13,34	13,68

Molto solubile tanto a caldo che a freddo nel benzolo, nel toluene e nel cloroformio, si scioglie meno a freddo nell'etere e nell'alcool. Quasi insolubile negli acidi diluiti, si scioglie nei concentrati con colorazione rosso rubino.

Il cloridrato $C_{17}H_{13}N_3O_3.2HCl$ ottenuto precipitando la soluzione eterea dell'etere con una soluzione di acido cloridrico in etere, è costituito da una massa cristallina di color rosso

granato. Scaldato a 100° si scinde in m-nitrofenilazoβnaftol, fusibile a 193°, cloruro di metile e acido cloridrico.

Il bromidrato $C_{17}H_{13}N_3O_3.2HBr$, massa cristallina di color rosso mattone, ottenuta per azione di una soluzione eterea di acido bromidrico su una soluzione eterea del composto, scaldato a 100° si scinde in m-nitrofenilazoβnaftol (P. F. 193°), bromuro di metile, che bolle a + 4°, e acido bromidrico.

L'etere metilico del m-nitrofenilazoβnaftol scaldato all'ebollizione con acidi diluiti si saponifica, trasformandosi quantitativamente in m-nitrofenilazoβnaftol, fusibile a 193°.

Etere etilico del m-nitrofenilazoβnaftol $C_{10}H_6 \langle {N{=}N(1)C_6H_4(3)NO_2 \atop OC_2H_5}$

Cristallizzato dall'alcool è costituito da fini aghi di color rosso granato, fusibili a 106°-107°.

Gr. 0,1764 di sostanza diedero cc. 20,5 di azoto (H_0 = 739,284 t = 13°), ossia gr. 0,023687.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{15}N_3O_3$
Azoto	13,42	13,08

Pochissimo solubile a freddo nell'alcool e poco nell'etere, diventa più solubile in questi solventi a caldo; si scioglie molto nel benzolo, nel toluene e nel cloroformio: pressochè insolubile negli acidi diluiti, si scioglie nei concentrati con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{18}H_{15}N_3O_3.2HCl$, costituito da una polvere cristallina rosso granato, si scinde per riscaldamento verso 100° in m-nitrofenilazoβnaftol (P. F. 193°), cloruro di etile e acido cloridrico.

L'etere etilico del m-nitrofenilazoβnaftol, sottoposto a saponificazione per riscaldamento con acidi diluiti, fornisce m-nitrofenilazoβnaftol, fusibile a 193°.

Torino. Istituto Chimico della R. Università.
Febbraio 1913.

Sulla formola di Kirchhoff per la propagazione delle onde.

Nota di E. LAURA

È ben nota la formola di Kirchhoff [1], la quale rispetto alla equazione:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi \tag{1}$$

è la generalizzazione della formola di Green per la equazione di Laplace. Alle varie dimostrazioni che di essa furono date, l'originaria di Kirchhoff e quelle di Gutzmer [2] e di Beltrami [3], nulla ormai vi è da obbiettare alloraquando essa rappresenta gli integrali della (1) nei punti interni ad una superficie σ chiusa portante i dati superficiali. Qualora invece essa sia applicata allo spazio esterno indefinito, nelle dette dimostrazioni è costantemente supposto il moto vibratorio come iniziantesi da tempo infinitamente remoto, ipotesi questa molto restrittiva e difficilmente interpretabile fisicamente; inoltre, di conseguenza, si presenta la questione della convergenza all'infinito [4] della soluzione rappresentata.

Volendo evitare simili ipotesi conviene imaginare il moto vibratorio avvenire per propagazione di onde all'esterno di σ, per modo che all'istante t (generico) lo stato di vibrazione appartenga alle particelle fluide contenute tra σ e una superficie σ_t da questa ottenuta portando sulle sue normali esterne (a partire dai punti di σ stessa) dei segmenti ct. Interpretiamo allora la t come una coordinata (la quaterna $x\,y\,z\,t$ essendo ortogonale),

---

[1] *Vorlesungen ueber math. Optik* (Lipsia, 1891).

[2] GUTZMER, *Ueber den analytischen Ansdruck des Huygens'schen Princips* (" Crelle ", T. 14, 1895).

[3] BELTRAMI, " Rend. Accademia Lincei " (Serie 5), t. IV, 1895.

[4] G. A. MAGGI, *Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo*, " Annali di Mat. ", Serie II, T. XVI, pag. 29.

la funzione φ verrà definita in uno spazio (a quattro dimensioni) esterno ad un cilindro Σ_1 (ente a tre dimensioni) a generatrici parallele all'asse t e di sezione con l'iperpiano $t=0$ la superficie σ, ed interno ad una ipersuperficie Σ_2 la cui sezione con l'iperpiano di quota t (generico) è la superficie σ_t prima definita. Si presenta allora pressochè ovvio l'uso del cono caratteristico introdotto dal Volterra per la integrazione delle equazioni del tipo iperbolico a tre variabili e dal Tedone, dal Colon, dal d'Adhémar [1] per la integrazione di analoghe equazioni in più variabili, considerando la Σ_1 come portante i dati (valori della φ e della $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$) e supponendo che sulla Σ_2 sieno verificate le condizioni di Love [2] cinematica e dinamica (non indipendenti tra loro) che sempre si verificano sul bordo σ_t di una onda propagantesi di forma qualunque.

Oggetto di questa nota si è appunto di mostrare come in questo modo si è condotti alla formola di Kirchhoff [3].

I.

Suppongo date la φ e la $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ sopra σ per i valori di $t>0$, e inoltre supporrò $\varphi=0$ per $t=0$ sopra σ. L'onda ha un bordo all'istante $t=0$ la superficie σ, l'avrà quindi ad un istante $t>0$ qualunque, la superficie σ_t. Sopra σ_t (per t qualunque positivo) suppongo verificarsi le condizioni:

$$(2) \qquad \varphi=0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+c\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$$

essendo n la normale esterna a σ_t. Queste condizioni, come discende dal seguito, non sono indipendenti.

---

(1) Cfr. per la Bibliografia relativa all'argomento la monografia del sig. R. D'Adhémar, *Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles*. Collection " Scientia ", N. 29.

(2) A. E. H. Love, *Wave-motions with discontinuities at wave fronts*. " Proceedings of London Math. Soc. ", 1904, 2nd series, vol. I, pag. 37.

(3) La veridicità, a posteriori, di questa formola per il caso qui considerato è pure dimostrata in Love, Mem. citata.

Considero quindi t come una coordinata, e un punto $(\xi \eta \zeta \tau)$ interno allo spazio come definito nell'introduzione. Pongo:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

e dico Σ_3 (ente a tre dimensioni) il cono caratteristico:

$$t - \tau = \frac{r}{c}.$$

Dirò poi Σ_4 un cilindro il cui asse coincide con l'asse di Σ_1 e di raggio ρ (la sua sezione con l'iperpiano $t=0$ è una sfera di raggio ρ).

Per uno spazio limitato da una ipersuperficie chiusa, e in particolare per lo spazio limitato dalle quattro superficie Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, vale la formola:

$$\int_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4} (\varphi D_\nu \psi - \psi D_\nu \varphi)\, d\Sigma = 0$$

nella quale φ, ψ sono regolari nel detto spazio e ivi soddisfano la (1), la ν è la normale interna e inoltre si è posto:

$$D_\nu \varphi = c^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \nu}.$$

La $D_\nu \varphi$ si può poi considerare come una vera derivata (derivata conormale di d'Adhémar).

Sopra la ipersuperficie Σ_2 si ha:

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\partial x}{\partial n} \cos(n, \nu) = -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Perciò, sopra Σ_2,

$$D_\nu \varphi = -\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Sicchè sarà, sopra Σ_2,

$$D_\nu \varphi = 0$$

per la seconda delle (2). Questa, d'altra parte, è la derivata di φ lungo la generatrice, quindi φ è costante lungo le generatrici di Σ_2; d'altra parte φ è nulla sopra σ per $t = 0$, sarà nulla perciò in ogni punto di Σ_2. Resta così provata la dipendenza delle condizioni cinematica e dinamica (2), dipendenza che fisicamente è intuitiva. Per di più la Σ_2 (sempre supponendo $\varphi = 0$ per $t = 0$ sopra σ) è l'unica ipersupeficie che goda della proprietà ora detta, che cioè su essa si verifichino contemporaneamente le due condizioni (2), quindi si conclude che una superficie di discontinuità non si può propagare nel fluido che con la velocità c (cfr. Love, Mem. citata).

Poniamo ora nella (3):

$$\psi = \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r}.$$

La (1) è soddisfatta e inoltre sopra Σ_3 si ha:

$$\psi = 0 \qquad D_\nu \psi = 0.$$

Nella (3) ci limiteremo perciò a considerare i contributi di Σ_1 e Σ_4.

Sopra Σ_1 si ha:

$D_\nu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$; $\quad d\Sigma = d\sigma\, dt \quad$ $d\sigma$ elemento della superficie σ

e sopra Σ_4:

$D_\nu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$; $\quad d\Sigma = d\omega\, dt \quad$ $d\omega$ elemento della sfera di raggio ρ e centro $(\xi \eta \zeta)$.

Quindi la (3) diviene:

$$\iint \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r} - \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma\, dt +$$

$$+ \iint \left(- \varphi \frac{t - \tau}{r^2} - \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) d\omega\, dt = 0.$$

Prendiamo il limite del secondo integrale per ρ tendente a zero e diciamo r_0 la minima distanza di $\xi\eta\zeta$ da σ; avremo:

$$\lim_{\rho=0}\int\int\left(-\varphi\frac{t-\tau}{r^2}-\frac{t-\tau+\frac{r}{c}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)d\omega\, dt =$$
$$= -4\pi\int_{\tau-\frac{r_0}{c}}^{\tau}\varphi(\xi,\eta,\zeta;t)(t-\tau)\,dt.$$

L'ultima equazione diviene allora:

$$\int_\sigma d\sigma\int_0^{\tau-\frac{r}{c}}\left(-\varphi\frac{t-\tau}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}-\frac{t-\tau+\frac{r}{c}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dt =$$
$$=4\pi\int_{\tau-\frac{r_0}{c}}^{\tau}\varphi\,.\,(t-\tau)\,dt.$$

Il primo integrale si può estendere sempre a tutta la superficie σ, purchè si ponga zero la funzione da integrarsi per i valori di $\tau-\frac{r}{c}\leq 0$.

Si derivino i due membri di questa equazione rispetto a τ e si faccia la posizione:

$$\varphi\left(x,y,z;\tau-\frac{r}{c}\right)=[\varphi].$$

Otterremo:

$$\int_\sigma[\varphi]\frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}d\sigma+\int_\sigma d\sigma\int_0^{\tau-\frac{r}{c}}\left(\frac{\varphi}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dt =$$
$$=-\frac{4\pi r_0}{c}\varphi\left(\xi\eta\zeta;\tau-\frac{r_0}{c}\right)-4\pi\int_{\tau-\frac{r_0}{c}}^{\tau}\varphi(\xi\eta\zeta;t)\,dt.$$

Il 1° termine del 2° membro è nullo per le condizioni (1). Si derivi ulteriormente rispetto a τ. Otterremo, cambiando di segno i due membri, e osservando ancora che $\varphi\left(\xi\eta\zeta;\tau-\frac{r_0}{c}\right)=0$:

$$(3)\qquad 4\pi\,\varphi(\xi\eta\zeta;\tau)=\int_\sigma\left\{[\varphi]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]-\frac{\partial[\varphi]}{\partial\tau}\frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}\right\}d\sigma$$

la quale è appunto la formola di Kirchhoff.

Il metodo seguìto in questa dimostrazione è analogo a quello usato dal d'Adhémar (1) per il problema esterno (nel significato dato a questa frase nella teoria delle equazioni iperboliche) nel caso delle equazioni iperboliche con quattro variabili.

II.

Non è difficile lo stabilire che nel problema della propagazione di onde all'esterno di una superficie σ chiusa, in un mezzo fluido elastico illimitato, i dati che compaiono nella formola di Kirchhoff sono sovrabbondanti.

Si può invero dimostrare che è unica la soluzione φ della equazione (1) regolare nello spazio compreso tra Σ_1 e Σ_2 (tengo le notazioni precedenti) supponendo dati sopra Σ_1 i valori di $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ o di $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ e verificante sopra Σ_2 la condizione:

$$\varphi = 0 \qquad \text{(e quindi l'altra } D_\nu\,\varphi = 0).$$

Basta moltiplicare i due membri della (1) per $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ e osservare l'identità:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + c^2\Delta_1\varphi\right\} -$$
$$- c^2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\} = 0.$$

Si integrino poscia i due membri estendendo l'integrazione allo spazio racchiuso tra Σ_1, Σ_2 e l'iperpiano $t = \tau$ usando della solita formola di trasformazione di integrali di spazio in integrali di superficie, e inoltre si osservi che sopra Σ_2 si ha:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2 = \Delta_1\varphi$$

[l'ultima equazione, conseguenza di $\varphi = 0$ sopra Σ_2, assicura la

---

(1) R. d'Adhémar, *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles.* " Journal de Liouville ", 1904, pag. 197 e segg.

continuità delle derivate tangenziali di φ attraverso il bordo dell'onda]. Si arriva così, con facilità, alla formola:

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\int_{S_t}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + c^2\Delta_1\varphi\right\} dS = c^2\int_0^t dt\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma$$

nella quale S_t è lo spazio compreso tra σ e σ_t. Questa equazione, a meno di un fattore, la densità del fluido, è quella delle forze vive per il moto considerato. A meno della interpretazione questa dimostrazione, qui solo accennata, coincide con quella data da Love (Mem. citata, N. 9).

Dalla (4) poi discende, con un notissimo procedimento, la unicità della soluzione per assegnati valori di $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ o di $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ sopra σ.

Sarebbe perciò interessante ricavare dalla (3), formola di Kirchhoff, un metodo di integrazione per il problema così postulato.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSI UNITE

Adunanza del 2 Marzo 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE
DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, D'Ovidio, Segre, Jadanza, Guareschi, Guidi, Grassi, Fusari. — È scusata l'assenza del Socio Somigliana;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, D' Ercole, Brondi, Sforza, Baudi di Vesme e De Sanctis, Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci Carle ed Einaudi.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 23 febbraio 1913.

L'Accademia procede al conferimento del premio Gautieri per la Filosofia (triennio 1909-1912); e sono proclamati vincitori in parti uguali il Senatore Benedetto Croce pel volume *La Filosofia della Pratica: Economia ed Etica* e l'altro su *La Filosofia di Giambattista Vico*; e il Prof. Bernardino Varisco per l'opera *I massimi problemi.*

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre
Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 2 Marzo 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: RENIER, PIZZI, RUFFINI, STAMPINI, D'ERCOLE, BRONDI, SFORZA, BAUDI DI VESME e DE SANCTIS Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci CARLE e EINAUDI.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 16 febbraio 1913.

La Classe in seduta privata procede alla nomina della Commissione pel premio GAUTIERI per la Storia (triennio 1910-1912).

Sono eletti a farne parte i Soci DE SANCTIS, SFORZA e RUFFINI.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSI UNITE

Adunanza del 9 Marzo 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: NACCARI, Direttore della Classe, D'OVIDIO, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUIDI, MATTIROLO, FUSARI. — È scusata l'assenza del Socio GUARESCHI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: MANNO, Direttore della Classe, RENIER, STAMPINI, BRONDI, SFORZA, e DE SANCTIS Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci CARLE, GRAF, RUFFINI ed EINAUDI.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite del 2 marzo 1913.

Il Presidente comunica i ringraziamenti del Senatore Benedetto CROCE e del Prof. Bernardino VARISCO pel premio GAUTIERI ad essi conferito.

Gli Accademici Segretari
CORRADO SEGRE
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Marzo 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, D'OVIDIO, PEANO, JADANZA, GUIDI, MATTIROLO, FUSARI e SEGRE Segretario. — Scusa l'assenza il Socio GUARESCHI.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Socio D'OVIDIO presenta in omaggio all'Accademia, per incarico dell'autore Prof. F. CALDARERA, un *Trattato dei Determinanti*; rilevando che in esso, oltre ad un'ampia esposizione della teoria, è notevole lo studio di molti tipi particolari di determinanti, compresi il Jacobiano e l'Hessiano; e specialmente va segnalato il capitolo sui determinanti di ordine infinito, che recentemente sono stati oggetto d'interessanti ricerche.

Il Socio GUIDI presenta, per la stampa negli *Atti*, una Nota dell'Ing. G. ALBENGA su *La inflessione laterale delle palafitte di fondazione.*

LETTURE

La inflessione laterale delle palafitte di fondazione.

Nota dell'Ing. GIUSEPPE ALBENGA.

I pali di una palafitta di fondazione quando non siano ben proporzionati al carico che devono sopportare ed alla natura del terreno che li circonda, possono inflettersi lateralmente e rompersi sotto un carico minore di quello necessario per provocarne la rottura per compressione semplice. Su questo fatto richiamano l'attenzione quegli autori che trattano della resistenza delle fondamenta su palafitte; essi però si limitano a considerazioni generiche, senza ricercare quanto grande possa riuscire l'azione di punta sopra un palo affondato nel terreno e d'ordinario raccomandano soltanto di tener tanto più basso il carico di sicurezza del materiale costituente la palafitta, quanto più questa si affonda nel terreno. A conseguenze affatto opposte giunge l'ingegnere J. Benabenq in un accurato studio teorico e sperimentale sui pali di fondazione pubblicato nelle " Annales des Ponts et Chaussées „ del 1911 [1]: ma i suoi risultati che escluderebbero la possibilità pratica della inflessione laterale delle palafitte non possono venir tutti accolti, perchè in parte si fondano sopra ipotesi non corrispondenti alla realtà e perchè nel determinare l'azione del carico di punta è fatto tacito uso del principio di sovrapposizione degli effetti, principio che in tal caso non può essere accettato neanche come prima approssimazione.

In questa breve nota mostro come uno studio non troppo sommario della stabilità dell'equilibrio elastico delle palafitte riesca assai semplice, ritrovo per altra via alcune relazioni sta-

[1] *Résistance des pieux. Théorie et pratique*, " A. P. Ch. „, 1911, V, 236 e VI, 475.

bilite per casi analoghi da Zimmermann e da Timoscenco e giungo ad una formola che per la sua natura e le sue proprietà ricorda le note formole di Eulero.

Consideriamo un palo verticale, di sezione costante, infisso completamente nel terreno e caricato all'estremità superiore da un peso P conosciuto. Il terreno circostante eserciterà contro il palo reazioni di varia specie, distribuite con legge molto complessa: e cioè reazioni elastiche che si oppongono ad un ulteriore affondamento del palo e che sono applicate sopratutto contro la punta e reazioni di attrito agenti lungo la superficie laterale. Queste ultime reazioni possono mancare in molti casi e, come dimostra la esperienza, spesso scompaiono o almeno si riducono in misura notevole con l'andar del tempo: è quindi opportuno fare astrazione da esse. Le reazioni elastiche del terreno si possono poi, senza errore sensibile, ritenere concentrate sulla punta del palo.

In condizioni normali, quando non si abbia inflessione laterale, il palo si potrà quindi considerare come caricato da due forze P eguali e contrarie, che lo comprimono, sono applicate alle due estremità ed agiscono secondo il suo asse. Se per effetto di questo carico l'asse del palo si allontana dalla verticale, la superficie laterale della palafitta si adagia sul terreno e lo comprime, provocando sopra ogni elemento di area una reazione, che potremo ritenere orizzontale, avente direzione contraria allo spostamento del punto considerato e direttamente proporzionale alla deformazione. Indichiamo con y lo spostamento di un punto qualsiasi: la pressione unitaria del terreno contro il palo in corrispondenza di questo punto varrà αy, se con α si indica un opportuno coefficiente di proporzionalità analogo al coefficiente del ballast, che si considera nello studio delle traversine ferroviarie e coincidente con la " Verdrängungsfestigkeit " dei terreni, acutamente studiata da Ottocaro Stern (1). Il coefficiente α si misura indicando quanti Kg. a cm^2 sono necessari per produrre un cedimento di 1 cm. nel terreno che si considera. I dati sperimentali a questo riguardo sono ancora molto scarsi: pos-

(1) O. Stern, *Das Problem der Pfahlbelastung*. Berlin, Ernst, 1908.

siamo citare fra di essi quelli ottenuti da Stern a Vienna operando su terreni di fondazione di varia natura e che variano da 0.15 $^{Kg}/_{cm^3}$ per ghiaie argillose a 0.45 $^{Kg}/_{cm^3}$ per argille sabbiose, valori sempre molto inferiori ai coefficienti del ballast (3 ad 8 $^{Kg}/_{cm^3}$ nei casi ordinari della pratica).

Da taluni si ritiene invece che contro ogni elemento di superficie del palo, quando questo si inflette, si eserciti da parte del terreno una reazione eguale e contraria alla differenza fra la spinta passiva e quella attiva che si avrebbero alla profondità dell'elemento considerato (1). Con questa seconda ipotesi la resistenza del terreno contro i movimenti del palo riesce molto maggiore che non nell'ipotesi sopra accennata. Ma è assai poco probabile che in terreni dotati sempre di una certa coesione, deformazioni non grandi e localizzate come quelle che derivano da una inflessione laterale del palo, possano produrre una così grave ed intensa alterazione del regime di equilibrio, quale è quella richiesta perchè si raggiunga nel terreno lo stato di equilibrio limite superiore.

I pali di fondazione sono ordinariamente incastrati alla estremità superiore nelle murature e vengono di solito affondati tanto che la punta si impegni per una certa altezza nel terreno resistente, dopo aver attraversato gli strati inadatti a sopportare elevate pressioni unitarie. Ma l'incastro è in ogni caso imperfettissimo alle due estremità e si può ritenere che tanto alla testa quanto alla punta, l'asse del palo sia liberamente girevole, e che l'unico vincolo a cui le estremità sono soggette sia quello di essere obbligate a mantenersi sull'asse primitivo del palo. Di questa condizione di posa ci occuperemo più specialmente: è del resto ovvia la estensione agli altri casi che possono aversi in speciali circostanze.

Assumiamo come asse delle x l'asse del palo prima della deformazione e poniamo l'origine delle coordinate a livello del terreno. Riteniamo, come si fa sempre in problemi di questa natura, che la deformata dell'asse sia una curva piana ed indichiamo con y l'ordinata di un punto qualsiasi di essa. La equa-

(1) Cfr. citato studio di J. Benabenq.

zione differenziale della linea elastica del palo deformato sarà, con le convenzioni e i simboli delle Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni del prof. Guidi [1]:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -Py - \mathfrak{M}_x$$

se con $\mathfrak{M}_x$ si indica il momento flettente dovuto alle reazioni, in corrispondenza dell'ascissa x.

Deriviamo rispetto ad x e indichiamo con T_x lo sforzo di taglio dovuto alle reazioni del terreno; sarà:

$$EJ\frac{d^3y}{dx^3} + P\frac{dy}{dx} + T_x = 0$$

e derivando una volta ancora e ricordando che le reazioni si supposero proporzionali alla y

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} + \beta y = 0 \qquad (1)$$

dove con β si indicò un nuovo coefficiente di proporzionalità espresso di solito in Kg/cm², che è facile determinare in ogni caso pratico, noti α, la forma e le dimensioni del palo.

La (1) coincide con una equazione differenziale trovata da Zimmermann nelle sue classiche ricerche sulla trave posata su appoggi elastici continui e discontinui e sollecitata da forze in genere parallele all'asse della trave, ricerche le quali condussero ad importantissimi risultati sulla stabilità del corrente compresso dei ponti metallici [2].

La integrazione della (1) non presenta difficoltà, ma richiede sviluppi algebrici e calcoli numerici alquanto lunghi. Il problema che ci interessa può invece essere risoluto molto rapidamente con il metodo che segue.

La y si annulla per ipotesi all'origine delle coordinate ed

---

(1) C. Guidi, Lezioni citate, vol. II, pag. 74 (6ª ediz.).

(2) Cfr. specialmente H. Zimmermann, *Der gerade Stab mit stetiger elastischer Stützung und beliebig gerichteten Einzellasten*, nei " Sitzungsberichte d. k. Preuss. Akademie d. Wissenschaften „ di Berlino, 1905.

alla ascissa l della punta del palo: potremo quindi esprimerla ricorrendo alla serie di Fourier sotto la forma:

$$y = \sum_0^\infty a_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x \tag{2}$$

dove m assume tutti i valori interi fra 0 e ∞ e con a_m si indicano dei coefficienti che dovranno essere opportunamente determinati. La natura fisica medesima del problema ci assicura che sono soddisfatte le condizioni di assenza di valori infiniti della funzione, di infinite discontinuità e di infiniti massimi e minimi, che sono richieste per la legittimità dello sviluppo in serie di Fourier.

Sostituendo questo valore di y nella (1) risulta:

$$EJ \sum_0^\infty a_m \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x - P \sum_0^\infty a_m \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x + \\ + \beta \sum_0^\infty a_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x = 0 \tag{3}$$

dalla quale

$$P = \frac{\left(EJ \sum_0^\infty a_m \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + \beta \sum_0^\infty a_m\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x}{\sum_0^\infty a_m \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x}. \tag{4}$$

La (4) è soddisfatta per ogni valore di x quando siano nulli tutti i coefficienti a_m ad eccezione del k^{mo} e sia inoltre:

$$P = \frac{EJ\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 + \beta}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} = \frac{EJ\,k^4\pi^4 + \beta l^4}{k^2\pi^2 l^2}. \tag{5}$$

La relazione (5) è quella stessa che Timoscenco trovò nel caso di aste immerse in un mezzo elastico, osservando che il pericolo di inflessione laterale si avrà quando il lavoro di deformazione della flessione, sommato con quello delle reazioni del mezzo circostante, eguaglia la perdita di energia che accom-

pagna l'allungamento dell'asta, dovuto al fatto che essa si inflette mantenendo invariata la distanza fra gli estremi [1].

La (5) scritta sotto la forma

$$P = \frac{EJk^2\pi^2}{l^2} + \frac{\beta l^2}{k^2\pi^2} \tag{6}$$

mostra chiara la influenza del terreno che circonda il palo: il primo termine è notoriamente il carico di punta capace di dare nel caso di un'asta a superficie laterale libera una linea elastica con k ondulazioni di sinusoide; il secondo è il termine dovuto alla resistenza del terreno: esso, contrariamente al primo, cresce con il quadrato della lunghezza ed è inversamente proporzionale al quadrato del numero delle onde.

Ad ogni valore di k corrisponde nella (6) un valore determinato di P: per i calcoli di resistenza interessa conoscere soltanto il minore di essi, che troveremo risolvendo rispetto a k la relazione

$$\frac{\partial P}{\partial k} = 0 \tag{7}$$

e verificando quale fra i due numeri interi successivi che comprendono fra di loro le radici della (7) introdotto nella (5) dia un valore minore di P.

Dalla (5) e dalla (7) si ha subito

$$k = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\beta}{EJ}}. \tag{8}$$

Come si è già osservato, poichè k varia in modo discontinuo (assume solo valori intieri), la espressione (8) non può senz'altro introdursi nella (5): quando però sia possibile questa sostituzione la (5) si trasforma nella relazione approssimata semplicissima

$$P = 2\sqrt{\beta EJ} \tag{9}$$

---

[1] S. Timoscenco, Comunicazioni della Scuola Politecnica di Pietroburgo (in russo), 1906-7; riassunto largamente nella "Zeitschrift für Mathematik und Physik", vol. 58, pag. 337.

indipendente dalla lunghezza del palo. La (9) può condurre talora a valori del carico di punta ammissibile, ancor più piccoli di quelli che si avrebbero quando si facesse astrazione dalla resistenza del terreno e induce sempre ad esagerare alquanto le dimensioni a favore della stabilità.

L'applicazione delle formole precedenti a qualche caso della pratica, mostra come pecchi di esagerato ottimismo l'affermazione di Benabenq, che in pratica è assolutamente esclusa la possibilità di inflessione laterale delle palafitte.

La (5) presenta le solite indeterminazioni delle formole di Eulero [1]: essa non ci dice nulla per tutti i valori che non la soddisfacciano, ed in ogni caso la curva elastica viene definita a meno di un fattore a_k indeterminato.

Nell'applicazione pratica essa può condurre a valori del carico di rottura superiori a quelli corrispondenti alla resistenza a compressione semplice, questo fatto succede anzi ancora più frequentemente che nelle ordinarie formole di Eulero.

La (1) è soddisfatta anche da valori di P, per i quali non tutti i coefficienti a_m, ad eccezione di uno solo, siano nulli; ma questi nuovi valori di P sono superiori a quelli che soddisfano la (5) e non hanno quindi pratico interesse.

---

[1] Grashof, *Elastizität und Festigkeit*, pag. 168.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 16 Marzo 1913.

PRESIDENZA DEL SENATORE BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: CARLE, RENIER, RUFFINI, STAMPINI, BRONDI, SFORZA, e DE SANCTIS Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 2 marzo 1913.

Il Presidente offre a nome della R. Deputazione sopra gli studi di Storia patria per le Antiche provincie e la Lombardia il vol. IV della *Biblioteca di Storia italiana recente: 1800-1870* (Torino, Bocca, 1910), il vol. VI dell'opera su *Le campagne di guerra in Piemonte (1703-1708)* e *L'assedio di Torino del 1706* (Torino, 1912) e il vol. IX della *Bibliografia storica degli Stati della monarchia di Savoia* compilata da A. MANNO (Torino, 1913).

Il Socio EINAUDI fa omaggio del vol. XXIII (anno 1912) del periodico *La Riforma sociale* (Torino, 1912).

Il Socio RUFFINI presenta per l' inserzione negli *Atti* una nota del prof. Piero GIACOSA, *Sui lavori finora fatti nel Laboratorio di materia medica della R. Università per il ricupero dei codici danneggiati dall'incendio della Biblioteca del 1904*; e il Socio DE SANCTIS un saggio del Dr. Bacchisio MOTZO intitolato: *La condizione giuridica dei Giudei di Alessandria sotto i Lagidi e i Romani.*

LETTURE

La condizione giuridica dei Giudei di Alessandria sotto i Lagidi e i Romani.

Nota di BACCHISIO MOTZO.

Il diritto di cittadinanza alessandrina vantato dai Giudei negano dietro il Mommsen (1) molti studiosi, l'afferma tra i moderni il Lumbroso (2) e lo sostenne sino all'ultimo lo Schürer (3), basandosi specialmente sulle esplicite testimonianze delle fonti giudaiche Giuseppe Flavio e Filone. Una specie di compromesso tra le due sentenze opposte è la soluzione di alcuni autori francesi, come il Bouché-Leclercq e lo Jouguet (4), secondo i quali i Giudei avrebbero posseduto non la cittadinanza alessandrina ma l'autonomia, e questa sarebbe da intendere quando le fonti sembrano parlare di cittadinanza. A me parve per qualche tempo che le ragioni contrarie a questa dovessero prevalere:

(1) Mommsen *Römische Gesch.* V p. 491. — Willrich *Caligulas* in "Klio" III (1903) p. 403-7. — Wellhausen *Israel. u. jüd. Geschichte* 6ª ed. 1907 p. 236-8. — Stähelin *Der Antisemitismus des Altertums* 1905 p. 35. — Schubart *Alexandrinische Urkunden aus d. Zeit des Augustus* in "Archiv f. Papyrusforsch." V (1909) p. 108-9, 119-20. — Wilcken *Zum alexandrinischen Antisemitismus* in "Abhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch." XXVII (1909) p. 787, *Grundzüge der Papyruskunde* I, 1 (1912) p. 24 e 63, *Chrestomathie* I nº 58 p. 82.

(2) *Ricerche Alessandrine* p. 58 (estr. dalle "Mem. R. Acc. Scienze di Torino" Serie II T. XXVII); *L'Egitto dei Greci e dei Romani* 1895 p. 78-9.

(3) *Geschichte des jüd. Volkes* 4ª ediz. III (1909) p. 122 seg., 718.

(4) Bouché-Leclercq *Histoire des Lagides* III (1906) p. 148. — Jouguet *La vie municipale dans l'Égypte romaine* 1911 p. 19 sgg.

dietro però un più attento esame del decreto che l' imperatore Claudio emanò sulla questione (Joseph. *antiq.* XIX 380 seg.), messo in rapporto con i risultati delle ultime indagini intorno allo stato della popolazione alessandrina, credo poter dare al problema una soluzione che molte cose spiega e concilia.

Innanzi tutto noterò che riconoscendo ai Giudei l'autonomia invece della cittadinanza, si toglie la questione, non si risolve. La controversia per la quale si lottò nel 38-41 d. C. e di poi, è intorno alla cittadinanza non all'autonomia. Come io stesso ritengo, si ha il diritto di negare il valore storico delle prove che Giuseppe adduce in favore dei suoi connazionali, ma non si può dubitare della natura stessa del diritto che egli per loro rivendica, nè affermare con lo Jouguet, il quale per ultimo e di proposito ha sostenuto questa teoria, che le fonti non indichino chiaramente la situazione municipale dei Giudei, e che i termini usati da Giuseppe sianò equivoci. In *antiq.* XIV 188 egli dice che Cesare aveva su una colonna di bronzo dichiarato che i Giudei erano cittadini alessandrini (*ἐδήλωσεν ὅτι Ἀλεξανδρέων πολῖταί εἰσιν*). In *antiq.* XIX 281 nel decreto di Claudio si dice che i Giudei avevano dai re l'uguaglianza civile (*ἴσης πολιτείας παρὰ τῶν βασιλέων τετευχότας*); in *bellum* II 485 che Alessandro aveva loro accordato di abitare nella città alla pari con gli Elleni (*τὸ μετοικεῖν κατὰ τὴν πόλιν ἐξ ἰσοτιμίας πρὸς Ἕλληνας*). Chiunque legga per intero il brano di *c. Apion.* II 30-78 vedrà che il dibattito è nettamente impostato intorno alla cittadinanza; così Giuseppe per spiegare come i Giudei si chiamassero in senso legale *Ἀλεξανδρεῖς* adduce il paragone di quelli di Antiochia, di Efeso e di altre città che si chiamavano Antiocheni, Efesini, per aver ottenuto dai Seleucidi la cittadinanza (§ 39), e appresso il paragone degli Iberi, Etruschi e Sabini che si dicevan Romani per la stessa ragione (§ 40), e argomentando *ad hominem* osserva che se i Giudei alessandrini per essere di stirpe giudaica non poterono avere dai re la *κατὰ δόσιν πολιτεία*, neanche Apione, che sarebbe stato di nascita egiziano secondo Giuseppe, avrebbe potuto chiamarsi *Ἀλεξανδρεύς* e cittadino (§ 41). Niente vi è invece che accenni all'autonomia, e a un dibattito intorno ad essa.

Ma d'altra parte è certo che se il diritto dei Giudei si volesse dimostrare con i documenti sui quali pretende basarlo Giuseppe,

si farebbe opera vana; anzi l'esame di questi condurrebbe al risultato contrario. Secondo Giuseppe, Alessandro stesso avrebbe invitati i Giudei a popolare la città, conoscendoli valorosi e fedeli fra tutti, avrebbe assegnato loro un quartiere speciale e concessa l'*ἰσοπολιτεία* con i Macedoni e gli Elleni. Ma è notevole ch'egli taccia di questi onori in *antiq.* XI 317-339, dove pure espone a lungo le relazioni di Alessandro col suo popolo, e vi si limiti a dire che invitò i Giudei a seguirlo come soldati, restando liberi di osservare le proprie leggi; e ch'è invece nell'opera polemica in parte diretta contro Apione (II 35), il quale aveva impugnato il diritto dei Giudei alla cittadinanza alessandrina, che queste notizie compaiono. Anche nel *bellum* (II 487) v'è un accenno, sempre in rapporto alle discordie tra Giudei ed Alessandrini; ma qui Alessandro concede la sola *ἰσοτιμία*, mentre il quartiere speciale sarebbe stato dato dai primi Lagidi. Ciò che però più vale contro queste pretese concessioni, è il silenzio delle fonti giudaiche più antiche: il pseudo-Ecateo, il pseudo-Aristea e il cosidetto III libro dei Maccabei, dei quali i due ultimi hanno certamente origine in Alessandria, e sono bene informati delle cose riguardanti il paese e il loro popolo.

Se il pseudo-Ecateo avesse avuto una sola parola esplicita sulla *ἰσονομία* concessa da Alessandro, Giuseppe in *c. Apion.* I 186 seg., dove cita da esso delle minutaglie, non avrebbe certamente omesso questa, ch'era di tanto onore e riguardava direttamente l'argomento del libro. Ricorda invece che molti Giudei erano stati trasportati in Babilonia dai Persiani, e molti avevano abbandonata la Giudea per la Fenicia e l' Egitto, a causa dei torbidi della Siria dopo la morte di Alessandro (*c. Apion.* I 194), ma di Giudei che si recassero a popolare Alessandria per invito del fondatore non ha parola. Più istruttivo è il passo in *c. Apion.* II 42-43, dove Giuseppe afferma: " non per scarsità di gente che popolasse la città con sollecitudine da lui fondata, Alessandro vi raccolse parecchi dei nostri, ma avendo ben tutti conosciuti a prova, dette ai nostri questo premio del valore e della fedeltà. Poichè stimava la nostra nazione, come anche dice Ecateo di noi, che per la bontà e fede che verso di lui mostravano i Giudei concesse loro la regione di Samaria senza tributo ". Giuseppe avrebbe potuto citare Ecateo come prova diretta della cittadinanza, se questi ne

parlava; invece lo cita come testimone della stima che Alessandro aveva dei Giudei, ai quali avrebbe dato la Samaria esente da tributo, manovrando però in modo da lasciar quasi intendere che anche le affermazioni precedenti sono fondate su buone testimonianze, come quella di uno scrittore contemporaneo quale Ecateo.

Nel pseudo-Aristea niente vi è che accenni a diritti di *ἰσοτιμία* posseduti dai Giudei, anzi è da notare che mentre Tolemeo di Lago avrebbe, secondo Giuseppe (1), dato l'*ἰσοπολιτεία* coi Macedoni di Alessandria ai prigionieri da lui fatti soldati e stanziati non in Alessandria ma nei *φρούρια*, Aristea che narra le stesse cose (*ep. ad Philocr.* 13 ed. Wendland) ignora del tutto questa circostanza, e pur cercando di scusare Tolemeo di Lago e di esaltare la munifica generosità di Filadelfo che libera i restanti prigionieri, mai ha pensato di attribuir loro una concessione tanto più liberale nè ai Giudei Alessandrini, nè a quelli stanziati nei *φρούρια*, il che rende manifesto che la concessione della *ἰσοτιμία* a questi ultimi è un' aggiunta (che del resto nulla giova alla causa dei Giudei alessandrini) fatta da Giuseppe alla fonte a cui attingeva. Quest'aggiunta potè essergli suggerita da un'analogia con ciò che accadeva da Augusto in poi nell'esercito romano, in cui il soldato non cittadino ammesso nella legione, riceveva la cittadinanza. Ma il titolo di *Μακεδόνες* che aveva l'esercito regolare dei primi Lagidi non importava una modificazione dello stato giuridico, nè la cittadinanza alessandrina: i singoli soldati restavano civilmente in quella condizione giuridica a cui appartenevano, fossero essi Macedoni, o cittadini di Alessandria o di Tolemaide, o Elleni. Inoltre l'armata regolare dei primi Lagidi risulta composta di Macedoni e di Elleni: solo più tardi, altri elementi e tra essi il giudaico, entrano a farne parte (2). Anche per ciò i Giudei stanziati da Sotere a custodia dei *φρούρια* non poterono essere pareggiati ai Macedoni, o avere la cittadinanza alessandrina.

---

(1) *Antiq.* XII 8: *πολλοὺς αὐτῶν εἰς τὰ φρούρια καταλοχίσας καὶ τοῖς Μακεδόσιν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ποιήσας ἰσοπολίτας.*

(2) Cfr. Lesquier *Les institutions militaires de l'Égypte sous les Lagides* 1911 p. 11 e 138.

Nel III libro dei Maccabei, ch'è meno recente e meno romanzo di quanto comunemente si crede, è raccontato come Filopatore, dopo la guerra contro Antioco decisa a Rafia, ritornato dalla Siria in Egitto, per festeggiare la vittoria, prese provvedimenti verso le diverse nazionalità e classi del suo regno, e tra questi, con ardita innovazione, volle concedere ai Giudei alessandrini la cittadinanza, ma essi la respinsero perchè per approfittarne era necessario fare atto di culto pagano, che nel caso consisteva in una partecipazione ai misteri di Dioniso (1). Questa notizia ch' è sfuggita, per la poca attenzione che si dà al libro, è preziosa perchè ci permette di fissare al 217/6 quella riforma della cittadinanza alessandrina dei suoi demi e tribù di cui abbiamo notizia da un frammento di Satiro; la concessione infatti della cittadinanza ai Giudei, non era isolata, ma parte di un complesso di provvedimenti presi verso le altre stirpi. Per la nostra questione il III dei Maccabei ci assicura che concessioni di cittadinanza da parte dei re anteriori a Filopatore non esistevano.

Accanto al silenzio o alle espresse dichiarazioni delle fonti giudaiche più antiche ha non piccola forza il fatto che lo stesso Apione, parlando della questione dal punto di vista degli Alessandrini, ignorava l'esistenza di lettere o decreti di Alessandro e di Tolemeo di Lago, e non se ne preoccupava minimamente. Ma più singolare ancora è la condotta di Giuseppe, che rivolgendosi amaramente contro di lui, già morto da mezzo secolo, ricordate le concessioni di Alessandro, dice: “ se adunque avendo lette le lettere del re Alessandro e di Tolemeo di Lago, e percorse le scritture dei re che loro succedettero in Egitto, e la stela ch' è in Alessandria contenente i privilegi che il grande Cesare dette ai Giudei, se dico, conoscendo queste cose, osò scrivere il contrario, egli era un malvagio, se poi nulla di ciò

(1) 3, 20 seg. Filopatore scrive: *ἡμεῖς δὲ... μετὰ νίκης διακομισθέντες, καὶ εἰς τὴν Αἴγυπτον τοῖς πᾶσιν ἔθνεσιν φιλανθρώπως ἀπαντήσαντες, καθὼς ἔπρεπεν ἐποιήσαμεν. ἐν δὲ τούτοις... τολμήσαντες ἐξαλλοιῶσαι ἐβουλήθημεν καὶ πολιτείας αὐτοὺς ('Ιουδαίους) 'Αλεξανδρέων καταξιῶσαι καὶ μετόχους τῶν ἀεὶ ἱερέων (ἱερῶν?) καταστῆσαι· Οἱ δὲ... οὐ μόνον ἀπεστρέψαντο τὴν ἀτίμητον πολιτείαν*, ecc. In 2, 30 il re decreta: *ἐὰν δέ τινες ἐξ αὐτῶν προαιρῶνται ἐν τοῖς κατὰ τὰς τελετὰς μεμυημένοις ἀναστρέφεσθαι, τούτους ἰσοπολίτας 'Αλεξανδρεῦσιν εἶναι.*

sapeva, ignorante „ (*c. Apion.* II 37). Bene il dilemma potrebbe rivolgersi contro di chi l'ha scritto, poichè Giuseppe che va mendicando dagli storici ellenistici dei miserabili cenni sul suo popolo e ricorda altri decreti di minor conto, mai sa citarci un sol rigo di questi vantati documenti, benchè essi sarebbero valsi a dimostrare l'antichità del popolo giudaico, meglio del cenno del pseudo-Ecateo alla battaglia di Gaza, e la stima in cui era tenuto da Alessandro più che non la supposta concessione della Samaria ai Giudei. Giuseppe mai vide questi pretesi documenti, nè mai ne conobbe più precisamente il contenuto, e l'affermazione dell'esistenza di essi si basa sull'affermazione incontrollata della fonte che seguiva nello scrivere il *c. Apion.*, le *Ὑποθετικά* di Filone (1). Nella controversia tra Giudei ed Alessandrini sotto di Caligola, furono ricercati i documenti in favore dell'una parte e dell'altra, e ne furono trovati certo degli autentici, ma anche dei falsi fabbricati per la circostanza, come le presunte lettere di Alessandro e di Tolemeo di Lago. Ancorchè queste non abbiano influito sulla decisione della controversia, Giuseppe e Filone dovevano necessariamente presentarle come autentiche, e ciò tanto più dopo che il decreto di Claudio aveva giudicato la causa in loro favore. Messi da parte tali presunti documenti, rivolgiamoci all'esame di quello ch'è storicamente certo ed emana dalla suprema autorità romana.

Vero è che lo Jouguet lo chiama " pretesa lettera di Claudio „ (2), ma non adduce alcun argomento, e per quanto si voglia diffidare dell'onestà storica di Giuseppe, il supporre che egli abbia falsificato un atto imperiale così importante, in Roma, a distanza di soli cinquant'anni dagli avvenimenti e in una questione ch'era sempre viva, è cosa da non ammettere se non provata. Si potrebbe anche essere indotti a sminuirne il valore, rappresentandolo come un atto di favore concesso da Claudio al re Agrippa suo amico, ch'era direttamente interessato nella controversia, a cui egli stesso aveva dato occasione, provocando con la sua presenza i tumulti del 38 in Alessandria. Ma contro ciò, deve farsi valere che il governo romano non fu mai propenso a

(1) Cfr. la mia nota: *Le Ὑποθετικά di Filone*, negli " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XLVII (1912).

(2) *Op. cit.* p. 19 n. 7 e p. 475.

concedere la cittadinanza alessandrina, anche a singole persone, perchè arrecava molti privilegi ed esenzioni, e che d'altronde, se i precedenti di diritto erano sfavorevoli, non si sarebbero invocati questi col rischio di rendere ridicola l'autorità imperiale, ma si sarebbe senz'altro dichiarato che i Giudei, a giudizio dell'imperatore, erano cittadini e non si sarebbe fatto appello a documenti inesistenti o falsi.

Ora il decreto di Claudio mostra una precisione giuridica degna di esser rilevata (1). Oggetto del decreto sono i Giudei abitanti in Alessandria (*τοὺς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ Ἰουδαίους*), ma non tutti, bensì quelli che erano chiamati *Ἀλεξανδρεῖς* (*Ἀλεξανδρεῖς λεγομένους*). Questo termine non indica, come potrebbe sembrare a prima vista, i Giudei stabiliti in Alessandria e che sarebbero stati detti Alessandrini in senso generico, nel qual caso sarebbe completamente inutile, essendosi già detto che trattavasi dei Giudei viventi in Alessandria, ma distingue tra questi una classe speciale di Giudei che avevano il titolo di *Ἀλεξανδρεῖς* e con questo nome erano contrassegnati.

Anche a priori noi avremmo dovuto supporre che il diritto di cittadinanza vantatod ai Giudei e riconosciuto loro da Claudio, non riguardasse tutta la massa della popolazione giudaica alessandrina, come afferma Giuseppe, per il quale la cittadinanza sarebbe stata concessa dai primi re e confermata da Claudio *ad omnes* (2), il che avrebbe significato aprirne le porte a tutti i Giudei d'Egitto; ma riguardasse una parte speciale, ristretta di essi. Questa ora intendiamo essere dei Giudei *Ἀλεξανδρεῖς* e costituita dalle famiglie più anticamente stanziatesi in Alessandria (*συγκατοικισθέντας τοῖς πρώτοις εὐθὺς καιροῖς Ἀλεξαν-*

---

(1) *Antiq.* XIX 280 seg.: *ἐπιγνοὺς ἀνέκαθεν τοὺς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ Ἰουδαίους Ἀλεξανδρεῖς λεγομένους συγκατοικισθέντας τοῖς πρώτοις εὐθὺς καιροῖς Ἀλεξανδρεῦσι καὶ ἴσης πολιτείας παρὰ τῶν βασιλέων τετευχότας, καθὼς φανερὸν ἐγένετο ἐκ τῶν γραμμάτων τῶν παρ' αὐτοῖς καὶ τῶν διαταγμάτων.....*

(2) *C. Apion.* II 71-2: " Nam quum plurimi eorum non opportune ius eius civilitatis obtineant, peregrinos vocant eos qui hoc privilegium ad omnes impetrasse noscuntur. Nam Aegyptiis neque regum quisquam videtur ius civilitatis fuisse largitus, neque nunc quilibet imperatorum. Nos autem Alexander quidem introduxit, reges autem auxere, Romani vero semper custodire dignati sunt ". — Il brano ci è giunto nella sola versione latina.

δρεῦσι), distinguendosi così nettamente un nucleo più antico dalla moltitudine di Giudei che vi s'era andata accumulando. Mentre questa, al pari di gran parte della popolazione ellenica o ellenizzata (1), non godeva della cittadinanza, i Giudei *Ἀλεξανδρεῖς* vantavano di aver ottenuta l'uguaglianza politica dai re (*καὶ ἴσης πολιτείας παρὰ τῶν βασιλέων τετευχότας*). Si noti la temperanza di questa espressione in confronto con quelle adoperate da Giuseppe. Qui non si parla di concessioni fatte da Alessandro o da Tolemeo di Lago: i Giudei *Ἀλεξανδρεῖς* sono bensì stanziati in Alessandria sin dai primi tempi e se si vuole anche da quello di Tolemeo di Lago, ma il diritto d' *ἰσοπολιτεία* l'hanno ottenuto dai re, nè di questi si dice che debbano essere i primi, anzi pare quasi che si escluda.

Qui ci soccorrono le ricerche più recenti sulla popolazione alessandrina. Lo Schubart (2) ha distinto nettamente due classi di cittadini, di *Ἀλεξανδρεῖς* in senso legale ma largo: i più antichi che sono inscritti nei demi e nelle tribù e si contrassegnano in tutto l' Egitto non come *Ἀλεξανδρεῖς*, ma col nome del demo a cui appartengono, ed altri che invece assumono anche in confronto dei primi la semplice denominazione di *Ἀλεξανδρεῖς*, la quale non significa degli abitanti in genere di Alessandria, e neanche dei cittadini in genere, ma è il distintivo di una classe speciale di cittadini. Il decreto di Claudio notando espressamente che erano *Ἀλεξανδρεῖς λεγόμενοι*, mette i Giudei di cui parla nella classe dei cittadini detti *Ἀλεξανδρεῖς*, e non in quella che aveva la cittadinanza da più antica data ed i cui membri eran soliti contrassegnarsi con l'indicazione del demo. I Giudei non vantavano diritti e non aspiravano ad appartenere a quest' ultima. Perchè ciò? La ragione sembra certa: l'iscrizione nei demi andava congiunta con atti di culto pagano a cui i Giudei non volevano assoggettarsi in nessun modo. Il papiro Hibeh I 28 (3) del 265 a. C., relativo all'ordinamento delle fratrie componenti i demi di una città ch'è Ales-

---

(1) Schubart mem. cit. " Archiv " V p. 114.

(2) Ibid. p. 104 seg. Meno esatto e ingiustificato è ciò che si afferma a p. 110 che il governo romano non abbia avuto alcuna notizia della distinzione tra le due classi di cittadini.

(3) Wilcken *Chrestomathie* n° 25 p. 41.

sandria o Tolemaide, ma potrebbe ugualmente riferirsi ad ambedue, è molto frammentario, ma pur dice espressamente che nell'essere ammessi alle fratrie, bisognava esser riconosciuti dagli antichi membri, sacrificare e prender parte a banchetti sacri, ed inoltre intervenire a cerimonie o sacrifizi che si celebravano a turno dalle fratrie di tutti i demi in tutti i giorni dell'anno. Da questi obblighi religiosi andavano invece esenti i cittadini che non erano inscritti nei demi, gli *Ἀλεξανδρεῖς* in senso ristretto, ed a questi potevano appartenere anche i Giudei. Dei quali che alcuni ottenessero la cittadinanza alessandrina tutti concedono, e questi pochi almeno se restavano Giudei dovevano andar esenti dagli obblighi religiosi. Quando Apione domandava " perchè mai dunque se sono cittadini non adorano gli stessi dei che gli Alessandrini? „ (*c. Apion.* II 65) egli giocava nell'equivoco; il venerare le stesse divinità era inevitabile per i cittadini iscritti nei demi, non per gli *Ἀλεξανδρεῖς* che godevano libertà religiosa: col criterio avvocatesco di Apione nessun buon Giudeo sarebbe mai potuto divenire cittadino di Alessandria.

Mettasi in rapporto quanto siam venuti dicendo con le notizie riferite dal *III Macc.*, e ne scaturirà non poca luce. Nel 217/6 per celebrare la vittoria di Rafia, come ad altri, così ai Giudei da lungo tempo stabiliti in Alessandria e resisi benemeriti, fu concessa la cittadinanza, che sin allora non possedevano. Ma poichè allora si riordinavano interamente la città, i suoi demi e le sue tribù, i nuovi cittadini ricevevano la piena e perfetta cittadinanza con l' inscrizione nei demi. Tale concessione che era veramente da parte del re un atto di liberalità, veniva nel caso dei Giudei ad essere vana, anzi dannosa: e il motivo è detto espressamente, perchè l'ammissione nella cittadinanza importava atti di culto pagano, che consistevano in una partecipazione ai misteri di Dioniso: il re aveva voluto *καὶ πολιτείας αὐτοὺς Ἀλεξανδρέων καταξιῶσαι καὶ μετόχους τῶν ἀεὶ ἱερέων καταστῆσαι.* Perchè i Giudei ne profittassero occorreva che potessero restare fuori dell'organizzazione in demi e tribù, nella condizione speciale di *Ἀλεξανδρεῖς*, che allora per la riforma di Filopatore veniva momentaneamente abolita, in quanto tutti i cittadini venivano iscritti nei demi, ma che esisteva prima e doveva risorgere ben presto, non appena si sarebbero

creati nuovi cittadini, senza che perciò avvenisse la loro iscrizione nei demi.

Il *III Macc.* racconta che dei Giudei solo pochi, che dovevano aver raggiunto una posizione sociale notevole e più si ripromettevano dalla benevolenza regia, accettarono la cittadinanza in quella forma, furono considerati dai loro connazionali come apostati e dovettero perdersi nella massa della popolazione gentile con pieni diritti. I più non l'accettarono e preferirono soggettarsi alla *λαογραφία* e cadere in una condizione giuridica inferiore a quella in cui si trovavano, provocando così col loro contegno di opposizione l'ira del re: parrebbe dunque che essi siano rimasti fuori della cittadinanza alessandrina. Ma deve riflettersi che il *III Macc.* è una storia che finisce bene (o se così si preferisce, un romanzo a lieta fine): i Giudei vengono completamente riabilitati dal re che ne apprezza i servigi. Non sarebbe lecito supporre, che vista l'impossibilità di piegarli, si transigesse, se non subito, più tardi, dal governo sul punto della partecipazione ai misteri e si riconoscesse loro il diritto di cittadinanza che era stato loro largito, pur lasciandoli fuori dei demi e delle tribù, nella condizione speciale di *Ἀλεξανδρεῖς*? E se ciò non avvenne sotto Filopatore, non è ragionevole supporre che si verificasse sotto Filometore o qualche altro dei Lagidi posteriori, che molto si poggiarono sui Giudei anche per controbilanciare la turbolenta popolazione alessandrina? Dato il precedente la cui memoria ci è conservata dal *III Macc.*, è molto ragionevole supporre di sì, ed in queste circostanze la testimonianza di un atto imperiale come il decreto di Claudio che l'afferma espressamente, e che nella precisione delle formole giuridiche mostra perfetta conoscenza dello stato della popolazione di Alessandria, deve ritenersi come decisiva. Che i Giudei avessero la cittadinanza per concessione dei re era risultato evidente dalle scritture e decreti che essi conservavano (*καθὼς φανερὸν ἐγένετο ἐκ τῶν γραμμάτων τῶν παρ' αὐτοῖς καὶ τῶν διαταγμάτων*). Ammesso ciò noi dobbiamo correggere e restringere le affermazioni esagerate delle fonti giudaiche in quanto:

1) non tutti i Giudei di Alessandria, ma solo una frazione di essi che erano detti *Ἀλεξανδρεῖς* avevano tale diritto;

2) essi non appartenevano alla classe, diremo aristocra-

tica, degli Alessandrini di cui era propria l'organizzazione in fratrie, demi e tribù e speciali pratiche di culto pagano, ma a quella inferiore e precisamente denominata degli *'Αλεξανδρεῖς*;

3) la concessione della cittadinanza ai Giudei fu fatta non da Alessandro o Tolemeo di Lago, ma dai re posteriori a partire da Filopatore.

Recentemente si è creduto dallo Schubart (1) e dal Wilcken (2) di trovare la prova che i Giudei di Alessandria non possedevano la cittadinanza in un papiro del 5/4 a. C., dove un Eleno figlio di Trifone, rivolgendo una supplica al prefetto Gaio Turranio, aveva prima dichiarato di essere *'Αλεξανδρεύς* e poi cancellato questo termine e sostituitolo con l'espressione *'Ιουδαῖος τῶν ἀπὸ 'Αλεξανδρείας*. La giustificazione dello Schürer (3) che *'Αλεξανδρεύς* sia stato adoperato da Eleno per indicare che era un abitante di Alessandria è con ragione respinta dal Wilcken (4). Ma contro il diritto di cittadinanza dei Giudei inteso come noi abbiamo cercato di definirlo nulla si può arguire dal papiro. Eleno apparteneva alla gran massa dei Giudei senza cittadinanza, era un giudeo di Alessandria, non un giudeo *'Αλεξανδρεύς*. Però da tutto il papiro, disgraziatamente lacunoso, appare evidente che egli aveva delle pretese alla cittadinanza, ma non solo questa gli era stata negata (*κινδυνεύω οὐ μόνον τῆς ἰδίας πατρίδος στερηθῆναι ἀλλὰ καὶ...*), ma lo si era anche assoggettato, forse tra altri oneri, al testatico (*λαογραφία*) da cui andavano esenti i cittadini ed egli stesso, sebbene non cittadino, per aver superato i 60 anni. Nello stendere la prima volta il suo ricorso per esserne esentato, egli lo concepì dal punto di vista delle sue

---

(1) Mem. cit. in " Archiv „ V p. 109, 119.

(2) *Grundzüge* I p. 63; *Chrestomathie* I p. 82.

(3) *Geschichte* III p. 718.

(4) Wilcken *Chrestomathie* I n° 58 p. 81 = *BGU.* IV 1140: *Γαίωι Τυρρανίωι παρὰ Ἑλένου τοῦ Τρύφωνος ['Αλεξανδρέως] 'Ιουδαίου τῶν ἀπὸ 'Αλεξανδρείας· Ἡγεμὼν [βέλτιστε] μέγιστε ὢν ἐκ πατρὸς 'Αλεξανδρέως [καὶ] διατρείψας ἐνταῦθα τὸν πάντα χρόνον μεταλαβὼν καθ' ὃ δυνατὸν καὶ τῶι πατρὶ τῆς ἀρεσκούσης παιδείας κινδυνεύω οὐ μόνον τῆς ἰδίας πατρίδος στερηθῆναι ἀλλὰ καὶ εἰς τὸν .... ἐλλείποντος χρόνου τῆς λαογραφίας διὰ τὸ τῶν ἑξήκοντα, ἀξιῶ σε τὸν πάντων σωτῆρα μὴ παριδεῖν [καθὼς καὶ ὑπὸ τῶν πρώτων ἡγεμόνων ἀπαρενόχλητος γέγονα καὶ ὑπὸ σοῦ τὸ ὅμοιον.......]*. I tratti tra parentesi sono cassati.

pretese alla cittadinanza: si chiamò quindi *Ἀλεξανδρεύς*, mise innanzi le circostanze che credeva potessero dimostrare questa sua qualità, come l'esser nato di padre *Ἀλεξανδρεύς*, l'aver vissuto sempre in Alessandria, l'aver ricevuto un'adeguata educazione, e infine notò che sotto gli altri prefetti non era stato perciò molestato. Ma poi dovette riflettere, o gli fu osservato, che scrivendo a quel modo si esponeva a dei guai per usurpata cittadinanza, o nel miglior de' casi, a non vedere tenuto alcun conto della sua domanda per l'esenzione dalla *λαογραφία*: e allora la corresse sostituendo alla qualità di *Ἀλεξανδρεύς* quella di *Ἰουδαῖος τῶν ἀπὸ Ἀλεξανδρείας*, e cancellando l'accenno alla tranquillità goduta sotto gli altri prefetti, ch'era giustificabile solo dalla qualità di cittadino che non aveva; ma lasciò stare gli altri particolari che se non gli giovavano, non potevano neanche nuocergli. Noi abbiamo però ragione di sospettare che anche la pretesa di esser nato da padre *Ἀλεξανδρεύς* fosse infondata: questi non lo era probabilmente più che il figlio stesso, il quale però come non cancellò l'accenno ad Alessandria come a sua presunta patria in cui avesse diritti di cittadinanza, lasciò pure quello dove affermava la qualità di cittadino nel padre.

Una cosa sola adunque il papiro dimostra: che come vi erano Egiziani secondo Giuseppe (*c. Apion.* II 71) i quali avevano usurpato illegalmente la cittadinanza, così vi erano dei Giudei che vi ambivano e se l'attribuivano senza alcun diritto: il che indirettamente prova che i Giudei potevano essere cittadini e che molti lo erano di fatto.

Partendo dalle affermazioni di Giuseppe che i Giudei ottennero da Alessandro e Tolemeo di Lago l'uguaglianza con i Macedoni di Alessandria, il Wilcken (1) negando loro la cittadinanza alessandrina, sarebbe disposto a concedere più facilmente la qualità di *Μακεδόνες*. Ora che l'uno o l'altro dei Giudei riuscisse ad ottenere tale qualità, specialmente dopo che molto aveva perduto della sua importanza, non sarà impossibile: ma niente sinora ci obbliga ad ammetterlo. Giuseppe pare ritenga (e qualche moderno lo ha seguito) che la cittadinanza alessan-

---

(1) *Grundzüge* p. 63.

drina sia sorta dalla condizione propria dei *Μακεδόνες* e sia di questa la continuazione. Noi abbiamo invece motivo di ritenere ch'essa è lo svolgimento e la continuazione dei privilegi e delle esenzioni accordate specialmente alla popolazione ellenica per attirarla a stabilirsi nella città. Ciò è insinuato dal carattere più negativo della cittadinanza stessa consistente più in esenzioni e privilegi che non nell'esercizio di positivi diritti politici, e dal fatto che la condizione dei *Μακεδόνες* continua a lungo indipendente accanto a quella dei cittadini di Alessandria. Se la città appare sino al tempo di Settimio Severo (1) priva di un organismo politico analogo a quello delle altre città greche, si deve, a mio parere, alla circostanza che appena costrutta divenne la capitale del regno, e al fatto che la classe dominante e avente diritti politici era in origine quella dei *Μακεδόνες*, la quale non si svolse e non continuò in quella dei cittadini alessandrini. Nei primordi non si potè pensare a dare diritti politici a quell'accozzaglia di elementi disparati venuti da ogni parte dell'Ellade, mentre era necessaria unità di comando per spingere innanzi l'opera; venutovi poi Tolemeo egli disponeva di tutto e i Macedoni intorno a lui. Questi costituivano una specie di aristocrazia militare e conservavano in Alessandria un po' l'aspetto di un esercito stanziato di cui il re, che prende anche egli il titolo di Macedone, era il capo; avevano i loro quartieri intorno alla reggia e si attribuivano il diritto di riconoscere il sovrano quando ascendeva la prima volta al trono.

Leggasi in Polibio (*hist.* XV 26 seg.) l'episodio, attinto a fonti contemporanee, della caduta di Agatocle, il potente ministro di Filopatore, che si era impadronito della tutela del fanciullo Epifane, e si vedrà come i *Μακεδόνες* sono quelli che tutto regolano e fanno, mentre gli *Ἀλεξανδρεῖς* non sono neanche nominati, e la città appare come divisa in *γένη* civili accanto a *γένη* militari. Agatocle sentendosi minacciato raccoglie i Macedoni e tien loro un discorso che è accolto freddamente, e lo stesso gli accade con gli altri *συστήματα* riuniti in distinti *ἐκκλησιασμοί*.

Anche l'episodio di re Cleomene che chiama *τὰ πλήθη* a

(1) Spartian. *Sever.* c. 17: " Alexandrinis ius buleutorum dedit qui sine publico consilio ita ut sub regibus ante vivebant uno iudice contenti ".

libertà (Polyb. V 39, 3), ma non è ascoltato e muore, mostra come la popolazione alessandrina non disponeva di diritti politici, poichè non possiamo attribuire a Cleomene il pensiero d'abolire senz'altro la monarchia. Di tutto disponeva il re con la sua corte in cui l'elemento militare dei *Μακεδόνες* era prevalente, sebbene questo andasse di poi sempre più decadendo, mentre la condizione dei cittadini di Alessandria cresceva in stima ed influenza. Quando perciò Giuseppe fa concedere il diritto di cittadinanza ai Giudei da Alessandro e dai primi Lagidi, che li avrebbero equiparati ai Macedoni, si fonda su un'idea erronea che egli aveva dell'origine della cittadinanza alessandrina, ed afferma cosa d'altronde incredibile, chè per quanto i Giudei valessero, non potevano certo esser stimati tanto da venir equiparati ai Macedoni, conservando essi inoltre proprie leggi e religione.

Oscuro è il passo (1) in cui egli dice che i Giudei erano stati stabiliti intorno alla reggia e la loro *φυλή* si chiamava ancora *Μακεδόνες*. Forse egli è caduto nell'errore di credere che nell'ordinamento di Alessandria esistesse una tribù di cittadini che così si chiamasse e della quale facessero parte i suoi connazionali, ch'egli sapeva non appartenere alle altre tribù. Forse anche egli potè prendere *φυλή* in un senso locale, come sembra suggerire il contesto, e voler dire che il quartiere in cui i Giudei erano stabiliti, il *Δ*, s'intitolava *Μακεδόνες*, denominazione che potè derivare dal fatto che ivi intorno alla reggia erano acquartierati come corpo di guardia le milizie regolari dei *Μακεδόνες* (2). Ma non ostante la vicinanza di questa, il quartiere non era dei più aristocratici e belli della città; Apione ne toglieva anzi pretesto per gettare il disprezzo sui Giudei. Un atto dell'autorità che in una parte di esso stabilisse i Giudei, forse come soldati nel II o I secolo a. C., o che già stabilitivisi, ne riconoscesse loro il possesso, è supposto da ciò che nel 38 gli Alessandrini li scacciano da tutti gli altri quartieri e ve li rinchiudono. Col moltiplicarsi dei Giudei e col diminuire dell'ele-

---

(1) *c. Apion.* II 35-6: *εἰς κατοίκησιν δ' αὐτοῖς ἔδωκε τὸν τόπον Ἀλέξανδρος, καὶ ἴσης παρὰ τοῖς Μακεδόσι τιμῆς ἐπέτυχον..... πρὸς τοῖς βασιλείοις ἦσαν ἱδρύμενοι καὶ μέχρι νῦν αὐτῶν ἡ φυλὴ τὴν προσηγορίαν εἶχε Μακεδόνες.*

(2) Cfr. Polyb. XV, 28-9.

mento dei *Μακεδόνες* il quartiere era divenuto quasi intieramente ebraico, come un altro vicino; nè basta, chè anche negli altri tre i Giudei s'erano infiltrati (1). Quelli tra essi che godevano della cittadinanza, avevano certamente il diritto di abitare nella parte della città che più loro piacesse.

I Giudei *Ἀλεξανδρεῖς* rientravano come tali nell'organizzazione cittadina: ma essi stessi prima che ottenessero la cittadinanza, e quelli che poi si andarono stabilendo nella città e formavano la gran massa degli *Ἰουδαῖοι ἀπὸ Ἀλεξανδρείας* non eran però privi di ogni organizzazione. Tutte le notizie che ci mostrano i Giudei di Alessandria costituire un corpo a parte, e quindi sembrerebbero in contrasto col diritto di cittadinanza, debbono riferirsi invece all'organizzazione dei Giudei non cittadini. Il *III Macc.* parlando di essi al tempo di Filopatore usa la parola *σύστημα* (2), quella stessa che è adoperata da Polibio a proposito delle varie classi o corporazioni di Alessandria al tempo di Epifane, e la parola indica per sè stessa un certo organismo e dei vincoli che leghino i vari membri tra loro. Il pseudo-Aristea scrivendo almeno verso la metà del I sec. a. C. ci rappresenta i Giudei come formanti un *πολίτευμα* con *ἡγούμενοι* o capi propri (ed. Wendland, § 310); tale organismo era molto antico se l'autore potè attribuirlo al tempo di Filadelfo. Strabone (3) quando visitò l'Egitto trovò un etnarca che reggeva la popolazione giudaica alessandrina, giudicava le liti, aveva cura degli atti pubblici e dei decreti, come capo di un organismo politico autonomo. A questa autonomia accenna il *τῶν Ἰουδαίων ἀρχεῖον* ricordato in un papiro alessandrino (4) la circostanza invece rilevata dal Lumbroso (5) che nel *III Macc.* (7, 12) i Giudei avrebbero ottenuto di far vendetta degli apostati *ἄνευ πάσης βασιλικῆς ἐξουσίας ἢ ἐπισκέψεως*, secondo la legge mosaica, che per essi era norma di diritto, dovrebbe considerarsi (6)

---

(1) Philo *in Flaccum* § 8, Mangey II 525.

(2) 3, 9: *μὴ γὰρ οὕτως παρορᾳθήσεσθαι τηλικοῦτο σύστημα.*

(3) In Joseph. *antiq.* XIV 117: *καθίσταται δὲ καὶ ἐθνάρχης αὐτῶν, ὃς διοικεῖ τε τὸ ἔθνος καὶ διαιτᾷ κρίσεις καὶ συμβολαίων ἐπιμελεῖται καὶ προσταγμάτων, ὡς ἂν πολιτείας ἄρχων αὐτοτελοῦς.*

(4) *BGU.* IV 1151 7. La lettura non è però del tutto certa.

(5) *L'Egitto* p. 78.

(6) Se avesse valore storico, che è assai dubbio.

come cosa straordinaria, non avendo essi normalmente il diritto di giudizi criminali e di morte. Le cariche della comunità giudaica erano almeno in parte elettive, e il potere che esercitava l'etnarca, capo di due quinti della popolazione della città e che aveva dietro di sè l'appoggio morale di tutti i Giudei d'Egitto, doveva essere considerevolissimo. Come si vede, se dei Giudei di Alessandria solo una parte godeva le esenzioni e i privilegi dei cittadini, gli altri avevano in compenso raggiunto un grado di autonomia e di organizzazione politica che non possedevano gli stessi Alessandrini, i quali certo non vedevano ciò di buon occhio.

D'altronde quelli stessi dei Giudei che godevano la cittadinanza non erano perciò esclusi interamente dall'ambito del *πολίτευμα* giudaico, il quale oltre l'aspetto politico ne aveva anche uno religioso, nè l'essere *'Αλεξανδρεύς* spogliava della qualità di giudeo religiosamente, onde, almeno per questo riguardo, essi appartenevano alla comunità composta così di cittadini alessandrini e di non cittadini con regime autonomo. Anzi il crescere essa d'importanza, e quel certo fervore religioso che manifestano gli scritti giudeo-alessandrini di questo periodo c'inducono a credere che anche i Giudei *'Αλεξανδρεῖς*, pur tenendo e molto alla loro qualità privilegiata, si sentissero piuttosto attratti verso il centro della comunità giudaica, che non verso l'organizzazione molto limitata della cittadinanza alessandrina, dov'essi erano considerati sempre un po' come estranei. Queste circostanze spiegano quella specie di confusionismo certamente non involontario, per cui, sotto Caligola, da una parte gli Alessandrini cercano di mostrare tutti i Giudei spogli della cittadinanza, dall'altra i Giudei pare dissimulino che solo una classe di essi la possiede e che tutta la comunità giudaica vi pretenda.

Augusto che aveva regolata l'amministrazione di Alessandria (1), intervenne anche a diminuire il grado d'autonomia che i Giudei avevano raggiunto. Essendo morto verso la fine (11 d. C.) della prefettura di C. Giulio Aquila l'etnarca o genarca dei Giudei, egli per mezzo del nuovo prefetto M. Magio Massimo,

(1) Cassius Dio. LI 17: *τοῖς δ' 'Αλεξανδρεῦσιν ἄνευ βουλευτῶν πολιτεύεσθαι ἐκέλευσε.*

al quale aveva dato istruzioni, elesse la gerusia che doveva aver cura dei Giudei (1). Nel decreto di Claudio si dice che in tale occasione Augusto non vietò che si creassero etnarchi (Ioseph. *antiq.* XIX 283). Il fatto è che in tutto l'episodio della lotta tra Giudei ed Alessandrini del 38/41 l'etnarca o genarca non compare, nè più se ne ha memoria, mentre Filone ricorda accanto alla gerusia e come superiori gli *ἄρχοντες* dei Giudei (2). In che cosa dunque consistette la riforma di Augusto? Non è verosimile ch'egli istituisse allora la gerusia: questa doveva esistere di già accanto all'etnarca, come suo consiglio e rappresentanza del popolo, ma pare piuttosto che l'elezione, la quale spettava al popolo o si eseguiva per cooptazione dagli stessi membri, sia stata da Augusto riservata all'imperatore e per lui al prefetto imperiale. Così i Giudei venivano privati di una gran parte dell'autonomia, e pareggiati in certo modo agli Alessandrini, che non avevano alcuna *βουλή*, nè veri magistrati elettivi. Quanto all'etnarca pare che egli sia stato sostituito da parecchi *ἄρχοντες* che la gerusia stessa forse sceglieva tra i suoi membri. Così potremmo spiegare la frase di Claudio: *τελευτήσαντος τοῦ τῶν Ἰουδαίων ἐθνάρχου τὸν Σεβαστὸν μὴ κεκωλυκέναι ἐθνάρχας γίγνεσθαι,* dove gli *ἐθνάρχαι* che Augusto non vietò di eleggere corrisponderebbero agli *ἄρχοντες* ricordati da Filone.

Caligola mutò l'atteggiamento che avevan tenuto Augusto e Tiberio verso gli Alessandrini e fu a loro favorevole: così il suo regno segna una grave crisi per la comunità giudaica. La venuta di Agrippa, che voleva far sfoggio nell'ancor memore capitale dei Lagidi della dignità regia allora ricevuta, dette appiglio alla mordace satira del popolo, e provocò lo scoppio della inimicizia che covava da tempo tra l'elemento giudaico sempre più invadente sotto il dominio romano, che esso aveva accettato volentieri, e l'alessandrino. Tra le altre questioni allora sollevate fu quella della condizione giuridica dei Giudei; il prefetto Avillio Flacco pubblicò, secondo Filone (*in Flaccum* § 8 Mangey

---

(1) PHILO *in Flaccum* § 10 MANGEY II 527: *τῆς γὰρ ἡμετέρας γερουσίας ἣν ὁ σωτὴρ καὶ εὐεργέτης Σεβαστὸς ἐπιμελησομένην τῶν Ἰουδαίων εἵλετο μετὰ τὴν τοῦ γενάρχου τελευτὴν διὰ τῶν πρὸς Μάγιον Μάξιμον ἐντολῶν μέλλοντα πάλιν ἐπ' Αἰγύπτου (Ἀλεξανδρείας?) καὶ τῆς χώρας ἐπιτροπεύειν.*

(2) *In Flaccum* § 10 MANGEY II 528.

II 525), un *πρόγραμμα* in cui chiamava i Giudei *ξένοι καὶ ἐπήλυδες* (cfr. *c. Apion.* II 71, *peregrini*). Flacco era uomo retto e aveva dato prova di molta saggezza nei sei anni che aveva governato l'Egitto. Il suo decreto si spiega riflettendo che tutti i cittadini, qualunque fosse la stirpe etnica da cui provenivano, erano agli occhi dell'autorità regale prima, romana poi, *Ἀλεξανδρεῖς*: il termine *Ἰουδαῖοι* designava nel linguaggio legale esclusivamente i Giudei senza cittadinanza, ch'erano veramente in una condizione analoga a quella dei *ξένοι*. Il rigore però del linguaggio legale rispondeva bene alla realtà quando si trattava delle altre stirpi, che prendendo la cittadinanza si fondevano politicamente e religiosamente con la massa dei cittadini, ma questo non avveniva dei Giudei distinti per tanta singolarità di leggi, di costumi, di religione e che, anche ricevuta la cittadinanza, restavano di animo e di pratiche Giudei e riguardavano come loro centro naturale più il *πολίτευμα* indipendente a cui eran legati da vincoli etnici e religiosi, che non la *πόλις* in cui eran cittadini, e agli occhi delle altre stirpi passavano di fatto come Giudei.

In questo caso per evitare i malintesi era necessario tra i due termini di *Ἀλεξανδρεῖς* e di *Ἰουδαῖοι* metterne uno di *Ἀλεξανδρεῖς Ἰουδαῖοι*: è infatti questo mezzo termine e la classe dei Giudei cittadini che gli corrisponde che dànno appiglio a tutti gli equivoci e ai sofismi con cui le due parti sostengono il loro punto di vista. Così Apione (*c. Apion.* II 38) in un certo punto si meravigliava: " come mai essendo *Ἰουδαῖοι* si chiamarono *Ἀλεξανδρεῖς*? ". Abbiamo così in sua bocca la confessione che v'erano *Ἰουδαῖοι* chiamati *Ἀλεξανδρεῖς*, e non per essere abitanti di Alessandria, nel qual senso non poteva il termine recar meraviglia; la spiegazione poi la dà il decreto di Claudio affermando che questi *Ἰουδαῖοι* detti *Ἀλεξανδρεῖς* eran cittadini. Altrove (*c. Apion.* II 60) ricordava che l'ultima Cleopatra e forse Germanico avevan distribuito del grano ai cittadini ma non ai Giudei. L'argomento che imbarazza Giuseppe, con la sua teoria della cittadinanza data *ad omnes*, cade appena si distinguano i Giudei cittadini considerati come *Ἀλεξανδρεῖς* e come tali partecipanti alle largizioni, dai Giudei non cittadini *οἱ Ἰουδαῖοι* che non vi potevano partecipare. Filone alla sua volta volendo aggravare la colpa del prefetto, lo accusa di aver dichiarati tutti

i Giudei come *ξένοι*, mentre di fatto il decreto riguardava gli *'Ιουδαῖοι* e non gli *'Αλεξανδρεῖς 'Ιουδαῖοι*.

Lo stesso equivoco, certo voluto, è in Filone (1) quando racconta l'episodio della flagellazione dei membri della gerusia, nella qual circostanza ci dà una delle poche notizie che abbiamo sui privilegi dei cittadini Alessandrini. Questi avevano il diritto di esser battuti con spatole e da esecutori che fossero cittadini, mentre gli Egiziani erano battuti con verghe e da esecutori di diversa condizione giuridica. Secondo Filone anche i suoi connazionali, sotto gli altri prefetti e sotto lo stesso Flacco, sarebbero stati battuti con le spatole al pari degli Alessandrini; ma in quella circostanza Flacco, imprigionati trentotto membri della gerusia (evidentemente come causa della sedizione), li fece flagellare in pubblico teatro e le sferze adoperate furono quelle degli Egiziani. Ciò fa uscir dai gangheri Filone. Come mai, mentre gli stessi privati Alessandrini Giudei (*τῶν ἰδιωτῶν 'Αλεξανδρέων 'Ιουδαίων*) eran battuti con verghe più civili e liberali, gli *ἄρχοντες*, la gerusia sarebbero poi stati trattati da meno, come i più ignobili e colpevoli Egiziani? La tirata retorica ha tradito involontariamente Filone: i Giudei ch'egli dice venivano trattati come i cittadini e battuti con le spatole erano *'Αλεξανδρεῖς*, anche se semplici privati, mentre i membri della gerusia, per quanto occupassero un grado elevato nell'organizzazione dei Giudei senza cittadinanza, non erano cittadini e non avevano quindi alcun diritto al trattamento privilegiato. Ai Giudei poteva dolere di vedere i loro capi trattati con meno riguardi che i semplici cittadini Alessandrini ed equiparati agli Egiziani, ma con ciò Flacco non faceva che seguire, da buon romano, le più elementari norme di diritto. Anche questo passo di Filone ci mostra la tendenza dei Giudei di estendere almeno ai più notevoli membri della loro comunità i privilegi propri degli Alessandrini.

Succeduto a Flacco C. Vitrasio Pollione, le divergenze tra Alessandrini e Giudei furono, da questi ultimi che ne speravano giustizia, portate al tribunale di Caligola. Come si svolgesse il giudizio conosciamo dal racconto, d'altronde partigiano,

---

(1) *In Flaccum* § 10 Mangey II 528.

di Filone. Quanto all'esito della causa, gli storici (1) che se ne sono occupati affermano che non ne ebbe alcuno, poichè Caligola non avrebbe pronunziato la sentenza, e le cose sarebbero rimaste in sospeso sino alla sua morte. Ma in realtà la sentenza vi fu e del tutto sfavorevole ai Giudei. Filone chiude la *Legatio ad Caium* esponendo lo stato d'incertezza tormentosa in cui egli e i compagni rimasero dopo l'udienza, non sapendo quale sarebbe stata la sentenza: di questa egli doveva parlare nel libro perduto che seguiva *Παλινῳδία πρὸς Γάϊον*. Ma nella *Legatio* stessa descrivendo l'empietà e crudeltà di Caligola, ce ne dà un antecipo quando afferma (2) che questi, sdegnato specialmente col popolo giudaico, si attribuì le sinagoghe delle varie città, cominciando da quelle di Alessandria, le riempì di sue immagini e statue collocandovele con la forza, e meditava di fare altrettanto nel tempio di Gerusalemme. Inoltre Filone dice che Gaio aveva promesso ai delegati alessandrini di giudicare sollecitamente la causa, ed è da credere ch'egli pronunziasse la sentenza nel 39 stesso prima di partire per la Gallia (3). Anche Claudio afferma nel decreto (4) che i Giudei erano stati depressi da Gaio e ch'egli non vuole che abbiano per la pazzia di lui a soffrire in alcun loro diritto.

Non solo Caligola convalidò la dedica delle sinagoghe a lui fatta, ma dette ordine che vi fossero innalzate sue statue, e ciò si estese anche fuori di Alessandria. Ai Giudei fu negato il diritto di cittadinanza alessandrina e fu loro vietato, a quanto risulta dal decreto di Claudio, di avere capi elettivi o etnarchi.

---

(1) Così lo SCHÜRER *Geschichte* $I^{3\cdot 4}$ p. 502. — BLUDEAU *Juden und Judenverfolgungen* p. 87. — WELLHAUSEN op. cit. p. 349.

(2) § 43 MANGEY II 596: *τὰς μὲν ἐν ταῖς ἄλλαις πόλεσι προσευχὰς ἀπὸ τῶν κατ' Ἀλεξάνδρειαν ἀρξάμενος σφετερίζεται, καταπλήσας εἰκόνων καὶ ἀνδρίαντων τῆς ἰδίας μορφῆς· ὁ γὰρ ἑτέρων ἀνατιθέντων ἀφείς, αὐτὸς ἱδρύετο δυνάμει.*

(3) *Legatio* § 28 MANGEY II 573: *ἔοικε τῇ τῶν ἄλλων Ἀλεξανδρέων μερίδι προσκεῖσθαι, ᾗ διδοὺς προνομίαν θᾶττον ὑπέσχετο δικάσειν.*

(4) JOSEPH. *antiq.* XIX 284: *Ἀλεξανδρεῖς δὲ ἐπαρθῆναι κατὰ τῶν παρ' αὐτοῖς Ἰουδαίων ἐπὶ τῶν Γαΐου Καίσαρος χρόνων, τοῦ διὰ τὴν πολλὴν ἀπόνοιαν καὶ παραφροσύνην..... ταπεινώσαντος αὐτούς, βούλομαι μηδὲν διὰ τὴν Γαΐου παραφροσύνην τῶν δικαίων τῷ Ἰουδαίων ἔθνει παραπεπτωκέναι.*

L'anno e mezzo che Caligola ancora visse fu per i Giudei molto penoso: gli Alessandrini forti del favore imperiale fecero loro sentire tutto il peso della sconfitta. Anche il prefetto Vitrasio Pollione dovette gravar la mano su di essi. A lui infatti è da riferire l'episodio che Filone racconta in *de somniis* II 123 seg. (Wendland III), dei Giudei costretti a lavorare in giorno di sabato, da un personaggio che li apostrofa violentemente, ed appare essere stato il prefetto d'Egitto (1). Così appena giunse ad Alessandria la notizia dell'uccisione di Caligola, i Giudei sono subito in armi contro gli Alessandrini e si rinnova la lotta non incruenta di qualche anno innanzi. Claudio ordinò al prefetto di intervenire efficacemente e mandò egli stesso il decreto (Ioseph. *antiq.* XIX 278).

Non v'è dubbio che questo segni la vittoria dei Giudei che rientrano nei loro diritti, ma si avrebbe torto a rappresentarlo come un atto di liberalità verso di essi. In realtà esso non fa che restituire le cose nello stato anteriore a Caligola: ai Giudei Ἀλεξανδρεῖς viene riconosciuta la cittadinanza che possedevano: si permette ai Giudei di eleggersi etnarchi secondo la costituzione che aveva dato Augusto: ma niente più; i Giudei non cittadini restan fuori della cittadinanza, anzi messo bene in chiaro il loro stato giuridico vedono diminuire la speranza di usurpazioni, e il decreto si chiude con un serio ammonimento alle due parti contendenti di curar meglio per l'avvenire che la pace non venga turbata. E poichè il moto antigiudaico di Alessandria, favorendolo Caligola, si era esteso ad altre città, Claudio, a preghiera dei re Erode ed Agrippa, emise un secondo decreto (*antiq.* XIX 287 seg.) in cui si riconfermano ai Giudei di tutto l'impero gli antichi privilegi, ma si raccomanda anche loro di essere tolleranti e di non irritare gli altri.

Sotto Vespasiano, profittando della guerra giudaica, gli Alessandrini ritentarono, ma invano, di far cassare i diritti dei

(1) Il Lumbroso che ha richiamato l'attenzione sull'episodio " Archiv f. Papyr. „ I (1901) p. 291, lo ha attribuito probabilmente a Flacco: così pure lo Schürer *op. cit.* I p. 498 n. 162; lo Stähelin *op. cit.* p. 39; il Bludau *op. cit.* p. 73. Ma se si trattasse di Flacco, Filone non avrebbe omessa quest'altra colpa nell'enumerazione di quelle che a torto gli attribuisce nell'*in Flaccum*.

Giudei (*antiq.* XII 121): questi furono conservati dall'autorità romana anche quando il loro stato nazionale più non esisteva. In tale circostanza agli Alessandrini si unirono gli Antiocheni. Secondo Giuseppe come in Alessandria Alessandro e Tolemeo I, così Seleuco Nicatore in Antiochia e nelle altre città dell'Asia Minore e della Siria da lui fondate, avrebbe ai Giudei concessa la perfetta uguaglianza coi Macedoni ed Elleni (*antiq.* XII 119; *c. Apion.* II 39); ma altrove con più verità afferma che tale uguaglianza ai Giudei antiocheni fu concessa dai successori di Antioco Epifane, che avevano certo interesse a tenerseli amici (*bellum* VII 43-4). Anche qui per il continuo loro immigrare, accanto ai Giudei con diritto di cittadinanza, si dovette formare una colonia autonoma che n'era priva, e vi troviamo come in Alessandria degli *ἄρχοντες* (*bellum* VII 47). Nella lotta contro l'elemento giudaico si prendeva di mira non solo l'equiparazione di una parte di esso ai cittadini, ma anche l'organizzazione amministrativa, giudiziaria, religiosa autonoma di queste comunità che formavano corpo a sè e dove eran numerose e potenti, come in Alessandria ed Antiochia, dividevano la città in due parti distinte, tra le quali l'attrito era inevitabile e più o meno latente, perpetuo. Ciò giovava ai deboli sovrani di quelle monarchie, che contrapponendo un elemento all'altro, riuscivano a più facilmente dominare le loro capitali; e poichè tale stato di cose conveniva con la politica romana, si perpetuò a lungo sotto l'impero. Solo forse in seguito alle sollevazioni e alle guerre di sterminio dei regni di Traiano e Adriano venne cangiato: in ogni caso ne seguì il decrescere in numero e floridezza e quindi in potenza delle comunità giudaiche, il che è vero in modo speciale di quella di Alessandria.

Sui lavori finora fatti nel Laboratorio di Materia Medica della Regia Università per il ricupero dei codici danneggiati dall'incendio della Biblioteca del 1904.

Nota di PIERO GIACOSA

In una mia comunicazione a questa Accademia (1) io descrivevo rapidamente il materiale di codici pergamenacei stato affidato al Laboratorio di Materia Medica; la condizione diversa di esso secondochè aveva subìto maggiormente gli insulti del calore o delle fiamme, quelli dell'acqua o dell'umidità, gli uni e gli altri insieme; accennavo alle prime misure adottate per impedire che i processi putrefattivi rapidamente iniziatisi rendessero irreparabile la condizione dei codici; trattavo di alcuni accorgimenti da me escogitati per facilitare le prime opere di ricupero; e infine aggiungevo che l'opera di alcuni volenterosi che spontaneamente si offrirono per coadiuvarmi nei lavori urgentissimi e delicati era giunta al punto di aver separati e numerati i fogli di 45 chilogrammi di codici, cioè più della metà del materiale avuto (2); e ciò nello spazio di due mesi, dal 15 febbraio al 15 aprile.

Nei tempi che seguirono alla redazione della notizia citata si continuò il lavoro e si riuscì così a salvare il in parte il Salterio greco (sotto n. 2) che il Prof. De Sanctis aveva identificato in

(1) *Relazione dei lavori intrapresi al Laboratorio di Materia Medica per il ricupero e restauro dei codici appartenenti alla Biblioteca di Torino.* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIX, ad. 26 giugno 1Ϛ04.

(2) I codici avuti in esame pesavano circa 60 chilogrammi al momento in cui furono portati. Alla metà di aprile rimanevano da lavorarsi chilogr. 27 formati di cartaccie e frammenti imbrattati di fango e sabbia, in parte calcificati e carbonizzati. La parte lavorata (33 chili stando al peso primitivo) pesava invece 45 chili perchè i fogli separati assorbirono una gran parte dell'acqua perduta durante l'incendio.

uno dei frammenti più irriconoscibili. Ciascun codice, sciolto nei suoi fogli, numerati nuovamente perchè la primitiva numerazione marginale era quasi sempre scomparsa, veniva raccolto in un voluminoso fascio che si teneva lasso in modo che l'aria circolando finisse di ridare alla pergamena la sua condizione primitiva, esportando l'eccesso di umidità che è condizione prima per l'iniziarsi delle erosioni putrefattive che causano lo sfacelo della pergamena stessa.

Allorchè il 23 giugno 1904 la Biblioteca ritirava i codici stati inviati al Laboratorio di Materia Medica, si constatava che 39 codici erano stati lavorati in modo da averne i fogli sciolti in altrettanti pacchi, e rimaneva un residuo non lavorato ma in condizione da non soffrire ulteriore deperimento.

Se non che il Laboratorio di Materia Medica con questa consegna di un materiale avuto nell'ora della più pressante necessità, minacciato di sicura perdita per il soggiorno di 20 giorni in un cortile aperto (1), e salvato per quanto si poteva, non credette esaurito il suo mandato. Allorchè in principio della primavera 1904 si chiamava dalla Vaticana il Marré per affidargli il ristauro dei codici, essendosi constatato che non esisteva alla Biblioteca nè all'Università un locale adatto a quei lavori, io offrii alla Commissione dei ristauri una parte delle camere a pian terreno ed una galleria prospiciente il giardino, dove le condizioni di luce, la presenza di condutture d'acqua e di gaz, la secchezza dell'ambiente, la calma assoluta erano condizioni propizie per un lavoro il cui risultato dipende dal concorso degli elementi tutti, sia quelli dell'abilità personale dell'operatore, sia quelli esterni.

Nell'offrire un locale che dava mezzo di intraprendere il lavoro che potesse rimediare, se pure solo in parte, ai danni dell'incendio io ero consigliato non solo dall'amore della coltura, da quella devozione ai nostri gloriosi istituti cittadini, che ognuno sentiva e che guidò tanti valentuomini nella loro opera di rivendicazione; ero anche spinto dalla convinzione che se un lavoro di questa natura esige quei mezzi speciali che si trovano in un laboratorio scientifico, nessun laboratorio più di quello di

(1) Dal 26 gennaio al 15 febbraio il materiale da me avuto stette ammucchiato nel cortile della fabbrica di tabacchi in via della Zecca!

Materia Medica potesse pretendere all'onore di una tale collaborazione. Infatti la Materia Medica fra tutte le discipline biologiche e fisico-chimiche ha più contatto col passato, ne custodisce più gelosamente la tradizione, ne giudica più equamente il valore. La scienza dei farmaci e del loro impiego alla cura delle malattie è la più antica fra le scienze mediche; da essa si staccarono man mano le così dette scienze naturali; in essa si compendiò per lungo tempo tutto lo scibile medico; essa oggidì, alleata alla fisiologia colla quale ha comuni problemi e metodi d'indagine, costituisce una delle fondamentali discipline mediche.

Fatte alcune opere d'adattamento, il laboratorio fu in grado di funzionare: il Marré lo completò con la provvista di numerosi pressacarte metallici coi quali egli ottiene il distendimento graduale delle pergamene, che si effettua anche mediante appositi telarini, o col fissarle su carte, o collo stirarle mediante elastici. Vi si installò la camera umida che ho già descritto nella mia prima memoria citata. Il complesso della suppellettile è assai limitato, perchè in questa sorta di lavori è la mano stessa dell'artefice guidata da una lunga esperienza, ed è sopratutto la pazienza e la delicatezza dell'operare che assicurano i successi.

Il laboratorio fu completo al principiare dell'anno 1905, e da quell'epoca ha sempre continuato senza interruzione a funzionare. Sebbene esso ufficialmente non sia riconosciuto, perchè il Marré è considerato come impiegato alla Biblioteca Nazionale; sebbene anche quel tenue e doveroso sussidio che si passava all'inserviente incaricato della pulizia e del servizio dei locali, sia poi stato soppresso dalla Direzione generale delle biblioteche, sì che l'Istituto di Materia Medica dovette assumersi anche questo onere, pure il laboratorio dei restauri ha una origine consacrata da una carta di fondazione preziosa che equivale a qualsiasi riconoscimento ufficiale. Questa carta riferisce che: " il giorno 5 febbraio 1905 nel Laboratorio di Materia Medica della R. Università di Torino alla augusta presenza di Sua Maestà la Regina Madre Margherita di Savoia si inaugurò il piccolo laboratorio destinato ai lavori di restauro dei codici e delle pergamene danneggiate dall'incendio della Biblioteca di Torino ". La Regina, oltre alla sua firma, volle di proprio pugno aggiungere l'augurio: " Quod bonum faustumque sit ". Firmarono dopo

di Lei e dei personaggi che l'accompagnavano, il Rettore della Università, il Direttore della Biblioteca Nazionale, il Professore di Materia Medica, il restauratore Marré ed altri presenti alla cerimonia.

L'elenco che segue registra l'opera compiutasi nel laboratorio durante i nove anni che ci separano dalla data dell'incendio. Ma alcuni lavori in corso, che per la loro natura, per la difficoltà inerente al ristauro e per il valore speciale del codice che impone la massima delicatezza per evitare danni maggiori, procedono lentamente, non vi sono registrati. Tra questi sono particolarmente importanti quelli destinati al ricupero di alcune delle splendide miniature del famoso Plinio attribuite alla scuola del Mantegna e provenienti dai Gonzaga. Fortunatamente questo codice, allorchè era ancora integro, era stato nella sua parte iconografica intieramente fotografato da me in grandezza naturale. Le negative che conservo possono non solo dare un'idea della bellezza delle miniature, ma anche aiutare a ricomporre la parte guastata dal fuoco. Per somma ventura buona parte del Plinio è ancora in discreto stato di conservazione.

Le fotografie che unisco dànno un'idea del più arduo dei lavori, quello intrapreso per il restauro dell'evangeliario conosciuto sotto il nome di codice K, i cui danni non erano tuttavia ascrivibili all'incendio. Questo codice insieme alla Divina Commedia (N° 4 dell'Elenco), che era stata carbonizzata in parte dall'incendio, costituiscono i più begli esempi della perizia del Marré come restauratore.

ELENCO

DEI

lavori di restauro di manoscritti e libri a stampa

ESEGUITI E CONSEGNATI

dal Sig. CARLO MARRÉ

fino al 31 dicembre 1912.

I. — **Manoscritti.**

1. G. VII. 15. (Bobbiese-Ottino 61). " Evangelia secundum Marcum et Matthaeum ". Ms. latino, membranaceo, del sec. VI circa.	Restaurato per intero (carte 96).
2. B. VII. 30. (Pasini-Greco 342°). " Psalterium ". Ms. greco, membr., del sec. VIII circa.	Restaurate 19 carte. Iniziato il restauro di altre.
3. C. III. 17. (Pasini-Greco 216°). " Typicum Monasterii Sancti Nicolai Casularum ". Ms. greco, membr., del sec. XII circa.	Restaurate parzialmente una quindicina di carte.
4. N. III. 12. (Peyron, n° 99). " Divina Commedia ". Cartaceo, del sec. XV.	Restaurato per intero (carte 296).
5. K. II. 20. (Pasini-Lat. 217°). " Rhabani Mauri de laudibus S. Crucis ". Latino, membr., del sec. X.	Restaurate parzialmente le 45 carte del codice.
6. B. IV. 34. (Pasini-Greci 197°). " Condacia ". Ms. greco, membr., del sec. XII circa.	Restaurata una carta e iniziato il restauro di altre tre.
7. L. III. 29. (Pasini-Gallici 9°). " Statuti dell'Ordine della Nave ". Francese, membr., del sec. XIV.	Restaurata tutta la parte superstite, cioè 22 carte e frammenti di carte.
8. I. III. 42. " Statuta Castellatii et Consuetudines Alexandriae ". Lat., cartaceo, dei sec. XV e XVI.	Restaurato per intero (carte 119).

9. O. IV. 20. (Bobbiese-Ottino 65). " Cavalca, Esposizione sopra il Credo ".

Restaurate le quattro miniature irlandesi antichissime, su pergamena, già annesse al codice.

10. G. II. 34. (Pasini-Lat. 589°). " Jacobi de Aquis. Imaginis mundi pars secunda, etc. ". Lat., cartaceo, del sec. XV.

Di carte 187, restaurate e rinforzate in parte.

11. I. II. 9. (Pasini-Lat. 110°). " Officium S. Hilarionis, et carmina... *cum notis musicis* ". Latino e francese, membr., del sec. XV.

Di carte 159, restaurate in parte dal Marré. Completato il restauro dal Chiaravalle.

12. G. V. 15. (Bobbiese-Ottino 52). " Ambrosii Expositio Evangelii secundum Lucam ". Lat., membr., del sec. VI circa.

Restaurato per intero (carte 48).

13. K². II. 1. (già Lat. A. 368). " Lucani Pharsaliae fragmenta ". Membr., del sec. XII.

Restaurato per intero (carte 26).

14. I. I. 9. (Pasini-Lat. 9°). " Psalterium ". Lat., membr., del sec. XIV, con miniature.

Restaurato per intero (carte 145).

15. E. V. 17. (Pasini-Lat. 749°). " Elenchus ecclesiarum et Monasteriorum Urbis, etc. ". Lat., membr., del sec. XIV.

Riparate le prime 16 carte.

16. F. IV. 1. (Bobbiese-Ottino 26). Ms. miscellaneo.

Frammento		Membr., del	sec.		circa	
Frammento	I.	Membr., del	sec.	XIII	circa	**Di carte 8.**
"	II.	"	"	VI	"	**" 2.**
"	III.	"	"	VI	"	**" 1 1/2**
"	IV.	"	"	VIII	"	**" 6.**
"	V.	"	"	IX	"	**" 8.**
"	VI.	"	"	IX	"	**" 6.**
"	VII.	"	"	IX	"	**" 2.**
"	IX.	"	"	VIII	"	**" 6.**
"	X.	"	"	VIII	"	**" 4.**
"	XI.	"	"	XII	"	**" 2.**
"	XII.	"	"	XV	"	**" 4.**
"	XIII.	"	"	XIII	"	**" 8.**
"	XIV.	"	"	XIV	"	**" 2.**
"	XVII.	"	"	VII	"	**" 1.**

17. N. III. 19. (Peyron, nº 106). " Carlo Martello o Ugone d'Alvernia, Romanzo cavalleresco ". Ms. italiano, cartaceo, del sec. XIV. — Restaurato per intero (carte 183).

18. F. V. 15. Graziolo Bambaglioli, " Trattato delle volgari sentenze sopra le virtù morali ". Ms. italiano, cartaceo, del sec. XIV. — Restaurato per intero (carte 52).

19. N. VI. 26. " Leggenda di S. Francesco ". Ms. italiano, cartaceo, del sec. XVI. — Restaurato per intero (carte 127).

20. N. VII. 20. " Leggenda di S. Caterina ". Ms. italiano, cartaceo, del sec. XV. — Restaurato per intero (carte 107).

21. K². V. 2. " De virtutibus herbarum " ed altro. Ms. latino, cartaceo, del sec. XIV. — Restaurato per intero (carte 108).

22. K². IV. 13. " Variorum vaticinia ". Ms. latino-italiano, cartaceo, del sec. XV. — Restaurato per intero (carte 185).

23. B. V. 10. " Epistole graece ". Ms. greco, cartaceo, del sec. XV circa. — Restaurato per intero (carte 141).

24. B. III. 34. Boethii " De dialectica, graeca translatio... ". Ms. greco, cartaceo, del sec. XVI circa. — Restaurate 50 carte.

II. — **Libri a stampa.**

1. XV. I. 53. " Decretorum Codex ". (Venezia, Jenson, 1477). — Restaurate e rinforzate un centinaio di carte.

2. XV. I. 41. Berlinghieri. " Geographia " (Firenze, per Nicolo Todescho, (sec. XV)). — Riparate sei carte e una tavola geografica.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Marzo 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe Naccari, ed i Soci: Salvadori, D'Ovidio, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Mattirolo, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Vengono comunicati gl'inviti pel Congresso geologico internazionale che si terrà al Canadà nell'agosto 1913, e pel Congresso internazionale dei fisiologi a Groninga (2-6 sett. 1913).

Sono presentate per la pubblicazione negli *Atti* le seguenti Note:

F. Giolitti, *Sulla cristallizzazione dell'acciaio*, dal Socio D'Ovidio;

A. Roccati, *Il talco delle " Grangie Subiaschi " in Val Pellice (Alpi Cozie) ed i minerali ad esso associati*, dal Socio Camerano, in nome del Socio Parona;

P. Quarra, *Resto in alcune formule di quadratura*, dal Socio Peano;

V. Squintani, *Su alcuni derivati del cicloesanone e dei tre metilcicloesanoni*, dal Socio Guareschi;

M. C. Bianchi, *Di alcune cianacetilamine alifatiche*, pure dal Socio Guareschi;

F. SEVERI, *Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, dal Socio SEGRE;

Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1912 all'Osservatorio della R. Università di Torino, calcolate dalla Dott.ª Giovanna GREGGI, dal Socio NACCARI.

Il Socio CAMERANO presenta, per il volume delle *Memorie*, un suo lavoro dal titolo: *Ricerche intorno ai Camosci - Camoscio delle Alpi*, Parte I; e ne espone sommariamente il contenuto.

La Classe con votazione unanime ne approva la stampa fra le *Memorie*.

LETTURE

Sulla cristallizzazione dell'acciaio.

Nota 1ª di F. GIOLITTI.

(Con una tavola).

È ormai riconosciuto da tutti che le interessantissime ricerche metallografiche compiute negli ultimi anni dal Belaiew intorno alla cristallizzazione del ferro e degli acciai, hanno aperto un nuovo campo, della più grande importanza pratica, alle applicazioni della metallografia alla siderurgia.

I dati stabiliti dal Belaiew costituiscono la base ed il punto di partenza di una serie di ricerche, le quali hanno già chiarito molti problemi siderurgici, e certamente varranno a chiarirne molti altri, a mano a mano che esse saranno sviluppate colla scorta di materiale sperimentale sempre più abbondante e più sicuro.

È appunto il carattere di dati essenzialmente fondamentali, che senza dubbio compete ai fatti stabiliti dal Belaiew, quello che mi ha convinto della opportunità di far conoscere i risultati di alcune mie osservazioni; risultati i quali mi paiono dover condurre necessariamente a modificare in parte alcuni dei principi fondamentali stabiliti dal Belaiew in base alle sue osservazioni.

Nelle pagine che seguono esporrò brevemente i risultati delle mie osservazioni, e le conclusioni che, a parer mio, si debbono trarre necessariamente dai risultati stessi.

Apparrà subito evidente come tali conclusioni risultino, in alcune loro parti, differenti da quelle del Belaiew.

A scanso di ogni equivoco, debbo far subito notare che delle Memorie del Belaiew ho potuto leggere nel loro testo integro soltanto quelle che sono state tradotte e pubblicate nella

" Revue de Métallurgie „: le quali trattano più specialmente della macrostruttura dell'acciaio.

Fra queste tratta più direttamente dei fenomeni dei quali ora mi occupo, quella pubblicata nel 1910 (pag. 510) sotto il titolo: *Sur la reproduction artificielle de la structure de Widmanstätten dans l'acier au carbone.* Secondo una Nota della " Revue de Métallurgie „, questa Memoria costituisce il Cap. III della Tesi del Belaiew, pubblicata col titolo: *Sulla cristallizzazione e la struttura degli acciai raffreddati lentamente.* Della Memoria, invece, che tratta più specialmente dei fenomeni ai quali si riferiscono le mie osservazioni — pubblicata negli " Annali dell'Associazione Tecnica Imperiale Russa „ — non ho potuto procurarmi il testo integro, ed ho dovuto limitarmi a riferirmi all'ampio sunto di essa pubblicato nel fascicolo del 1° agosto 1912 dello " Stahl und Eisen „. La rigorosa precisione colla quale sono generalmente compilati i sunti pubblicati dalla grande Rivista tedesca, mi fa ritenere sommamente improbabile che nel resoconto al quale sono costretto a riferirmi sia stato travisato il pensiero dell'Autore. Ma, ad ogni modo, se per caso così fosse, è chiaro che le mie conclusioni — le quali sono assolutamente oggettive, nè dipendono in alcun modo da quelle del Belaiew — risulterebbero allora ulteriormente confermate da quelle del Metallografo Russo.

La fig. 1 della Tavola qui unita, riproduce (coll'ingrandimento di 80 diametri) l'aspetto di una sezione piana — levigata, ed attaccata colla soluzione alcoolica al 5 % di acido picrico — praticata in una lamiera di acciaio costituente la parete della camera di riscaldo di un forno per trattamenti termici.

Per le speciali esigenze del servizio al quale il forno era destinato, la lamiera fu mantenuta durante più di *cinque mesi* consecutivi ad una temperatura sempre compresa fra 900° C. e 1050° C. Per la massima parte di questo tempo (e certo per oltre i nove decimi di esso), la temperatura si mantenne costantemente pari a 1000° C.: in nessun caso essa si abbassò — nemmeno per breve tempo — al di sotto dei 900° C.

Il raffreddamento della lamiera si iniziò soltanto all'atto dello spegnimento del forno, e procedette insieme — ed in modo identico — al raffreddamento graduale spontaneo di tutta la

massa del forno. La temperatura si abbassò in tal modo lentamente ed uniformemente, passando da 1000° C. a circa 150° C. nel periodo di *quattro giorni e mezzo* (circa *110 ore*).

Oltre a ciò è opportuno far notare che, mentre una faccia della lamiera era in contatto costante con sostanze carburanti (carbone di legna), l'altra faccia era invece a contatto con gas ossidanti. Ciò che provocò, naturalmente, durante tutto il periodo del riscaldamento, una continua migrazione, per diffusione, del carbonio disciolto attraverso a tutto lo spessore della lamiera. È chiaro che questo processo di diffusione deve aver fortemente contribuito a rendere più completi gli effetti che sulla distribuzione della concentrazione del carbonio, *in ogni singolo elemento cristallino della soluzione solida*, producono i processi di diffusione spontanei dovuti alle differenze di concentrazione generate in ogni cristallo dal modo stesso, ben noto, nel quale ha luogo la cristallizzazione delle soluzioni solide.

In altri termini, lo speciale trattamento al quale è stata sottoposta la lamiera d'acciaio osservata, ci assicura che — per gli effetti addizionati, del riscaldamento molto prolungato nella regione del ferro γ, e della continua diffusione del carbonio attraverso a tutta la massa dell'acciaio — debbono essere totalmente scomparse quelle caratteristiche variazioni della concentrazione del carbonio *dalla periferia al nucleo di ogni singolo cristallo misto* di formazione primaria: variazioni generate — come è ben noto — dalle condizioni di equilibrio di concentrazione (gradualmente varianti col procedere dell'accrescimento dei cristalli misti) fra i cristalli ed il residuo fuso col quale essi sono in contatto; ed alle quali sono alla loro volta dovute le forme speciali, caratteristiche, nelle quali si separano la ferrite (negli acciai ipoeutectici) e la cementite (negli acciai ipereutectici) allorchè non è intervenuto alcun trattamento termico a fare sparire quelle variazioni *locali* della concentrazione del carbonio.

La composizione chimica dell'acciaio costituente la lamiera è indicata nella tabella seguente; nella quale la cifra corrispondente alla concentrazione del carbonio rappresenta il *valore medio* di tale concentrazione su tutto lo spessore della lamiera: poichè — per le ragioni or ora indicate — il tenore di carbonio non è costante su tutto lo spessore della lamiera, ma varia da un mas-

simo di circa 1 % (nella regione prossima alla faccia interna della lamiera) ad un minimo, praticamente uguale a zero, nelle regioni prossime alla faccia esterna della parete di lamiera.

Carbonio	Media	0.32	%
Silicio	„	0.011	„
Zolfo	„	0.011	„
Fosforo	„	0.059	„
Manganese	„	0.40	„

Il fatto che la concentrazione del carbonio non è costante in tutto lo spessore della lamiera risulta anche in modo molto evidente dall'esame della micrografia or ora citata, e, meglio ancora, da quello delle successive.

In questa prima micrografia compaiono molto nettamente ed eccezionalmente bene sviluppate le figure di Widmanstätten: e, più precisamente, i parallelogrammi caratteristici delle sezioni praticate secondo piani all'incirca paralleli alle facce del rombododecaedro.

Ora è facile rilevare che il trattamento al quale è stata sottoposta la lamiera, dovrebbe escludere, secondo le norme stabilite dal Belaiew, la formazione sia della " struttura dei grandi cristalli ", sia della struttura di Widmanstätten. Infatti:

1° Il riscaldamento prolungato per *oltre cinque mesi* alla temperatura del ferro γ, e la continua diffusione del carbonio attraverso alla lamiera, escludono che abbiano potuto conservarsi le variazioni della concentrazione del carbonio *localizzate* fra l'asse delle dendriti primarie ed il materiale che ne riempiva gl'interstizi. — È dunque esclusa la condizione stabilita dal Belaiew come necessaria per la formazione della " struttura dei grandi cristalli ".

2° Il raffreddamento fra Ar_3 ed Ar_1 è stato molto lento (circa 70 ore): e, precisamente, *molto più lento* di quanto non sia il raffreddamento all'aria nelle condizioni abituali per gli ordinari pezzi fucinati di medie dimensioni, nei quali si riscontra spesso la struttura di Widmanstätten.

Secondo le norme stabilite dal Belaiew, l'acciaio non dovrebbe, perciò, presentare la struttura di Widmanstätten, ma bensì la " struttura reticolare ".

Onde stabilire con maggior sicurezza e precisione quest'ultimo punto, ho voluto sottoporlo ad un controllo diretto, facendo le seguenti prove:

1° Un pezzo — del peso di circa 300 grammi — della solita lamiera, la cui struttura è rappresentata nella figura 1, fu ricotto per otto ore a 1000° C. e poi lasciato raffreddare *all'aria*. Il raffreddamento fino a 150° C. durò circa mezz'ora.

La struttura dell'acciaio così trattato è riprodotta nella figura 2 (Ingrandimento: 80 diam. Attacco alla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 %).

2° Un secondo pezzo della solita lamiera, ancora del peso di circa 300 gr., fu ricotto durante otto ore a 1000° C. in un piccolo forno a muffola: poi fu lasciato raffreddare *nel forno*. La temperatura si abbassò fino a 150° C. in quattro ore circa.

La struttura dell'acciaio così trattato è riprodotta nella figura 3 (Ingrandimento: 80 diam. Attacco alla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 %).

I risultati di queste due esperienze dimostrano che per l'acciaio sottoposto allo speciale trattamento al quale fu sottoposta la lamiera da me esaminata, un raffreddamento molto lento favorisce la formazione della struttura di Widmanstätten: mentre un raffreddamento più rapido rende meno perfetto lo sviluppo delle figure di Widmanstätten, e tende invece a produrre una struttura simile alla " struttura reticolare " di Belaiew. Questi ultimi due fatti sono dimostrati dalle due figure 2 e 3.

Resta dunque confermato direttamente il fatto che, per l'acciaio sottoposto al trattamento che ho indicato per la lamiera da me osservata, le condizioni per la formazione della struttura di Widmanstätten non sono quelle indicate dal Belaiew.

Ora io ritengo — ed or ora cercherò appunto di dimostrarlo — che per spiegare i fenomeni ai quali ho brevemente accennato, e per porli d'accordo colle osservazioni del Belaiew e degli altri sperimentatori che si sono occupati di quest'argomento (1), basti definire con maggiore precisione alcune delle condizioni nelle quali si compiono i fenomeni osservati.

---

(1) V. p. es. A. Portevin et V. Bernard, " Revue de Métallurgie ", IX, 1912, pag. 544.

Così il Belaiew dice che quando i cristalli costituenti la soluzione solida sono chimicamente omogenei ed il raffreddamento da Ar_3 ad Ar_1 è lento, allora la tendenza della ferrite — o, rispettivamente, della cementite — a separarsi alla periferia dei cristalli prende il sopravvento, fino a che la velocità del raffreddamento, in rapporto alle dimensioni dei cristalli, sia abbastanza piccola per permettere alla cementite e alla ferrite di migrare fino alla periferia dei cristalli (1). Si otterrebbe così la struttura reticolare.

Su queste considerazioni del Belaiew mi pare si possano fare alcune osservazioni.

Prima di tutto, poichè, nei limiti delle concentrazioni del carbonio che possono verificarsi per gli acciai, è certo che ogni eterogeneità di concentrazione di questo elemento in ciascun singolo cristallo non può consistere — fino a che si rimane nella regione del ferro γ — se non in un *aumento* della concentrazione stessa dal centro alla periferia di ogni cristallo, si spiega facilmente una tendenza della *cementite* a cristallizzare alla periferia dei cristalli, quando si ammetta che la ricottura del materiale — se bene prolungata — non abbia completamente annullate quelle differenze di concentrazione del carbonio.

E che tale sia la spiegazione del fenomeno lo provano le seguenti due osservazioni: la prima delle quali, in pari tempo, dimostra che realmente nella lamiera d'acciaio alla quale si riferiscono le varie osservazioni sopra riportate, il trattamento termico e chimico già descritto ha dato luogo ad una uniformità della variazione della concentrazione del carbonio in tutto l'insieme dei cristalli misti, quale non si verifica nei materiali sottoposti agli ordinari trattamenti termici: annullando praticamente del tutto le caratteristiche variazioni della concentrazione del carbonio dal centro alla periferia di ogni singolo cristallo.

La fig. 4 riproduce (ingrandimento 80 diam., attacco alla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 %) un tratto di una

(1) Vedi Stahl und Eisen, 1° agosto 1912, pag. 1273 (in fine).

sezione praticata in una regione della solita lamiera alla quale si riferiscono le precedenti osservazioni, prossima alla superficie esterna della storta formata dalla lamiera stessa: nella regione, cioè, nella quale il metallo ha subìta la più forte decarburazione. Come si vede, le lamine di cementite — rappresentanti la perlite ridotta ad uno solo dei suoi elementi strutturali — in luogo di formarsi (come sempre avviene negli acciai dolci sottoposti agli ordinarî processi di ricottura) nelle regioni di contatto dei cristalli di ferrite, costituendo un reticolo continuo che separa i singoli cristalli di segregazione primaria, si sono separate isolate ed indipendenti le une dalle altre, in una massa di ferrite omogenea, nella quale non appare traccia di separazione di " grani " cristallini.

È dunque evidente che allorchè sia totalmente eliminata la caratteristica variazione della concentrazione del carbonio dal nucleo alla periferia dei singoli cristalli misti (eliminazione che non può ottenersi se non operando in condizioni eccezionalmente favorevoli, analoghe a quelle che ho indicate pel caso al quale qui mi riferisco), non si verifica più la tendenza della cementite a separarsi alla periferia dei grani cristallini primarî di ferrite: chè, anzi, scompare allora addirittura ogni traccia di differenziazione di tali grani.

Fenomeni analoghi si verificano per la separazione della cementite negli acciai ipereutectici: come è dimostrato dal fatto ben noto che negli acciai sottoposti ad una cementazione molto prolungata (la quale costituisce un trattamento simile a quello subìto dalla lamiera alla quale mi sono più volte riferito) la perlite non si presenta in forma di *cellule* separate da *vene* di cementite, ma bensì in una massa uniforme attraversata soltanto dai così detti " aghi " (più propriamente: lamine) di cementite.

Invece, per quanto riguarda la separazione della ferrite, dato il processo — ormai ben noto e stabilito con certezza — pel quale si formano i cristalli misti, non potrebbe certo attribuirsi alle differenze della concentrazione del carbonio, create dal processo stesso in ogni singolo elemento cristallino della *soluzione solida*, una tendenza della ferrite a raccogliersi *alla periferia* dei cristalli: tendenza invocata — come ho poco fa

riferito — dal Belaiew per spiegare la formazione della struttura reticolare nell'acciaio (1).

Ed anzi, che la ferrite si separi da prima e di preferenza — come deve dedursi necessariamente dalle variazioni della concentrazione del carbonio dovute all'andamento caratteristico della formazione dei cristalli misti ferro-carbonio — secondo l'asse delle cristalliti primarie, è confermato dalla struttura ben nota, caratteristica degli acciai al carbonio contenenti meno del 0.3-0.4 % di carbonio, raffreddati lentamente.

Ed anche le strutture caratteristiche degli acciai a tenore di carbonio non molto inferiore al valore dell'eutectico, nei quali si presenta realmente una specie di *reticolo* di ferrite con un " riempimento " di perlite, non credo — per le ragioni che ho esposte poco fa — che possano assolutamente essere attribuite — come fanno il Belaiew (l. c.) ed altri sperimentatori — al fatto che la ferrite (come la cementite) si separi sempre alla periferia dei cristalli misti: ciò che dovrebbe anche qui presupporre una variazione della concentrazione del carbonio, in ogni singolo cristallo, precisamente inversa alla sola ammissibile, dato il modo nel quale procede la formazione dei cristalli misti ferro-carbonio. Più tosto credo doversi ritenere che le striscie di ferrite separatesi *lungo l'asse* dei vari cristalli misti primari tendano a collegarsi le une alle altre — pel noto effetto generale di tutti i germi di cristallizzazione — dando luogo ad una struttura somigliante a quella della cementite, che negli acciai ipereutectici si separa *realmente* alla periferia dei cristalli misti.

E qui, a chiarire e definire meglio queste considerazioni, cade opportuna un'altra osservazione sulla struttura della solita

---

(1) Colla stessa ipotetica tendenza — evidentemente inconciliabile col modo nel quale deve variare la concentrazione del carbonio nei cristalli misti ferro-carbonio e colle forme nelle quali si presenta la cementite negli acciai ipereutectici — è invalso l'uso di spiegare, nei libri di insegnamento, la struttura degli acciai a tenore di carbonio compreso fra 0.5 e 0.8 %. La stessa ipotesi è anche formulata da varî sperimentatori in recenti pubblicazioni (si veda, p. es.: Ziegler, " Revue de Métallurgie ", settembre 1911, pag. 661).

lamiera: osservazione che — a parer mio — pone bene in evidenza il modo di cristallizzare della ferrite durante tutto il processo della sua segregazione dalle soluzioni solide, e spiega in modo molto semplice tutti i fenomeni, della massima importanza pratica, osservati dai varî sperimentatori.

In tutte le regioni della lamiera (trattata nel modo che ho indicato dettagliatamente, e lasciata raffreddare lentissimamente nel forno) nelle quali la variazione della concentrazione del carbonio da una faccia all'altra è tale che il valore della concentrazione sia presso ad una faccia inferiore al 0.3 %, mentre nelle zone prossime alla faccia opposta raggiunga valori notevolmente più elevati (0.7-0.8 %), si osservano sempre *due* forme caratteristiche, e ben distinte l'una dall'altra, dei cristalli di ferrite:

1° Nelle regioni nelle quali la concentrazione del carbonio è inferiore a circa 0.4 %, la ferrite si presenta nelle forme dei *nuclei* tondeggianti ben noti, caratteristici degli acciai dolci.

2° Nelle regioni nelle quali la concentrazione del carbonio supera il valore di circa 0.4 %, la ferrite si presenta nelle forme così dette di " aghi „, o striscie, orientate a gruppi concordi secondo certe direzioni: forme anch'esse ben note, perchè caratteristiche della struttura di Widmanstätten.

Questi fatti appaiono chiaramente nelle figure 5 e 6 della tavola qui unita (ingrandimento: 30 diam., attacco alla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 %).

Nelle figure stesse appare anche chiaro il modo caratteristico nel quale ha luogo il passaggio da una regione all'altra. Anche di questo mi occuperò fra breve.

Ora — dato il trattamento al quale è stata sottoposta la lamiera — è ben certo che tutti i cristalli di ferrite si sono formati da una soluzione solida priva di " nuclei „ a basso tenore di carbonio, e che la loro segregazione è avvenuta in condizioni di raffreddamento identiche per tutti. La sola differenza nelle condizioni di formazione dei due gruppi di cristalli di ferrite consiste nel fatto che quelli della prima serie si sono formati a temperatura più elevata di quelli della seconda. E se teniamo conto della temperatura di segregazione (circa 760°, come è ben noto), che corrisponde a quello speciale valore della concentrazione del carbonio (circa 4 %) che segna la linea di demarca-

zione fra i due gruppi di cristalli, non potremo fare a menodi rilevare una interessante coincidenza fra il differente aspetto dei cristalli delle due serie e le differenti regioni del diagramma delle leghe ferro-carbonio in corrispondenza alle quali essi si sono formati.

Infatti, i cristalli della seconda serie si sono formati intieramente lungo il tratto della curva di cristallizzazione della ferrite (sotto 760° C.) al quale corrisponde la separazione *diretta* del ferro α. I cristalli della prima serie, invece, hanno incominciato a formarsi, e si sono anche sviluppati per una buona parte della loro massa, lungo quel tratto della curva di cristallizzazione della ferrite (sopra 760° C.) al quale corrisponde la separazione *diretta* del ferro β: e soltanto alla temperatura di 760° C. in quei cristalli *già formati* il ferro è passato dalla forma β alla forma α. Col procedere del raffreddamento al di sotto di 760°, anche nella regione occupata da questi cristalli, le ulteriori quantità di ferrite si sono separate direttamente allo stato di ferro α: ma, trovando germi di cristallizzazione già formati, è naturale che si siano depositate attorno ad essi, seguendone la forma.

Ciò posto, mi pare naturale il supporre che l'aspetto dei cristalli della prima serie — che hanno cominciato a separarsi e a svilupparsi sopra 760° — sia quello caratteristico dei cristalli di ferro β; mentre quello dei cristalli della seconda serie — formatisi a temperature inferiori a 760° — possa considerarsi come l'aspetto caratteristico dei cristalli di ferro α. Presupponendosi — naturalmente — che i cristalli delle due serie si siano formati liberamente da una soluzione solida nella quale non resti traccia delle differenze di concentrazione *localizzate* nei singoli cristalli di separazione primaria: differenze che certamente turberebbero lo sviluppo delle forme caratteristiche dei cristalli delle due serie, sovrapponendo ad esse le forme dei cristalli misti separatisi prima dalle masse fuse.

Ritengo opportuno far subito notare che — tanto qui come in ogni altra parte della presente Nota — quando parlo dell' " aspetto „ e della " forma „ dei cristalli di ferrite non intendo affatto di dare a queste espressioni alcun rigoroso significato cristallografico: limitandomi invece semplicemente ad indicare con esse quei *caratteri morfologici esterni* degli elementi cristal-

lini, dai quali dipendono — nei modi ben noti — molte delle proprietà meccaniche del metallo. Caratteri i quali possono del resto — come è noto — variare per cristalli di uno stesso sistema, o presentarsi con apparenze simili per cristalli appartenenti a sistemi diversi.

È chiaro, infatti, che molto diversi dovrebbero essere i criterî da seguirsi in uno studio sulla cristallografia del ferro: ciò che, del resto, risulta dalle numerose ed interessanti ricerche in questo importante ramo della cristallografia, già compiute e pubblicate da varî sperimentatori. Basti, fra gli altri, ricordare, a questo proposito, gli studî interessantissimi di Osmond e Cartaud.

Non pretendo certamente che questa ipotesi debba ritenersi senz'altro dimostrata per giusta dalle osservazioni che ho citate or ora. Ma — mentre da un lato non mi pare ch'essa presenti nessun carattere d'inverisimiglianza, tale da farla rifiutare *a priori* — dall'altro ritengo ch'essa permetta di spiegare in modo soddisfacente (come or ora cercherò di dimostrare con alcuni esempi) l'origine di tutte le strutture caratteristiche degli acciai al carbonio ipoeutectici. Ciò costituisce evidentemente una conferma di questa ipotesi: e se essa dovesse — in base ad altri fatti nuovi — risultare falsa, occorrerebbe almeno trovarne un'altra da sostituire ad essa: poichè è ben noto che i dati conosciuti fino ad oggi non permettono di dare una spiegazione soddisfacente della maggior parte delle strutture caratteristiche degli acciai al carbonio ipoeutectici.

Ecco, ora, alcuni esempi delle numerose osservazioni le quali, a parer mio, confermerebbero la giustezza dell'ipotesi che ho formulata poco fa. Per non dilungarmi eccessivamente, cito soltanto pochi esempi: facendo però notare che tutte le strutture che si presentano abitualmente negli acciai al carbonio ipoeutectici si spiegano altrettanto facilmente, in base alle stesse considerazioni.

1° Nelle figure 5 e 6, qui unite, si vedono chiaramente — nella regione dei cristalli separatisi per primi, e, più ancora, nella regione di raccordo fra i cristalli delle due serie — alcuni cristalli che potremmo chiamare " composti ", in ciascuno dei quali si presentano contemporaneamente i caratteri morfologici

esterni proprî dei cristalli delle due serie. Ora la forma di questi cristalli — caratterizzata dalla presenza di un nucleo cristallino della prima serie (β) dal quale si protendono le appendici aghiformi che distinguono i cristalli della seconda serie (α) — si spiega bene coll'ipotesi, ben giustificata da un gran numero di fatti analoghi noti con sicurezza, che la materia cristallina della seconda serie, depositandosi — durante il raffreddamento lentissimo — di preferenza sui nuclei di ferrite preesistenti, ne riproduca i contorni solo nel caso in cui sia abbastanza preponderante la massa dei nuclei in confronto con quella dei nuovi elementi cristallini che si depositano sopra di essi.

Questo caso si verifica appunto nella regione a più basso tenore di carbonio, dei campioni riprodotti nelle figure 5 e 6: mentre la proporzione della materia cristallina della seconda serie in confronto a quella della prima, costituente i nuclei, va aumentando a mano a mano che ci si avvicina all'altra regione della massa metallica. Ed è precisamente in prossimità della zona di transizione fra le due regioni che si trovano i cristalli che ho chiamati " composti ".

2° Se è vera l'ipotesi che ho formulata, dobbiamo attenderci che quando il processo della cristallizzazione sia " disturbato " mediante un'azione meccanica esterna (per usare anche qui l'espressione divenuta abituale nel caso delle soluzioni saline) risulti ostacolata la tendenza dei cristalli della seconda serie a deporsi sopra quelli della prima, " copiandone " e conservandone la forma esterna. In tal caso i cristalli della seconda serie dovranno separarsi, totalmente od in gran parte, indipendenti da quelli della prima, presentandosi accanto ad essi colle loro forme caratteristiche.

Ora, tutto ciò si verifica in modo evidentissimo appunto nel caso tipico della " cristallizzazione disturbata " della ferrite: cioè nei pezzi di acciaio al carbonio, sottoposti alla fucinazione. Questo fatto è notissimo: e lo si può vedere illustrato in modo perfetto nelle micrografie di pezzi fucinati riprodotte da Portevin e Bernard nella interessante Memoria sulle strutture di Widmanstätten, da essi pubblicata lo scorso luglio nella " Revue de Métallurgie " (1).

---

(1) A. Portevin et V. Bernard, *Observations sur la structure de quelques pièces brutes de forge*, " Revue de Métallurgie ", luglio 1912, pagg. 544-550.

3° Un effetto analogo a quello della cristallizzazione " disturbata meccanicamente " deve ottenersi con un raffreddamento relativamente rapido di un acciaio nel quale un trattamento termico opportuno abbia fatto sparire i " nuclei " a concentrazione variabile dal centro alla periferia. È questo appunto il caso che si verifica in modo evidentissimo nelle regioni a più basso tenore di carbonio dei campioni riprodotti nelle figure 2 e 3, qui unite: campioni raffreddati appunto meno lentamente di quelli ai quali si riferiscono le micrografie delle figure 1, 5 e 6.

Come ho già detto, osservazioni analoghe potrebbero ripetersi per un grandissimo numero di strutture caratteristiche degli acciai al carbonio ipoeutectici. Mi basta averne dato qui alcuni esempi.

In base alle considerazioni che precedono, ritengo che i fenomeni osservati dai varî sperimentatori nella cristallizzazione dell'acciaio, possano essere classificati e spiegati (all'incirca nel modo che or ora indicherò), considerando che nella struttura cristallina di un acciaio raffreddato fino alla temperatura ordinaria si debbono sovrapporre gli effetti di *due* processi di cristallizzazione successivi: dei quali il primo è la formazione dei cristalli misti dalla massa metallica fusa: ed il secondo è la segregazione della ferrite o della cementite (rispettivamente negli acciai ipoeutectici ed ipereutectici) dalla soluzione solida. Mi pare che sia dovuto ad una insufficente distinzione di questi due fenomeni il fatto che le deduzioni del Belaiew non corrispondono in modo soddisfacente — come ho poco fa dimostrato — ai fenomeni che ho descritti nelle pagine che precedono.

Ecco, dunque, i casi principali che ritengo possano presentarsi nella cristallizzazione di un acciaio al carbonio:

1° L'acciaio, completamente solidificato, è stato sottoposto ad un trattamento (ad esempio, simile a quello che ho descritto per la lamiera formante l'oggetto delle osservazioni che ho svolte più addietro) atto ad eliminare *totalmente* le differenze della concentrazione del carbonio *fra il nucleo e la periferia* dei *singoli* cristalli misti primari: differenze dovute al modo stesso, ben noto, nel quale ha luogo la formazione dei cristalli misti.

In questo caso l'ulteriore cristallizzazione — dalla quale dipende la struttura finale assunta dall'acciaio alla temperatura ordinaria — può compiersi in vari modi, a seconda della composizione dell'acciaio e della velocità colla quale la temperatura dell'acciaio passa per l'intervallo critico:

A) Il raffreddamento avviene molto lentamente (avendo una durata dell'ordine di quella che ho indicata per la lamiera della quale ho parlato poco fa), ed il fenomeno della cristallizzazione della ferrite non è " disturbato " in alcun modo.

In questo caso i cristalli di ferrite che si separano dalla soluzione solida si sviluppano liberamente secondo le loro forme caratteristiche. Ma poichè l'esperienza par dimostrare che le forme esterne dei cristalli di ferro α siano differenti da quelle dei cristalli di ferro β, così la struttura finale dell'acciaio totalmente raffreddato dovrà variare ancora col variare del suo tenore di carbonio. Ed infatti, in base alle osservazioni che ho citate nelle pagine precedenti, mi pare evidente che debbano distinguersi i seguenti due casi particolari del fenomeno che ora consideriamo:

a) L'acciaio contiene meno del 0.35 $^0/_0$ di carbonio. I nuclei cristallini di ferrite che si formano all'inizio della cristallizzazione sono costituiti di ferro β: e soltanto le porzioni di ferrite che cristallizzano sotto i 760° C. dal residuo dei cristalli misti arricchitisi di carbonio, si separano allo stato di ferro α: pur tendendo, però, a deporsi sui germi cristallini preesistenti della ferrite (ora anch'essi trasformati in ferro α) e " copiandone " la forma. In questo caso la struttura dei cristalli di ferrite è quella caratteristica del ferro β, quale si vede negli acciai a bassissimo tenore di carbonio. Soltanto nel caso in cui i cristalli di ferro α che si formano nella seconda fase del raffreddamento siano in quantità notevolmente preponderante in confronto a quelli di ferro β preformatisi, i primi possono sviluppare in misura molto notevole le loro forme caratteristiche accanto ai secondi. È questo il fenomeno che avviene — ad esempio — nei casi ai quali si riferiscono le due figure 5 e 6.

Ad ogni modo, in questo caso, dovranno apparire sempre le forme caratteristiche dei cristalli delle due serie. Ciò è conformato da un gran numero di micrografie riportate in molte pubblicazioni. Citerò, come solo esempio, una micrografia di

Osmond riprodotta dal Belaiew nella fig. 14 di un lavoro da lui pubblicato nella " Revue de Métallurgie „ del 1910 (pag. 520).

b) L'acciaio contiene più del 0.4 % di carbonio. Tutta la ferrite cristallizza direttamente allo stato di ferro α, assumendone le forme caratteristiche, ben note come quelle che dànno luogo alla struttura di Widmanstätten. È questo il caso della fig. 1, qui unita.

B) Il raffreddamento avviene meno lentamente, ed il processo della cristallizzazione della ferrite non è disturbato meccanicamente.

Se l'acciaio contiene meno del 0.33 % di carbonio, la cristallizzazione avviene ancora in due fasi — come nel caso *A a)* — separandosi successivamente i cristalli caratteristici del ferro β e quelli del ferro α. Se non che, in questo caso, i cristalli della seconda serie — per le ragioni ben note — non possono risentire, nella stessa misura del caso precedente, l'effetto dei " germi di cristallizzazione „ preformati, così che si segregheranno più o meno indipendentemente da essi, e colle loro forme caratteristiche. È, però, naturale che la minor lentezza del raffreddamento non permetterà ai cristalli α e β di raggiungere dimensioni altrettanto grandi, ed ai cristalli α di assumere forme altrettanto perfette (facce piane altrettanto ben formate) come nel caso del raffreddamento lentissimo. Ne segue che le due serie di cristalli, e specialmente i cristalli costituenti le figure di Widmanstätten, si presentano, in questo caso, sotto forma di striscie sempre più o meno contorte (1).

Se l'acciaio contiene più del 0.4 % di carbonio, la struttura sarà ancora quella di Widmanstätten, ma tanto più imperfetta (nel senso or ora indicato) quanto più rapido è stato il raffreddamento. Se il raffreddamento è molto rapido, la contorsione e la deformazione degli elementi cristallini della ferrite possono essere sufficienti a mascherare l'aspetto caratteristico della struttura di Widmanstätten.

C) Il raffreddamento si compie lentamente, ma il processo della cristallizzazione della ferrite è " disturbato „ mecca-

---

(1) Si vedano le parti corrispondenti al tenore di carbonio più basso, nelle due micrografie delle figg. 2 e 3.

nicamente durante il suo svolgimento (ad esempio, mediante la laminazione, la fucinazione, ecc.) (1).

In questo caso la cristallizzazione della ferrite avviene in modo analogo a quello che ho analizzato pei due casi precedenti: se non che il fatto che essa è " disturbata „ meccanicamente attenua sempre più l'azione dei germi di cristallizzazione, separando molto efficacemente gli uni dagli altri gli elementi cristallini che si formano in ciascuna delle fasi del processo.

Delle strutture che così si ottengono ho già parlato, ed ho anche fatto notare come esse siano splendidamente illustrate da una serie di micrografie di pezzi fucinati, pubblicate da A. Portevin e V. Bernard (l. c.).

D) Il raffreddamento si compie rapidamente, e la cristallizzazione della ferrite è disturbata meccanicamente.

In questo caso (che si verifica, ad esempio, nello stampaggio di piccoli pezzi) si compieranno ancora fenomeni analoghi a quelli che si verificano nel caso precedente: ma i varî elementi cristallini separatisi nelle successive fasi del processo di segregazione della ferrite risultano di dimensioni molto piccole e male sviluppati nelle singole parti che ne caratterizzano la forma; talchè riesce difficile distinguere gli uni dagli altri i prodotti dei varî gradi del processo di cristallizzazione.

2° Il trattamento termico (ricottura prolungata ad alta temperatura, ovvero tempre preliminari seguite da ricotture a temperatura più bassa) al quale è stato sottoposto l'acciaio, completamente solidificato, non è stato sufficiente a far scomparire totalmente le differenze della concentrazione del carbonio *fra il nucleo e la periferia* dei *singoli* cristalli misti primarî: cioè quelle differenze della concentrazione del carbonio perfettamente localizzate, risultanti dal noto processo caratteristico secondo il quale si compie la cristallizzazione dei cristalli misti dalle leghe ferro-carbonio fuse.

---

(1) È chiaro che i fenomeni qui descritti potranno dar luogo a strutture evidenti, soltanto nel caso in cui la fucinazione sia terminata " molto calda „. È noto, infatti, che un'ultima fase più o meno " fredda „ della fucinazione, ha per effetto di sminuzzare gli elementi cristallini formatisi durante la precedente fase " calda „, facendo totalmente sparire le forme caratteristiche degli elementi stessi.

Anche in questo secondo caso — analogamente a quanto abbiamo veduto accadere pel primo — il decorso del processo della segregazione della ferrite (decorso il quale determina la struttura dell'acciaio alla temperatura ordinaria) può essere diverso; dipendendo esso essenzialmente — come nel primo caso — dalla velocità del raffreddamento e dalla composizione dell'acciaio. Ed anzi, le strutture che si ottengono in questo caso, operando in determinate condizioni, non differiscono da quelle che si ottengono, in uguali condizioni, nel primo caso, se non in quanto agli effetti dei singoli fenomeni che abbiamo esaminato nel primo caso, si aggiungono quelli dovuti alle differenze *locali* della concentrazione del carbonio nei singoli cristalli misti.

Ripeterò, dunque, per questo caso, la suddivisione che ho già indicata pel caso esaminato precedentemente:

A) Il raffreddamento si compie molto lentamente (avendo una durata dell'ordine di quella che ho precisata per la lamiera alla quale si riferiscono le mie osservazioni più volte citate), ed il fenomeno della cristallizzazione della ferrite non è " disturbato " in alcun modo.

In questo caso i cristalli di ferrite cominceranno evidentemente a formarsi nei punti nei quali la concentrazione del carbonio è minore: cioè necessariamente in corrispondenza dei *nuclei* dei cristalli misti di separazione primaria. Oltre a ciò, la lentezza colla quale si compie il raffreddamento attraverso tutto l'intervallo di temperatura corrispondente alla segregazione della ferrite, fa sì che quelle prime porzioni, separatesi nel modo indicato, esercitino colla massima efficacia la loro azione come germi di cristallizzazione, su tutte le altre porzioni di ferrite che cristallizzano ulteriormente.

Segue da ciò che, nel caso che ora consideriamo, i cristalli di ferrite si formano " copiando " le forme e le disposizioni caratteristiche degli assi dei cristalli misti primarî. La struttura che così si ottiene è dunque appunto quella designata dal Belaiew coll'espressione: *Struttura dei grandi cristalli*, ed anche da lui indicata precisamente come caratteristica dei prodotti formatisi nelle condizioni or ora indicate.

È superfluo aggiungere che nel caso di un acciaio ipereutectico la cementite si separerà necessariamente alla periferia dei cristalli misti primarî.

B) Il raffreddamento avviene meno lentamente, ed il processo della cristallizzazione della ferrite non è disturbato meccanicamente. Si potranno allora verificare tre casi differenti:

a) Se l'acciaio contiene meno del 0,35 °/₀ di carbonio, la cristallizzazione si compie in modo analogo a quello che abbiamo analizzato pel caso precedente, adattandosi facilmente — e, per così dire, " automaticamente „ — le forme tondeggianti dei cristalli della ferrite a copiare le forme dei nuclei dei cristalli misti di formazione primaria. Otterremo così la struttura a ferrite " globulare „, notissima perchè caratteristica degli acciai dolci al carbonio raffreddati nelle condizioni che si realizzano in pratica nella grandissima maggioranza dei casi.

Anche in questo caso nella struttura finale potranno apparire le une accanto alle altre le forme caratteristiche della ferrite separatasi nelle due fasi successive delle quali ho già parlato ripetutamente.

b) Se l'acciaio — pur essendo ipoeutectico — contiene più del 0,4 °/₀ di carbonio *nel suo complesso*, potrà, però, avvenire che in corrispondenza dei nuclei dei cristalli misti primari il carbonio non raggiunga tale concentrazione. In tal caso cominceranno a formarsi piccoli germi di ferrite β: e poi il processo di cristallizzazione si completerà colla separazione *diretta* della ferrite α. Potrà invece accadere — se la concentrazione del carbonio è ancora più elevata — che il processo di cristallizzazione si inizi già colla separazione diretta della ferrite α. Ma, tanto nel primo caso come nel secondo, la maggior parte del processo consiste nella separazione *diretta* della ferrite α: incominciando tale separazione nei punti corrispondenti ai nuclei dei cristalli misti di separazione primaria. Lo sviluppo caratteristico dei cristalli di ferrite α in forme fortemente allungate — quali abbiamo già potuto constatare in modo evidente nei casi in cui la ferrite α cristallizza lentamente da una soluzione solida priva di nuclei a basso tenore di carbonio — fa sì che i cristalli di ferrite che si sviluppano attorno ai nuclei costituiscano come gli elementi di una specie di " reticolo „, dando luogo alla struttura notissima, caratteristica degli acciai contenenti dal 0.4 °/₀ al 0.75 °/₀ di carbonio, raffreddati nelle condizioni abituali della pratica.

È facile spiegare perchè i cristalli di ferrite α non si svi-

luppino, in questo caso, nelle direzioni e nelle forme cartteristiche degli elementi delle figure di Widmanstätten, tenendo presente il fatto che essi debbono ancora cominciare a formarsi di preferenza in corrispondenza degli " assi di minima concentrazione del carbonio „ dei cristalli misti primarî: e che nel loro sviluppo ulteriore debbono subire gli effetti dei germi di cristallizzazione che si sono formati lungo questi assi. E che tale sia la spiegazione di questo fenomeno, è provato dal fatto che un raffreddamento molto più rapido dell'ordinario, rendendo meno efficace l'azione dei germi di cristallizzazione, fa apparire — accanto ad essi, ma indipendenti da essi — le lamine caratteristiche della struttura di Widmanstätten: e più ancora il fatto — sul quale ritornerò fra poco — che la stessa comparsa delle lamine è provocata — ed in misura ancor maggiore — dalla soppressione dell'azione dei germi di cristallizzazione ottenuta " disturbando „ meccanicamente la cristallizzazione: ad esempio, mediante la fucinazione.

È chiaro che i due casi *a)* e *b)*, ora citati, possono verificarsi contemporaneamente in uno stesso campione di acciaio, allorchè le differenze della concentrazione del carbonio fra il nucleo e la periferia dei cristalli misti sia tale che nel primo la concentrazione stessa sia inferiore al 0.4 %, mentre questo valore sia superato nella zona periferica dei cristalli.

c) Se l'acciaio è ipereutectico, la cementite si separerà prevalentemente alla periferia dei cristalli misti primarî: cristallizzando nel loro interno solo quella parte di essa che, per la velocità del raffreddamento, è sottratta all'azione dei germi di cristallizzazione che necessariamente cominciano a formarsi alla periferia dei cristalli misti.

Del resto non mi fermo ad analizzare questo fenomeno, che è stato studiato profondamente e descritto minutamente da H. M. Howe e A. G. Lévy (1).

C) Il raffreddamento si compie lentamente, ma il processo della cristallizzazione della ferrite è " disturbato „ meccanicamente durante il suo svolgimento (Ad esempio, mediante la laminazione, la fucinazione, ecc.).

---

(1) Comunicazioni dell'Associazione Internazionale per lo studio dei materiali da costruzione, vol. II, N. 13; 6 agosto 1912, pagg. 1-15.

In questo caso l'azione “ disturbatrice „ meccanica si fa sentire essenzialmente colla riduzione o l'eliminazione dell'azione caratteristica dei germi di cristallizzazione che si formano pei primi nel processo della segregazione della ferrite. Segue da ciò che nell'acciaio completamente raffreddato dovremo ritrovare gli stessi elementi strutturali caratteristici di un acciaio di uguale composizione raffreddatosi nelle condizioni che ho indicate pel caso precedente, ma indipendenti gli uni dagli altri. Come ho già detto più volte, la pratica conferma pienamente queste conclusioni.

D) Il raffreddamento si compie rapidamente, e la cristallizzazione della ferrite è disturbata meccanicamente.

La struttura che si ottiene in questo caso (il quale — come ho già detto — si verifica, ad esempio, nello stampaggio dei pezzi di piccole dimensioni) non differisce da quella caratteristica del caso precedente, se non pel fatto che i singoli elementi cristallini sono di dimensioni molto più piccole: talchè risulta, generalmente, difficile distinguere gli uni dagli altri gli elementi appartenenti alle due formazioni fondamentali.

In base ad un grande numero di osservazioni, ritengo che nella classificazione che ho esposta trovino luogo facilmente tutte le strutture che si osservano abitualmente negli acciai al carbonio: e sopra tutto negli acciai ipoeutectici. Talchè, in fine, la genesi di tali strutture risulta spiegata in base alle deduzioni tratte dai dati sperimentali che ho esposti nelle pagine precedenti.

Ritengo, poi, che anche i fatti sperimentali citati dal Belaiew trovino una spiegazione più soddisfacente nelle considerazioni che ho svolte or ora, che non in alcune di quelle svolte dal Belaiew. Onde non dilungarmi troppo, mi limiterò a citare, a questo proposito, due soli esempi.

1° Le considerazioni svolte dal Belaiew nel suo *secondo* caso, per spiegare la struttura “ reticolare „ mediante l'ipotesi che la ferrite tenda a portarsi alla *periferia* dei cristalli misti a *concentrazione omogenea*, allorchè il raffreddamento avviene molto lentamente, non sono affatto confermate dalle osservazioni che ho riferite in principio di questa Nota: osservazioni le quali dimostrano invece come, nel caso in cui il trattamento termico

abbia realmente fatto scomparire *totalmente* le differenze della concentrazione del carbonio *dal centro alla periferia dei singoli cristalli misti*, un raffreddamento anche lentissimo dà luogo alla struttura di Widmanstätten (1). Le osservazioni del Belaiew si spiegano invece benissimo colle considerazioni che ho svolte sopra (V. specialmente il caso 2°, $B - b$) quando si ammetta che nei campioni da lui osservati non fossero scomparse *totalmente* le differenze di concentrazione del carbonio dal centro alla periferia dei singoli cristalli misti.

2° L'ipotesi formulata dal Belaiew per spiegare la formazione della struttura di Widmanstätten " anche „ negli acciai raffreddati molto lentamente, e secondo la quale tale formazione sarebbe dovuta ad un fenomeno di " soprafusione „ (o, meglio, di " sottoraffreddamento „) nel processo di cristallizzazione della ferrite, non è affatto confermata dalle osservazioni che ho esposte nella presente Nota. Infatti ogni fenomeno di " soprafusione „ deve essere assolutamente escluso per quella regione della lamiera (alla quale si riferiscono le suddette osservazioni) nella quale appunto il raffreddamento lentissimo ha dato luogo alla formazione della struttura di Widmanstätten. E ciò perchè precisamente in quella regione, i cristalli costituenti questa struttura si sono formati in presenza ed in contatto immediato di germi di cristallizzazione di ferrite preformatisi nella regione meno carburata; ed anzi abbiamo veduto che alcuni di essi si sono formati addirittura come " continuazione „ dei germi stessi.

Sarebbe superfluo l'insistere sull'importanza pratica delle considerazioni e delle osservazioni che si riferiscono a questo gruppo di fenomeni. Basti, a questo proposito, il ricordare le enormi variazioni delle proprietà meccaniche degli acciai, alle quali dà luogo la comparsa della struttura di Widmanstätten.

Torino, R. Politecnico, febbraio 1913.

(1) Ritengo opportuno far qui notare che le considerazioni che ho svolte non conducono per nulla ad escludere l'ipotesi, ammessa da molti metallografi, che la struttura di Widmanstätten (ed in modo speciale, l'orientamento caratteristico degli elementi che la costituiscono) sia più o meno strettamente legata alle forme cristalline dei cristalli misti di separazione primaria, e quindi a quelle degli elementi strutturali che da essi derivano (p. es. la martensite).

Il talco delle " Grangie Subiaschi " in Val Pellice (Alpi Cozie) ed i minerali ad esso associati.

Nota di ALESSANDRO ROCCATI.

In un precedente lavoro (1), in cui mi occupavo dei calcari cristallini, così ampiamente sviluppati da costituire quasi esclusivamente il versante occidentale del vallone dei Subiaschi (Valle del Pellice), e dei minerali che si incontrano associati ai calcari stessi, ho già avuto occasione di accennare all'esistenza di un giacimento di talco situato nella parte nord-occidentale del vallone, nella località detta Comba Fiounira, in prossimità delle " Grangie Subiaschi ".

Il talco affiora quivi, all'altitudine di circa 2200 metri, alle falde orientali della Punta Cournour e di esso fecero già menzione parecchi degli autori (2) che ebbero a descrivere le formazioni geo-litologiche della Valle del Pellice (sul cui versante sinistro, in prossimità del comune di Bobbio Pellice, si apre il profondo e dirupato vallone Subiasco o dei Subiaschi), alcuni indicando pure come il minerale in quella località fosse, circa trent'anni addietro, oggetto di lavorazione, la quale sembra anzi essere stata per qualche tempo abbastanza intensa.

Infatti oltre ai lavori di galleria, dei quali parlerò in seguito, era stato costruito un teleforo per la discesa del mine-

---

(1) A. Roccati, *Tremolite e talco lamellare nel calcare del vallone dei Subiaschi (Val Pellice)*, " Rivista di Min. e Cristall. It. ", XLII, 1913.

(2) V. Barelli, *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna.* Torino, Fodratti, 1835. — B. Gianotti, *Cenni descrittivi di Mineralogia statistica e di Idrologia minerale delle Alpi Italiane.* Torino, Mussano, 1845. — G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia.* Torino, Loescher, 1873 e 1889. — M. Baretti, *Geologia della provincia di Torino.* Torino, Casanova, 1893. — V. Novarese, *Rilevamento geologico del 1895 nella Val Pellice (Alpi Cozie)*, " Boll. Com. Geol. It. ", 1896. — A. Roccati, *Geologia applicata delle valli del Pellice, del Luserna e del Rorà.* Torino, 1911.

rale al piano della valle ed una strada carrettabile saliva fino alla cava, staccandosi dalla mulattiera comunale di Bobbio Pellice un po' a monte della borgata Serre di Sarsenà. Per quanto la lavorazione sia stata abbandonata da molti anni, pure sussistono ancora parecchi tratti della strada conducente al giacimento ed anche del teleforo si possono vedere rovine delle antiche armature lungo il vallone.

Da alcuni operai che furono occupati all'estrazione del talco, e con i quali ebbi occasione di intrattenermi a Bobbio ed a Villar Pellice, seppi che il materiale scavato sarebbe stato di ottima qualità; la lavorazione poi del giacimento non sarebbe stata abbandonata che in causa della notevole distanza dal piano della valle e delle conseguenti elevate spese di trasporto.

Ho visitato a parecchie riprese l'affioramento di talco nella regione " Grangie Subiaschi " raccogliendo il materiale che forma l'oggetto della presente nota; seppi inoltre dagli alpigiani che altri affioramenti devono esistere nell'alto vallone, ma non sono riuscito a ritrovarli. Il Novarese (1) accenna pure alla esistenza di un giacimento di talco situato nel vallone Giaussarand, parallelo a quello dei Subiaschi ed aperto a monte del comune di Bobbio Pellice, ma lo indica però come di poca importanza.

Il giacimento di talco alle " Grangie Subiaschi " è rappresentato da banchi compresi fra i calcari bianchi saccaroidi, nettamente stratificati, che costituiscono la formazione assolutamente predominante in quella zona della Valle del Pellice (2), ed in perfetta concordanza stratigrafica con essi.

Si ha quindi un tipo di giacitura che corrisponde esattamente a quella di parecchie delle cave di talco che vengono attualmente lavorate (dando luogo ad un intenso sfruttamento e ad una fiorente industria italiana) nella vicina valle della Germanasca. Si può del resto ritenere che le formazioni litologiche dell'alto vallone Subiaschi non rappresentino che il proseguimento verso sud delle identiche formazioni della valle della Germanasca (3). Ora in questa i numerosi banchi di talco stanno

(1) *Rilevamento geologico del 1895 in Val Pellice (Alpi Cozie)*, loc. cit.

(2) A. Roccati, *Le ricchezze litologiche delle Valli del Pellice*. Torino, 1913.

(3) V. Novarese, *Sul rilevamento geologico eseguito nel 1894 in Valle della Germanasca (Alpi Cozie)*, " Boll. Com. Geol. It. ", 1895.

generalmente nel contatto fra i gneiss o micaschisti ed i calcari cristallini, oppure, appunto come nel vallone dei Subiaschi, sono interstratificati con i calcari cristallini stessi.

*
* *

Il giacimento esistente nella regione Fiounira comprende nella sua porzione attualmente visibile due affioramenti, situati presso a poco al medesimo livello e corrispondenti forse ad un unico banco, cosa che le condizioni del luogo, essendo il terreno ricoperto da abbondante detrito di falda e da folta vegetazione arbustacea, non mi permettono di affermare con tutta sicurezza.

Gli affioramenti stanno ai due lati, orientale ed occidentale, di uno dei caratteristici costoni rocciosi, aspri e dirupati, i quali, nella parte superiore destra del vallone, si staccano dalla Punta Cournour. In entrambi si lavorò alquanto a cielo scoperto (specialmente nell' affioramento occidentale), ma furono pure aperte gallerie, di cui l'orientale è posta esattamente di fronte ai casolari delle " Grangie Subiaschi ", dalle quali non dista che poche centinaia di metri.

Tali gallerie, ora in buona parte franate ed ostruite quindi da detriti, furono scavate seguendo in direzione il banco, il quale è inclinato di circa 15° verso l'interno del monte. All'epoca della mia ultima visita sul luogo (estate 1912), la galleria occidentale si poteva ancora seguire per circa 6 metri, mentre l'orientale, ove la lavorazione fu evidentemente più intensa, si percorreva per una quindicina di metri; essa però seguitava ancora all'avanzata, ma non saprei dire per quanto, essendo il fondo completamente ostruito da materiale franato dal tetto.

Il talco è comune frammezzo ai detriti esistenti nei dintorni delle antiche cave, ma dalle gallerie invece il materiale utile fu completamente asportato e del minerale non restano che pochi lembi della varietà fogliacea (a cui accennerò in seguito), i quali si scorgono sia al tetto che sulle pareti limitanti il banco primitivo, banco che doveva presentare un distacco ben netto dalla roccia calcarea incassante.

Presso l'imboccatura della galleria occidentale esiste però una zona, in parte mascherata da detrito di falda, ove il talco affiora in posto, compreso fra gli strati del calcare saccaroide,

formando uno strato che si segue per alcuni metri. Quivi è talco, il quale, analogamente a quello raccolto aderente alle pareti delle gallerie, si presenta con una struttura fogliacea grossolana, molto accentuata, per cui si riduce facilmente preso fra le dita, e naturalmente sotto l'azione degli agenti meteorici, in minute scaglie irregolari, avendo quindi una minima coesione.

Il minerale è tenero ed untuoso al tatto; esso ha lucentezza perlacea-submetallica e color bianco argenteo tendente al verdognolo, con numerose chiazze a tinta gialla più o meno intensa derivante da inquinazione di limonite, la quale deve provenire in massima parte dall'alterazione dei cristalli di pirite, che, come vedremo, esistono inclusi nella massa.

***

Caratteristica è la presenza in questo talco fogliaceo di *attinoto*, che vi si scorge in cristalli prismatici più o meno allungati, disposti nei piani di stratificazione e che specialmente si addensano verso il contatto con la roccia calcarea.

Tali cristalli di anfibolo, che sono abbondantissimi tanto da gremire localmente in modo assoluto la massa del talco, stanno distribuiti più o meno regolarmente sopra i piani di divisione, divisione che con la loro presenza concorrono evidentemente a rendere facile, ma irregolare. Complessivamente si osserva per i cristalli una certa tendenza a disporsi con gli assi di allungamento paralleli gli uni agli altri e paralleli pure ai piani di stratificazione, per quanto non ne manchino di quelli in posizione normale od affatto arbitraria.

Le dimensioni dei cristalli sono molto variabili, non mai però rilevanti; infatti la loro lunghezza oscilla fra un massimo di 3 centimetri (eccezionalmente maggiore, avendone trovato uno lungo 6 centimetri, ma spezzato) ed un minimo di mezzo centimetro, mentre il diametro, che può raggiungere 5 millimetri, non è però normalmente compreso che fra 1 e 2-3 millimetri, assumendo quindi nell'insieme i cristalli un abito nettamente aciculare, fibroso.

Il differente sviluppo permette però di stabilire due tipi: l'uno di cristalli sottili, aghiformi, molto delicati, in cui pre-

vale la lunghezza; l'altro di individui tozzi, brevi, nei quali ultimi per una lunghezza di circa un centimetro, si ha sovente un diametro fin di 5 millimetri.

I cristalli risultano normalmente dall'associazione del prisma 110 con il pinacoide 010, le faccie di quest'ultima forma essendo per lo più le maggiormente sviluppate e stando in generale su di esse adagiati i cristalli inclusi nel talco. Le terminazioni sono comunemente nette, come conseguenza della facile divisione secondo 001; oppure i prismi presentano estremità indistinte ed irregolari, talora affusate o come partite e sfilacciate.

Alcuni cristalli sono perfetti di forma, con faccie nitidissime e spigoli ben netti; altri invece, e sono generalmente quelli delle varietà in individui tozzi e brevi, sono più grossolani, con spigoli poco distinti e riduzione fino a quasi totale scomparsa delle faccie del pinacoide 010.

L'angolo del prisma 110 misurato sopra molteplici cristalli, scelti fra quelli terminati nel modo migliore, mi diede valori oscillanti fra 125° e 126°, quindi molto vicini a quello teorico dell'anfibolo.

Il colore del minerale è in complesso il verde più o meno chiaro, talora chiarissimo, tendente in altri casi al verde smeraldo, essendo generalmente i cristalli di mole maggiore quelli più intensamente colorati. La lucentezza è la vitrea perlacea, specialmente sulle faccie 010, mentre quelle del prisma sono meno lucenti, essendo in molti cristalli più o meno fortemente striate in senso longitudinale.

Vi sono cristalli limpidi a tinta omogenea e, quando sono alquanto sottili, si può dire quasi perfettamente trasparenti; il caso più comune è però che siano torbidi nell'interno e quindi soltanto più subtrasparenti od anche del tutto opachi.

Parecchi cristalli, fra quelli che presentano le dimensioni maggiori, hanno la loro tinta verde alquanto irregolarmente distribuita con chiazze a colore ora più, ora meno intenso: altri sono dotati di una certa struttura zonata con colorazione verde più o meno intensa sfumante dall'un punto all'altro, oppure con distacco netto fra zona e zona, le quali sembrano limitate da piani di divisione secondo 001. Tale divisione è d'altronde facile e rende i cristalli, specialmente gli allungati, piuttosto fragili; anzi secondo 001 alcuni individui furono rotti e ricementati dal

talco, il quale si è interposto tra i frammenti, in qualche caso con evidente spostamento di essi.

Ridotti in lamine sottili i cristalli perdono si può dire totalmente la loro tinta verde e le sezioni appaiono incolori; gli individui più intensamente colorati si mantengono verdi, con tinte però molto attenuate e presentano un pleocroismo, per quanto debole:

$$\mathfrak{a} = \text{verde giallognolo chiaro}$$
$$\mathfrak{b} = \text{verde giallognolo chiaro}$$
$$\mathfrak{c} = \text{verde.}$$

L'estinzione misurata sopra 010 ha un medio valore di 15°.

Il peso specifico medio = 3,01.

Onde potere eseguire un'analisi quantitativa dell'attinoto scelsi alcuni cristalli fra i più limpidi ed aventi tinta omogenea, liberandoli perfettamente dal talco avvolgente. Questo sovente aderisce fortemente alle faccie, mentre invece in altri casi i cristalli di anfibolo si staccano con poco sforzo dalla massa, lasciando ordinariamente un incavo ben definito, con pareti lucide.

L'analisi mi diede i seguenti valori:

		Rapporti molecolari		
SiO_2 =	54,80	0,9133	0,9133	1
Al_2O_3 =	2,15			
MgO =	23,91	0,5977		
FeO =	7,24	0,1005	0,9196	1
CaO =	12,40	0,2214		
	100,50			

Il rapporto molecolare tra la silice e le basi, prese complessivamente, essendo di

$$1:1,$$

esso corrisponde a quello di un metasilicato, quali sono appunto chimicamente gli anfiboli non alluminiferi.

Dato il suo tenore in ferro l'anfibolo incluso nel talco si

deve considerare come un *attinoto*, dove il rapporto fra (MgO, FeO) e CaO (1) essendo

3 : 1 (esattamente 3,15 : 1)

si ha conseguentemente la formola

$$3(Mg, Fe)SiO_3 . CaSiO_3$$

***

Inglobati nel talco fogliaceo si osservano, insieme ai cristalli di attinoto, frequenti cristalli di *pirite*, in forma risultante dall'associazione del pentagonododecaedro con il cubo (quest'ultimo rappresentato da faccie molto ridotte) ed aventi dimensioni massime corrispondenti a quelle di un pisello. Alcuni incavi esistenti nella massa del talco lascierebbero, per la loro forma, supporre anche la presenza di cristalli cubici; non ebbi però occasione di trovarne.

È da notarsi che la pirite, con un fenomeno del resto comune per i cristalli inclusi nel talco, non ha mai spigoli netti, ma questi compariscono arrotondati ed il cristallo quindi di forma più o meno sferoidale.

Quando sono inalterati i cristalli di pirite hanno color giallo alquanto chiaro con viva lucentezza metallica e presentano le faccie del pentagonododecaedro più o meno evidentemente striate parallelamente allo spigolo d'intersezione del cubo. Molti però sono alterati in limonite, anche completamente, dando così luogo a fenomeni di pseudomorfosi, oppure non presentandosi più che in forma di masserelle di color giallo rossastro, senza coerenza ed informi.

All'alterazione della pirite si devono certamente, almeno in parte, le infiltrazioni limonitiche che abbiamo visto inquinare la massa del talco, specialmente nella superficie esterna.

---

(1) Dana, *System of Mineralogy*, 6ª ediz., 1892.

***

Nell'affioramento orientale del giacimento si ritrova ancora il talco fogliaceo a tinta bianca-verdognola precedentemente indicato ed in esso si osservano nuovamente inglobati i cristalli di pirite e di attinoto. Quest'ultimo è quivi molto meno abbondante, presentandosi però ancora accentrato sulle superficie di divisione e particolarmente verso il contatto con la roccia calcarea.

Un altro minerale osservai in questo punto, associato al talco di alcuni frammenti esistenti nei dintorni della cava, ed è questo il *granato*, in piccoli cristalli con esclusiva la forma del rombododecaedro, i quali cristalli, per un fenomeno analogo a quello sopra indicato per la pirite, anzichè avere gli spigoli ben definiti li presentano sempre più o meno arrotondati fino ad assumere una forma come di piccole sfere.

A differenza dell'attinoto che, come dissi, normalmente non aderisce fortemente al talco in cui è inglobato, il granato invece non solo ne è completamente avvolto, ma i due minerali hanno tale aderenza l'uno all'altro che è difficile ottenere individui di granato completamente liberi dal talco ed il distacco dei cristalli non lascia un incavo ben netto, come si verifica per l'anfibolo e la pirite.

I cristalli di granato raggiungono al massimo le dimensioni di un grano di miglio, soltanto eccezionalmente ne osservai aventi un diametro di 3-4 millimetri; essi hanno color rossobruno chiaro, con tinta generalmente omogenea e sono opachi.

Ridotti in lamine sottili il colore si attenua di molto, ma non presentano neppure in questo caso una trasparenza perfetta, essendo l'interno sempre più o meno torbido, specialmente verso la parte mediana.

Non notai l'esistenza di inclusioni e neppure i cristalli presentano anomalie ottiche; la massa è però sovente irregolarmente fessurata e lungo le fessure si è non di rado infiltrata della limonite.

Il peso specifico è $= 3{,}54$.

Avendo separato dal talco avvolgente alcuni dei cristalli di

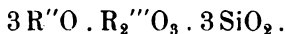
granato, questi mi servirono per una analisi quantitativa, che mi diede i valori seguenti:

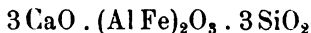
		Rapporti molecolari		
SiO_2 =	40,91	0,6818	0,6818	3,2
Al_2O_3 =	18,34	0,1798	0,2125	1
Fe_2O_3 =	5,24	0,0327		
MgO =	tr.			
CaO =	33,81	0,6037	0,6664	3,1
H_2O =	1,03	0,0627		
	99,33			

I rapporti molecolari che si possono considerare come di

$$3:1:3$$

portano quindi esattamente alla formola tipica del granato e cioè

$$3\,R''O\,.\,R_2'''O_3\,.\,3\,SiO_2\,.$$

Nel caso mio si avrebbe

$$3\,CaO\,.\,(Al\,Fe)_2O_3\,.\,3\,SiO_2$$

corrispondente ad una *grossularia* alquanto ferrifera.

Ho già detto precedentemente che il minerale utile è stato tutto asportato dalle parti attualmente accessibili delle antiche gallerie (per cui nelle condizioni odierne non si potrebbe neppur negare in modo assoluto che la lavorazione del giacimento non abbia cessato per esaurimento di esso); soltanto abbiam visto esistere sulle pareti delle gallerie qua e là lembi della varietà fogliacea.

Tuttavia nelle vicinanze dei due affioramenti, frammezzo agli abbondanti detriti dell'antica lavorazione, si possono raccogliere numerosi frammenti, oltrechè della varietà fogliacea indicata, di un'altra varietà perfettamente distinta.

Questa seconda varietà, che è molto probabilmente il materiale che veniva sfruttato all'epoca in cui la cava era attiva, l'abbondanza dell'anfibolo rendendo, fra altri inconvenienti, poco

atto ad usi industriali il talco fogliaceo, si presenta compatta, bianca con lucentezza subperlacea, saponacea, untuosa al tatto, tenera, con aspetto quindi perfetto di *steatite*.

Tale talco compatto è ben omogeneo, senza minerali accessori inglobati nella massa, benchè chiazze giallastre che si osservano alla superficie dei frammenti potrebbero lasciar supporre l'esistenza di pirite, analogamente a quanto si verifica nella varietà fogliacea bianca-verdognola. Io non ho però notato in alcun caso la presenza del minerale.

Il talco compatto raccolto nei dintorni dell'antica cava ha una composizione che corrisponde abbastanza a quella teorica

$$SiO_2 = 63{,}5 \qquad MgO = 31{,}7 \qquad H_2O = 4{,}8 \text{ (1)}.$$

Infatti io ho trovato i seguenti valori:

		Rapporti molecolari		
SiO_2 =	62,43	1,0405	1,0405	4,1
Al_2O_3 =	tr.			
MgO =	32,05	0,8011	0,8044	3,2
FeO =	0,24	0,0033		
CaO =	tr.			
H_2O =	4,42	0,2455	0,2455	1
	99,14			

Ora i rapporti molecolari sopra indicati portano con molta approssimazione alla formola

$$4\,SiO_2 \,.\, 3\,MgO \,.\, H_2O$$

e cioè

$$H_2Mg_3Si_4O_{12}$$

che è appunto la formola di composizione generalmente ammessa per il talco, così da Dana (2), Hintze (3), Lacroix (4), ecc.

---

(1) DANA, *System of Mineralogy*, 6ª ediz., 1892.

(2) DANA, loc. cit.

(3) HINTZE, *Handbuch der Mineralogie (Silicate und Titanate)*. Leipzig, 1897.

(4) LACROIX, *Minéralogie de la France et de ses colonies*. Paris, Baudry, 1893 (Tome I).

La varietà bianca-verdognola fogliacea, contenente l'attinoto, ha invece una composizione centesimale che si scosta alquanto da quella del talco bianco compatto e conseguentemente anche dalla composizione teorica del minerale.

L'analisi infatti mi ha dato i seguenti valori:

			Rapporti molecolari		
SiO_2	=	60,22	1,0036	1,0036	3,4
Al_2O_3	=	0,32			
MgO	=	32,80	0,8200	0,8369	2,9
FeO	=	1,22	0,0169		
CaO	=	tr.			
H_2O	=	5,19	0,2883	0,2883	1
		99,75			

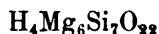
I rapporti molecolari non portano più quindi per questa varietà alla formola

$$4\,SiO_2 \,.\, 3\,MgO \,.\, H_2O$$

ma bensì con una certa approssimazione (tanto più se si tiene conto del fatto già da me rilevato in un precedente lavoro (1), che cioè la presenza di Al_2O_3 tende nel talco ad abbassare il tenore in SiO_2) a

$$7\,SiO_2 \,.\, 6\,MgO \,.\, 2\,H_2O$$

e quindi

$$H_4Mg_6Si_7O_{22}$$

cioè ad una deficienza di silice in confronto della composizione teorica del talco e di quella della varietà compatta a tipo di steatite.

Riguardo a questa diversità di composizione si può applicare qui il ragionamento che ebbi occasione di fare trattando del talco lamellare incluso nel calcare saccaroide dello stesso vallone dei Subiaschi (2), vale a dire che la composizione chi-

(1) A. Roccati, *Tremolite e talco lamellare nel calcare del vallone dei Subiaschi (Val Pellice)*, loc. cit.

(2) *Tremolite e talco lamellare, ecc.*, loc. cit.

mica del talco, secondo risulta evidente dalle analisi riportate dai vari autori (1), pure mantenendosi sempre quella di un *metasilicato acido di magnesio*, è molto variabile, avendosi in alcuni casi eccesso di silice ed in altri deficenza di questa in confronto della formola teorica sopra riportata.

Notiamo infine come la composizione del talco fogliaceo si presenta intermedia fra quella della varietà compatta e quella in minute lamelle del talco che si incontra nel calcare saccaroide della località, varietà alla quale accennava precedentemente e che ha la seguente composizione:

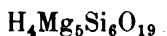
			Rapporti molecolari		
SiO_2	=	58,89	0,9815	0,9815	3,08
Al_2O_3	=	0,30			
MgO	=	33,11	0,8277	0,8425	2,64
FeO	=	1,07	0,0148		
CaO	=	tr.			
H_2O	=	5,74	0,3188	0,3188	1
		99,11			

In questo caso i rapporti molecolari portano approssimativamente, non tenendo conto della quantità di ferro relativamente piccola, alla formola

$$6SiO_2 . 5MgO . 2H_2O$$

e quindi

$$H_4Mg_5Si_6O_{19}$$

* * *

Ho già fatto rilevare in principio di questa nota la corrispondenza di giacitura fra il talco del vallone dei Subiaschi e quella di parecchi dei giacimenti della valle della Germanasca.

Ora un altro carattere di somiglianza credo utile riportare

(1) DANA, HINTZE, LACROIX, loc. cit.

ed è la presenza nel talco di tutte due le località dei caratteristici " rognoni „.

Con questo nome vengono dai cavatori della Valle della Germanasca indicate certe masse tondeggianti di forma più o meno regolare e di dimensioni variabilissime (ne potei osservare in cave di talco della Germanasca alcune della grossezza di una noce fino ad altre aventi anche un metro e più di diametro), che si incontrano saltuariamente inglobate nel talco, al quale aderiscono fortemente.

I " rognoni „ sono per la massima parte costituiti da quarzo ialino.

Ora di tali masse tondeggianti di quarzo ialino, ancora ricoperto da una patina bianca lucente del talco in cui dovevano essere inizialmente incluse, ne ho raccolte nel materiale di scarto della cava delle Grangie Subiaschi, ove furono evidentemente abbandonate all'epoca della lavorazione.

Di queste masse quarzose una è alquanto appiattita in forma grossolanamente lenticolare, ed ha le dimensioni circa di un uovo; un'altra è più sferoidale e di dimensioni maggiori, avendo cioè un diametro di 12 cm.

Io ritengo che queste masse debbano avere una notevole importanza per le questioni inerenti alla genesi dei giacimenti di talco e mi riservo ritornare di proposito su di esse in un prossimo lavoro.

Torino. Gabinetto Geo-Mineralogico del R. Politecnico,
Marzo 1913.

Resto in alcune formule di quadratura.

Nota di PAOLINA QUARRA

Le formule di quadratura hanno grande importanza nelle applicazioni pratiche: astronomia, scienza attuariale, ecc., per calcolare integrali di funzioni complicate, e sono l'unico istrumento per calcolare integrali di funzioni date sperimentalmente e di cui si hanno soltanto tavole.

Ciascuna formula di quadratura vale, in generale, per le funzioni intere di grado inferiore ad un certo numero n, e questo numero, ad esempio, è eguale a 2 per la formula dei trapezi, è eguale a 4 per la formula di Simpson, ecc.

Negli ultimi tempi si determinò il resto, ossia l'errore che si commette applicandole a funzioni di grado superiore, o non intere, ed a questo resto si è dato talvolta la forma di integrale definito ed altra volta è stato espresso mediante un valore medio della derivata ennesima della funzione.

Però numerose formule di quadratura che si usano nelle applicazioni pratiche, sono tuttora prive di resto: fra queste è la formula data da Laplace nel 1805 (*Œuvres complètes*, t. IV, pag. 205), la quale è largamente applicata nei calcoli astronomici e che io ho incontrato nel calcolo delle perturbazioni subite dalla cometa Cerulli-Faye (1910 e) per parte dei pianeti principali, e della quale mi propongo di determinare il resto.

Il prof. Peano, in una delle sue lezioni di quest'anno, diede la regola per determinare il resto di una qualsiasi formula di quadratura, sotto forma di integrale definito. Per enunciare questa regola è necessario introdurre una funzione discontinua φx detta *fattore di discontinuità*, la quale vale 0 se x è negativo, vale 1 se x è positivo, e se x è nullo assumiamo per φx un valore arbitrario; per esempio possiamo porre $\varphi 0 = \frac{1}{2}$. Questa funzione φ si può esprimere coi simboli di logica:

$$\varphi = (\iota 1 : Q) \cup (\iota 0 : -Q) \cup \iota\left(\frac{1}{2} ; 0\right),$$

cioè: φ *è l'insieme delle coppie di cui il primo elemento è uguale ad* 1 *ed il secondo è una quantità positiva, ovvero, di cui il primo elemento è* 0 *ed il secondo è negativo, ovvero è la coppia formata dai numeri* $\frac{1}{2}$ *e* 0.

La funzione φ si può associare ad altre: per esempio al *segno di* x del Kronecker come segue:

$$x \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \varphi x = \frac{1 + \mathrm{sgn}\, x}{2},$$

dove $\mathrm{sgn}\, x$ vale $+1$ se x è positivo, vale -1 se x è negativo ed è nullo per x uguale a zero.

La funzione $\mathrm{sgn}\, x$ si può definire analiticamente (*Formulario Mathematico*, pag. 219 * 16 · 1) come segue:

$$x \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \mathrm{sgn}\, x = \lim_{n=\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}.$$

La regola per calcolare il resto sotto forma di integrale è dunque la seguente:

$$R \varepsilon \mathrm{q\,F\,(q\,F\,q)\,lin} \,.\, n \varepsilon \mathrm{N}_1 : f \varepsilon \mathrm{(q\,F\,q)\,int.\,grad}\, f < n \,.\, \supset .\, Rf = 0 :$$
$$f, \mathrm{D}^n f \varepsilon \mathrm{q\,F\,q} : \supset .\, Rf = \mathrm{S} \left\{ R \left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z-x) \,\mathrm{`}\, z, \mathrm{q} \right] \times \mathrm{D}^n f x \,|\, x, \mathrm{q} \right\}$$

e che, nel linguaggio ordinario, diviene:

Sia il resto R una quantità funzione delle funzioni reali di variabile reale. Così, ad esempio, $\mathrm{S}\,(f, a \,\bar{\,}\, b)$, $\mathrm{D}^n fa$, $\Delta^n fa$ sono numeri funzioni della funzione f, oltrechè di a e di b.

Supponiamo che R sia una funzione lineare, cioè che essendo f e g le caratteristiche di due funzioni, si abbia:

$$R\,(f+g) = Rf + Rg:$$

e tali sono tutte le funzioni sopra considerate.

Supponiamo inoltre che, essendo n un numero intero positivo dato, comunque si prenda la funzione f algebrica razionale intera di grado minore di n, sempre si abbia $Rf = 0$, cioè il resto sia sempre nullo per tutte le funzioni della specie considerata.

Ad esempio:

$$S(f, \theta) - \frac{1}{2}(f0 + f1) \tag{1}$$

resto nella formula dei trapezi, è nullo se f è di grado minore di 2.

$$f1 - \left(f0 + Df0 + \frac{D^2f0}{2!} + \ldots + \frac{D^{n-1}f0}{(n-1)!}\right) \tag{2}$$

che è il resto nella formula di Taylor ridotta alla sua più semplice espressione, è nullo per tutte le funzioni di grado minore di n.

Sia allora f una funzione qualunque, avente però derivata di ordine n. In tale ipotesi, il resto corrispondente a questa funzione f vale l'integrale di una certa funzione di x, moltiplicata per la derivata di ordine n di fx, dove l'integrazione è fatta rispetto ad x per tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$.

Il fattore che moltiplica $D^n fx$ si ottiene in questo modo: Si consideri la funzione:

$$\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z-x)$$

in cui varia z, assumendo tutti i valori reali. Questa funzione vale sempre 0 se z è minore di x, e per z maggiore di x vale $\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Il diagramma di questa funzione è l'asse delle ascisse da $-\infty$ ad x ed è la parabola $\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}$ da x in poi.

Si calcoli R corrispondente a questa funzione:

$$R\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z-x) \mid z, q\right].$$

Questa funzione di x, moltiplicata per $D^n fx$, ed integrata rispetto ad x da $-\infty$ a $+\infty$, ci dà il resto della funzione generale f.

Alcune volte è più comodo introdurre, in luogo della φ, la funzione complementare $\varphi(-x) = 1 - \varphi x$.

Nelle ipotesi precedenti avremo allora:

$$Rf = (-1)^n \mathrm{S} \left\{ R \left[\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(x-z) | z, \mathrm{q} \right] \mathrm{D}^n f x | x, \mathrm{q} \right\},$$

cioè si calcola la R per quella funzione di z che da $-\infty$ ad x vale $\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}$ e da x a $+\infty$ vale zero.

Resto nella formula con quattro ordinate.

Si ha il teorema:

$$f \epsilon (\mathrm{qFq}) \mathrm{int}.\mathrm{grad} f < 4 . \mathrel{\supset} . \mathrm{S}(f, 0 \frown 3) = \frac{3}{8}(f0 + 3f1 + 3f2 + f3).$$

Se f è una funzione intera di grado inferiore al quarto, l'integrale della f da 0 a 3, vale l'ampiezza dell'intervallo di integrazione, che in questo caso è 3, moltiplicato per un valor medio delle quattro ordinate $f0$, $f1$, $f2$, $f3$, prese coi coefficienti 1, 3, 3, 1.

Questa formula fu data da Newton nel 1711, ed è la prima delle formule di Cotes (*Form.*, t. V, pag. 369).

Ecco un cenno della dimostrazione di questa formula: Essendo f di grado terzo al più, e conoscendone quattro valori $f0$, $f1$, $f2$, $f3$, si ha, dalla formula di Waring-Lagrange,

$$fx = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1 \times -2 \times -3} f0 + \frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0) \times (1-2) \times (1-3)} f1 + \ldots$$

Integrando i vari coefficienti si ottiene appunto la formula proposta.

Se la funzione f è di grado superiore al terzo, la differenza fra il valore della funzione fx e la funzione di 3° grado ora scritta, che per i valori 0, 1, 2, 3 coincide con la funzione proposta, si può ridurre alla forma:

$$x(x-1)(x-2)(x-3) \frac{\mathrm{D}^4 fu}{4!},$$

dove u è un valore medio fra 0 e 3 (supposto anche x compreso fra 0 e 3); quindi il resto nella formula di quadratura di Newton si può mettere sotto la forma:

$$S\left[x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{D^4 fu}{4!}\,|x, 0 \frown 3\right].$$

Ma qui si presenta una difficoltà: mentre nella formula dei trapezi, nella formula di Simpson, ecc., il fattore che moltiplica D^4 conserva un segno costante, e quindi si può portare la derivata fuori del segno di integrazione, nel nostro caso il fattore $x(x-1)(x-2)(x-3)$ cambia segno secondochè x è compreso fra 0 ed 1, fra 1 e 2 o fra 2 e 3. Per poter concludere, ricorreremo all'espressione del resto sotto forma d'integrale.

A tal fine consideriamo la funzione:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|z, q\right].$$

Per $x < 0$, si ha:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|z, q\right] = 0,$$

poichè, essendo z compreso fra 0 e 3, $\varphi(z-x) = 1$; perciò la funzione a cui applichiamo il resto R, sarà la funzione $\frac{(z-x)^3}{3!}$ di terzo grado, per cui la formula è esatta, ed il resto è nullo.

Per $0 < x < 1$, si ha:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|z, q\right] = \frac{(3-x)^4}{4!} - \frac{9}{8}\frac{(1-x)^3}{3!} - \\ - \frac{9}{8}\frac{(2-x)^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{(3-x)^3}{3!},$$

e fatte le debite riduzioni si ottiene:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|z, q\right] = -\frac{x^3}{4!}\left(\frac{3}{2} - x\right),$$

quantità sempre negativa per $0 < x < 1$.

Per $1 < x < 2$, si ha:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|z, q\right] = \frac{(3-x)^4}{4!} - \frac{9}{8}\frac{(2-x)^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{(3-x)^3}{3!}.$$

Se poniamo $x = 1 + t$ dove $0 < t < 1$ e facciamo le debite sostituzioni e riduzioni, otteniamo:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, \mathrm{q}\right] = \frac{1}{24}\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}t^2 - 2t^3 + t^4\right]$$

dove si può porre $t = \frac{1}{2} + u$, e quindi:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, \mathrm{q}\right] = -\frac{1}{24}\left(\frac{9}{16} - u^4\right),$$

quantità sempre negativa nell'ipotesi $-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$.

Per $2 < x < 3$, si ha:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, \mathrm{q}\right] = \frac{(3-x)^4}{4!} - \frac{3}{8}\,\frac{(3-x)^3}{3!} =$$
$$= -\frac{(3-x)^3}{4!}\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

quantità sempre negativa per $2 < x < 3$.

Ponendo $x = 2 + t$ dove $t < 1$ si ottiene:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, \mathrm{q}\right] = -\frac{(1-t)^3}{4!}\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

Per $x > 3$ si ha finalmente:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, \mathrm{q}\right] = 0$$

perchè $\varphi(z-x) = 0$.

Cosicchè qualunque sia la funzione f si ha:

$$f, \mathrm{D}^4 f \varepsilon \mathrm{q\,F\,q} \,.\supset.\, Rf =$$
$$= -\mathrm{S}\left[\frac{x^3}{4!}\left(\frac{3}{2} - x\right)\mathrm{D}^4 f x\,|\,x, \theta\right] -$$
$$- \mathrm{S}\left[\frac{1}{4!}\left(\frac{3}{4} + u^2\right)\left(\frac{3}{4} - u^2\right)\mathrm{D}^4 f\left(\frac{3}{2} + u\right)|\,u, -\frac{1}{2} \,{}^{\vdash\!\dashv}\! + \frac{1}{2}\right] -$$
$$- \mathrm{S}\left[\frac{[1-t]^3}{4!}\left(t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{D}^4 f(2+t)\,|\,t, \theta\right].$$

Ora, in ognuno di questi integrali, il fattore che moltiplica $\mathrm{D}^4 f$ è una funzione intera di 4° grado, che ha un segno

costante, positivo; perciò si può portare $D^4 fu$ fuori del segno di integrale, e quindi:

$$Rf = - D^4 fu \Big[S \Big\{ \frac{x^3}{4!} \Big(\frac{3}{2} - x \Big) | x, \theta \Big\} + + S \Big\{ \frac{1}{4!} \Big(\frac{3}{4} + u^2 \Big) \Big(\frac{3}{4} - u^2 \Big) | u, -\frac{1}{2} \frown + \frac{1}{2} \Big\} + + S \Big\{ \frac{(1-t)^3}{4!} \Big(t + \frac{1}{2} \Big) | t, \theta \Big\} \Big]$$

dove u è un valore dell'intervallo fra zero e 3.

Eseguendo queste integrazioni, otteniamo, come somma dei tre integrali,

$$\frac{1}{4!} \frac{9}{10}.$$

Risulta quindi:

$$Rf \epsilon - \frac{1}{4!} \frac{9}{10} D^4 f ‘ 0 \frown 3$$

quale espressione del resto nella formula con quattro ordinate. In altre parole potremo dire che, nell'espressione

$$S \Big[x(x-1)(x-2)(x-3) \frac{D^4 fu}{4!} | x, 0 \frown 3 \Big]$$

è permesso di portar fuori del segno di integrazione il fattore $D^4 fu$, quantunque l'altro non conservi segno costante.

Resto nella formula di Laplace.

La formula di quadratura data da Laplace nel 1805, introduce dei coefficienti c_r definiti come segue:

$$r \epsilon N_1 . \supset . c_r = S [C(x, r) | x, \theta],$$

cioè c_r è l'integrale di $\frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{r!}$ rispetto ad x, da 0 ad 1. Questi coefficienti c_r sono i coefficienti dello sviluppo di $\frac{x}{\log(1+x)}$ ossia:

$$x \epsilon q . \mathrm{mod}\, x < 1 . \supset . \frac{x}{\log(1+x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

dove:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{12}, \quad c_3 = \frac{1}{24}, \quad c_4 = -\frac{19}{720}, \quad c_5 = \frac{3}{160} \dots$$

La formula di Laplace è dunque la seguente:

$$m \in N_1 \,.\, f \in (qFq)\,\text{int} \,.\, \supset \,.\, S(f, 0 \frown m) =$$
$$= \Sigma(f, 0 \cdots m) - c_1(fm + f0) - c_2(\Delta f_{m-1} - \Delta f0) -$$
$$- c_3(\Delta^2 f_{m-2} + \Delta^2 f0) - c_4(\Delta^3 f_{m-3} - \Delta^3 f0) \dots$$

ossia: qualunque sia la funzione intera f, l'integrale della funzione f da zero ad un numero intero m, vale la somma

$$f0 + f1 + \dots + fm$$

più una serie in cui compaiono le differenze della funzione f, e nella quale da un certo termine in poi tutti i termini sono nulli.

Limitandoci alle funzioni di grado inferiore al quarto, la formula diviene:

$$f \in (qFq)\,\text{int} \,.\, \text{grad} f < 4 \,.\, \supset \,.\, S(f, 0 \frown m) =$$
$$= \Sigma(f, 0 \cdots m) - \frac{1}{2}(f_m + f0) - \frac{1}{12}(\Delta f_{m-1} - \Delta f0) -$$
$$- \frac{1}{24}(\Delta^2 f_{m-2} + \Delta^2 f0),$$

ovvero:

$$S(f, 0 \frown m) = \frac{3}{8} f0 + \frac{7}{6} f1 + \frac{23}{24} f2 + f3 + f4 + \dots +$$
$$+ f_{m-3} + \frac{23}{24} f_{m-2} + \frac{7}{6} f_{m-1} + \frac{3}{8} fm.$$

Supposto f una funzione qualunque, e detto Rf il resto in questa formula, per calcolare Rf sotto forma di integrale definito, considereremo ancora la funzione:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!} \varphi(z-x) \mid z, q\right],$$

la quale sarà nulla per x minore di zero per la ragione già vista.

Per $0 < x < 1$ si ottiene:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, q\right] = -\frac{x^3}{4!}\left(\frac{3}{2}-x\right)$$

come per la formula di Newton.

Per $1 < x < 2$, posto $x = 1 + t$, si ottiene:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, q\right] = -\frac{1}{4!}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}t^2+\frac{13}{6}t^3-t^4\right].$$

Il polinomio entro parentesi è quello ottenuto nel caso della formula di Newton, a cui però va aggiunto $\frac{1}{6}x^3$. Questo polinomio è quindi sempre positivo.

Per $2 < x < m-2$, posto $x = r + t$ dove r è un numero intero e precisamente è il massimo intero contenuto in x, cosicchè $0 < t < 1$, si ha:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, q\right] = -\frac{1}{4!}\left[\frac{2}{3}-t^2(1-t)^2\right].$$

ove la quantità entro parentesi è essenzialmente positiva.

Per $m-2 < x < m-1$, posto $x = m-1-t$, si ritrova la stessa funzione corrispondente all'intervallo $1 < x < 2$, ossia:

$$R\left[\frac{(z-x)^3}{3!}\varphi(z-x)\,|\,z, q\right] = -\frac{1}{24}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}t^2+\frac{13}{6}t^3-t^4\right],$$

e quindi negativa per $m-2 < x < m-1$.

Infine, per $m-1 < x < m$, posto $x = m-t$, si trova $-\frac{t^3}{4!}\left(\frac{3}{2}-t\right)$ che è la stessa espressione trovata per x compreso fra 0 e 1, ma in cui la variabile è t.

Siccome tutte le espressioni precedenti hanno segno costante, si può portar fuori del segno d'integrale il fattore $D^4 fu$, il quale verrà moltiplicato per la somma degli integrali dei polinomi dati.

Ciò equivale a dire che il resto è eguale al prodotto $D^4 fu$ per il valore che esso resto assume supponendo $D^4 f = 1$.

Ma se $D^4 f = 1$, il resto nella formula di Laplace si ottiene

continuando la serie di Laplace, scrivendone i due termini successivi; quindi questo fattore sarà:

$$(m-3)\,c_4 - 2c_5 = -\frac{19}{720}(m-3) - \frac{3}{80}\,.$$

In conclusione, il resto nella formula di Laplace arrestata dopo i termini con Δ^2 è:

$$Rf = -\,D^4 fu\left[\frac{19}{720}(m-3) + \frac{3}{80}\right].$$

Applicazioni. — Applichiamo ora la formula di Laplace al calcolo del logaritmo naturale di 2. Sappiamo che:

$$\log 2 = S\left(\frac{1}{x} \mid x\,,\,\theta\right) = S\left(\frac{1}{x} \mid x\,,\,10 \urcorner 20\right).$$

Diamo alla x i valori 10, 11, 12, ..., 19, 20:

		Δ	Δ^2
$\frac{1}{10}$ =	0,100000		
		— 0,009091	
$\frac{1}{11}$ =	0,090909		+ 0,001515
		— 0,007576	
$\frac{1}{12}$ =	0,083333		
$\frac{1}{13}$ =	0,076923		
$\frac{1}{14}$ =	0,071428		
$\frac{1}{15}$ =	0,066666		
$\frac{1}{16}$ =	0,062500		
$\frac{1}{17}$ =	0,058823		
$\frac{1}{18}$ =	0,055555		
		— 0,002924	
$\frac{1}{19}$ =	0,052631		+ 0,000293
		— 0,002631	
$\frac{1}{20}$ =	0,050000		
Somma =	0,768768		
$\Delta f 19 - \Delta f 10$ =		0,006460	
$\Delta^2 f 18 + \Delta^2 f 10$ =			0,001808

$$\Sigma\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\right)= \quad 0,768768$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right) \quad =-0,075000$$

$$-\frac{1}{12}(\Delta f 19-\Delta f 10) \quad =-0,000538$$

$$-\frac{1}{24}(\Delta^2 f 18+\Delta^2 f 10) \quad =-0,000075$$

$$\log 2 \quad = \quad 0,693155$$

L'espressione del resto è:

$$-D^4 fu\left[\frac{19}{720}7+\frac{3}{80}\right].$$

Ora:

$$D^4 fu=\frac{4!}{u^5}, \qquad \text{ma } \frac{4!}{u^5}<\frac{4!}{10^5}.$$

Quindi l'errore sarà:

$$Rf\,\epsilon-\theta\frac{8}{36}\,\frac{24}{10^5}=-\theta\frac{16}{3}\,\frac{1}{10^5}.$$

L'errore commesso è dunque minore di 5 unità del 5° ordine decimale.

Esattamente abbiamo poi:

$$\log 2=0,693147,$$

cosicchè l'errore è precisamente di una unità del 5° ordine decimale.

Di alcune cianacetilamine alifatiche.

Nota della Dott. MARIA CLOTILDE BIANCHI.

Dovendo ottenere alcuni acidi ossamici bibasici per ossidazione delle corrispondenti cianacetilamine, o cianacetamidi sostituite, ho avuto occasione di preparare alcuni di questi ultimi composti cianacetilici da monoamine e da diamine alifatiche.

Molte cianacetilamine sono già state preparate in questo Laboratorio dal prof. Guareschi e suoi allievi sino dal 1892. Io ora espongo i risultati che ho ottenuto studiando i composti, benissimo cristallizzati, che ho avuti dalla metilamina, etilamina, propilendiamina e trimetilendiamina.

Durante queste ed altre ricerche, ho dovuto varie volte ottenere della cianacetamide, la quale poi in parte mi deve servire per studi ulteriori, ed ho avuto occasione di osservare che le proprietà fisiche di questo corpo e specialmente il punto di fusione non sono quali trovansi descritte nei trattati. Io preparai anche appositamente la cianacetamide facendo passare, fino a saturazione, in una soluzione etereo-alcoolica di etere cianacetico, mantenuta fredda con ghiaccio, una corrente di ammoniaca sviluppata da una soluzione al 17 %: dopo 24 ore avevo una massa cristallina quasi bianca in un liquido giallastro.

Da 5 cm^3 di etere cianacetico, sciolti in 35 cm^3 di etere solforico e 20 cm^2 di alcool assoluto, con una corrente di ammoniaca in eccesso, si ottennero gr. 3 di cianacetamide: quasi il rendimento teorico.

Questo prodotto, lavato parecchie volte con etere, cristallizzato dall'alcool metilico, si ha in cristalli bianchissimi che fondono a 121°-122°, ma, convenientemente depurato, si può avere con un punto di fusione anche più alto. A tale scopo fu estratto più volte con etere etilico in estrattore di Soxhlet: lasciando agire l'apparecchio un certo tempo, l'etere per raf-

freddamento e per evaporazione lascierà depositare la cianacetamide sotto forma di polvere minuta cristallina, bianchissima, che fonde a 124°-125°; risultato questo in contraddizione coi dati degli autori che se ne occuparono prima, perchè il Van't'Hoff che la scoprì, la ottenne, dall'etere cianacetico coll'ammoniaca, fusibile a 105°, più tardi Henry diede come punto di fusione della cianacetamide 118° e finalmente Hesse 120°.

Azione dell'etere cianacetico sulla metilamina.

L'etere cianacetico reagisce rapidamente alla temperatura ordinaria colla metilamina: mescolando gr. 22.6 del primo con gr. 22 di soluzione al 33 % della seconda (nei rappporti cioè di molecole uguali) il liquido si riscalda alquanto, si colora leggermente in roseo e dopo alcuni minuti la miscela è completamente solidificata in una massa cristallina quasi bianca che, lavata con etere etilico e asciugata per compressione al torchio, pesa gr. 6.5 e fonde a 103°. Ricristallizzandola dall'acqua (in cui è facilmente solubile), fino a punto di fusione costante, la si ha in bei cristalli prismatici, bianchissimi, che fondono a 105° in un liquido incoloro.

In una seconda preparazione il rendimento è stato maggiore: mettendo a reagire le stesse quantità di etere cianacetico e di metilamina ottenni circa 9 gr. di prodotto; il rendimento è però sempre scarso.

Effettuai una terza preparazione facendo avvenire la reazione fra l'etere cianacetico e la metilamina allo stato gassoso, che facevo sviluppare da una soluzione di essa al 20 % e il rendimento fu in questo caso pressochè teorico.

Facendo gorgogliare fino a saturazione (mediante un apposito apparecchietto) attraverso a una soluzione alcoolica di etere cianacetico una corrente di gas metilamina, asciutto su ossido di calcio, mantenendo ben raffreddato con acqua e ghiaccio il pallone della reazione, di mano in mano che il gas si assorbe si vanno depositando attorno al tubo adduttore dei bei cristalli bianchissimi.

Così da gr. 7 di etere cianacetico, sciolti in 25 cm³ di etere e cm³ 17 di alcool assoluto, e cm³ 25 di soluzione al 20 %

di metilamina si hanno circa gr. 5 di prodotto (teorico gr. 6) che, dall'alcool, si ha cristallizzato in bei prismi splendenti, riuniti in fascetti e che fondono verso 104°-105°.

La sostanza cristallizzata, proveniente dalle varie preparazioni, ha dato all'analisi i risultati seguenti:

I. Gr. 0.1123 di sostanza fornirono 0.2009 di CO^2 e 0.0628 di H_2O.

II. Gr. 0.0986 di sostanza diedero 25 cm^3 di N a 16° e $749^{mm}.5$,

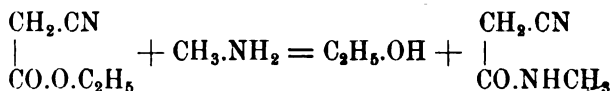
da cui la composizione centesimale:

	I	II
C =	48.79	—
H =	6.20	—
N =	—	28.25

Per la cianacetilmetilamina o metilcianacetamide $CN.CH_2.CO.NH.CH_3$ si calcola:

C =	48.97
H =	6.12
N =	28.5

La metilcianacetamide formata secondo l'equazione:

$$\begin{matrix} CH_2.CN \\ | \\ CO.O.C_2H_5 \end{matrix} + CH_3.NH_2 = C_2H_5.OH + \begin{matrix} CH_2.CN \\ | \\ CO.NHCH_3 \end{matrix}$$

è solubile in alcool freddo, solubilissima a caldo, e da questo la si ha cristallizzata in prismi allungati, splendenti, insolubile in etere anche se bollente. Le sue soluzioni hanno reazione neutra. A freddo si scioglie nella potassa e il liquido neutralizzato con acido cloridrico si colora in giallo.

Azione dell'etere cianacetico sulla etilamina.

Anche la etilamina reagisce bene allo stato di gas coll'etere cianacetico in soluzione etereo-alcoolica. Collo stesso dispositivo

che per la metilamina, mando fino a saturazione la etilamina gassosa, che si sviluppa da una soluzione al 33 %, asciutta su ossido di calcio, in una soluzione di 10 cm^3 di etere cianacetico in 20 cm^3 di alcool assoluto e 15 cm^3 di etere solforico, mantenuta fredda con acqua e ghiaccio. Il liquido prima si riscalda, poi si colora fortemente in roseo e dopo 3-4 ore è tutto solidificato in una massa cristallina che ritiene una lieve colorazione roseo-violetta che ricorda quella dei sali di manganese, ma che, lavata con etere, e asciugata con pressione al torchio, si ha quasi incolora, e pesa gr. 9.5 circa (teorico gr. 10).

Dopo varie cristallizzazioni dall'alcool a 90°, bollente, si ottiene in lamelle prismatiche, incolore, che fondono a 74°-75°, solubilissime in acqua, meno in alcool, insolubili in etere. Su questa sostanza doso l'azoto:

Gr. 0.0460 di sostanza diedero cm^3 10.25 di azoto a 22° e 744^{mm},

da cui:

$$N\ \% = 24.82.$$

Per la cianacetiletilamina o etilcianacetamide $CN.CH^2.CO.NH.C^2H^5$ si calcola:

$$N\ \% = 25.0.$$

Già alla temperatura ordinaria si ossida con permanganato potassico, sviluppando acido cianidrico, ma non sono riuscita ad ottenere l'acido ossamico corrispondente.

Azione dell'etere cianacetico sulla propilendiamina.

Appena si mette in contatto l'etere cianacetico colla propilendiamina, nel rapporto di due molecole del primo per una molecola della base, il liquido si colora in giallo, sviluppa notevole quantità di calore e dopo raffreddamento si rapprende in una massa cristallina lievemente colorata. Dopo 24 ore tutta la massa è solidificata.

La sostanza grezza, raccolta, lavata con alcool concentrato, poi con etere, si fa ricristallizzare dall'alcool a 95° fino a punto di fusione costante e si ha sotto forma di aghi bianchi che

fondono a 161°-162°. Scaldata sopra il punto di fusione si decompone.

Quasi insolubile nell'alcool a freddo, si scioglie con facilità all'ebollizione e dalle soluzioni si deposita in lunghi aghi intrecciati, incolori, splendenti, riuniti in grossi fasci o a doppi fasci. Nell' acqua a freddo è poco solubile, è solubilissima invece a caldo e dall'acqua cristallizza in aghetti sottilissimi filiformi, disposti a rosetta. È insolubile in etere tanto a caldo che a freddo. Dà con facilità delle soluzioni soprassature. Le soluzioni hanno reazione neutra.

Anche per la dicianacetilpropilendiamina tentai l'ossidazione con permanganato potassico: già a temperatura ordinaria si ossida sviluppando acido cianidrico di cui ebbi nette le reazioni, ma non potei ancora ottenere l'acido propilenossamico corrispondente.

Sul prodotto cristallizzato fondente a 161°-162° dosai l'azoto:

Gr. 0.0834 di sostanza fornirono cm^3 20.45 di N a 25° e 749^{mm},

da cui:

$$N\ \% = 27.13.$$

Per la dicianacetilpropilendiamina $(CN.CH^2.CO.NH)^2.C^3H^6$ si calcola:

$$N\ \% = 26.92.$$

Azione dell'etere cianacetico sulla trimetilendiamina.

Si mettono a reagire l'etere cianacetico e la trimetilendiamina nel rapporto di due molecole di etere per una di base: gr. 28 di etere cianacetico si mescolano a gr. 9 di trimetilendiamina. Il liquido si riscalda subito ingiallendo: in meno di un quarto d'ora è completamente solidificato in una massa caseosa, lievemente giallognola e dopo raffreddamento non si sente quasi più che l'odore intenso, acuto dell'alcool. Dopo alcune ore si lava il prodotto (circa gr. 15) con poco etere e si ricristallizza varie volte da alcool a 60°. Si deposita così in aghetti finissimi che ritengono una lieve colorazione giallognola e fondono

a 163°-165° in un liquido incoloro. Scaldata oltre il punto di fusione comincia verso i 200-210° a scomporsi e dare NH_3.

Questo composto è solubile in acqua, poco in alcool a freddo, facilmente nell'alcool bollente, da cui si deposita in aghetti setacei, raggruppati in fascetti, insolubile in etere tanto a caldo che a freddo. Dà delle soluzioni neutre.

Fu dosato l'N sul prodotto ricristallizzato:

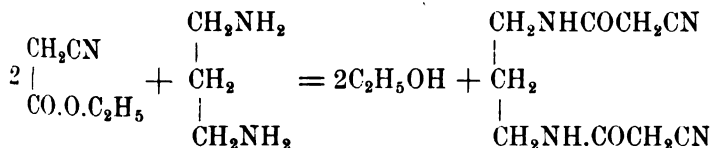
Gr. 0.0925 di sostanza svilupparono a 14° e 746^{mm} cm^3 21.9 di N, da cui:

$$N\ \% = 27.29.$$

Per la dicianacetiltrimetilendiamina si calcola:

$$N\ \% = 26.92.$$

Si forma per l'equazione:

$$2\begin{array}{l} CH_2CN \\ | \\ CO.O.C_2H_5 \end{array} + \begin{array}{l} CH_2NH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2NH_2 \end{array} = 2C_2H_5OH + \begin{array}{l} CH_2NHCOCH_2CN \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2NH.COCH_2CN \end{array}$$

Ossidata con permanganato potassico, sviluppa subito acido cianidrico e pare anche che si formi l'acido ossamico corrispondente, ma avendolo ottenuto in quantità molto piccola non potei ancora studiarlo. Su questo ed altri acidi ossamici riferirò in seguito.

Torino. Laboratorio di Chimica farm. e tossic. dell'Università. Marzo 1913.

Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica [1].

Nota di FRANCESCO SEVERI, a Padova.

Il punto di partenza delle mie ricerche sulla base per la totalità delle curve di una superficie algebrica F [2], è un criterio aritmetico per decidere se due equimultipli opportuni delle curve A, B, tracciate su F, sieno o no equivalenti (linearmente o algebricamente) [3]. E credo che, nella geometria algebrica, sia stato questo il primo esempio di deduzione d'una proprietà funzionale, da una proprietà puramente aritmetica.

Poco dopo CASTELNUOVO assegnò un utilissimo criterio aritmetico, per riconoscere se i gruppi di una data serie algebrica sopra una curva, sieno o no equivalenti [4]. Qui mi propongo di stabilire un'altra proposizione dello stesso tipo, dimostrando che:

Il numero u *dei punti uniti di una corrispondenza qualunque* T, *d'indici* (α, β) *e grado — necessariamente pari —* 2μ [5] *sopra una curva* C *di genere* p, *soddisfa sempre alla disuguaglianza*

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leq 4p(\alpha\beta - \mu),$$

(1) Nel comporre una seconda dimostrazione (geometrica) del teorema relativo alla determinazione delle corrispondenze tra i punti di una curva variabile in un sistema lineare, sopra una superficie — teorema di cui ho già esposto succintamente una prima dimostrazione (trascendente) nei " Comptes rendus „ (27 janvier 1913) — ho dovuto stabilire, come premessa, il teorema che qui pubblico a parte, perchè mal s'inquadrerebbe nel lavoro che sto preparando intorno all'accennato argomento.

(2) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (" Mathematische Annalen „, Bd. 52, 1906), p. 194.

(3) Precisamente si ha $lA \equiv lB$ o in particolare $lA \equiv lB$, allorquando i gradi virtuali di A, B uguaglino il numero (> 0) dei punti comuni ad A, B.

(4) CASTELNUOVO, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (" Rendiconti della R. Acc. dei Lincei „ (5), vol. XV, 1906), p. 341.

(5) " Grado „ di T è il grado virtuale della curva imagine di T sulla superficie F delle coppie di punti (ordinate) di C. Cfr., ad es., la mia Me-

il segno = valendo allora e solo allora che la corrispondenza T *è a valenza.*

Questa proprietà si collega tanto al mio criterio citato, quanto a quello di Castelnuovo. Anzi quest'ultimo criterio può esso pure considerarsi come un corollario della condizione aritmetica di dipendenza fra due curve di una superficie, giacchè, applicando appunto tale condizione ad una superficie con due fasci unisecantisi, si dimostra che " il grado di una corrispondenza (α, β) fra due curve — distinte o coincidenti — non supera mai $2\alpha\beta$ e che il limite $2\alpha\beta$ è raggiunto allora e solo allora che la corrispondenza sia a valenza zero ". Per passare da questa proposizione (equivalente in sostanza al criterio di Castelnuovo) al teorema sopra enunciato, occorre prima provare che " se un multiplo lT di una corrispondenza T fra i punti di C, possiede una valenza, anche T è a valenza ". Di questo fatto, stabilito geometricamente nel n. 3 di questa Nota, dò pure una dimostrazione trascendente al n. 4 (6).

1. Cominciamo a dimostrare di nuovo che:

Se sopra una curva C, *di genere* p, *si ha una serie* Σ (*irriducibile*) ∞^1 *di gruppi* G, *che sieno sottomultipli, secondo un certo intero* l, *di una stessa serie lineare, i gruppi* G *sono essi stessi equivalenti.*

Questa proposizione può considerarsi come un corollario del criterio di Castelnuovo (7). Dal punto di vista trascendente essa

---

moria, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (" Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino ", (2), t. 54, 1903). Quando T appartenga ad un sistema continuo di corrispondenze, il " grado " di T uguaglia il numero delle coppie comuni a due corrispondenze del sistema. La formola (15) [dovuta a De Franchis; cfr. *Sulla varietà delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (" Rendiconti del Circolo mat. di Palermo ", t. 17, 1903), n. 8], contenuta nel n. 12 della mia Memoria citata, mostra che *il grado d'una corrispondenza è necessariamente pari.*

(6) Dal criterio di Castelnuovo si deduce [Cfr. le mie *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (" Atti del R. Istituto Veneto ", t. 65, 1906), n. 4] che se lT ha la valenza $l\gamma$, T ha la valenza γ. Il teorema del testo dice di più: se lT ha la valenza γ', deve necessariamente risultare γ' multiplo di l.

(7) Ved. la mia Nota ultimamente citata, n. 4.

è pressochè immediata (8). Ci conviene tuttavia di esporne qui una diretta dimostrazione geometrica, volendo anche ottenere di nuovo, per altra via, il risultato di Castelnuovo.

Fissato su C un gruppo *non speciale* K, di p punti, la serie completa $|K+G|$ contiene ogni altro gruppo G' della serie Σ, e il residuo sarà *un* gruppo K' generalmente non speciale, poichè, quando G' tende a G, K' tende al gruppo non speciale K. Se il gruppo K' è indipendente dalla posizione di G' in Σ, sarà $G \equiv G'$ e il teorema risulterà dimostrato. Proviamo dunque assurda l'ipotesi che K' varii con G'. Se ciò avvenisse, il luogo dei gruppi K' sarebbe una serie Π, ∞^1, di gruppi, generalmente non speciali, di p punti. E poichè

$$lK' \equiv lK + lG - lG', \qquad lG \equiv lG',$$

risulterebbe $lK \equiv lK'$. La serie $|lK|$, di cui i gruppi K' sono sottomultipli secondo l, è una $g_{lp}^{(l-1)p}$ non speciale, semplice e tale che, mediante essa, la C può trasformarsi birazionalmente in una curva Γ di S_r $(r=(l-1)p)$ priva di punti multipli, sulla quale la serie corrispondente a $|lK|$ sia segata dagl'iperpiani (9). Continuando ad indicare su Γ con K, K' i gruppi imagini di K, K', avremo che gli ∞^1 gruppi lK' saranno staccati su Γ da un sistema ∞^1 di iperpiani, ciascuno dei quali conterrà gli S_{l-1} osculatori a C nei punti del gruppo K' relativo.

Detto P un punto del gruppo K, I l'iperpiano che stacca lK, K' un gruppo variabile ed I' l'iperpiano corrispondente, facciamo tendere I' ad I. Quando I' giunge infinitamente vicino ad I, lo S_{l-2} osculatore in P viene ad essere comune ad I e ad I', cosicchè la serie g_{lp}^1, che congiunge i gruppi equivalenti lK, lK', viene a contenere p punti $(l-1)$-pli fissi. Astraendo da questi, si ottiene una g_p^1 cui appartiene il gruppo K, che risulta pertanto speciale, contro il supposto.

È dunque assurda l'ipotesi fatta e si conclude in ogni caso $G \equiv G'$.

---

(8) Cfr. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard* (" Rend. del Circolo mat. di Palermo ", t. 21, 1906), n. 12.

(9) Ved. p. es. le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 173.

2. Passiamo ora a dimostrare che:

Una corrispondenza (α, β) *fra due curve — distinte o coincidenti — ha sempre il grado* $\nu \leq 2\alpha\beta$, *il segno* $=$ *valendo allora e solo allora che la corrispondenza sia a valenza zero* ([10]).

Dicasi F la superficie delle coppie di punti delle due curve C_1, C_2, di generi p_1, p_2, tra le quali intercede la data corrispondenza, e indicato con x un punto variabile su C_1 e con y un punto variabile su C_2, denotiamo con K_x (o K_y) le curve di F che rappresentano le coppie con un fissato x (o y) ([11]). Sia infine T la curva imagine della data corrispondenza e ν il suo grado. Volendo provare che $\nu \leq 2\alpha\beta$, dimostreremo assurda la ipotesi

$$\nu = 2\alpha\beta + 2k, \qquad (k > 0) \tag{1}$$ ([12]).

Detto ρ il genere virtuale di T, in quest'ipotesi viene anzitutto ([13]):

$$\rho = \beta(p_2 - 1) + \alpha(p_1 - 1) + \alpha\beta + k + 1.$$

Fissiamo un sistema lineare (semplice, almeno ∞^3) somma di due serie lineari g_n^r, g_m^s prese rispettivamente entro i fasci irrazionali $\{K_x\}$, $\{K_y\}$. Rispetto a questo sistema, T ha l'*ordine* $m\alpha + n\beta$ e quindi un multiplo λT sufficientemente alto di T, avrà l'ordine $\lambda(m\alpha + n\beta)$ maggiore di quello

$$2n(p_1 - 1) + 2m(p_2 - 1),$$

delle curve canoniche di F. Sicchè ogni curva — anche virtuale ([14]) — avente lo stesso ordine di λT, sarà non speciale. Ora,

---

([10]) Ricordo che una corrispondenza (α, β) fra due curve C_1, C_2, dicesi " a valenza zero " nel senso da C_1 a C_2, quando ai punti di C_1 rispondono in C_2 gruppi equivalenti di β punti. Si dimostra che se la corrispondenza è a valenza zero in un senso, lo è anche nel senso opposto. Cfr. Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (" Annali di Matematica ", (3), t. 12, 1905), n. 2.

([11]) Cfr. De-Franchis, loc. cit. e la mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, ecc. Per quanto segue, converrà tener presente il § 1 (II Parte) di questa mia Memoria.

([12]) Si ricordi che ν è pari.

([13]) Ved. la formola (15) al n. 12 della mia Memoria, *Sulle corrispondenze*, ecc.

([14]) Ved. la mia Nota, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica* (" Rendiconti del R. Istituto Lombardo ", (2), t. 38, 1905).

poichè λT ha gl'indici $\alpha' = \lambda\alpha$, $\beta' = \lambda\beta$ e il grado $\nu' = \lambda^2\nu$, la curva λT soddisfa alla condizione:

$$\nu' = 2\alpha'\beta' + 2\lambda^2 k$$

analoga alla (1).

Potremo quindi supporre, nelle considerazioni ulteriori, che le curve dello stesso ordine di T sieno non speciali (bastando eventualmente sostituire a T un suo multiplo abbastanza alto).

Ciò posto, costruiamo la curva virtuale

$$T_l = T + l\,(T - \alpha K_x - \beta K_y)$$

e indichiamo con μ_l, π_l il suo grado e il suo genere virtuali. A calcoli fatti viene:

$$\mu_l = \nu + 4kl + 2kl^2$$
$$\pi_l = \rho + 2kl + kl^2,$$

sicchè la dimensione virtuale della curva T_l, che ha lo stesso *ordine* di T, ed è quindi non speciale, è espressa da:

$$r_l = \mu_l - \pi_l + p_a + 1 = s + 2kl + kl^2,$$

in cui p_a è il genere aritmetico $(= p_1 p_2 - p_1 - p_2)$ di F ed s è un intero indipendente da l. Poichè per $l \geq l_0$, ove l_0 è un conveniente limite, risulta $r_l \geq 0$, per ogni valore di $l \geq l_0$, esisterà la curva T_l ([15]) ed il sistema lineare $|T_l|$ avrà la dimensione

$$R_l \geq r_l.$$

Ora, quando si fa crescere l, a partire da l_0, r_l cresce oltre ogni limite. Si arriva dunque alla conclusione che la dimensione di $|T_l|$, col crescere di l, può crescere indefinitamente. E questa conclusione è incompatibile col fatto che le curve dello stesso ordine di T si distribuiscano su F in un numero *finito* di sistemi continui. È dunque assurda l'ipotesi $k > 0$, ed è pertanto vero che

$$\nu \leq 2\alpha\beta.$$

([15]) Loc. ultimamente citato, n. 6.

Ci resta da provare che se $\nu = 2\alpha\beta$, la corrispondenza data è a valenza zero, cioè che la curva T appartiene al sistema lineare somma di una serie lineare g_β del fascio $\{K_y\}$ e di una serie lineare g_α di $\{K_x\}$.

Detta S una curva appartenente ad un tale sistema, il grado virtuale di S e il numero delle sue intersezioni con T, risultano evidentemente eguali al grado ν di T, cosicchè due equimultipli opportuni delle due curve T, S sono algebricamente equivalenti, ovvero, in simboli

$$\lambda T \equiv \lambda S \text{ (}^{16}\text{)}.$$

Se ora si osserva che il sistema continuo completo $\{\lambda S\}$ è formato dalla totalità dei sistemi lineari risultanti dalla somma di due serie lineari complete $g_{\lambda\alpha}$, $g_{\lambda\beta}$, prese rispettivamente in $\{K_x\}$ e $\{K_y\}$, si conclude che si può scegliere una S tale che risulti λT linearmente equivalente a λS:

$$\lambda T \equiv \lambda S.$$

Il che significa, in altri termini, che la corrispondenza di indici $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$, avente per imagine λT, è a valenza zero.

In virtù della proposizione del n. 1, ne segue che è a valenza zero anche la corrispondenza (α, β), di cui la precedente è multipla secondo λ.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Osservazione. — La disuguaglianza $\nu \leq 2\alpha\beta$ può esser sostituita coll'altra equivalente:

$$\rho \leq \alpha(p_1 - 1) + \beta(p_2 - 1) + \alpha\beta + 1,$$

che coincide, salvo le notazioni, colla formola (8) della Nota citata di Castelnuovo (17). Questa relazione alla sua volta, come

---

(16) Ved. la mia Memoria citata, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, n. 2.

(17) Si badi bene che in questa formola ρ è il genere *virtuale* della curva T, imagine della data corrispondenza. Se pertanto la formola stessa si vuol interpretare come una limitazione del genere *effettivo* ρ_0 di una curva cui appartengano due involuzioni di gradi α, β e di generi p_1, p_2, occorre togliere dal secondo membro il numero μ delle coppie comuni alle due involuzioni, μ essendo il numero dei punti doppi *equivalenti* all'eventuale gruppo dei punti multipli della curva T.

ha già avvertito lo stesso Castelnuovo, è equivalente al suo criterio aritmetico. Il ponte di passaggio è costituito dalla formola di ZEUTHEN.

3. Prima di stabilire la disuguaglianza che è oggetto principale della presente Nota, occorre premettere ancora la proposizione seguente:

Se il multiplo secondo l *d'una corrispondenza* (α, β) *fra i punti di una curva* C, *ha la valenza* γ, *risulta* γ *multiplo di* l, *e la data corrispondenza ha essa pure una valenza* $\left(=\frac{\gamma}{l}\right)$.

Nel seguito indicheremo indifferentemente con T la data corrispondenza e la sua curva imagine sulla superficie F, delle coppie ordinate dei punti di C. E quanto alla superficie F, conserveremo le notazioni del n° precedente, indicando inoltre con K la curva, unisecante le K_x e le K_y, imagine della corrispondenza identica.

Supposto che γ ($\gtrless 0$) non sia multiplo di l, indichiamo con θ il massimo comun divisore di l, γ. Dal fatto che è a valenza γ la corrispondenza lT, segue (n. 1) che la corrispondenza $\frac{l}{\theta} T$ è a valenza $\frac{\gamma}{\theta}$. Sicchè nulla ci vieta di supporre addirittura che i due interi l, γ, di cui si parla nell'enunciato del teorema, sieno primi fra loro. Esisteranno allora due altri interi (positivi o negativi), l_1, γ_1, tali che

$$l\gamma_1 - l_1\gamma = 1. \tag{2}$$

Consideriamo la curva, eventualmente virtuale,

$$T_1 = l_1 T + \gamma_1 K.$$

L'ipotesi che lT abbia la valenza γ si traduce nella equivalenza algebrica:

$$lT + \gamma K \equiv (l\alpha + \gamma) K_x + (l\beta + \gamma) K_y \text{ [18]}.$$

Confrontando questa colla precedente, i cui due membri sieno stati moltiplicati preventivamente per l, si ottiene, in virtù della (2),

$$lT_1 - K \equiv l_1 (l\alpha + \gamma) K_x + l_1 (l\beta + \gamma) K_y.$$

[18] *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, ecc. (cit.), n. 19.

Se pertanto la curva $l_1 T + \gamma_1 K$ è effettiva, la corrispondenza T_1, da essa rappresentata, sarà tale che $l T_1$ avrà la valenza -1. Che se poi non esistesse la curva $l_1 T + \gamma_1 K$, esisterebbe tuttavia la curva $l_1 T + \gamma_1 K + S$ ove S è una corrispondenza (curva) a valenza zero, d'indici (α', β') sufficientemente alti; e ponendo allora

$$T_1 = l_1 T + \gamma_1 K + S,$$

si avrebbe similmente

$$l T_1 - K \equiv [l_1 (l\alpha + \gamma) + l\alpha'] K_x + [l_1 (l\beta + \gamma) + l\beta'] K_y,$$

e quindi si potrebbe anche in tal caso affermare che il multiplo secondo l della corrispondenza effettiva T_1, ha la valenza -1.

Ciò posto, sieno x_i, x_i' due punti qualunque di C e Y_i, Y_i' i gruppi dei β_1 punti y corrispondenti rispettivamente ad x_i, x_i' nella T_1 (della quale indichiamo con α_1, β_1 gl'indici), cosicchè sarà:

$$l Y_i - x_i \equiv l Y_i' - x_i'.$$

Facendo $i = 1, 2, \ldots, p$ (p è il genere di C) e sommando a membro a membro le equivalenze (lineari) ottenute, avremo:

$$l (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p) - X \equiv l (Y_1' + Y_2' + \ldots + Y_p') - X',$$

ove si è posto:

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_p, \qquad X' = x_1' + x_2' + \ldots + x_p'.$$

Fissata una generica serie lineare $g^{\beta_1 p}_{\beta_1 p + p}$, per ogni posizione del gruppo X nella C, potremo considerare il residuo Z rispetto alla $g^{\beta_1 p}_{\beta_1 p + p}$, del gruppo di $\beta_1 p$ punti, $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p$, corrispondente ad X mediante T_1. In questo modo dalla T_1 prenderà origine una corrispondenza S tra i gruppi di p punti di C, ad ogni X corrispondendo un solo Z e ad ogni Z corrispondendo un certo numero δ di gruppi X.

Dalla equivalenza lineare precedente, tenendo conto che:

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p + Z \equiv Y_1' + X_2' + \ldots + Y_p' + Z',$$

si trae facilmente la relazione:

$$lZ + X \equiv lZ' + X',$$

che lega due coppie (X, Z), (X', Z') di gruppi di p punti omologhi nella S.

Sia, se è possibile, $l > 1$. Scelta una generica $g_{lp}^{(l-1)p}$ e presi due (distinti) dei suoi l^{2p} gruppi dotati di p punti l-pli, indichiamo con Z, Z' i gruppi di p punti che, ripetuti l volte, costituiscono quei due gruppi equivalenti di lp punti. Se X (od X') è uno dei gruppi omologhi del suddetto Z (o rispettivamente Z') nella S^{-1}, a causa dell'ultima relazione ottenuta, poichè $lZ \equiv lZ'$, sarà $X \equiv X'$. Ma dal momento che la $g_{lp}^{(l-1)p}$, e quindi Z, sono stati scelti genericamente, il gruppo X, che dipende da p parametri (tanti quanti quelli da cui dipende Z), non può essere speciale. Ne deriva che X coincide con X' e quindi Z con Z', contro il supposto. È quindi assurda l'ipotesi $l > 1$. Si conclude che $l = 1$.

Questa conclusione è relativa al caso in cui gl'interi l, γ, di cui si parla nell'enunciato del teorema, sien ridotti ad esser primi fra loro. Ciò significa che, se $l > 1$, γ deve necessariamente esser multiplo di l.

4. Il fatto stabilito ora per via geometrica, si dimostra assai facilmente per via trascendente.

Sieno $u_1, u_2, \ldots, u_p$ i p integrali normali di 1ª specie di C, e sieno $(\sigma_1, \sigma_{p+1}), \ldots, (\sigma_p, \sigma_{2p})$ le p retrosezioni riemanniane, che dànno luogo ai periodi normali degli u. E precisamente l'integrale u_k abbia il periodo 1 lungo σ_k, il periodo τ_{ks} $(s = 1, 2, \ldots, p)$ lungo σ_{p+s} e tutti gli altri periodi nulli. Per ipotesi si ha:

$$l \sum_{i=1}^{\beta} u_k(y^i) + \gamma u_k(x) \equiv \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{3}$$

ove le π_k son costanti indipendenti da x e $y', y'', \ldots, y^\beta$ i β punti y omologhi di x in T. Quando il punto x descrive il ciclo σ_r $(r = 1, 2, \ldots, p)$, $\sum u_k(y^i)$ aumenta di

$$a_{kr} + \sum_{s=1}^{p} b_{sr} \tau_{ks} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

in cui le a_{kr}, b_{sr} son interi.

E poichè $u_k(x)$ aumenta di $\gamma \epsilon_r$, ove $\epsilon_r = 1$ per $r = k$ ed $\epsilon_r = 0$ per $r \neq k$, avremo:

$$l a_{kr} + l \sum_{s=1}^{p} b_{sr} \tau_{ks} + \gamma \epsilon_r = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Da queste relazioni seguono, com'è noto [19], le altre:

$$(4) \qquad l a_{kr} + \gamma \epsilon_r = 0\,, \qquad (5)\ b_{sr} = 0 \qquad (k, r = 1, 2, \ldots, p).$$

Dalle (4) per $k = r$, risulta:

$$\gamma = -l a_{rr} \qquad (r = 1, 2, \ldots, p)$$

e per $k \neq r$:

$$a_{kr} = 0.$$

E ponendo $-a_{rr} = \gamma' \left(= \frac{\gamma}{l}\right)$, se ne trae subito:

$$\sum_{i=1}^{\beta} u_k(y^i) + \gamma' u_k(x) \equiv \lambda_k\,,$$

ove le λ_k son costanti indipendenti da x. Ciò prova che T ha la valenza $\gamma' = \frac{\gamma}{l}$.

5. Stabiliamo infine il criterio aritmetico enunciato nella prefazione alla presente Nota.

Detto u il numero dei punti uniti di una corrispondenza qualunque T, di indici (α, β), della curva C, e conservando per tutto il resto le notazioni del n. 3, fissiamo l'attenzione sulla curva

$$2pT + cK\,,$$

ove si è posto $c = u - \alpha - \beta$. E supponiamo dapprima che questa curva sia *effettiva* (il che accade sempre quando $c \geq 0$). Essa taglia una K_x in $2p\beta + c$ punti ed una K_y in $2p\alpha + c$ punti. Il suo grado virtuale η, in virtù del teorema del n. 2, soddisfarà pertanto alla disuguaglianza:

$$(6) \qquad \eta \leq 2(2p\alpha + c)(2p\beta + c).$$

---

[19] Ved. KLEIN-FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen* (Leipzig, Teubner, 1892), Bd. II, p. 518 e seguenti.

Ma detto $\nu\,(=2\mu)$ il grado virtuale di T si ha:

$$\eta = 4p^2\nu - 2c^2(p-1) + 4puc\,,$$

perchè la curva K ha il grado virtuale $-2(p-1)$ ([20]); dunque:

$$2p^2\nu - c^2(p-1) + 2puc \leq (2p\alpha + c)\,(2p\beta + c).$$

Sviluppando e riducendo viene:

$$c^2 \leq 4p\,(\alpha\beta - \mu). \tag{7}$$

Se nella (7) vale il segno $=$, anche nella (6) vale il segno $=$ e la corrispondenza effettiva $2pT + cK$ è a valenza zero (n. 2). Ciò significa che la corrispondenza $2pT$ è a valenza c e quindi (n. 3) c è divisibile per $2p$ e la corrispondenza T risulta a valenza $\gamma = \frac{c}{2p}$.

Tutto questo vale nell'ipotesi che la curva $2pT + cK$ sia effettiva. Se $2pT + cK$ è una curva virtuale, si potrà determinare una corrispondenza a valenza zero T_0 d'indici (α', β') così alti, che esista la curva $2pS + cK$, essendo $S = T + T_0$. Detti α_0, β_0, c_0, μ_0 i caratteri di S analoghi ai caratteri α, β, c, μ di T, applicando il procedimento esposto, si avrà:

$$c_0^2 \leq 4p\,(\alpha_0\beta_0 - \mu_0). \tag{8}$$

Ma:

$$c_0 = c\,, \qquad \alpha_0\beta_0 = (\alpha + \alpha')\,(\beta + \beta')$$
$$2\mu_0 = 2\mu + 2\alpha'\beta' + 2\,[TT_0]\,,$$

ove $[TT_0]$ denota il numero dei punti comuni alle curve T, T_0. E poichè:

$$T_0 \equiv \alpha' K_x + \beta' K_y\,,$$

così si trae:

$$[TT_0] = \alpha'\,[K_x T] + \beta'\,[K_y T] = \alpha'\beta + \beta'\alpha$$

([20]) Ponendo infatti nella formola (15) più volte citata della mia Memoria, *Sulle corrispondenze*, ecc., $p = p_1 = p_2$, $\rho = p$, $\alpha = \beta = 1$, si trova il valore $-2(p-1)$ del grado virtuale di K.

e quindi:

$$\mu_0 = \mu + \alpha'\beta' + \alpha'\beta + \beta'\alpha .$$

Ne deriva che:

$$\alpha_0\beta_0 - \mu_0 = \alpha\beta - \mu .$$

La (8) allora si riduce senz'altro alla (7).

Che se poi nella (8) — ossia nella (7) — vale il segno $=$, il grado virtuale η_0 di $2pS + c_0K$ soddisfarà alla relazione:

$$\eta_0 = 2\,(2p\alpha_0 + c_0)\,(2p\beta_0 + c_0)$$

e la corrispondenza $2pS + c_0K$ sarà pertanto (n. 2) a valenza zero, ossia la corrispondenza $2pS$ avrà la valenza $c_0 = c$. Ne deriva (n. 3) che c è divisibile per $2p$ e che S ha la valenza $\gamma = \frac{c}{2p}$ e quindi anche T ha la valenza γ.

Si giunge pertanto in ogni caso alla disuguaglianza:

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leq 4p\,(\alpha\beta - \mu)$$

il segno $=$ valendo allora e solo allora che la corrispondenza data T *è a valenza* $\left(= \frac{u - \alpha - \beta}{2p}\right)$.

Ed è precisamente questo il risultato definitivo cui miravamo.

Padova, 8 marzo 1913.

Nel momento di licenziare le bozze di stampa, mi accorgo che *la disuguaglianza*:

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leq 4p\,(\alpha\beta - \mu),$$

che intercede fra i caratteri T della corrispondenza di cui sopra si parla, *si può far derivare anche dai risultati trascendenti di* HURWITZ *sulla teoria delle corrispondenze* (Math. Annalen, Bd. 28 e Bd. 32) [21]. Ricordiamo che, detti $u_1, u_2, \ldots, u_p$ i p inte-

[21] Comunque a me interessava [ved. la nota [1]] di pervenire al risultato per via geometrica, la quale del resto può apparire a taluno più luminosa.

grali normali di 1ª specie appartenenti a C e τ_{ki} i periodi normali ($\tau_{ki} = \tau_{ik}$) di questi integrali (cfr. col n. 4), una qualunque corrispondenza $T(\alpha, \beta)$, fra i punti di C, vien rappresentata da relazioni del tipo:

$$\sum_{r=1}^{\beta} u_k(y^r) \equiv \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

ove le π sono costanti indipendenti dalla posizione di x su C, ed $y', y'', \ldots, y^{\beta}$ sono i β punti y corrispondenti ad x mediante T.

Si hanno inoltre le relazioni:

$$\begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki} \\ \sum_i \pi_{ki}\, \tau_{il} &= H_{kl} + \sum_i G_{il}\, \tau_{ki} \end{aligned} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p),$$

ove le h, g, H, G son numeri interi, *caratteristici* della data corrispondenza. Avendosi un'altra corrispondenza $T'(\alpha', \beta')$, il numero delle coppie x, y comuni a T, T', è espresso da:

$$\text{(9)} \qquad \alpha\beta' + \alpha'\beta - \sum_{i,k} [h_{ik}\, k'_{ki} + g_{ik}\, H_{ki}' + H_{ik}\, g_{ki}' + G_{ik} G_{ki}'],$$

ove h', g', H', G' sono gl'interi caratteristici di T'^{-1}.

Se pertanto la T appartiene ad un sistema continuo di corrispondenze analoghe, alle quali spettano evidentemente gl'interi caratteristici medesimi inerenti a T, il numero delle coppie comuni a due corrispondenze di un tal sistema, cioè il " grado virtuale „ 2μ di T, sarà dato dalla formola (9), ove si ponga $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e si prendano per h', g', H', G' gl'interi caratteristici di T^{-1}, che, com'è noto, son dati da:

$$h_{kl}' = G_{lk}, \quad g_{il}' = -g_{li}, \quad H_{kl}' = -H_{lk}, \quad G_{il}' = h_{li}.$$

Sicchè viene:

$$\text{(10)} \qquad 2\mu = 2\alpha\beta - 2\sum_{i,k} (G_{ik}\, h_{ik} - g_{ik}\, H_{ik}).$$

Questa relazione vale anche quando T sia una corrispondenza isolata. Detta infatti S una corrispondenza (α', β') a va-

lenza zero, tale che, sulla superficie F delle coppie ordinate dei punti di C, il sistema lineare $|T+S|$ sia infinito e irriducibile, il grado virtuale di $|T+S|$ sarà espresso da:

$$2\mu + 2\alpha'\beta' + 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta),$$

giacchè $2\alpha'\beta'$ è il grado virtuale di $S\,(\equiv \alpha' K_x + \beta' K_y)$ ed $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ è il numero delle coppie comuni alle corrispondenze T, S, cioè il numero dei punti comuni alle curve T, S su F. D'altra parte ad ogni corrispondenza del sistema lineare $|T+S|$ — o più generalmente del sistema continuo $\}T+S\{$ — spettano i medesimi interi h, g, H, G, che son relativi a T, perchè gl'interi caratteristici di S son tutti nulli.

Applicando quindi la (10) ad una corrispondenza irriducibile del sistema continuo $\}T+S\{$, la quale è d'indici $(\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta')$, avremo:

$$2\mu + 2\alpha'\beta' + 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = 2(\alpha+\alpha')(\beta+\beta') - \\ - 2\sum_{i,k}(G_{ik}h_{ik} - g_{ik}H_{ik}).$$

Facendo le riduzioni, questa formula diventa la (10), che vale dunque in ogni caso.

Ricordando la disuguaglianza:

$$4p\sum_{i,k}(G_{ik}h_{ik} - g_{ik}H_{ik}) > [\sum_k (h_{kk} + G_{kk})]^2,$$

soddisfatta sempre che T *non sia a valenza* (Hurwitz, § 11 della Memoria nei " Math. Ann. „, 28), e la formola:

$$u = \alpha + \beta - \sum_k (h_{kk} + G_{kk}), \tag{11}$$

che dà il numero u dei punti uniti di T, viene quindi, mediante la (10):

$$4p(\alpha\beta - \mu) > (u - \alpha - \beta)^2.$$

Che se invece T ha la valenza γ, cioè se tutte le h, g, H, G son nulle, eccezione fatta per le h_{kk}, G_{kk}, che sono uguali a $-\gamma$, la (10) porge:

$$\mu = \alpha\beta - \gamma^2 p$$

e la (11):

$$(u - \alpha - \beta)^2 = 4\gamma^2 p,$$

cosicchè si ha:

$$4p(\alpha\beta - \mu) = (u - \alpha - \beta)^2.$$

E si giunge pertanto al criterio aritmetico stabilito geometricamente in questa Nota.

Aggiungeremo ancora un'osservazione, circa un altro significato geometrico della differenza $\alpha\beta - \mu$.

Chiamiamo *corrispondenza complementare* R di T, come corrispondenza d'indici (α', p), che faccia passare da un x generico ad un gruppo *non speciale* di p punti y, e inoltre tale che $T + R$ sia a valenza zero. La R si ottiene fissando una $g^p_{\beta+p}$ di C e associando ad ogni x il residuo, rispetto alla $g^p_{\beta+p}$ del gruppo dei β punti y corrispondenti ad x nella T. *Una* corrispondenza complementare di T è rappresentata dalle relazioni:

$$\sum_{r=1}^{p} u_k(y^r) \equiv -\sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\, u_i(x) + \lambda_k,$$

cioè essa ha come numeri caratteristici quelli stessi di T, ma col segno cambiato. Al variare della λ_k si ottengono tutte le ∞^p corrispondenze complementari di T. L'indice α' di R è espresso, come è provato in HURWITZ, da:

$$\alpha' = \sum_{i,k} (G_{ik} h_{ik} - g_{ik} H_{ik}).$$

Si ha quindi, in virtù della (10):

$$\alpha\beta - \mu = \alpha',$$

cioè:

Il primo indice della corrispondenza complementare di una data corrispondenza (α, β), *di grado virtuale* 2μ, *uguaglia* $\alpha\beta - \mu$.

Padova, 10 aprile 1913.

Su alcuni derivati del cicloesanone e dei tre metilcicloesanoni.

Nota del Dr. VINCENZO SQUINTANI.

In una precedente Nota (1) furono esposti i risultati di esperienze eseguite in questo laboratorio dal prof. Guareschi sulle reazioni di alcuni chetoni ciclici con l'etere cianacetico.

Considerando i prodotti derivatine, sia riguardo al loro modo di formazione, sia riguardo alla configurazione del loro complesso molecolare, mi è sembrato che l'estendere tali esperienze ad altri chetoni ciclici, e specialmente agli isomeri dei loro etil- e metil-derivati, presentasse interesse anche per il fatto che nelle reazioni di questi chetoni si poteva studiare quale influenza eserciti la presenza o la posizione di un gruppo sostituente, quale il metile, l'etile, ecc., sull'attitudine a dare, o meno, un dato prodotto.

Delle esperienze che, dietro consiglio del prof. Guareschi, ho eseguito a questo fine, riferisco qui brevemente.

I.

Derivati del cicloesanone.

*N-metil*β-*pentametilen*ββ'*dicianglutarimide.*

Facendo reagire cm^3 10.5 di cicloesanone (1 molecola), con cm^3 23 di etere cianacetico (2 mol.), e con cm^3 100 di una soluzione di metilammina al 10 % in alcool si ha, entro una mezz'ora, indizio di reazione sia dal lieve riscaldamento del miscuglio, sia dalla colorazione gialla che esso assume e che va poi intensificandosi. Ho constatato che la reazione fra i suddetti composti avviene lentamente e che giova il riscaldare il miscuglio a 30°-35°.

(1) *Alcuni nuovi derivati dei cicloesanoni*, " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1911, vol. XLVI.

In capo a 24 ore si ha un liquido di un bel colore giallo-oro, viscoso, leggermente fluorescente e che tiene sospesi alcuni fiocchetti di sostanza cristallina, bianca.

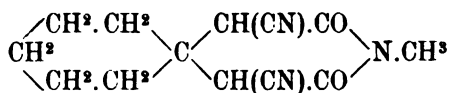
Questo liquido, diluito con 3-4 volumi di acqua, sbattuto con etere ed acidificato con acido cloridrico, lascia precipitare una sostanza bianca, cristallina, che non si depone completamente se non entro 12-20 ore. Il composto così ottenuto, anche se lavato con acqua, trattiene le impurezze dell'acqua madre, ha odore del chetone ed è appiccicaticcio; si può ottenere puro mediante ripetute cristallizzazioni dall'alcool a 60°. Si ha così una sostanza che fonde a 175°, e che all'analisi dette i seguenti risultati:

I. Gr. 0.2080 di sostanza dettero 0.4842 di CO^2 e 0.1218 di H^2O.
II. „ 0.1061 „ „ cm^3 16 di N a 20° e a 742^{mm}, corr. = cm^3 14.3.

da cui

		trovato I	trovato II	calc. per $C^{13}H^{15}N^3O^2$
C	=	63.50	—	63.67
H	=	6.45	—	6.12
N	=	—	16.85	17.14

Tenuto conto della composizione, del modo di formazione e delle sue proprietà, questo composto è, senza dubbio, la *N-metil*ββ*pentametilen*ββ'*dicianglutarimide*

$$CH^2\begin{matrix}\diagup CH^2.CH^2\diagdown \\ \diagdown CH^2.CH^2\diagup\end{matrix}C\begin{matrix}\diagup CH(CN).CO\diagdown \\ \diagdown CH(CN).CO\diagup\end{matrix}N.CH^3$$

Questa imide è pressochè insolubile in acqua a freddo, poco solubile a caldo, molto solubile in alcool; dà prodotti resinosi quando si cerca di ottenerla dalle sue soluzioni mediante concentrazione; negli alcali si scioglie.

La sua soluzione acquosa, fatta a caldo e neutralizzata con ammoniaca, dà col solfato di rame un precipitato celestognolo, e col nitrato d'argento un precipitato bianco, fioccoso.

N-metil3.3pentametilen1.2diciantrimetilencarbonimide

$$CH^2 \begin{cases} CH^2.CH^2 \\ CH^2.CH^2 \end{cases} C \begin{cases} C(CN).CO \\ | \\ C(CN).CO \end{cases} N.CH^3$$

Sbattendo in un cilindro l'imide che fonde a 175°, sospesa in acqua, insieme con acqua di bromo, si vede che questo viene assorbito lasciando incolori tanto il prodotto solido quanto la soluzione. Aggiungendo bromo fino a che il liquido ne resti leggermente colorato per un lieve eccesso, cioè a reazione compiuta, si constata che il bromo consumato è nella proporzione di quattro atomi per una molecola della imide. Già da questo dato si può dedurre che anche in questo caso si ha una reazione analoga a quella già ottenuta colla ββpentametilenββ'diclanglutarimide, e che due degli atomi di bromo consumati sono andati a sostituire due atomi di idrogeno nella imide dando luogo alla formazione del prodotto bromurato seguente:

$$CH^2 \begin{cases} CH^2.CH^2 \\ CH^2.CH^2 \end{cases} C \begin{cases} CBr(CN).CO \\ CBr(CN).CO \end{cases} N.CH^3$$

Il composto bromurato è bianco, fioccoso, poco solubile in acqua, a freddo; a caldo mette in libertà bromo.

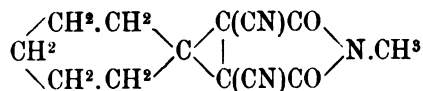
L'eliminazione completa del bromo si ottiene abbastanza facilmente trattando il prodotto bromurato con una soluzione di acido formico al 10 % in alcool a 90° e facendo bollire per alcuni minuti.

Per gr. 3.5 di sostanza furono usati cm³ 90 di soluzione di acido formico. Dopo circa cinque minuti di ebullizione tutto il prodotto è sciolto e per raffreddamento di questa soluzione si ottiene una sostanza bianca, ben cristallizzata, che non contiene affatto bromo, e fonde a 222°. Analizzata, dette i seguenti valori:

Gr. 0.1036 di sostanza dettero 0.2442 di CO^2 e 0.0527 di H^2O da cui

	trovato	calcolato per $C^{13}H^{13}N^3O^2$
C =	64.28	64.19
H =	5.65	5.34

che dimostrano come, in seguito alla bromurazione ed alla successiva eliminazione del bromo, si venga ad avere un prodotto che differisce dal composto primitivo per due atomi di idrogeno in meno. Ed essendo evidente che l'idrogeno eliminato era quello facente parte del gruppo $=C\begin{smallmatrix}\diagup CH\\ \diagdown CH\end{smallmatrix}$ ne viene che in questo nuovo prodotto si avrà l'anello trimetilenico $=C\begin{smallmatrix}\diagup C= \\ \; | \\ \diagdown C=\end{smallmatrix}$, vale a dire, che la formula di costituzione del composto sarà la seguente:

$$CH^2\begin{smallmatrix}\diagup CH^2.CH^2 \diagdown \\ \\ \diagdown CH^2.CH^2 \diagup\end{smallmatrix}C\begin{smallmatrix}\diagup C(CN)CO \diagdown \\ | \\ \diagdown C(CN)CO \diagup\end{smallmatrix}N.CH^3$$

II.

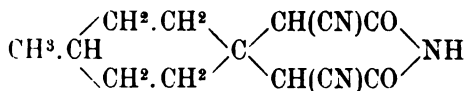
Ho studiato inoltre i due isomeri para- ed orto-metilcicloesanone ed i composti che derivano dalla loro reazione coll'ammoniaca e colla metilammina per poter fare il confronto coi derivati corrispondenti del terzo isomero: il metametilcicloesanone.

Metilcicloesanone 1.4.

Dalla reazione del p. metilcicloesanone con etere cianacetico ed ammoniaca alcoolica, alla temp. di 30°-35° si ottiene un prodotto fioccoso, leggero, colorato in giallo che si depone completamente entro 12 ore, formando una poltiglia.

Il composto ammoniacale così ottenuto si scioglie in acqua, scaldato perde ammoniaca, e precipita dalla sua soluzione per azione di un acido. La sostanza che deriva dalla scomposizione del sale ammoniacale per azione dell'acido cloridrico diluito, lavata, e cristallizzata due volte dall'acqua o dall'alcool, è bianca, cristallina, e fonde a 210°-211°; essa è la

1.4*metilpentametilen*ββ'*dicianglutarimide* corrispondente alla formula

$$CH^3.CH\begin{smallmatrix}\diagup CH^2.CH^2 \diagdown \\ \\ \diagdown CH^2.CH^2 \diagup\end{smallmatrix}C\begin{smallmatrix}\diagup CH(CN)CO \diagdown \\ \\ \diagdown CH(CN)CO \diagup\end{smallmatrix}NH$$

Infatti i dati analitici ottenuti per questo prodotto sono i seguenti:

I. Gr. 0.1975 di sost. dettero 0.4571 di CO^2 e 0.2183 di H^2O
II. „ 0.2356 „ „ 0.5468 „ „ 0.1362 „
III. „ 0.1601 „ „ cm^3 25 di N a 20° e 734 mm., corr.: cm^3 25

da cui

	trovato		calc. per $C^{13}H^{15}N^3O^2$
C =	(I) 63.11	(II) 63.28	63.67
H =	—	(II) 6.42	6.12
N =	(III) 17.34	—	17.14

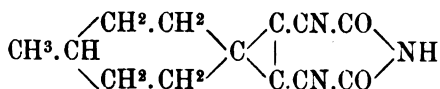
Questa imide è pochissimo solubile in acqua a freddo, a caldo invece la sostanza si trasforma da prima in una massa molto rigonfiata, leggiera, che si scioglie; la soluzione ha reazione acida. Nell'alcool è solubile anche a freddo.

Sale di rame. — Se nella soluzione acquosa del sale ammoniacale ottenuto nella reazione col metilcicloesanone, si fa cadere una soluzione diluita di un sale di rame — meglio il solfato — si forma un precipitato polverulento, di colore da prima marrone, poi giallo-verde, mentre il liquido sovrastante rimane limpido e colorato in verde chiaro.

Da gr. 1 del composto ammoniacale furono ottenuti gr. 0,5 di sale di rame il quale resta in parte disciolto nell'acqua anche a freddo; a caldo è molto solubile. Raccolto, lavato e posto in stufa dopo previo essiccamento all'aria, assume verso i 120° una colorazione quasi rossiccia, che scompare rapidamente coll'abbassamento della temperatura.

Dalla imide già descritta che fonde a 210°-211° si può ottenere abbastanza facilmente il composto bibromurato e da questo si può eliminare il bromo per riscaldamento in presenza di acido formico, in modo da avere la

1.4*metilpentametilen*1.2*diciantrimetilendicarbonimide*

$$CH^3.CH \begin{matrix} \diagup CH^2.CH^2 \diagdown \\ \\ \diagdown CH^2.CH^2 \diagup \end{matrix} C \begin{matrix} \diagup C.CN.CO \diagdown \\ | \\ \diagdown C.CN.CO \diagup \end{matrix} NH$$

Il prodotto da me ottenuto, analizzato, dette i seguenti valori:

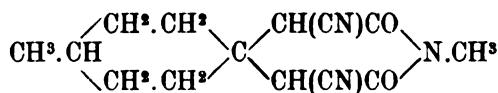
Gr. 0.1203 di sostanza dettero 0.2813 di CO^2 e 0.0614 di H^2O

da cui

	trovato	calc. per $C^{13}H^{13}N^3O^2$
C =	63.78	64.19
H =	5.66	5.35

Conviene ricristallizzare dall'alcool il prodotto della sbromurazione onde averlo puro: questo si presenta con aspetto cristallino, è poco solubile in acqua anche a caldo e fonde a 207°-208°.

N-metilderivato — Reazione colla metilammina.

$$CH^3.CH\begin{matrix} \diagup CH^2.CH^2 \diagdown \\ \diagdown CH^2.CH^2 \diagup \end{matrix}C\begin{matrix} \diagup CH(CN)CO \diagdown \\ \diagdown CH(CN)CO \diagup \end{matrix}N.CH^3$$

La preparazione di questo composto differisce da quella della imide per il fatto che in questo caso all'ammoniaca si sostituisce una soluzione alcoolica di metilammina. La reazione però avviene più lentamente ed in modo meno completo; si formano dei prodotti secondari, gialli, viscosi che si possono eliminare mediante ripetute cristallizzazioni dall'alcool. La sostanza pura fonde a 181°-182°.

I. Gr. 0.1062 di sostanza dettero cm^3 15.4 di N a 18° e 735^{mm}, corr. = cm^3 14.2.

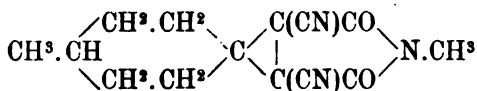
II. Gr. 0.1468 di sostanza dettero 0.3480 di CO^2 e 0.0936 di H^2O cioè

	trovato	calc. per $C^{14}H^{17}N^3O^2$
C =	64.64	64.86
H =	7.08	6.56
N =	16.48	16.21

Il rendimento di questa preparazione fu scarso anche quando si cercò di modificare le condizioni di temperatura e di concen-

trazione dei singoli componenti; concentrando le acque madri a bagno maria si ha, anche a lieve temperatura, la formazione di sostanze resinose, brune, dalle quali non è possibile di separare alcuna sostanza cristallizzata. Per concentrazione nel moto, a temp. ordinaria, la decomposizione è meno profonda, ma si ottiene un miscuglio di prodotti difficilmente separabili.

Per sostituzione di due atomi di idrogeno con due atomi di bromo nel composto che fonde a 181°-182° (derivato del 1.4metilcicloesanone) e per successiva sbromurazione si ha anche in questo caso la formazione dell'anello trimetilenico:

$$CH^3.CH\begin{cases}CH^2.CH^2\\CH^2.CH^2\end{cases}C\begin{cases}C(CN)CO\\|\\C(CN)CO\end{cases}N.CH^3$$

Per ottenere questo prodotto si operò come segue: Gr. 1.5 del composto che fonde a 181°-182° fu sbattuto con acqua di bromo, in un cilindro, fino a saturazione. Si ebbero così gr. 2.05 di composto bromurato, bianco, cristallino, che fondeva a 137°.

Il metodo di riduzione di questa sostanza fu diverso da quello usato per il corrispondente derivato del cicloesanone.

Ho trovato infatti più opportuno in questo caso di ridurre il composto bromurato mediante una soluzione acquosa di acido solforoso. A questo scopo i gr. 2.05, di cui sopra, furono agitati ancora in un cilindro, insieme con cm^3 20 di soluzione di acido solforoso. Il composto ridotto raccolto su filtro, lavato con acqua e seccato all'aria pesava gr. 1.3; una piccola parte però si era decomposta e fu perciò necessario di ricristallizzare il prodotto che puro fonde a 182°-183°, cioè con un solo grado di differenza dal prodotto primitivo.

Gr. 0.1127 di sostanza dettero 0.2691 di CO^2 e 0.0649 di H^2O cioè

	trovato	calc. per $C^{14}H^{15}N^3O^2$
C =	65.11	65.36
H =	6.39	5.83

La sostanza stenta a bruciare completamente e convenne perciò mescolarla con ossido di rame in polvere.

Metilcicloesanone 1.2.

Mediante reazioni analoghe si ottennero anche col 1.2metilcicloesanone prodotti corrispondenti a quelli avuti coll'isomero1.4,

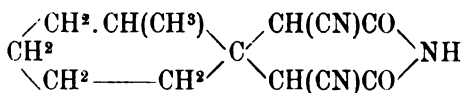
Da gr. 22.5 di 1.2metilcicloesanone fatti reagire con ammoniaca alcoolica e con etere cianacetico ebbi gr. 3.8 del sale ammoniacale che fonde a 165°. In una porzione di questo sale determinai l'ammoniaca spostandola con latte di magnesia, in corrente di vapore, e pesandola come cloroplatinato ammonico.

Gr. 0.5861 di sostanza dettero gr. 0.4889 di $(NH^4)^2PtCl^6$
da cui

		trovato	calc. per $C^{13}H^{18}N^4O^2$
NH^3	=	6.39	6.48

Il rimanente composto fu sciolto in acqua e precipitato con acido cloridrico. La sostanza che si forma in questo modo e che si depone cristallizzata dalla soluzione acida è la

1.2 *metilpentametilen* ββ'*dicianglutarimide*

```
   ╱CH².CH(CH³)╲    ╱CH(CN)CO╲
CH²             C              NH
   ╲CH²────CH² ╱    ╲CH(CN)CO╱
```

Fonde a 210°, è bianchissima, poco solubile in acqua anche a caldo, solubile in alcool.

Di questa gr. 0.1500 dettero 0.3497 di CO^2 e 0.0801 di H^2O e gr. 0.1058 dettero cm³ 16 di N a 19.5° e a 749 mm., corretto = cm³ 14.51

cioè

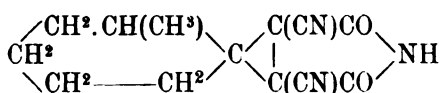
		trovato	calc. per $C^{13}H^{15}N^3O^2$
C	=	63.57	63.67
H	=	5.93	6.12
N	=	17.15	17.14

Sale di rame. — Trattando la soluzione acquosa del sale di ammonio che fonde a 165° con una soluzione di solfato di rame si ottiene un composto che al momento di formazione ha

un colore rosso-ruggine e che poi diventa color verde-azzurro. Il rendimento è maggiore di quello ottenuto col 1.4metilcicloesanone nelle identiche condizioni; il prodotto è meno solubile e più stabile all'azione del calore.

Per riduzione dell' imide mediante il processo seguito per il derivato dell'altro isomero 1.4, si ha la

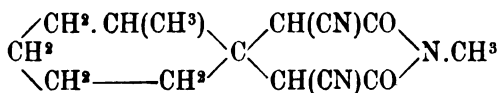
1.2 *pentametilen* 1.2 *diciantrimetilendicarbonimide*

```
   /CH².CH(CH³)\     /C(CN)CO\
CH²             >C<   |        >NH
   \CH²-----CH²/     \C(CN)CO/
```

sostanza bianca micro-cristallina, molto solubile nell'alcool anche a freddo, pochissimo nell'acqua; fonde a 235°-236°.

Gr. 0.1078 di sostanza dettero 0.2514 di CO^2 e 0.05311 di H^2O

	trovato	calc. per $C^{13}H^{13}N^3O^2$
C =	63.59	64.19
H =	5.47	5.35

N-metil derivato. Reazione colla metilammina.

```
   /CH².CH(CH³)\     /CH(CN)CO\
CH²             >C<            >N.CH³
   \CH²-----CH²/     \CH(CN)CO/
```

Anche il 1.2metilcicloesanone reagisce con un miscuglio di metilammina ed etere cianacetico in presenza di alcool: si ha un leggiero sviluppo di calore e la formazione di un liquido denso, giallo e fortemente viscoso. Questo liquido, anche se diluito con acqua, lascia precipitare per azione degli acidi un prodotto colorato in giallo, appiccicaticcio che difficilmente si riesce a purificare.

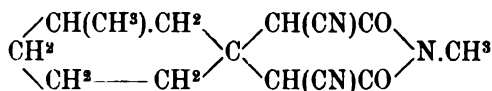
Se invece si toglie con etere l'eccesso di chetone e si precipita con acido cloridrico da una soluzione piuttosto diluita, allora si riesce ad avere un prodotto bianco, cristallino, che è necessario però di cristallizzare ancora dall'alcool.

Da cm^3 20 di metilcicloesanone fatti reagire con cm^3 100 di soluzione alcoolica di metilammina al 10 % e con cm^3 23 di etere cianacetico ottenni nelle varie preparazioni gr. 4-6 di prodotto grezzo. La sostanza, ricristallizzata più volte, fonde a 181°-182°; all'analisi dette i seguenti valori:

Gr. 0.1865 di sostanza dettero 0.4386 di CO^2 e 0.1664 di H^2O
„ 0.1414 „ „ cm^3 20.8 di N a 19° e 738^{mm}, corr. = cm^3 18.6.

	trovato	calc. per $C^{14}H^{17}N^3O^2$
C =	64.13	64.86
H =	6.27	6.59
N =	16.45	16.21

Per poter fare un confronto più vasto e completo fra i derivati dei tre isomeri del metilcicloesanone ho preparato il derivato N-metilico anche del 1.3metilcicloesanone, del quale era stata già studiata la reazione coll'ammoniaca in presenza di etere cianacetico (1). Ed invero ho ottenuto una piccola quantità del composto che corrisponde alla formula

```
   /CH(CH³).CH²\   /CH(CN)CO\
CH²             >C<          >N.CH³
   \CH²——— CH²/    \CH(CN)CO/
```

In questa preparazione ho incontrato delle difficoltà nel separare i prodotti diversi formatisi nella reazione.

Mediante successive cristallizzazioni dell'alcool a 60° ho potuto isolare due porzioni di sostanza, di cui l'una meno solubile ha un punto di fusione non ben definito intorno a 195°-198° e l'altra fonde a 154°.

Per la prima non mi è stato possibile ancora di fare le ricerche necessarie per stabilirne la costituzione; quanto alla seconda porzione i saggi e le analisi confermarono l'ipotesi che essa sia costituita dal composto previsto e corrispondente a quello avuto cogli altri isomeri.

---

(1) Guareschi, Nota citata.

Gr. 0.1362 di sostanza dettero 0.3244 di CO^2 e 0.0814 di H^2O.
" 0.1262 " " cm^3 17.8 di N a 13° e a 745^{mm}, corr. = cm^3 16.3

cioè

	trovato	calc. per $C^{14}H^{17}N^3O^2$
C =	64.95	64.86
H =	6.66	6.59
N =	16.22	16.21

Confrontando i risultati delle singole esperienze risulta che nel modo di reagire dei tre isomeri non vi è alcuna differenza notevole. La reazione colla metilammina ha luogo molto più lentamente ed incompletamente di quella coll'ammoniaca. La quantità di N-metilglutarimide che si ottiene è molto piccola ed è accompagnata dalla formazione di prodotti di consistenza viscosa, difficilmente identificabili.

	Glutarimidi	Imidi trimetilenpirroliche	N-metil glutarimidi	N-metil imidi trimetilenpirroliche
Cicloesanone	$C^{12}H^{13}N^3O^2$ 211°-212°	$C^{12}H^{11}N^3O^2$ 238°-240°	$C^{13}H^{15}N^3O^2$ 175°	$C^{13}H^{13}N^3O^2$ 222°
1.2 metilcicloesanone	$C^{13}H^{15}N^3O^2$ 210°	$C^{13}H^{13}N^3O^2$ 235°-236°	$C^{14}H^{17}N^3O^2$ 181°-182°	
1.3 metilcicloesanone	240°-241°	241°-242°	154°	
1.4 metilcicloesanone	210°-211°	207°-208°	181°-182°	$C^{14}H^{15}N^3O^2$ 182°-183°

L'alcool diluito è il solvente che meglio si presta per depurare tanto i derivati del cicloesanone quanto quelli dei metilcicloesanoni.

Nell'unito specchietto nel quale sono messi a confronto i prodotti descritti, si vede come la posizione del gruppo metilico rispetto alla molecola, e la presenza del gruppo N-metilico non

esercitino, per quanto riguarda il punto di fusione, una azione in un senso determinato sui derivati dei singoli isomeri. Fatta eccezione per la 1.4metilpentametilen1.2diciantrimetilendicarbonimide, si ha che l'eliminazione di due atomi di idrogeno e la conseguente formazione dell'anello trimetilenico portano un innalzamento nel punto di fusione.

Da alcune esperienze fatte con un miscuglio di cicloesanone, etere cianacetico e etilendiammina risulta che questa ammina reagisce solamente coll'etere cianacetico per dare, come prodotto principale, della dicianacetiletilendiammina, mentre il chetone resta per la massima parte inalterato.

Torino. R. Università. Laborat. di Chim. farm. e tossic.
Marzo 1913.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

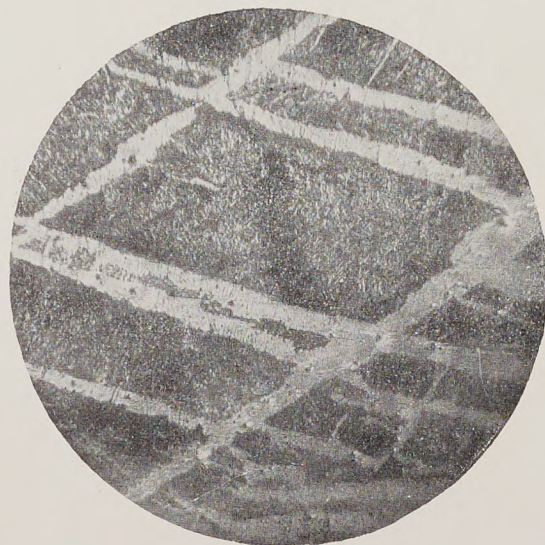



Fig. 1.

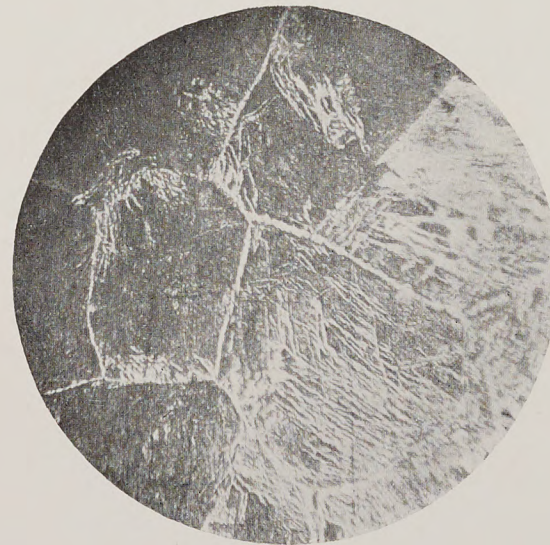



Fig. 2.

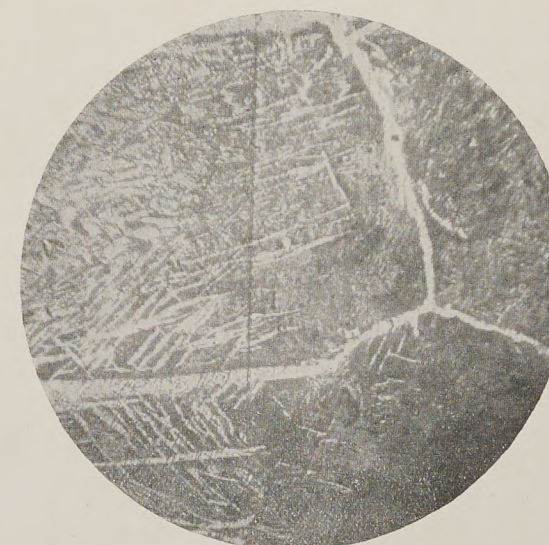



Fig. 3.

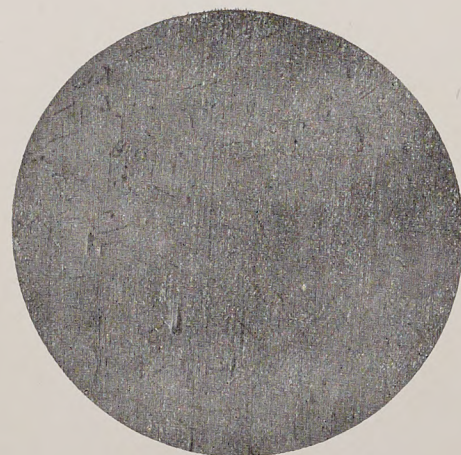



Fig. 4.

Fig. 5.

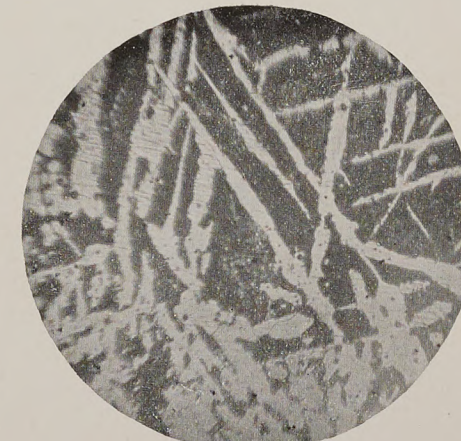



Fig. 6.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 6 Aprile 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: MANNO, Direttore della Classe, CARLE, RENIER, CHIRONI, RUFFINI, STAMPINI, D'ERCOLE, BRONDI, SFORZA, BAUDI DI VESME e DE SANCTIS Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 16 marzo 1913.

Il Presidente presenta con parole di vivo encomio il volume *Gli antichi vescovi d'Italia dalle origini al 1300 descritti per regioni: La Lombardia*, Parte I: *Milano*; per cura di Fedele SAVIO S. J. (Firenze, 1913), dall'autore Socio nazionale non residente offerto in omaggio all'Accademia; e rileva l'acume critico e la copia di erudizione di cui il SAVIO vi dà prova.

Il Socio STAMPINI presenta per l'inserzione negli *Atti* una nota del Dr. Lorenzo DALMASSO, intitolata: *Il vocabolario tecnico di un tardo scrittore georgico. Contributo alla semasiologia palladiana.*

Pure per gli *Atti* il Socio DE SANCTIS offre un saggio del Dr. Giuseppe CORRADI su *Gli strateghi di Pergamo* e uno del sig. Aldo FERRABINO su *Le guerre di Attalo I contro i Galati e Antioco Jerace.*

LETTURE

Il vocabolario tecnico di un tardo scrittore georgico.

Contributo alla semasiologia palladiana.

Nota del Prof. LORENZO DALMASSO.

Una lingua arricchisce e si rinnova mediante la trasformazione dei significati. Spesso il nuovo cancella l'antico, più spesso l'uno e l'altro coesistono insieme. La polisemia è anzi indizio di civiltà: quanto più una nazione è avanzata in cultura, tanto maggiore è il numero di significati che acquistano le parole (1). Sono parecchie e complesse le cause di queste trasformazioni (2), ma esse si basano generalmente sul fatto che il significato occasionale di un vocabolo (quello che il parlante gli dà nel momento che lo esprime) spesso non coincide col significato usuale (l'intero contenuto rappresentativo che un vocabolo ha per tutti quelli che appartengono ad una medesima comunità linguistica (3)). Di queste trasformazioni furono tentate varie clas-

(1) Bréal, *Essai de sémantique* (Paris 1899) 158 e 312.

(2) Ci fu chi le distinse in logiche, psicologiche e filologiche: Darmesteter, *La vie des mots étudiée dans leurs significations* (Paris 1887) 36-123. Sulle cause della trasformazione dei significati vedi pure: Hey, *Semasiologische Studien* " Jahrb. f. Phil. „ Suppl. XVIII (1892) 81 sgg. e " Arch. lat. Lex. „ IX 193 sgg., XIII 201; Heerdegen, " Vh. 36. Phil.-Vers. „ 1891, 202 sgg.; Schmidt, *Die Gründe des Bedeutungswandels* (Progr. Berlin 1894); Stöcklein, *Bedeutungswandel der Wörter, seine Entstehung und Entwicklung* (München 1898), ed infine il Kretschmer nella recentissima *Einleitung in die Altertumswissenschaft* di Gercke-Norden (Leipzig und Berlin 1910) che a pp. 213-15 con buona chiarezza espone gli ultimi risultati della scienza semasiologica a questo riguardo. [Nel 1912 è uscita la 2ª edizione].

(3) Paul, *Prinzipien der Sprachgeschichte*[4] (Halle 1909) 75.

sificazioni e distinzioni, ma tutte si possono ridurre all' allargarsi e al restringersi del significato (1).

Ora la determinazione del significato (limitazione dell'estensione ed arricchimento del contenuto del vocabolo) è appunto uno dei mezzi più comuni per coniare termini tecnici. A certi vocaboli della lingua generale si dànno sensi speciali, accettati per comune consenso da tutti quelli che o in teoria o in pratica si occupano di una data materia. E si riconosce appunto l'importanza, che una data scienza, arte o professione ha nella vita, dal numero più o meno grande di determinazioni di significato introdotte nella lingua comune (Paul, *Prinzipien der Sprachgesch.* 89). Noi però daremo al vocabolo un senso più ampio del consueto, intendendo come tali non solamente quei vocaboli che hanno accanto al senso tecnico e speciale uno generale, dal quale esso è derivato, ma ancora vocaboli della nomenclatura specialmente agraria che è bene tuttavia non passino inosservati in questo nostro studio palladiano (2).

Cominciamo dal terreno e dalle sue qualità. Un terreno che abbia profondo lo strato coltivabile vien detto *terra profunda* 1, 9, 21 denominazione che si è conservata anche oggi (3). Un terreno inoltre può essere compatto o sciolto, magro o grasso: *solum spissum* 2, 57, 10; *solum resolutum* 2, 57, 11 (altrove detto anche *terra laxior* 1, 14, 11); *solum tenue* 'leggero' 3, 73, 2; *solum exile* 2, 57, 11 (anche in Cicerone *leg. agr.* 2, 67) e *solum macilentum* 4, 127, 15 (l'aggettivo è in Plauto, Apuleio,

(1) Questa è la distinzione del Heerdegen, *Lateinische Semasiologie* ' Reisig-Haase, *Vorlesungen über lateinische Sprachwissenschaft* ' (Berlin 1890) 65. Con essa concorda quella del Wölfflin, *Ueber Bedeutungswandel* " Verh. d. Zür. Phil.-Versammlung „ 1887 pp. 61-70, ed a questa in fondo si riduce quella del Paul già cit. 89-105.

(2) Daremo quindi a questa parte della trattazione un ordine essenzialmente logico-ideologico, che ci sembra anche il più indicato. S'intende inoltre che non citiamo tutti i luoghi, in cui questi vocaboli compaiono, bastandoci darne qualche esempio.

(3) Chiamano appunto i tecnici " terreni profondi „ quelli che hanno esteso lo strato attivo e quello inerte. — Citiamo i luoghi palladiani, servendoci di tre numeri: il primo del libro, il secondo della pagina e il terzo della linea dell'ediz. Schmitt (Lipsia 1898).

Pelagonio e nella Vulgata) espressione evidentemente popolare; *solum laetum* 2, 57, 12 è detto invece il terreno fertile di per sè stesso o reso tale con la concimazione (una glossa dà *laetus pinguis*, anche Palladio ha *terra pinguis* 3, 73, 12: cfr. *ramus laetus* 'fecondo' 1, 8, 15). Anzi gli antichi georgici italiani usavano appunto 'terreno lieto o lietissimo' per 'terreno fertile, grasso'. Si riconnettono a questo aggettivo metaforico altri vocaboli: *laetamen* 2, 59, 19. 3, 72, 8. 11, 218, 9 ed altrove, termine che non ha altre testimonianze che Plinio 18, 141 e Servio *georg.* 1, 1 e che dev'essere popolare (gli altri scrittori preferiscono *fimus* che ha pure il nostro 3, 73, 6 e *stercus* 3, 96, 2. 12, 240, 7). Da *laetus* si forma il verbo *laetare* 1, 10, 27. 12, 12. 3, 92, 5. 11, 215, 9 che non ha altre testimonianze che quelle di Palladio, e da *stercus* il verbo *stercorare*, usitatissimo in Palladio, ad es. 3, 73, 13. 94, 21. 4, 138, 7. 5, 150, 5. 6, 162, 22. 10, 200, 12. 201, 6. 203, 16. 206, 15. 11, 216, 3. 217, 19. 219, 27. 233, 25. 12, 237, 21, che è del resto diffuso in tutta la latinità. *Stratura* 12, 240, 7 chiama infine i terricciati, che sono una miscela di terra e letame *alterno ordine subinde crescentem*, mentre altrove 1, 46, 6 il vocabolo ha diverso significato. Secondo la varia natura e il prevalere di determinati elementi, il terreno piglia il nome di *calculosus* 2, 58, 2. 62, 22; *cretosus* 1, 11, 22. 4, 127, 14. 10, 201, 10; *glareosus* 4, 133, 3. 12, 240, 28; *lapidosus* 2, 64, 20; *lutosus* 1, 11, 24. 52, 18; *petrosus* 4, 134, 28; *sabulosus* 3, 107, 5. 108, 3. 8, 183, 1. 10, 201, 9. Terreno arido indica *siticulosus* (oggidì 'siccitoso') 2, 58, 12 cui si oppone quello *aquosus* 1, 11, 12 e ne è una speciale varietà l'*uliginosus* 1, 8, 26. 3, 84, 13 che Varrone *r. r.* 1, 6, 6 definisce *campester locus qui est ad libellam aequus, cum aquae non habet delapsum* (1). *Carbunculus* è una specie di terreno che Palladio indica come poco fertile per i vigneti, se non concimato 2, 58, 14, e ricco d'acqua: *venas... certas et ubertate copiosas* 12, 242, 16. La terra rossa viene detta *rubrica* 2, 58, 15 nel qual terreno le viti *difficile comprehendunt*. Una data disposizione del terreno ricorda

(1) *Uligo* deriva da *udus* e presenterebbe il cambiamento dialettale del *d* in *l*, secondo l'Ernout, *Les éléments dialectaux du vocabulaire latin* (Paris 1909) 243.

il *pulvinus arearum*: (caulis) clivis delectatur et ideo ponendae sunt plantae per pulvinos arearum 3, 96, 2 (in Varrone 1, 35, 1 ed in più luoghi di Plinio) che è (come lo descrive il Forcellini) *parvus terrae elatae tumulus, in modum dorsi convexus utrimque, ut aqua facile defluat*. *Locus restibilis* 10, 203, 16 è detto un terreno che si fa produrre tutti gli anni senza riposo, come lo definisce Varrone *l. l.* 5, 4 *qui restituitur ac reseritur, quotquot annis, contra qui intermittitur a novando novalis*: cfr. pure *seges* in Plinio, *vinetum* in Columella 3, 18, *fecunditas* in Plinio (che lo riferisce anche a *platanus*). *Novalis* nel senso indicato da Varrone è pure in Palladio: *loca pinguia puras reddas novales* 1, 10, 25. *ubi autem mundae sunt novales* 2, 55, 11. La terra attiva è detta *viva terra* (opposto di *crudum solum*) 3, 80, 24, ed è quella fine terra superficiale che si usa anche ora per mettere attorno alle barbatelle di vite al momento dell'impianto nel vigneto, e, come Palladio consiglia, in *transferenda ex arbusto vite*. Il terreno vergine, non lavorato, non trattato con l'aratro è detto *crudum solum* qui arando crudum solum inter sulcos relinquit, suis fructibus derogat 1, 9, 12.

Dopo il terreno, quello che dal terreno è prodotto: vocaboli quindi che si riferiscono alle piante e ad alcune loro parti e funzioni. *Capillamenta* 11, 219, 20 sono gli estremi filamenti delle radici (termine botanico ' capillizio '). *Codex* è detto il tronco degli alberi: *vitis codicem* 2, 51, 20 (cfr. *excodicare* 2, 51, 18-20) vocabolo che sembra dotto, se si considera la mancata continuazione di tale accezione nel campo romanzo, e la testimonianza delle glosse, una delle quali si presenta con un curioso spostamento di significato: *caudices arborum radices*, *caudex, truncus κορμός* (1). La gemma è talora detta *oculus* apertus vitis oculus 1, 10, 10 come ancora presso di noi e nell'antichità presso gli scrittori georgici latini e greci: una glossa dà *ὀφθαλμὸς ἀμπέλου gemma*, *oculus vitis*, mentre in alcuni luoghi (Catone *agr.* 47, Varrone *r. r.* 1, 243, Plinio 25, 160) *oculus* significa pure i rigonfiamenti di certe radici, che però scientificamente non sono altro che le gemme di certi rizomi, come

(1) Il vocabolo greco è passato alla terminologia odierna che intende per " cormo „ l'asse o corpo vegetativo delle piante superiori.

gli occhi sotterranei delle canne. Da *oculus* è derivato il verbo *inoculare* che indica l'innesto ad occhio, ed è frequente in Palladio 4. 136, 28. 5, 154, 17 e 24. 7, 174, 11. 8, 183. 25. 12, 239. 3. 243. 12. Un modo d'innesto derivato dall'*inoculatio* è l'*inplastratio* 3. 87, 25. 7, 174, 13. 8, 183, 15 (*inplastrum* 3, 86, 12. 6, 174, 22; *inplastrare* 5, 154, 18. 6, 163, 14. 9, 192, 7. 12, 239, 3) detta *de arboribus cum cortex eximitur inoculationis gratia, ut aptari queat cortex par ex altera arbore.* L'operazione è descritta ampiamente da Plinio 17. 26, 4. I rampolli (*surculi*) per l'innesto devono avere due o tre ramificazioni, essere cioè *bifurci vel trifurci* 3, 87, 12. Col verbo *circumsignare* (parlando dell'*inplastratio* dei meli) indica il taglio circolare *duobus digitis quadratis* che si fa intorno alla gemma, *quae bene adparebit sine dubio processura, ut ipsa statuatur in medio,* donde si toglierà *ita subtiliter corticem... acutissimo scalpro, ne gemma laedatur* 7, 174, 16-20. *Fruticare* nel senso di 'germogliare' usa due volte Palladio 5, 150, 18. 9, 190, 11 (come Columella 2, 9, 6. 4, 31, 3. 11, 2, 60 ed altrove e Plinio in più luoghi); lo sboccio del fiore e della gemma è detto *apertio* floris et gemmae 1, 8, 10. *Geniculum* 12, 245, 15 è chiamato il nodo dello stelo, ed in tal senso specifico è pure in due luoghi di Plinio. Il vocabolo *stilla* è usato per indicare il pianto degli alberi in generale, della vite in ispecie: *omnis incisura sarmenti avertatur a gemma, ne eam stilla, quae fluere consuevit, extinguat* 1, 9, 18-19: cfr. *cum sicca et sine stillis erit arbor* Vitruvio 2, 9. Altrove è detto anche *lacrima* 3, 112, 11. ed il verbo è ora *lacrimare,* ora *deplorare* vites quae lacrimarum nimietate tabescunt et deplorando vim roboris sui avertunt a fructu 3, 112, 11. vites... spisso umore lacrimabunt 3, 117, 7. L'emissione della gomma negli alberi è detta *gumminare* 2, 66, 18. 11, 220, 25. Infine il verbo *fero* usato assolutamente prende il significato di 'fruttificare' *arbores... et in crescendo et in ferendo extitisse felices* 2, 61, 2.

Parlando di singole piante, notiamo fra i cereali l'*adoreum*, nominato più volte da Palladio 10, 201, 13. 202, 3. 11, 212, 4. e da Columella e Plinio ricordato in più luoghi. Isidoro *orig.* 17, 3, 6 lo dice *tritici genus quod idem vulgo semen dicitur* e le glosse recano *adorium farri⟨s⟩ genus* IV 8, 6. *adorea genus frumenti* IV 8, 5. *adoria εἶδος σίτου* II 8, 29: il nome scientifico odierno è *triticum spelta.* Nota pure il *cantherinum hordeum* 10,

202, 18 di cui Columella 2, 9, 14 dice: *hordeum, quod rustici hexasticon, quidam etiam cantherinum appellant, quoniam et omnia animalia... et hominem... pascit*; e l'*hordeum galaticum, quod grave et candidum est* 3, 74, 11. Della vite diremo in modo speciale più oltre (pp. 698-700), e così parecchi nomi di vegetali alla rinfusa riporteremo a p. 706.

Ed ora alcune operazioni agricole ed alcuni strumenti riferentisi ad esse. Il terreno deve essere lavorato, ed anzitutto bisogna romperlo, dissodarlo, ararlo. Questo si dice genericamente *proscindere* terram 2, 53, 17. agros 2, 52, 8. 4, 118, 17. 8, 182, 5, ed anche *aperire* agros 3, 161, 18. Le zolle vanno poi sminuzzate *dolabris*, dopo un primo dissodamento od una prima aratura: a questo si riferisce *glebae omnes dolabris dissipandae sunt* 2, 52, 15. Altrove Palladio, per indicare l'operazione del dissodamento, si vale del verbo *dividere* si tibi ager est silvis inutilibus tectus, ita eum divide, ut loca pinguia puras reddas novales, loca sterilia silvis tecta esse patiaris 1, 10-23, 25; ma non mi sembra trattarsi di un vero termine tecnico, bensì del verbo generico *dividere* trasportato metaforicamente a indicare un'operazione agricola. I lessici non registrano altre testimonianze di questo significato; ma il passo potrebbe anche interpretarsi altrimenti (1). Il luogo dove finisce un solco e ne comincia un altro è detto *versura* (2) boves ubi ad versuram venerint 2, 52, 10. Quel maggese, che fu dissodato in primavera e lasciato riposare fino all'autunno seguente, viene detto *vervactum* 4, 118, 17 vocabolo degli scrittori georgici e interpretato dalle glosse, che tentano di darne l'etimologia: *terra proscissa*

(1) L'interpretazione da noi riferita è data dal traduttore della collez. Didot, *Les agronomes latins* (Paris 1877) 527; ma il passo si potrebbe anche rendere così: " Se il terreno è occupato da inutili boschi, fanne due parti (o dividilo in parti): della parte (o delle parti) fertile ti prenderai cura, in quella sterile lascerai il bosco e poi vi appiccherai il fuoco " (come dice in seguito).

(2) Il " versuro " o " versura " è ancor oggi una misura di terreni dell'Italia meridionale, corrispondente pressapoco alla " giornata " piemontese e al *iugerum* latino, cioè la superficie arabile in un giorno. La connessione col significato latino è data forse dal fatto che, quando s' incomincia ad arare un campo, si tracciano i confini con un solco.

aratro id est vomere actum; vervactum dictum quasi vere actum, id est verno aratum. Iterare hoc mense agri, qui aprili proscissi fuerant, circa calendas iterentur 8, 182, 6 vien detto fare la seconda aratura, e col verbo *tertiare* agros pingues 10, 200, 11 è indicata la terza aratura (cfr. *tertia vice arabitur* 10, 200, 14). Questa successione di lavori, che ha luogo per lo più nell'Italia centrale e meridionale, dove, essendo l'inverno mite, si lavora la terra in gennaio, poi in primavera e poi altre volte sino all'autunno, costituisce appunto il cosidetto ' maggese lavorato '. Di questo genere è il *vervactum* palladiano, un po' diverso da quello che indicherebbe l'etimologia: *vervacta... quae ianuario mense sunt facta, repetere* 4, 118, 17.

Così preparato il terreno, si procede, secondo i diversi scopi della coltivazione, alla seminagione o alla piantagione. Seminare è detto col comune verbo *serere* (anche *inserere* 11, 215, 7 e *seminare* 1, 35, 17) e piantare *ponere* eo mense quo ponenda sunt singula 1, 2, 15. qualis debet et poni (nux) 2, 66, 3. vites... ponuntur 11, 213, 20 vocabolo del resto che è già in Virgilio *ecl.* 1, 74 *pone ordine vites*, in Orazio *carm.* 2, 13, 1 *ille et nefasto te posuit die* ed in altri. Quei semi che maturano nello spazio di tre mesi sono indicati con l'aggettivo sostantivato *trimenstria* hoc mense serendum omne trimenstrium genus 3, 72, 20 (come in Columella 11, 2, 20 e in Plinio 18, 69).

Un'operazione che si ricollega con la piantagione è la *pastinatio*. È così vario e frequente l'uso delle parole *pastinare* e *pastinum* in Columella e in Palladio che non credo inutile il discorrerne con qualche ampiezza. Il *pastinum* che i tecnici dicono ' gruccia ' o ' forcella ' era propriamente uno strumento di lavoro, di cui si servivano gli antichi (e se ne servono tuttora in alcune régioni viticole italiane) per iscassare il terreno destinato alle vigne e anche per affondare nel terreno le barbatelle (1). Columella 3, 18 lo definisce: *pastinum... vocant agricolae ferramentum bifurcum, quo semina panguntur*, e 3, 13 espone dif-

(1) Portes et Ruyssen, *Traité de la vigne et de ses produits* (Paris 1886-9) III 12. Vedi pure Lorenzi, *Del pastino di Columella ossia della gruccia toscana*, ecc. (Milano 1818) e Canevazzi-Marconi, *Vocabolario di agricoltura* (Rocca di S. Casciano 1892) art. " pastinare " e affini.

fusamente *pastinandi agri... rationem.* Palladio, che non usa mai il vocabolo in tal senso, chiama questi strumenti *acus, per quas in pastinis sarmenta merguntur* 1, 49, 3. Lo strumento caratteristico dell'operazione passa poi metonicamente a indicare l'operazione stessa, il cosidetto ' divelto ' o ' scassato ': *pastinum fieri nunc tempus est, quod fit tribus generibus* 2, 55, 6 (il titolo del capitolo è *de pastinandi generibus*). *vites melius provenire si... pangantur cum tumor pastini nondum repetita soliditate subsedit* 2, 59, 8-10. *quaecumque de pastinis... dicta sunt* 11, 213, 24. Ed ancora il vocabolo *pastinum* può designare il terreno stesso così lavorato: *quod plerique fecerunt studendo famae tantum et latitudini pastinorum* 1, 13, 2-3. *pastino... quod omne versabitur... terra universa fodiatur* 2, 56, 4-6. *mensura... pastini haec est in tabula quadrata iugerali* 2, 56, 19. *non est uno genere vitium omne pastinum conserendum* 3, 77, 20. *sed haec in pastinis vel sulcis ratio erit* 3, 78, 16: vedi pure 1, 49, 3. 4, 118, 11. 11, 214, 7. Una leggera variazione di significato è in 13, 257, 10 *nunc ad instituendas vites... pastina inchoemus effodere,* dove con *pastinum* s'intende non la terra lavorata col *pastinum*, ma quella destinata alla *pastinatio*. Nè mancano gli esempi di *pastinare* ubi... mundae sunt novales, scrobibus pastinemus aut sulcis 2, 55, 11. ad pastinandum rudes agros potius eligamus 2, 57, 19. si campus est, duobus semis pedibus pastinetur 2, 59, 2. Tutti questi passi si riferiscono allo scassato per la piantagione dei vigneti, e a questa pare veramente fosse destinata la *pastinatio*, se in Ulpiano *dig.* 24, 3, 7 *pastinum instituere* equivale senz'altro a fare l'impianto di un vigneto, e più glosse ci dànno *pastinare, vineas plantare.* E pare che veramente il termine applicato ad altre coltivazioni fosse improprio, se, parlando di uno scasso nel giardino, Palladio dice: *semper altius tribus vel quattuor pedibus ad pastini similitudinem fodies hortulum* 1, 34, 13: il che non toglie che in qualche raro luogo valga semplicemente *effodere* in generale: *partes... horti sic dividendae sunt, ut hae, in quibus autumno seminabitur, verno tempore pastinentur: quas seminibus vere complebimus, autumni tempore debebimus effodere. Ita utraque pastinatio decoquetur beneficio algoris aut solis* 1, 35, 16-20. *persici ossa in pastinatis areis sunt ponenda* 12, 237, 5. Ed a questo senso generico condurrebbero altre glosse: *pastinare, colere, plantare; pastino βωλοστροφῶ, μεταβάλλω χώραν.*

Dopo la seminagione, quando fra le nuove pianticelle comincerebbero a crescere le male erbe, bisogna procedere alla sarchiatura. Palladio, pure usando il vocabolo, comune agli altri scrittori georgici, *sarire* 2, 54, 12 e 18. 2, 55, 3. 3, 93, 9. 4, 121, 22, ha anche il verbo, di origine evidentemente popolare, *sarculare* 2, 54, 21 e 23. 2, 55, 2. 3, 95, 10. 4, 127, 3. 11, 217, 26. 12, 236, 20 e *sarculatio* 3, 96, 3. Analoga operazione è il *runcare* 3, 95, 9. 4, 127, 3. 4, 131, 2. 5, 150, 19 cioè estirpare le erbe inutili e nocive; senonchè, mentre la *runcatio* 4, 123, 21. 125, 27 si fa con le mani, la *sarculatio* si fa con l'apposito strumento, detto *sarculum* (1). Le glosse dànno *runcare, abscido βοτανίζω*; il verbo, oltrechè nei soliti scrittori agricoli, compare anche in un luogo di Persio e di Tertulliano. E sempre all'estirpazione della gramigna si riferisce il verbo *pulverare* novella vinea incipiat pulverari 4, 119, 22-23. novellae vites mane et vespere iam calore deposito effodi debent et averso gramine pulverari 8, 182, 13-14 che vale ' rompere la terra intorno alle radici degli alberi per levarne le male erbe '.

Fra le altre operazioni che si fanno al terreno c'è pure la zappatura, detta *fossio* 3, 94, 16 vocabolo che ha solo le testimonianze di Cicerone *senect.* 15, Columella 4, 28, 2. 11, 2, 41 e Plinio, e altrove *fossura* 10, 207, 13; *fossor* 1, 8, 11. 2, 55, 15 è lo zappatore. L'erpicatura è detta *occatio* vinearum 9, 190, 7 (cfr. Cicerone *senect.*, Columella, Plinio, Nonio Marcello) vocabolo volgare, come appare da Columella 11, 2, 60 *pulverationem, quam vocant rustici occationem*. Il verbo, che compare in Plauto *capt.* 663, Varrone *r. r.* 1, 31, 1, Orazio *epist.* 2, 2, 161, Columella 2, 4, 2, Persio 6, 26, Plinio (più luoghi), è da Palladio usato varie volte, riferito ad *ager* 3, 73, 19, a vigneti 6, 162, 14. 7, 173, 6, a fave 12, 234, 2. Le glosse dànno *occo βωλοκοπῶ, βωλοστροφῶ*.

---

(1) Si noti ancora che la sarchiatura ha lo scopo più generico di smuovere e sminuzzare il terreno, in cui spesso è compreso quello di estirpare le erbe, e che il verbo " roncare ", oltre strappare le erbacce con le mani (termine moderno " scerbare ") vale anche " arroncare ", cioè estirpare con la " ronca ".

Venendo ora agli strumenti agricoli, Palladio ne dà un discreto numero in I 42: zappe con la lama trasformata in due punte *bidentes*, ronconi *dolabrae* (1), falcetti per la potatura *falces putatorias, quibus in arbore utamur et vite,* falci messoie e fienaie *messorias vel fenarias,* zappe *ligones* (cfr. le glosse *ligones genus ferri, rastri, bidentes, fossoria*), certe seghette dette *lupos, id est serrulas manubriatas... ad mensuram cubiti, quibus facile est... resecando trunco arboris aut vitis interseri,* ferri per castrare e per tosare *castratoria ferramenta atque tonsoria,* vanghe *vangas* (senz'altra testimonianza: cfr. la glossa *vanga est pala cum ferro*), roncole *runcones* di cui i lessici non dànno altra testimonianza che questa e un luogo di Isidoro *orig.* 20, 14, 5 (una glossa dice: *runcones* ⟨*a*⟩ [*t*]*runcando id est* [*sunt*] *falcastra*). Aggiungi il sarchio *sarculum* 2, 59, 22. 3, 97, 21. 9, 191, 15. 10, 201, 5. 11, 218, 15. 12, 239, 22, il *rastrum* 4, 126, 3 che s'identifica col diminutivo *rastellus* 5, 150, 9. I *denticuli* 7, 172, 12 e 19 sono la parte di una specie di macchina agraria a due ruote usata in Gallia per la mietitura e dentata nella parte inferiore (cfr. Columella 2, 21, 3 *denticulatae falces*) (2).

Dalle operazioni agricole suddette, d'indole generale, scendendo ad alcune speciali, abbiamo la *tritura* o trebbiatura del grano 1, 41, 26. 7, 171, 6 la quale si fa nell'aia *area* 1, 41, 22 che appunto per tale scopo deve rispondere ad alcune condizioni speciali: *sit... vel strata silice vel saxo montis excisa vel sub ipso triturae tempore ungulis pecorum et aquae admixtione solidata,* e debitamente preparata nel mese di giugno 7, 171, 6-15. Il vocabolo è abbastanza diffuso nella latinità (non ne abbiamo però esempi in Cicerone): ne tentano l'etimologia Varrone *l. l.*

---

(1) Erano una specie di grossi pennati, aventi al dorso una lama tagliente parallela al manico, dall'altra la punta ricurva; infilati in un lungo manico di legno, dovevano venire adoperati nei terreni infestati da erbacce o da arbusti o da spini, per strappare queste piante. Strumenti di tal genere sono ancora in uso in alcune regioni d'Italia.

(2) Essa si può considerare la prima mietitrice inventata: veniva spinta a ritroso dai buoi e portava posteriormente una lama dentata che serviva a mietere il frumento. Palladio la descrive molto minutamente 7, 172, 5-23. Quanto alle *denticulatae falces* di Columella, si tratta di falci messoie aventi la lama dentellata, tuttora in uso in alcuni luoghi.

5, 38 *ubi frumenta secta, ut terantur, arescunt, area* ed Isidoro *orig.* 15, 13, 16 *alii aream vocatam dicunt quod pro triturandis frugibus eradatur.* Le glosse dànno: *area, ubi excutiuntur fruges, ubi granum (grana?) triturantur.* La vagliatura del grano è detta *cretura* 1, 26, 4. Il grano dopo la trebbiatura viene ritirato nel granaio, detto *granarium* 7, 173, 17 (Plauto, Varrone, Cicerone *fin.*, Orazio *sat.*, Vitruvio, Columella, Persio, Plinio: cfr. la glossa *granarium, ubi triticum colligitur tritum*) e con vocabolo più comune e più generico *horreum* 1, 22, 7. — Alla coltivazione del fico si riferisce il verbo *caprificare* che non ha altri esempi, oltre Palladio, che Plinio 16, 114. Palladio definisce l'operazione: *caprificandae sunt arbores fici, id est, suspendendi grossi ex caprifico, lino velut serta pertusi* 4, 135, 20-22. 7, 174, 8. Con *grossi* si deve intendere il fico domestico, quello che porta fiori femminili, significato messo bene in evidenza dalle glosse: *grossus suas id est fici feminino genere; de fico ait, id est feminini generis* (1). Columella 1, 10, 10 ha il diminutivo *grossulus* si voles ficum quamvis non natura seram facere, tum grossulos prioremve fructum decutito, ita alterum edet, quem in hiemem differet.

Passando ad alcune coltivazioni speciali, tiene un posto importante la viticoltura, per lo sviluppo che ha assunte presso i Romani e per l'abbondanza di termini tecnici, che di questo sviluppo è ad un tempo conseguenza e manifestazione. Le parti legnose della vite sono dette genericamente *materia* novellam vitem Columella dicit a primo anno ad unam materiam esse formandam 3, 85, 5. Columella 3, 17 dice appunto *materia in vite, quidquid ligneum est.* In Cicerone *de orat.* 2, 88 equivale anche al ceppo, ma in Columella, come in Palladio, si riferisce sempre a parti relativamente giovani, non più vecchie di due anni. Con altro significato Palladio usa *materies* una materies ad fabricam caedenda est 12, 249, 2 'legname da costruzione'. *Sarmentum* sarebbe propriamente il tralcio staccato o secco, ma viene spesso usato nel senso comune di tralcio. Nei seguenti luoghi di Palladio indica il tralcio destinato ad essere tagliato: *omnis incisura sarmenti avertatur a gemma* 1, 9, 18. *auferenda*

(1) Cfr. Carisio " Gr. Lat. K. „ I 96, 4 e Landgraf, *Glossographie und Wörterbuch* " Arch. lat. Lex. „ IX 382.

sunt laeta, intorta, debilia... sarmenta 3, 82, 2. *putandi... ratio talis est ut vetera sarmenta... recidantur* 1, 83, 27. Il magliuolo, tralcio destinato ad esser piantato, è detto *malleolus* 3, 78, 21 definito da Columella 3, 6 *malleolus... novellus est palmes, innatus prioris anni flagello, cognominatusque ad similitudinem, quod in ea parte, qua deciditur ex vetere sarmento, prominens utrimque, mallei speciem praebet.* Pure una specie di tralcio, quello che sta nelle parti superiori, è il *flagellum* 3, 76, 11. 82, 12 (in questo senso, oltre gli scrittori georgici, l'ha anche Catullo 62, 52). Il tralcio che porta i pampini si chiama *pampinarius*, in opposizione al fruttifero (' capo a legno ' lo dicono oggi in opposizione di ' capo a frutto '). *surculus* 3, 76, 13. *sarmenta* 3, 83, 12. 85, 9. Columella 5, 6, 29 dice a tal proposito: *palmitum duo genera sunt: alterum... quod quia primo anno plerumque frondem sine fructu affert, pampinarium vocant: alterum, quod ex anniculo palmite procreatur, quod, quia protinus creat, fructuarium appellant.* Un tralcio speciale è il *focaneus* qui inter duo brachia medius nascitur, debet abradi 3, 82, 3. Più ampiamente lo definisce Columella 4, 24, 10 *vocatur... focaneus palmes, qui solet in bifurco medius prorepere, et idcirco eum praedicto vocabulo rustici appellant, quod inter duo brachia, qua se dividit vitis, enatus velut fauces obsidet, atque utriusque duramenti trahens alimenta praecipit.* Finalmente sono da notare i *duramenta* 3, 85, 20, in altri *duramina* e *brachia vitis*, che credo si possano identificare con le cosidette ' branche ' in cui si divide il tronco, e su cui s'inseriscono i tralci. donde spuntano i germogli. I viticci sono detti *capreoli* 3, 84, 1 (in questo senso, oltrechè negli scrittori georgici, in Celso 2, 33, Scribonio Largo 193, Marcello *med.* 11, 1, Dioscoride 5, 1). Ne tentano l'etimologia Varrone *r. r.* 1, 31, 4 *hi sunt... vitis quibus teneat id quo serpit ad locum capiendum ⟨a⟩ quo capiendo capreolus dictus*, e Isidoro *orig.* 17, 5, 11 *dicti quod capiant arbores. Botryo* 3, 113, 18. 10, 208, 15. 12, 246, 4 è detto il grappolo dell'uva con un grecismo proprio della decadenza, che troviamo per la prima volta in Marziale 11, 27, 4, poi nell'Itala, in S. Ambrogio, Cassiodoro, Arnobio, Gregorio Turnense, in scoliasti e commentatori. Del resto anche la forma latina *botrus, i* non compare che in autori della decadenza.

La vite era per lo più maritata agli alberi, e come tale si chiamava *vitis arbustiva* 3, 81, 4. 12, 224, 1 = *vitis quae in ar-*

bore conlocatur 3, 83, 13, e anche più brevemente *arbustum* 3, 79, 3 e 17. 3, 80, 1. La vigna viene indifferentemente detta *vinea* 3, 76, 26. 4, 117, 6. 9, 190, 7 e *vinetum* 7, 173, 6: non pare ci sia differenza sostanziale fra i due vocaboli in latino, salvochè il primo equivale talvolta a *vitis*, il secondo invece no. Un sistema di allevamento della vite molto in voga era il cosidetto 'giogo': *vitis quae ad iugum colitur* 1, 9, 25. *vinea... quae in iugo est vel pergula* 12, 235, 7. Il giogo semplice era composto di tre pali in linea retta collegati superiormente da una pertica, sopra la quale si riversavano le due branche della vite, il cui tronco era addossato al palo di mezzo (1). I sostegni della vite vengono genericamente indicati col vocabolo *adminiculum* 1, 9, 16. 3, 84, 25 e sono *ridicae* e *pali* 3, 84, 25. 12, 236, 13 i primi sono più grossi e quadrangolari, e Columella 4, 26 e 33 li trova migliori dei pali, i secondi sono i pali comuni rotondi e acuminati in basso (2); l'operazione dell'impalatura è poi detta *palare* vineae 3, 92, 4. locus 12, 249, 20 (con senso leggermente diverso).

Le viti si moltiplicano e si riproducono anche per propaggini. Uno dei sistemi preferiti era quello del cosidetto 'capogatto' *mergus* mergum dicimus quotiens velut arcus supra terram relinquitur alia parte vitis infossa 3, 85, 23-25. mergus, hoc est propaginis curvatura, post triennium, quam pressa fuerat, recidetur a vite 12, 235, 3-4. Più ampiamente lo definisce Columella 4, 15, 2. Fra le altre operazioni che si fanno alla vite c'è la potatura che i tecnici distinguono in potatura secca (o invernale) indicata col sostantivo *putatio* 12, 235, 16. 240, 10 e col verbo *putare* 3, 79, 15. 81, 18. 12, 235, 15. 237, 22 e spampinatura (potatura verde o primaverile-estiva) detta *pampinatio* 6, 161, 11 e *pampinare* 1, 8, 12. 6, 161, 2 e 10. 9, 190, 15. Una specie di scalzatura che si faceva alle viti era designata col verbo *ablaqueare*, a cui pare corrispondesse nella lingua popolare *excodicare*; l'operazione è così descritta: *ablaqueandae sunt vites, quod Itali excodicare appellant, id est circa vitis codicem*

---

(1) Sernagiotto, *La viticoltura dei tempi di Cristo secondo L. G. M. Columella comparata alla viticoltura razionale moderna* (Milano 1897) 124 n. 3.

(2) Blümner, *Die römischen Privataltertümer* " Handb. d. kl. Altertumsw. di I. Müller " (München 1911) 577.

dolabra terram diligenter aperire et purgatis omnibus velut lacus efficere, ut solis teporibus et imbribus provocetur 2, 51, 18-20. La medesima cosa vien detta *oblaqueare* 3, 100, 4 (1), come più volte in Columella ed in Plinio.

Dalla viticoltura all'enologia... Il luogo dove si pigia l'uva è detto *calcatorium* 1, 21, 15 e dev'essere di tre gradini più alto della *cella vinaria* 1, 21, 10, la nostra cantina. La vinaccia, residuo dei grappoli dopo la pigiatura, *uvae excrementa*, è detta *vinacea* 3, 78, 18 (glosse: *vel acinus est expressa uva, quod exiit de vino*) e grecamente *gigarta* 12, 254, 14 (una glossa dà *gigarta id est venetia* (= *vinacia*)). Le botti *cupae* 1, 21, 23 posano sopra determinati sostegni detti *aselli* 1, 21, 24, ma il vocabolo è di lezione malsicura (2) e non ha altre testimonianze analoghe. Gli antichi solevano poi confezionare e preparare i vini in vari modi. L'intero lungo cap. 14 del l. XI è dedicato a *quae Graeci vel alii super vina condienda curandaque dixerunt.* Abbiamo anzitutto più specie di mosti cotti (3): il *caroenum* 11, 229, 8 cosidetto *cum tertia perdita duae partes remanserint*, che troviamo nominato in Celio *Ap.*, in un editto di Diocleziano, in S. Agostino, Marcello e Teodoro Prisciano, e nelle glosse *κάροινον nectar, caroenum aut potio* (*olla carenaria* 8, 186, 17 è detto il luogo dove esso si fa); il *defrutum* 3, 106, 1. 11, 229, 10-12. 12, 253, 12 sulla cui etimologia discordano gli antichi: Servio *georg.* 2, 93 *hinc defrutum dictum est, quod defraudatur et quasi fraudem patitur*, Palladio invece nel secondo dei luoghi citati spiega: *defrutum a defervendo dictum, ubi ad spissitudinem fortiter despumarit* nella quale etimologia conviene Nonio Marcello (*defretum*) p. 885 L; ed infine la *sapa* 12, 239, 11. 253, 21 di cui Varrone (Nonio loc. cit.) dice: *sapam appellabant, quod de musto ad mediam partem decoxerant.* Le glosse dànno per

---

(1) Alcuni codici e edizioni dànno *ablaqueare* SE iacgs.

(2) *Assellis* T, *vassellis* S, *duas sellis* E, *vasellis* i, *basellis* acgs.

(3) I Romani avevano l'abitudine di far bollire il mosto entro caldaie, per concentrarlo. Così il mosto prende uno speciale sapore di cotto dovuto ad una parziale combustione dello zucchero. Questi mosti cotti sono ancor oggi usitatissimi nell'Italia meridionale e centrale, dove spesso si preparano ancora nel modo antico. Anzi il vocabolo " sapa " è vivo tuttora nell'Italia meridionale.

defrutum, vinum quoquendo defraudatum et dictum defrutum eo quod quoquendo arescat minusve faciat, ed altre spiegazioni consimili; per *sapa, quasi dulce acidum vinum, vinum quasi dulciatum* e simili. Vini aromatici sono il *vinum myrtite*, preparato con bacche di mirto in fusione, di cui Columella descrive la preparazione 12, 38 e Palladio dà tre diverse ricette 2, 67, 15. 3, 110, 10. 3, 112, 18; il *vinum violaceum* 5, 155, 1; il *rosatum* 11, 228, 4 che Palladio insegna a fare anche senza rose; il *vinum scillite* 8, 186. 2 fatto con un'erba speciale, detta *scilla* (nome scientifico *scilla maritima*), con cui si prepara anche l'aceto *scilleticum* 8, 187, 2. Il *vinum acinaticium* 1, 9, 16 è un vino fino che si faceva sgranando gli acini e pigiando solo questi. Noteremo infine il *passum* 11, 229, 17 vino fatto di uva passa, la *posca* 4, 133, 25 miscela di acqua e aceto, in cui consiglia Palladio di mettere certe frutta a bagno per conservarle (il vocabolo è già in Plauto *mil.* 836, *truc.* 610), e l' aggettivo *stypticus* che riferito a *vinum* 2, 67, 11. 11, 229, 19 indica il vino di sapore aspro, astringente, che giova *stomacho laxiori*.

Dopo il vino, l'olio. La macchina per fare l'olio è detta *factorium* 11, 217, 2. Le olive venivano schiacciate con *trapetis* e torchiate col *prelo* 1, 23, 18. Questo è il torchio comune che serviva anche per l'uva, come indicherebbero le glosse: *prelum ubi oleum de olivis exprimitur, ubi torquetur oleum de uvis, materies qua uva exprimitur*. Il *trapetum* (1) era una specie di macina usata esclusivamente per le olive, ampiamente descritta da Catone *agr.* 20-22; le glosse dànno *trapetum molum in quo olivae mol[i]untur* e simili. Palladio nomina anche *rotulae* 1 23, 18 a proposito della preparazione dell'olio, ma che cosa abbia voluto indicare non c'è stato dato di sapere. Il vocabolo *amurca*, frequentissimo in Palladio 1, 9, 23. 1, 22, 18. 3, 112, 15. 4, 121, 8. 4, 128, 13. 4, 136, 10. 6, 171, 8. 10, 202, 15. 11, 216, 12. 12, 241, 3. 12, 250, 24 indica l'impurità che si separa dall'olio nella torchiatura. Le glosse dànno *amurca ἔλαιον τρυγία*, *amurca faex olei* ed anche *humor sordidus qui oleo subsidit*. *Columbades*

(1) Il termine " trappeto " è molto usato ancor oggi al posto di " frantoio " e si indica con esso tanto la macchina, quanto il locale stesso in cui si trova la macchina e si fa l'operazione.

olivae 12, 253. 3 sono dette le olive galleggianti e Palladio nel c. 22 del l. XII insegna il modo di confezionarle; ne parlano anche Celio *Ap.* 6, 248, Columella 12, 49, 8, Plinio 15, 16. Come già per il vino, anche per l'olio gli antichi avevano diversi modi di aromatizzarlo. Così abbiamo, secondo i vari elementi che lo compongono, l'olio *chamaemelinum* 1, 179, 6. *laurinum* 2, 68, 1. *lentiscinum* 2, 68, 8. *liliaceum* 1, 168, 1. *myrtinum* 2, 67, 8. *roseum* 1, 168, 5. *violaceum* 1, 155, 1.

Venendo a qualche vocabolo dell'apicoltura, ricorderemo i *crepitacula* 1, 43, 22 che in Columella 9, 12, 2 sono sonagli metallici i quali servono ad atterrire le api che cercano di fuggire, per costringerle a tornare verso l'alveare, e in Palladio 1, 21, 22 servono a far fuggire gli uccelli che si avvicinassero alle api; e il *pultarius* 7, 175, 22 recipiente donde si faceva uscire fumo *ex galbano et arido fimo bubulo* per la castrazione degli alveari. *Oestros* chiamano i Greci certe *maiores... apiculae* che nel mese di maggio *extremis favorum partibus... creantur, quas aliqui reges putant*, ma i Greci medesimi consigliano di ucciderli, *quia requiem concutiunt quiescentibus examinis* 6, 166, 12-15. Col miele in unione al vino e all'aceto si formavano due bevande, la prima era detta *oenomelli* 11, 228, 12 (1) vocabolo greco che i latini tradussero *mulsum*, la seconda *oxymelli* 12, 239, 6: mentre del primo termine non abbiamo che rare testimonianze, nominano il secondo Catone *agr.*, Columella, Plinio (più luoghi), Vegezio *mulom.*, Gargilio Marziale, Isidoro. Pure con nome greco è designato il miele rosato *rodomeli* 1, 168, 10 (1) e il miele diluito nell'acqua *hydromelli* 8, 186, 13 (1) nome rimasto anche oggi.

Notiamo ancora un certo numero di termini tecnici che non è stato possibile segnare nei gruppi antecedenti: *alfita* hordeum semimaturum... per manipulos ligabis et torrebis in furno 7, 179, 20-21 che compare in autori della decadenza per indicare una polenta di farina d'orzo, e anche polenta in generale: *polenta id est alfita* Plinio *med.* 5, 15: *nos graece dicimus alfita, latine vero polentam* Anthim. 64; *ames* 7, 172, 15. 10, 206, 1 termine proprio dell'*aucupium*, che troviamo anche in

---

(1) Nota che questi vocaboli compaiono solo come titoli e con lezione incerta.

Orazio *epod.* 2, 33, in Columella 9, 1, 3, nell'Itala, in Isidoro *orig.* 18, 7, 3 e in più glosse: *amites σιάλικες, ἰξευτικοὶ κάλαμοι, fustes aucupales, perticae aucupum*; *bipeda* 1, 22, 12. 1, 46, 5. 6, 167, 1 che nel senso di 'mattonella' non ha altre testimonianze; *capitatum* si capitatum facere velis 3, 97, 16. 12, 236, 21 detto di porro e di aglio, che si vuole ingrossino molto il capo; *cerussa* plumbo creatur adtrito 9, 196, 20 'biacca', in senso proprio come in Vitruvio (più luoghi), Plinio 28, 109. 34, 104 ed altrove, nel Codice Teodosiano 7. 20, 1, in Isidoro *orig.* 16, 23, 2; *colostra* (1) exiguum lactis... quod pastores colostram vocant 12, 246, 15 il primo latte delle femmine dopo il parto, in Plauto *Poen.* 367 (metaforico), Columella 7, 3, 17, Marziale 13, 38, 2, Plinio (più luoghi), nelle glosse *πρωτόγαλα, colustrum lac concretum in mammis*; *galbanum* 7, 175, 21 succo di un albero resinoso, come in Columella 8, 5, 18, Celso, Svetonio, Calpurnio Siculo, Lucano, Plinio, donde passa poi ad altro significato: *infidublum* 7, 175, 24 'imbuto' e (in varie forme) in Catone *agr.* (più luoghi), Vitruvio 10, 5, 2, Columella 3, 18, 6, Vopisco 50, 4 (2); *lomentum* ex afra pisa 11, 225, 8 propriamente 'farina' come in Marziale 3, 42, 1, in Plinio 50, 4 indica anche una specie di colore: le glosse dànno *σπῆγμα farina viva, mulieres in faciem mittunt*; *mastiche* 11, 226, 14 e in Plinio, in Scribonio, in Marcello e pochi altri scrittori della decadenza; *muria* 1, 40, 13. 12, 239, 6 'salamoia' vocabolo che ha parecchie testimonianze, già Catone *agr.* (più luoghi), Plauto *Poen.* 241, Orazio *sat.* 2, 4, 65, Quintiliano 8, 2, 3, Celso (più luoghi), Marziale (più luoghi); *palear* 4, 140, 3 'giogaia dei buoi' già in Varrone, poi in Virgilio, Ovidio, Columella, Stazio; *pilula* cupressi 11, 225, 20 detto dei frutti (bacche) di certi alberi, si trova in più luoghi di Plinio e in Pelagonio, in senso farmaceutico in Plinio e in S. Agostino; *sabanum* mella conficimus congestis in mundissimum

---

(1) In Plauto, e in due framm. di Lucilio e di Laberio in Nonio Marcello abbiamo la forma *colustra*. Secondo l'ERNOUT, *Les éléments dialectaux*, ecc. 143, *colostra* sarebbe la forma dialettale che non ha subita l'apofonia.

(2) Questa è la lezione dei codici; ma le edizioni hanno corretto *infundibuli* e le lezioni del Poliziano dànno *infidibuli*. Il vocabolo compare nel Forcellini nelle due forme *infidibulum* e *infundibulum*, nel Georges nella seconda forma soltanto.

sabanum favis ac diligenter expressis 7, 176, 4 ' tovaglia ' destinata specialmente per il bagno (glosse: *sabanum, linteum villosum, linteum ad balneum*) vocabolo d'origine incerta, greca, secondo Isidoro *orig.* 19, 26, 7 (1), spagnuola secondo altri, che compare in Celio *Ap.*, Vegezio *mulom.*, Pelagonio, Marcello *med.*, S. Girolamo e altri della bassa latinità; *salivatum* 5, 155, 11 medicina liquida o solida adoperata spesso dai veterinari, detta (secondo il Forcellini) *ex eo quod primo nimiae salivae compescendae institutum sit: vel quia salivam, id est cibi appetentiam restituat,* come in Columella 6, 10, 1 e in Plinio; *scobis* populi 13, 258, 14 segatura adoperata per ripulire i pavimenti (Cesare, Orazio *sat.*, Columella con più esempi, Vitruvio, Giovenale, Plinio, Elio Lampridio), qui usata ad altro scopo, per conservare una speciale varietà di mele; *splenicus* 8, 186, 11 usato sostantivamente per indicare chi soffre di milza, a cui Palladio consiglia il *vinum scillite*; *tectura* parietum 1, 19, 11 con scarsissime testimonianze nel senso di ' intonaco '.

Nota ancora i seguenti colori, tutti riferiti al mantello dei cavalli: 4, 143, 5-10 *badius* ' baio ' come in Varrone *men.* 358, Grazio 537, *Mulomedicina Chironis* 960, Ennodio *carm.* 2, 136, Isidoro *orig.* 12, 1, 49; *albineus* ' bianchiccio ' che è un *ἅπαξ εἰρημένον*; *cervinus* aggettivo abbastanza diffuso, ma riferito al colore del cavallo solo nella *Mulomedicina Chironis* 960 e in Isidoro *orig.* 12, 1, 48; *gilbus* ' cinereo ' (l'aggettivo ha anche la forma *gilvus*), in tal senso in un frammento di Varrone (Non. Marc. p. 112 L) e in Virgilio *georg.* 3, 82; *guttatus* ' chiazzato ' in Marziale 3, 58, 15 e Isidoro 12, 1, 48; *murinus* in tal senso in Columella 6, 37, 6 e Varrone; *murteus* ' baio scuro ' riferito a cavallo, in Tibullo, Petronio e Isidoro; *russeus* ' rosso carico '; *scutulatus* ' pomellato ' aggettivo non molto frequente, nel nostro senso è solo in Isidoro *orig.* 12, 1, 51 *scutulatus (equus) vocatus propter orbes, quos habet candidos inter purpuras.*

Come appendice a questo saggio sul vocabolario tecnico palladiano, darò un elenco di vegetali nominati dal nostro au-

(1) Dal greco *σάβανον* lo fa pure derivare il Walde, *Lateinisches etymologisches Wörterbuch* (Heidelberg 1905) 536.

tore, rinunciando però all'identificazione di alcuni di essi, che mi parve o evidente o non facile, e d'altra parte non indispensabile per il nostro intento: *abrotonum* 4, 135, 22, *amigdalum* mandorlo 1, 43, 4, *anethum* 3, 123, 7, *anesum* 3, 98, 15, *atriplex* atriplice o atrebice o bietolone 5, 152, 20, *avellana* noccilòo 3, 107, 20, *beta* barbabietola 3, 97, 7, *blitus* 4, 127, 1, *caerefolium* 10, 207, 1, *capparis* cappero 5, 153, 11, *citreago* 5, 157, 8, *colocasea* 3, 123, 11, *coriandrum* coriandolo 1, 22, 24, *cyma* 10, 206. 10, *cyminum* cumino 3, 98, 15, *cyperum* 12, 251, 4, *cunela* 3, 97, 3, *eruca* 2, 60, 8, *feniculum* finocchio 3, 96, 25, *farrago* 10, 203, 15, *filix* 2, 55, 9, *genesta* 1, 25, 2, *giddi* 10, 206, 22, *heleoselinon* 5. 152, 10, *herba symphoniaca* 11, 221, 21, *hipposelinon* 5, 152, 9, *hyoscianum* giusquiamo 1, 38, 1, *inula* 3, 98, 5, *intybum* 3, 123, 12, *lentiscus* 1, 43, 7, *melissofillum* 7, 177, 11, *melitotum* 11, 224, 21, *myxa* 3, 108, 5, *nasturcium* crescione 2, 60, 8, *ocimum* 5, 153, 4, *origanum* 1, 38, 22, *pastinaca* 3, 97, 1, *petroselinon* 5, 152, 11, *portulaca* 11, 221, 15, *propoma* 3, 113, 8, *rafanus* 2, 60, 10. *rododafnes* 1, 39, 13, *satureia* 12, 254, 9, *seriola* 4, 129, 25, *serpillum* timo 1, 4, 10, *siligo* 1, 8, 27, *sisymbrium* 5, 153, 9, *sorba* sorbo 2, 61, 4. *spartea* 12, 238, 20, *schœnuanthus* 11, 226, 13, *terebinthus* pistacchio 1, 43, 7, *tithymallus* 1, 44, 4, *thapsia* 1. 44, 4, *thymbra* 1, 43, 9, *ulpicum* agliporro 2, 61, 2, *vicia* 1, 11, 8, *zingiber* 11, 230, 13, *zizyfus* giuggiolo 1, 43, 4 (1).

Campobasso, marzo 1913.

---

(1) Alcuni di questi nomi puoi trovare in Stadler, *Lateinische Pflanzennamen in Dioskorides* " Arch. lat. Lex. " X 83-115 e XI 105-114.

Le guerre di Attalo I contro i Galati e Antioco Jerace.

Nota di ALDO FERRABINO.

1.

Molto fu discusso intorno alle lotte che Attalo I re di Pergamo sostenne contro i Galati e contro Antioco Jerace nella seconda metà del III sec. a. C. Ma negli ultimi tempi, — a giudicar dal CARDINALI *Il regno di Pergamo* (negli " Studi di Storia antica „ del BELOCH V 1906) pag. 17 sgg. 114 sgg.; e dallo STAEHELIN *Geschichte der Kleinasiatischen Galater* [2] (Leipzig 1907) pag. 18 sgg., — riuscí a prevalere, quasi come definitiva, una determinata opinione (1). La quale perché non ci sembra accettabile, riprendiamo qui lo studio dell'argomento: rinviando per la raccolta compiuta della bibliografia alle due opere citate or ora, non che alle indicazioni sparse nel contesto del presente lavoro. Cominceremo sùbito dall'esame delle fonti.

2.

LIVIO XXXVIII 16, 13-14, dopo aver narrato che i Galli occuparono l'Asia " cis Taurum „, dividendola in tre parti corrispondenti alle tre genti dei Tolostobogi (equivale a Tolistoagi) dei Trocmi e dei Tectosagi, afferma: *tantusque terror eorum nominis erat..... ut Syriae quoque ad postremum reges stipendium dare non abnuerent. primus Asiam incolentium abnuit Attalus, pater regis Eumenis (II); audacique incepto praeter opinionem omnium adfuit fortuna, et signis collatis superior fuit.* Questo

(1) Non l'accolse però il BOUCHÉ LECLERCQ *Histoire des Séleucides* (Paris 1913) pag. 112.

passo va confrontato con un altro di POLIBIO XVIII 41, 7: *νικήσας γὰρ μάχῃ Γαλάτας, ὃ βαρύτατον καὶ μαχιμώτατον ἔθνος ἦν τότε κατὰ τὴν Ἀσίαν, ταύτην ἀρχὴν ἐποιήσατο* [*Ἄτταλος*] *καὶ τότε πρῶτον αὑτὸν ἔδειξε βασιλέα.* Che è uguale a LIVIO XXXIII 21, 2-5. A tutti sono poi da ravvicinare PAUS. I 25, 2: *καὶ Γαλατῶν τὴν ἐν Μυσίᾳ φθορὰν ἀνέθηκεν Ἄτταλος*; e STRABONE XIII pag. 624: *Ἄτταλος διεδέξατο τὴν ἀρχήν, καὶ ἀνηγορεύθη βασιλεὺς πρῶτος νικήσας Γαλάτας μάχῃ μεγάλῃ.*

Ora chi legga senza prevenzioni questi passi concordi non può non dedurne che Attalo, — in un anno per ora ignoto, — denegò il tributo ai Galati, li combatté, li vinse; e ne assunse titolo regio. Se non che contro questo piú ovvio modo d'interpretare mossero obiezioni il NIEBUHR *Kl. Schriften* I 286, prima, poi piú altri citati dal CARDINALI a pag. 24 n. 7, fra cui è specialmente notevole il BELOCH " Hist. Zeitschrift „ N. F. 24 pag. 499 sgg. e a cui sono da aggiungere il BELOCH stesso *Griech. Gesch.* III 1, 458 sgg. e lo STAEHELIN a. c. Questi critici si fondarono sul carattere complessivo di POLIBIO XVIII 41: che è un rapido riassunto del regno di Attalo I in occasione della sua morte. Possibile, quindi, che la *μάχῃ* contro i Galati sia espression compendiaria per indicare una serie di lotte contro avversarii di cui i Galati erano o parevano parte precipua. Ma una lettura attenta dimostra incontrovertibilmente che Polibio parla e vuol parlare di una sola battaglia, da cui s'iniziò l'appellativo regio; e che se nel riassunto tace di molto, non si permette però nessun conglobamento di fatti come vogliono i suoi interpreti. E la riprova fornisce egli con quanto è scritto sùbito dopo il periodo riportato piú sopra (§ 8): *τυχὼν δὲ τῆς τιμῆς ταύτης καὶ βιώσας ἔτη δύο πρὸς τοὺς ἑβδομήκοντα, τούτων δὲ βασιλεύσας τετταράκοντα καὶ τέτταρα, σωφρονέστατα μὲν ἐβίωσε κτλ.* Onde appare chiarissimo che il *βασιλεύσας* va riferito all'*αὑτὸν ἔδειξε βασιλέα* del periodo precedente; e che perciò dall'autore una unica battaglia con i Galati è, non pur posta come inizio del regno, ma anche datata con esso inizio per informarci in modo preciso su la durata del regno e della vita. E poiché Attalo morí nel 197 a. C., il computo ci riporta per la sua vittoria al 241. Né è possibile impugnare, come fu fatto, il *βασιλεύσας* intendendolo = *ἄρξας*: perché, che cosa avrebbe impedito Polibio di usare, in tal caso, questo verbo o un simile, del pari

breve e perspicuo? Si potrebbe pensare che Attalo, a somiglianza p. e. di Tolemeo Sotere I (v. RUBENSOHN *Eleph. Papyri* [= " Aegypt. Urkunden „ Sonderheft] Berlin 1907 pag. 22; e cfr. E. MEYER *Aegypt. Chronol.* " Abhand. d. Berl. Akad. „ 1904 pag. 56 sgg.) comprendesse ufficialmente nel suo regno gli anni (o i mesi) di reggenza; ma ciò è escluso dalla iscrizione 268 *O.G.I.S.*: *βασιλεύοντος Ἀττάλου, πρώτου ἔτους*; dalla quale difatti risulta ch'egli datava il suo regno dal momento dell'assunzione del titolo. Né vale l'analogia, cui sùbito si penserebbe, con Jerone siracusano, pel quale pure è stato sospettato il *βασιλεύσας* di POLIB. VII 8, 5: essendo chiarissimo che anche in questo caso il *βασιλεύσας* ha il suo contenuto dal vicinissimo *βασιλεύς* e che quindi anche in questo caso va formulata un'ipotesi che di quel retto contenuto tenga conto. Verità, queste, che, così per Attalo, come per Jerone, vennero già ben messe in luce da PAUL MEYER *Der Ausbruch des ersten punischen Krieges* (Dissert. 1908, Berlin Ebering) pag. 10.

In somma, non solo non esistono ragioni né lievi né gravi per dubitare del testo di Polibio, cui risponde oltre a quel di Livio, quello di Pausania e Strabone; ma anche le pure possibilità addotte contro di esso non possono venir confermate da un esame attento delle circostanze e del nesso del breve capitolo.

Non ci sarebbe, dunque, bisogno di conferma. Abbiamo tuttavia un'altra testimonianza che ne conferisce una valida. Nelle *O.G.I.S.* ai nn. 269 e 276 (= FRAENKEL *Inschriften von Pergamos* 20. 24) si legge *Βασιλεὺς Ἄτταλος, νικήσας μά]χηι Τολιστ[οαγίους Γαλάτα]ς π[ερὶ πηγὰς] Καΐκ[ου ποταμοῦ, χα]ριστ]ή[ριον Ἀθ]ηνᾶι*; e *Ἀπὸ τῆς περὶ πηγ[ὰς] Καΐκου ποταμοῦ| πρὸς Τ[ολις]τοαγίους Γαλάτας μάχης*. Si tratta evidentemente di una vittoria di Attalo I contro i Galati, e contro *i soli Galati*. Di piú, rispetto al testo polibiano, è fornita l'indicazione geografica della battaglia: le sorgenti del Caico sono non molto lungi a Pergamo (THRAEMER *Pergamos* 195 n. 1). Se non che anche qui quelli stessi che tentarono di infirmare Polibio osservano che i Galati dell'iscrizione potrebber essere non gli unici nemici di una guerra, ma gli avversarii momentanei di una battaglia, essendo per qualsiasi motivo assenti gli altri loro alleati: cfr. per tutti CARDINALI 29 e STAEHELIN 20-21. Ma è ovvio che, come la

possibilità di una simile ipotesi non si può escludere in astratto, cosí è inammissibile in concreto di fronte a Polibio XVIII 41: perché questo luogo che riconoscemmo irrefutabile comunica a sua volta il proprio carattere all'epigrafe la quale gli corrisponde a pieno.

Resta quindi deciso che Attalo combatté e vinse i Galati presso le fonti del Caico nel 241 a. C. Con tale risultato bisogna ingranare la cronologia dei Signori pergameni. Il predecessore di Attalo I, Eumene I, morí nel 241: ciò risulta da STRABONE XIII 623 sgg. che gli dà 22 anni di dominio dopo 20 dati al suo predecessore Filetero, il quale non può essersi reso indipendente che nel 283-2 (cfr. per un computo piú minuto CARDINALI pag. 8 n. 3 e BELOCH *Gr. G.* III 2, 158-9).

Ora noi sappiamo che fra la successione di Attalo ad Eumene e l'assunzione del titolo regio da parte del primo dev'esser interceduto tempo bastevole per denegar l'imposta ai Galati, scontrarli e vincerli. Ma pochi mesi sono sufficienti per queste rapide imprese; cosí che la battaglia al Caico può ben cadere sulla fine della buona stagione 241, e la morte di Eumene I su l'inizio dello stesso anno. Ci sarebbe per tanto stato, col mutarsi della persona a capo del governo, un brusco rivolgimento di politica: di remissiva divenuta energica. La qual cosa corrisponde al carattere che Attalo I svelò anche in sèguito; e si connette dicevolmente col punto storico, ché proprio allora durava la guerra fraterna fra Antioco Jerace e Seleuco Callinico.

3.

Richiede ora la nostra attenzione un gruppo tutto diverso di testimonianze. Nella *O.G.I.S.* 275 = FRAENKEL *o. c.* 23: [*Ἀπὸ τῆς παρὰ τὸ*] *Ἀφροδίσιον πρὸς Τολιστοαγίους* | [*καὶ Τεκτοσάγ*]*ας Γαλάτας καὶ Ἀντίοχον μάχης*: è notizia di una vittoria di Attalo I contro i Galati (Tolistoagi e Tettosagi) e Antioco (Jerace). Essa avrebbe avuto luogo all'Afrodisio: parola che par doversi riferire a un tempio di Afrodite nelle vicinanze di Pergamo (FRAENKEL al n. 23). — A questa fonte, che è cronologicamente incompiuta, va accostato GIUSTINO XXVII 3, 1: *Interea rex Bithyniae Eumenes sparsis consumptisque fratribus bello intestinae*

discordiae, quasi vacantem Asiae possessionem invasurus, victorem Antiochum Gallosque adgreditur. Non è piú dubbio oramai che " Eumenes rex Bithyniae " sta per Attalo I (CARDINALI 20 n. 4, WILCKEN in PAULY-WISSOWA II 2160). D'altra parte è stato pure dimostrato che l'assalto di Attalo contro Antioco e i Galati deve, secondo Giustino, cader posteriormente alla guerra fraterna (CARDINALI 21 sgg. 115), con cui non ha alcun nesso. Acquistiamo per tanto, da un lato conferma dell'epigrafe 275, dall'altro integramento cronologico. — È da ricordare, in fine, TROGO *prol.* 27: *Galli Pergamo victi.* Il contesto (... *quo bello* [Seleucus] *Ancurae victus est a Gallis*: *utque Galli Pergamo victi ab Attalo*), che è il medesimo, nei suoi nessi, di GIUSTINO XXVII 3, dimostra che *Galli* deve corrispondere a *Galli atque Antiochus*, spiegandosi la caduta di quest'ultimo nome con l'esigenze del riassunto (KOEPP " Rh. Mus. " XL 120). Dal quale non si ricava una notizia geografica piú precisa che da Giustino; tutt'e due vanno sotto questo rispetto completati con l'iscrizione 275 (*Ἀφροδίσιον*).

Fin ora sappiamo di una vittoria di Attalo contro Galati e Antioco dopo il 237 (fine della guerra fraterna) nei confini pergameni. Piú in là ci conducono nuove epigrafi. Si veggano *O.G.I.S.* 274: *Ἀπὸ τῆς ἐμ Φρ]υγίαι τῆι ἐφ' Ἑλλ[η]σ|πόντωι πρὸς] Ἀντίοχον μάχης* (= FRAENKEL *o. c.* 22); — 278: *Ἀπὸ τῆς περὶ Κολ]όην | πρὸς Ἀντίοχον μ]άχης* (= FRAENKEL *o. c.* 58); — 279: *Ἀπὸ τῆς παρὰ τὸν Ἅρπασον ἐγ Κ]αρίαι | [πρὸς Ἀντίοχον μάχης* (= FRAENKEL *o. c.* 28); — cfr. 271: *Βασιλε[ὺς Ἄτταλος | Διὶ καὶ Ἀθην[ᾶι | ἀπὸ τῆς πα[ρὰ τὸν | Ἅρπασον ἐ[γ Καρίαι | πρ]ὸς [Ἀ]ντ[ίοχον μάχης* (= FRAENKEL *o. c.* 58). In tutti questi casi, ossia in tre battaglie, Attalo combatte, non piú Antioco con i Galati, ma il solo Antioco. I luoghi sono: la piccola Frigia su l'Ellesponto, ai confini di quella Bitinia di cui era capo Ziaela, suocero di Antioco Jerace; Coloe, uno dei tre siti che in Lidia portano questo nome, e probabilmente il lago cosí chiamato (NIESE *Gesch. d. Griech. u. Mak. St.* II 159; BELOCH III 2, 386); la Caria in un punto non ben precisato. Perché allor quando i Galati combattevano accanto ad Antioco vennero ricordati, il vederli taciuti è prova sicura che si tratta di avvenimenti cui non presero parte da vero. Manca la data.

La quale ci verrà fornita da un passo di EUSEBIO (*Chron.* I

p. 253 SCHOENE), che siamo ora in grado di interpretar rettamente, piú che non sia stato fatto fin qui da altri. Dopo aver dato cenno della battaglia di Ancira, egli dice: *attamen CXXXVII olympiadis anno quarto* (229/8) *bellum in Lydiorum terra bis aggressus* [Antigonus = Antiochus] *debellatus est et e regione Koloae cum Attalo proelium committebat; et CXXXVIII olympiadis anno primo* (228/7) *in Trakiam fugere ab Attalo coactus post proelium in Karia factum moritur*. Per solito (basti citare per tutti lo STAEHELIN 25) da questa testimonianza si ricava soltanto la notizia e la data di due battaglie, a Coloe e in Caria, 229/8 e 228/7. Ma credo se ne possa dedurre di piú. Certo, va posto nel 228/7 lo scontro in Caria. Certo pure, l'espressione *in Lydiorum terra* vale per Koloe ed è, nel periodo, spostata: sí che la lettura piú corretta dovrebbe trasportarla dalla prima proposizione nella seconda. Inoltre A. CARRIÈRE presso BOUCHÉ-LECLERCQ " Rev. d. univ. du midi „ tomo III anno XIX (1897) pag. 140, n. 7 avverte che il testo armeno di *bis aggressus* suona " s'étant mis en ligne, s'étant rangé en bataille „; che può valer bene, ci sembra, cosí ad indicare una guerra come un semplice combattimento. A meno incerto resultato conduce la versione che dal testo armeno del *Chronicon* ci ha dato J. KARST (*Griech. Christliche Schriftsteller* XX = *Eusebius Werke* V Leipzig 1911): a p. 119 traduce difatti " ... im Lydierlande zweimal in ein Treffen sich einlassend, unterlag er „. Comunque, son possibili due ipotesi: o che la battaglia a Coloe in Lidia sia stata preceduta da d u e a l t r e disfatte, non sappiam dove, ma nello stesso anno; o pure che la disfatta antecedente sia u n a s o l a, e che la seconda vada identificata con quella di Coloe. Quest'ultima ipotesi ritengo preferibile. Difatti, anzi tutto ne riesce piú chiara o meglio giustificata la struttura del periodo ch'è senza dubbio singolarissima. Poi, in quel caso Eusebio coinciderebbe con le notizie epigrafiche; le quali in vero ci attestano, prima di Coloe, u n a s o l a battaglia vittoriosa di Attalo contro Antioco, nella Frigia su l'Ellesponto. Ci diviene palese allora tutto il passo di Eusebio: due sono i territorii della lotta, la Frigia e la Lidia; in quella si svolge il primo attacco; in questa il secondo; entrambi in un solo anno, presumibilmente nelle due buone stagioni della ol. 137, 4, ossia nell'estate 229 e nella primavera 228. Il che si riconnette bene con la susseguente sconfitta in Caria, che può

cadere nell'estate 228 ed essere una tappa della ritirata verso sud cominciata dopo Coloe.

Possiamo adesso collegare la serie di queste tre vittorie di Attalo contro il solo Antioco, tutte con probabilità datate, con la battaglia dell'Afrodisio, che ritenemmo dovesse accadere dopo il 237. Tutti i critici sono concordi nel collocarla immediatamente avanti la disfatta in Frigia. E certo è lecito credere che Antioco avesse prima l'ajuto dei Galati contro Attalo, ajuto in cui quelli pure, già battuti, avevano il loro pro; cercasse poi quello di Ziaela, suo suocero, in Bitinia; e solo dopo la morte di costui (229/8: cfr. Stahelin 24 n. 5) (1) si riducesse in Lidia e in Caria. Noi quindi dovremmo datare nel 230, forse nella tarda estate, la campagna galato-antiochena, cui seguí nel 229 la ripresa del solo Antioco in Frigia.

Compiuta questa ricostruzione, del tutto a parte si deve studiare la epigrafe del Fraenkel *o. c.* 247 col. I: su la quale cfr. de Prott et Ziehen *Leges Graecorum sacrae e titulis collectae* fasc. I (Leipzig 1896) Nr. 17 pag. 37 sgg. Di essa daremo anzi tutto la trascrizione che si adotta da tutti senza eccezioni: cfr. Beloch *Gr. Gesch.* III 2, 460 sgg., Cardinali 40 n. 2, Staehelin 22 n. 1: [....*βασιλεὺς Ἄτ*]*ταλος τὴν δευ*[*τέραν ἐκεῖ μάχην ἐ*]*νίκησεν τοὺς* [*Γαλάτας κα*]*ὶ* [*Ἀ*]*ντίοχον*.... *κτλ.* Si discute quindi quale sia codesta *δευτέρα μάχη*; e gli autori citati la riconoscono in quella dell'Afrodisio, seconda dopo quella delle fonti del Caico. E senza dubbio l'identificazione sarebbe legittima, già che non è da sofisticare se al Caico combatterono solo i Galati, e all'Afrodisio i Galati con Antioco. Se non che a mio giudizio l'epigrafe fu male integrata. Essa è contenuta in una pietra, su cui si leggono sotto la scritta ....*ματεύς* (= [*γραμ*]*ματεύς*), due colonne. La prima, incompiuta, contiene, oltre le righe citate, poche altre meno leggibili ed è pel resto spezzata. La seconda è piú finita: comincia con *ὀκτωκαιδεκάτη*, cui seguono, dopo otto linee, il nome di un mese al genitivo (*Πανήμου*) e di un giorno (*τετρὰς ἐπιόντος*) al nominativo, e dopo alcune altre linee, di nuovo successivamente per due volte nomi di mesi (*Ἀπ*]*ολ*[*λων*|*ίου* e .....*ίο*]*υ*) e date, lacunose, di giorni. L'editore affermò trattarsi di un calendario di feste, ciascuna delle quali

(1) Cfr. Pozzi nelle “ Memorie „ di questa R. Accademia LXIII p. 358.

sarebbe indicata col mese e col giorno, cui tien dietro il motivo della solennità. Ne dedusse che alle due dovevano andare innanzi altre due colonne con i primi mesi dell'anno pergameno. Il v. PROTT in vece sostenne, fondandosi sul testo che segue all'*ὀκτωκαιδεκάτῃ*, le feste esser qui rassegnate in ordine di giorno, e sotto il numero di ciascun giorno esser indicati i mesi in cui esso è festivo. In tale ipotesi le colonne sarebbero tre, non quattro. Cotesta interpretazione è la corretta, e il testo non lascia dubbii di sorta: il 18 difatti era festivo in tutti i mesi per l'apparizione di Zeus *Τροπαῖος* e festivo nel solo mese Fratrio per il genetliaco d'un tale. Moviamo dunque da tal punto di veduta. Nell'insieme la II colonna contiene tre date in parte lacunose (*...όντος*), tutte sul finir del mese; poi il 18. La I reca in vece, integra, *δεκάτης*; incompiuta, *τὴν δευ[τέραν]*. Ora io non comprendo come chi lesse da prima la pietra non pensasse senz'altro a intender ancor questi due ultimi numeri come date del calendario: *δευτέρα*, *δεκάτῃ* e cosí via. È certo che questa ipotesi deve affacciarsi immediatamente allo spirito del critico. Essa poi non offre nessuna difficoltà integrativa. Basta compiere cosí: *ἐπεὶ βασιλεὺς Ἄτ]ταλος τὴν δευ|[τέραν τοῦ* (p. e. *Δίου*) *ἧι* (oppure *ἐν ἧι* a seconda della lunghezza del nome del mese) *ἐ]νίκησεν τοὺς | [Γαλάτας κα]ὶ [Ἀ]ντίοχον | [ἱερὰν ἐποίησεν μετὰ τῆς] δεκάτης | [ἧι.......]*. E ritenere che questo periodetto servisse a giustificar le feste dei giorni 2 e 10 in tutti i mesi dell'anno. Contro cosí fatta lettura ed interpretazione non crea difficoltà né lo spazio, che riescirebbe ben colmato, né l'uso epigrafico. Che difatti il mese possa seguire in genitivo la data del giorno, contro la consuetudine che nella stessa epigrafe col. II lin. 5 si osserva, dimostra, fra altro, il decreto di Canopo (*O.G.I.S.* 56 pag. 97 e 101). E per la forma del periodo basti rinviare all'epigrafe pergamena pubblicata dal FRAENKEL nella stessa raccolta al n. 246 lin. 13-14. Quanto poi alle ingerenze regie nelle istituzioni sacre pergamene e, quindi, nelle solennità (*ἱερὰν ἐποίησεν*) si rilegga il CARDINALI 281 sgg. Sol tanto, richiede una giustificazione il rapido passaggio dal 2 al 10, dal 10 al 18, al 27, agli ultimi due giorni del mese. Certamente le feste qui raccolte son pochissime; e si è ritenuto che fossero pur alcune nuove, aggiunte dallo Stato o da una piccola Congregazione privata. Questa seconda ipotesi è, ci sembra, la migliore: ché certo

lo Stato non aveva bisogno di aggiungere in età tarda (cfr. Fraenkel nel suo commento, e v. la forma dei caratteri) le solennità commemorative d'insigni vittorie. Ma se una Congregazione privata ha creduto, in un certo momento, di far sua propria una festa pubblica e di aumentar l'altre con taluna giunta in sèguito a decreti de' suoi magistrati, la prima colonna, delle tre, doveva contenere a punto il psefisma con cui si ordinava la raccolta delle nuove inserzioni e a cui seguiva forse, nella stessa colonna, qualche numenía; fin che la seconda colonna spiegava già le feste del 2 d'ogni mese. L'epigrafe dunque sarebbe una tavola comprendente non un vero e proprio calendario festivo, bensí un decreto in forza del quale una Congregazione assumeva per sé nuove feste e ne dava i motivi. E per conseguenza non vi era nessun cenno a nessuna " seconda battaglia „; ma sol tanto vi si datava secondo il giorno e il mese una battaglia contro i Galati e Antioco, che è, probabilmente, la stessa dell'Afrodisio. Quindi l'iscrizione Fraenkel 247 col. I avrebbe per noi qualche valore, solo quando non vi fosse caduto il nome del mese; ché ne trarremmo allora un integramento alla nostra cronologia su le lotte fra Attalo e i Galati con Antioco. Tale quale è in nostro possesso è, per quel fine, del tutto vana.

4.

Ne prescinderemo adunque per ricostruire l'insieme degli avvenimenti su cui la nostra indagine verte. Vi fu una prima guerra di Attalo I contro i Galati, segnalata per la sconfitta di questi ultimi alle fonti del Caico, l'anno 241 a. C.: in conseguenza della quale Attalo, che da pochi mesi reggeva, assunse titolo di re. Undici anni dopo, a quel che sembra, il 230 a. C. lo stesso Attalo ebbe a combattere contro Antioco Jerace; e lo ebbe avversario non unico, ma assistito prima dai Galati, coi quali lo batté presso l'Afrodisio; poi, che è incerto, da Ziaela di Bitinia nel 229, a malgrado del quale lo debellò nella Frigia Ellesponzia; da ultimo veramente ridotto alle sue proprie forze, che riuscí a prostrare, forse nella primavera dell'anno 228 a Coloe, nel tardo 228 in Caria. Le due guerre o campagne sono nettamente separate fra loro: e solo le assembra un poco la

presenza dei Galati nel principio della seconda. E senza dubbio è lecito questa presenza riconnettere con la disfatta anteriore che quelli avevan tócca e che forse bramavan vendicare. Ma nulla permette di infirmare una ad una le singole testimonianze, o di negare la complessiva armonia e intrinseca verisimiglianza della totale ricostruzione. Libero ancora resta il campo della congettura: il richiedersi, e il rispondere, se nesso esista, o quale, fra l'una e l'altra guerra; il valutarne i motivi storici e la conseguenze; per trasformare entrambe in vive fogge della realtà. Ma a tal fine non è qui luogo opportuno.

5.

Se non che gli stessi dati tradizionali ed epigrafici che ci condussero alla ricostruzione or ora esposta, per le vie sopra tracciate, condusser altri critici a due tesi diverse.

La prima, — sostenuta dal GAEBLER (1), dal KOEPP (2) e dal PEDROLI (3), — vuol collegare l'inizio della campagna galato-antiochena con la battaglia di Ancira, che pone al 235. Muove da Giustino che interpreta male; e giunge a risultanze inaccettabili. Fu, a ragione, respinta dal CARDINALI 22 e n. 4.

La seconda è stata posta innanzi dagli autori già citati in questo scritto a pag. 708; e fa delle due campagne una sola. A tale scopo adduce varii motivi, che ha organicamente e lucidamente esposti il CARDINALI 25-26. Sono essi quattro, e li rassegneremo uno per uno, confutandoli.

Si rileva anzi tutto che della guerra di Attalo contro i soli Galati fanno menzione Polibio Livio Strabone; là dove ne tacciono Giustino Trogo ed Eusebio. — Ora, sarebbe un errore di logica accettare questa argomentazione; o al meno, accettandola, bisognerebbe poi, a rigore, invertirla e negar fede alla guerra contro Galati e Antioco sol perché ne tacciono alcuni e pure alcuni ne parlano. Ma, di più, esistono ragioni evidenti che spiegano entrambi i silenzii. Da un lato Polibio (onde Livio) e Stra-

---

(1) GAEBLER *Erythrae* 49.

(2) KOEPP *o. c.* " Rh. M. „ XL (1885) 119; si badi però che questo autore pone Ancira nel 238.

(3) U. PEDROLI *Il regno di Pergamo* 16.

bone vogliono dire quando e perché Attalo assunse potere e titolo regi; e ricordarono quindi la battaglia contro i Galati del 241 a. C. Dall'altra Giustino ed Eusebio narrano di avvenimenti che riguardano Antioco; e rispetto a questo dovevano far cenno sol tanto della seconda campagna (230-228 a. C.), ché nella prima non ebbe parte alcuna.

La seconda argomentazione posta innanzi è che le conseguenze attribuite da Polibio e Pausania alla battaglia contro i Galati scaturirono in vece dalla guerra galato-antiochena. — Ora in realtà Polibio afferma soltanto che Attalo assunse titolo regio dopo aver battuti i Galati; e non c'è nessuna ragione per ritenere che egli non potesse assumerlo ma dovesse attendere fin dopo il 228. Certo, solo dopo quest'anno il regno fu assodato ed esteso; ma, certo del pari, era una vittoria contro i prepotenti barbari occasione appropriatissima a proclamarsi re. Ed è arbitrario che " la sua vera importanza quel titolo non poté acquistarla che dopo le vittorie di Attalo su Antioco Jerace ": giacché il titolo regio, come tale, ha la sua importanza da quando viene assunto, e l'ha in ispecie per quel computo cronologico del regno a cui Polibio si riferisce. Pausania poi I 8, 1 si esprime cosí: *ὁ δὲ Ἄτταλος Ἀττάλου μὲν παῖς ὢν, ἀδελφιδοῦς δὲ Φιλεταίρου, τὴν ἀρχὴν Εὐμένους παραδόντος ἔσχεν ἀνεψιοῦ. μέγιστον δέ ἐστίν οἱ τῶν ἔργων· Γαλάτας γὰρ ἐς τὴν γῆν, ἣν ἔτι καὶ νῦν ἔχουσιν, ἀναφυγεῖν ἠνάγκασεν ἀπὸ θαλάσσης* (1). Ossia egli riconnette la cacciata dei Galati nelle sedi che posteriormente occupavano con l'opera di Attalo; ma non specifica in nessun modo se di quest'opera si debba intendere la battaglia *ἐν Μυσίᾳ*, di cui parla I 25, 2 oppure un'altra guerra; né noi abbiamo il diritto d'interpretarlo in un modo piú tosto che in un altro. Non è dunque vero che la tradizione attribuisca alla guerra contro

(1) Quanto alla genealogia di Attalo I ch'è in questo passo di Pausania, si leggano: il Conze *Mamurt-Kaleh* (" Jahrb. des Inst. ", Erg.-heft IX) 38, che pubblica un'epigrafe in cui Attalo, certo il padre di Attalo I, è detto figlio di Filetero; il Hepding " Ath. Mitt. " XXXV (1910) 493 e il Dörpfeld *ibid.* 525, che da quella deducono esser Attalo, padre di Attalo I, un lontano parente del fondatore della dinastia pergamena, l'eunuco Filetero; in fine il Pasquali che, nel suo magistrale lavoro *I due Nicandri* (in " Studi ital. di filologia classica " XX 1913 pag. 70 n. 1), si associa ai critici citati e suppone che Filetero padre di Attalo fosse uno zio di Filetero eunuco.

i Galati gli effetti della guerra contro Antioco e i Galati; e ciò risulta ancor meglio da Livio XXXVIII 16, 14: *non ita tamen* [Attalus] *infregit animos eorum* [Gallorum] *ut absisterent imperio* etc.: passo che il contesto vuol riferito al *superior fuit* che precede, ossia alla battaglia contro i Galati nel 241.

Terza obiezione del Cardinali è quest'altra. " È ovvio pensare che le notizie della vittoria Galata sorgano con riferimento alla notizia del XXVII prologo di Trogo, e in tal caso poiché questa va applicata alla campagna condotta da Attalo contro Antioco e i Galati insieme di cui parla Giustino, anche loro dovrebbero avere la stessa applicazione ". Confesso però di capir poco il periodo che ho trascritto. Non intendo difatti perché debba correre un nesso qualunque fra Trogo *prol.* XXVII e Polibio XVIII 41, 7. Nel primo si parla di una vittoria di Attalo contro i Galati (e Antioco, va aggiunto) *Pergamo* (v. sopra pag. 711). Nel secondo, della causa per cui Attalo assunse titolo regio. Sono ben distinti, persin lontani; e non vedo da vero ragione alcuna per affermare dell'uno quel che vale per l'altro.

Da ultimo viene addotto che la fioritura artistica seguìta alle vittorie di Attalo le esalta quasi esclusivamente come riportate su i Galati, e tace o sorvola su Antioco: onde si spiegherebbe in modo analogo il testo di Polibio e di Strabone. Che è verissimo; e ci varrebbe assai, ove fosse necessario giustificare un equivoco delle nostre fonti. Ma è inutile, se quell'equivoco si dimostra inesistente e incongetturabile. Ad ogni modo non bisogna dimenticare che si tratta sempre di ipotesi nostre su dati vaghi; e che, quindi, una ipotesi non può servir a rincalzo dell'altra.

6.

Possiamo dunque conchiudere. Le nostre fonti, cosí letterarie che epigrafiche, sono esplicite nel distinguere la prima guerra coi Galati dalla seconda coi Galati e Antioco. Le date ci son fornite in forma esplicita da Polibio per l'una, da Eusebio per l'altra. Nei limiti di questa che può definirsi certezza sono probabili alcune congetture intorno al succedersi degli scontri e al loro valore strategico. Ma di piú non è lecito. Ed è insostenibile il far delle due campagne una sola.

Gli strateghi di Pergamo.

Nota del Dr. GIUSEPPE CORRADI.

Nella città di Pergamo, come nelle altre città del regno degli Attalidi e degli altri stati ellenistici, si trovavano numerosi funzionarî amministrativi, quali i *ταμίαι*, l'*ἐπὶ τῶν ἱερῶν προσόδων*, i *νομοφύλακες*, gli *ἀστυνόμοι*, ecc. Ma il posto superiore nella gerarchia dei funzionarî pergameni, che nominalmente spettava al *πρύτανις* (1), nel fatto era senza dubbio occupato dagli strateghi. Questa denominazione, alla quale dapprima andava naturalmente unito il senso di comandanti militari, venne poco per volta nella maggior parte delle città greche (nelle quali era divenuto d'uso quasi generale) a subire, come tante altre denominazioni, un mutamento di significato, di modo che i magistrati a cui essa veniva attribuita, si trovarono da ultimo ad essere incaricati di funzioni piuttosto civili che militari (2).

(1) L'autorità del *πρύτανις* era ormai stata ridotta si può dire ad una autorità puramente nominale; cfr. le mie *Ricerche Ellenistiche*, I *Πρύτανις* nella " Riv. di Filol. e di Istruzione Classica „, XXXIX (1911), pag. 504 segg. Sulle funzioni dell'*ἐπὶ τῆς πόλεως* abbiamo troppo scarse indicazioni per trarne conseguenze sicure; cfr. Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, II, 483, lin. 57 e n. 27. Sugli strateghi di Pergamo vedasi anche G. Cardinali, *Il regno di Pergamo*, negli " Studi di Storia Antica „ pubblicati da Giulio Beloch, fasc. V, pag. 233, 254, ecc.; il Cardinali però non si è soffermato di proposito su tutte le funzioni di carattere particolarmente amministrativo che gli *στρατηγοί* ebbero nella città di Pergamo. Cfr. ancora P. Ghione, *I Comuni del regno di Pergamo*, nelle " Memorie dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino „, Serie II, Tom. LV (1904), pag. 111.

(2) Certo accanto agli strateghi magistrati cittadini continuarono pure a sussistere negli Stati Ellenistici, e differenziati da essi, gli strateghi comandanti dei corpi d'esercito, sicchè il vocabolo *στρατηγός* lo si trova usato ad indicare funzionarî i quali avevano funzioni e competenze molto differenti; cfr. anche la mia nota *Στρατηγία* nel " Bollettino di Filologia classica „, XVIII, fasc. 7 (gennaio 1912), pag. 157 segg.

La stessa evoluzione noi vediamo che è avvenuta anche in Pergamo, e possiamo anche, specialmente dall'esame delle iscrizioni, formarci un concetto abbastanza approssimativo delle funzioni principali che gli strateghi ebbero in questa città.

Anzitutto noi troviamo che gli strateghi espongono nell'assemblea popolare il proprio parere sopra le questioni intorno alle quali l'assemblea deve appunto prendere le sue deliberazioni. La formula ben nota *γνώμη στρατηγῶν* ricorre in tutti i decreti pergameni di cui abbiamo notizia, tanto prima della dominazione regia, quanto durante la dominazione degli Attalidi ed ancora dopo di essa nell'età romana (1). Fa eccezione soltanto un decreto nel quale vengono tributati onori agli stessi strateghi; ed in questo decreto la proposta viene fatta da un privato: *Ἔγνω δῆμος· Ἀρχέστρατος Ἑρμίππου εἶπεν· ἐπειδὴ κτλ.* (2).

Lo Swoboda (3) con altri sostenne giustamente che nei primi si dovevano vedere dei decreti *probuleumatici* propriamente detti. cioè di quei decreti nei quali la *βουλή* non solo aveva fatto conoscere al popolo la questione che di essi doveva formare l'oggetto, ma gli veniva anche indicato il modo secondo il quale la questione stessa doveva essere decisa; mentre nell'ultimo si aveva l'esempio di un vero decreto popolare, di un decreto cioè nel quale il modo della deliberazione veniva proposto da un cittadino qualsiasi. Gli strateghi avrebbero adunque avuto in Pergamo, come in altre città greche in cui ricorre la medesima

---

(1) Anteriore all'età regia è probabilmente l'iscrizione Fränkel, *Altertümer von Pergamon, VIII, Die Inschriften von Pergamon*, I, pag. 3, N. 5 (= Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 265 = Michel, *Recueil d'Inscriptions Grecques*, N. 18); alla dominazione degli Attalidi si riferiscono le iscrizioni Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 167, 224 (= Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 323), 249 (= Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 338 = Michel, *Recueil d'Inscr. Grecques*, N. 518); posteriori sono le iscrizioni Fränkel, *Inschr. von Pergamon*. II, N. 251, 255, lin. 10; e così il decreto riferito in Ioseph., *Antiq. Iud.*, XIV, 10, 22. Così pure in "Athen. Mitteil. „, XXXIII (1908), pag. 375, N. 1, lin. 7; pag. 379, N. 2; XXXV (1910), pag. 401, N. 1 *a*, lin. 7.

(2) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 18, lin. 21 (= Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 267 = Michel, *Recueil d'Inscr. Grecques*, N. 516); cfr. Curtius, in "Hermes „, VII (1873), pag. 45.

(3) "Rhein. Mus. „ XLVI (1891), pag. 498; vedasi Cardinali, *Il regno di Pergamo*, pag. 248, n. 4, e cfr. anche Szanto, *Griech. Bürgerrecht*, pag. 78.

formula, il diritto di dirigere non solo le sedute del δῆμος (cfr. la già citata iscrizione Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 18, lin. 14 segg.: *κρίνοντες οὖν δίκαιον εἶναι | μὴ ὀλιγωρεῖν τῶν οὕτως ἐπιστατούντων, ἵνα καὶ οἱ μετὰ ταῦτα | δεικνύμενοι πειρῶνται κατὰ τρόπον προΐστασθαι τοῦ δήμου, κτλ.*) ma anche di presiedere alla *βουλή* (1).

E poichè a questa opinione non sembra che si possano fare obbiezioni di qualche rilievo, appare subito quale fosse la importanza e quanto estesi fossero anche i poteri di questi magistrati, o per meglio dire del signore che essi (pur non avendo veste di funzionarî regî) rappresentavano nella città e dal quale venivano eletti (2). È evidente infatti che a questo modo essi

---

(1) Gli Attalidi certamente dovettero mirare ad estendere il loro potere in Pergamo trasformandone a poco a poco la costituzione; e forse Filetero, come nota il Cardinali, *Il regno di Pergamo*, pag. 255 n., cercò che gli strateghi assumessero la presidenza del Consiglio ed il diritto di riferire al popolo la proposta della *βουλή*. Ed Eumene I probabilmente giunse ad avocare a sè la nomina degli strateghi, togliendola al popolo Può darsi che più tardi fosse restituita al popolo l'elezione. Così veniva anche tolto gradatamente ai privati il diritto di proposta. Il Cardinali, op. cit., pag. 256 seg., ritenne che i privati non potessero esercitare tale diritto di proposta direttamente, ma dovessero ricorrere alla mediazione degli strateghi, e propose di conseguenza che in una iscrizione (Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 260) si leggesse: *Εἰσανγειλάντω[ν τῶν δείνων· γνώμη στρατηγῶν — ἔδοξεν τ]ῶι δήμωι*. Ma questa sua ipotesi, basata su deboli argomenti, va ora respinta, poichè l'integrazione già proposta dal Fränkel: *Εἰσανγειλάντω[ν τῶν στρατηγῶν ἔδοξεν τ]ῶι δήμωι*, ha avuto piena conferma da alcune iscrizioni venute più recentemente alla luce: cfr. " Athen. Mitteil. „, XXXII (1907), pag. 263, N. 8 *a*, lin. 44: *Εἰσαγγειλάντων τῶν στρατηγῶν εἰς τὴν βουλ[ὴν] καὶ τὸν δῆμον κτλ.*; XXXV (1910), pag. 407, N. 2; pag. 411, N. 4; ed in questo modo va pure integrata l'iscrizione " Athen. Mitteil. „, XXXII (1907), pag. 266, cfr. XXXV (1910), pag. 413. Perciò è da seguire piuttosto l'opinione del Fränkel, che durante l'età attalica soltanto agli strateghi fosse riservato il diritto di fare proposte all'assemblea.

(2) È assai notevole l'espressione che ricorre nella citata iscrizione Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 18, l. 21 seg.: *ἐπειδὴ οἱ κατασταθέντες ὑπ' Εὐμένους στρατηγοί*, alla quale seguono i nomi dei cinque strateghi di Pergamo. Da ciò si vede, come ben nota il Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 267, nota 12, che i supremi magistrati cittadini non erano più eletti nei comizî del popolo, ma erano nominati direttamente dal principe; vedasi la nota precedente, e cfr. Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 224 = Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 323, lin. 7 seg.: *παρὰ δὲ [τῶι | βα]σιλεῖ προεδρίας*

avevano la direzione di tutto quello che si riferiva all'esercizio della sovranità popolare, e che il loro ufficio aveva in sostanza anche un carattere politico (1).

Le competenze degli strateghi erano però anche estese specialmente nell' amministrazione cittadina propriamente detta. Così nella lettera che Eumene I indirizza alla città perchè gli strateghi da lui eletti vengano fatti oggetto di convenienti onori (2), si trovano dapprima menzionate le funzioni politiche alle quali ho accennato (alla lin. 4 seg.: *τῶν τε γὰ[ρ .... μ]ὲν πεπολίτευνται δικαίως* (3)), e poi le funzioni propriamente amministrative (lin. 6 segg.: *[καὶ τάς τε κοινὰς τ]ῆς πόλεως καὶ τὰς ἱερὰς προσόδους* | *[οὐ μόνον ἐ]φ' αὐτῶν* (4) *ᾠκονομήκασι*

καὶ τιμῆς τῆς πρώτης μετεῖχεν κτλ., e v. appresso n. 4. — Sul funzionamento legislativo della città di Pergamo vedasi Cardinali, *Il regno di Pergamo*, pag. 246 sgg.; cfr. anche Chapot, *La Province Romaine Proconsulaire d'Asie*, nella " Bibliothèque de l'École des Hautes Études ", fasc. 150, pag. 195.

(1) Anche altrove gli strateghi ci appaiono rivestiti delle stesse funzioni politiche che gli strateghi di Pergamo; così a Pitane negli ultimi anni dell'età attalica (Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 335: *στρατηγοὶ εἶπαν*, cfr. Ghione, *I Comuni del regno di Pergamo* cit., pag. 112); e così pure a Sardi (Joseph., *Antiq. Iud.*, XIV, 10, 24: *στρατηγῶν εἰσηγησαμένων*, e vedasi *CIGr.*, II, 3461, 3462; Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 268 = Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, II, 437; Le Bas-Waddington, 626, ecc.).

(2) È la citata iscrizione Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 18.

(3) Così si limita a leggere il Dittenberger, mentre il Fränkel aveva supplito: *τῶν τε γὰ[ρ* | *ἱερῶν καὶ τῶν πολιτικῶν πάντα μ]ὲν κτλ.*, lezione accettata dal Michel, *Recueil d'Inscr. Grecques*, N. 38. Il Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 267, nota 3, ha osservato giustamente come col verbo conservato nell' iscrizione non siano punto convenienti i vocaboli suppliti dal Fränkel.

(4) Anche qui seguo la lezione del Dittenberger; il Fränkel, seguito dal Michel, legge alla lin. 6: *[οὐ μόνον δὲ τάς τε τ]ῆς κτλ.*, ed al principio della linea seguente: *[τὰς οὔσας ἐ]φ' αὐτῶν κτλ.* Va ancora ricordato che espressioni simili ricorrono pure in un altro decreto già citato (Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 224 = Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 323), in cui è lodato un *σύντροφος* del re perchè avendo cercato la sua patria (cioè Pergamo, dai cui cittadini emana questo decreto) *διαφέρειν παρὰ τὰς ἄλλας πόλεις ἐν ταῖς κατὰ τ[ὴν* | *π]ολιτείαν οἰκονομίαις, τὰ μὲν [π]αραλελειμμένα εἰσηγησάμενος ἐπὶ τῶ[ι* | *σ]υνφέροντι διώρθωσεν, κτλ.* (lin. 11 segg.). Egli aveva avuto quella che per i cittadini di Pergamo è la *μεγίστη τιμή* (lin. 5) o la *πρώτη τιμή* (lin. 8), era stato adunque stratego della città. Cfr. però anche Cardinali, *Il regno di Pergamo*, pag. 256.

συμφερόντως τῶι δήμωι καὶ | [*το*]*ῖς θεοῖς, ἀλλὰ καὶ τὰ παραλελειμμένα ὑπὸ τῶν πρότερον* | *ἀρχείων ἀναζητήσαντες καὶ οὐθενὸς τῶν κατεσχηκότων* | *τι φεισάμενοι ἀποκατέστησαν τῆι πόλει· ἐπεμελήθησαν δὲ* | *καὶ περὶ τῆς ἐπισκευῆς τῶν ἱερῶν ἀναθημάτων κτλ.*). Agli strateghi spettava adunque, come risulta da questa iscrizione, una ingerenza generale su tutte le entrate e le spese della città; e fra queste ultime tenevano certo il primo luogo le spese necessarie alla conservazione delle opere e degli edifizi pubblici. A questo riguardo anzi noi troviamo in Pergamo una completa gerarchia di funzionari, della quale fortunatamente parecchie cose nuove abbiamo potuto conoscere in seguito alla scoperta di quel *βασιλικὸς νόμος* che un astinomo pergameno aveva fatto esporre nell'età imperiale romana e che ci fu rivelato dagli scavi parecchi anni or sono (1).

In linea generale, a seconda dell'importanza dell'opera da sorvegliarsi, il magistrato inferiore esamina dove sono i danni, investiga per conoscere chi ne è stato la causa e cerca di indurlo a rimettere le cose nel loro stato primitivo; nel caso in cui non venga a questo modo raggiunto l'intento, il magistrato di grado superiore se ne occupa egli stesso (2), riscuotendone, da chi ha cagionato il danno, l'importo aumentato di una metà, ed imponendogli ancora una multa giudiziaria, limitata questa ad una somma fissa: nello stesso tempo, ove il primo magistrato cui spetta la sorveglianza venga meno al suo dovere, viene a sua volta punito dal magistrato superiore con una multa parimenti fissa. Ora questo diritto di una tale sorveglianza di carattere finanziario sui magistrati speciali dell'amministrazione cittadina, mi pare che si colleghi strettamente con quell'ufficio appunto di presiedere la *βουλή*, la quale tra i suoi uffici essen-

(1) È la iscrizione divenuta ben presto famosa sotto il nome di iscrizione degli astinomi, pubblicata dal Kolbe in "Athen. Mitteil. „ XXVII (1902), pagg. 47-54, N. 71, con ampio commento, pagg. 55-77, e riportata poi anche dal Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, II, 483.

(2) Oppure se ne occupa insieme col primo (iscr. cit., col. II, lin. 18 segg. = Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, II, 483, lin. 40 segg.), e specialmente quando il primo abbia disobbedito (ibid., col. I, lin. 48 segg. = Dittenberger, cit., lin. 15 segg.).

ziali aveva generalmente anche quello della direzione generale delle finanze cittadine (1).

È noto che nella costituzione ateniese ogni magistrato aveva talune funzioni di carattere giudiziario, in quanto a lui spettava di condannare al pagamento di una determinata somma (*ἐπιβολή*) coloro che si fossero resi colpevoli di comuni mancamenti, nell'àmbito delle sue funzioni; ora noi vediamo che anche in Pergamo (ciò che del resto avveniva pure in parecchie altre città) eravi un uso affatto analogo.

Per ciò che si riferisce agli strateghi in particolare noi vediamo che di alcune opere pubbliche spetta loro la sorveglianza diretta, poichè essi soli possono e devono punire colui il quale abbia cagionato dei danni (2); in altri casi essi debbono punire il magistrato disubbidiente o trascurante del suo dovere, al quale però resta sempre a sua volta la facoltà di punire chi è stato effettivamente causa del suo danno (3); essi dunque in simili casi sono essenzialmente destinati alla sorveglianza dei magistrati stessi. Tutto ciò, ben s'intende, nel caso in cui si conosca il responsabile del danno arrecato, e da lui si possano ripetere il risarcimento del danno e le spese necessarie. Quando poi si tratti di danni avvenuti per necessità di cose, alla riparazione dei quali deve provvedere la cassa cittadina, allora gli strateghi vengono soltanto richiesti perchè si pongano in relazione col magistrato finanziario speciale, il quale deve naturalmente fornire le somme occorrenti (4).

---

(1) Aristot., *Polit.*, VI (6), 8, p. 192; e ciò infatti avveniva, per esempio, anche in Atene, a Samo, a Delo; cfr. Swoboda, l. c.

(2) Iscr. cit., col. I, lin. 37-40 = Dittenberger, cit., lin. 4 segg.: [*καὶ ἐὰν*] *μηδ' οὕτως πείθωνται*, | [*οἱ μὲν*] *στρατηγοὶ ζημιώσαντες αὐτοὺς* | [*τῆι*] *ἐκ τοῦ νόμου ζημίαι παραδότωσαν* | *τῶι πράκτορι πράσσειν*. Di quale specie di edifizî si tratti qui non possiamo determinare; ma dovettero essere senza dubbio taluni dei più importanti.

(3) Iscr. cit., col. II, lin. 33 segg. = Dittenberger, cit., lin. 55 segg.: [*Ἐὰ*|*ν δέ τι μὴ ποιήσ*[*ω*]*σιν οὗτοι* (cioè *οἱ ἀστυνόμοι*) *τῶν γεγραμ*|*μένων ζημιούσθωσαν ὑπὸ τῶν στρατη*|*γῶν καὶ τοῦ ἐπὶ τῆς πόλεως καθ' ἕκαστον*| *ἀτάκτημα δραχμαῖς πεντήκοντα*.

(4) Iscr. cit., col. IV, lin. 8 segg. = Dittenberger, cit., lin. 164 segg.: *προσαγγελλέτωσαν* (cioè gli astinomi) *τοῖς στρατηγοῖς καὶ τῶι ἐπὶ* | *τῶν ἱερῶν προσόδων ὅπως διὰ τούτων γεί*|*νωνται αἱ ἐκδόσεις*. E qui non sarà del tutto superfluo ricordare ciò che viene aggiunto nella più volte citata let-

Gli strateghi, insomma, appaiono addetti quali veri moderatori per il buon andamento di tutto il congegno amministrativo della città, e si deve ancora aggiungere che gli astinomi, ai quali spetta pure la sorveglianza delle cisterne private, debbono anche portarne la lista *εἰς τὸ ἀρχεῖον* (1), vale a dire *πρὸς τοὺς στρατηγούς* (2), il che indica come l'archivio cittadino (3), cioè il luogo nel quale si conservavano tutti i documenti di carattere pubblico, era sotto la diretta sorveglianza degli strateghi, e prova anche l'estensione delle loro attribuzioni per questo riguardo.

Le spese della città adunque venivano in generale fatte per opera degli strateghi. Fra queste avevano certo anche una notevole importanza quelle rese necessarie per le onoranze stabilite per qualsivoglia ragione a spese pubbliche. Così nell'età romana noi vediamo appunto che gli strateghi sono assai spesso incaricati di provvedere alla collocazione di statue decretate a personaggi illustri (4); ma sappiamo anche che nell'età attalica

---

tera di Eumene I: *ἐπεμελήθησαν δὲ | καὶ περὶ τῆς ἐπισκευῆς τῶν ἱερῶν ἀναθημάτων, ὥστε τούτων | εἰς ἀποκατάστασιν ἀγηγοχότων τὰ προγεγραμμένα καὶ τοὺς | ἐπιγινομένους στρατηγοὺς ἐπακολουθοῦντας τῆι ὑφηγήσε[ι] | εὐχερῶς δύνασθαι διοικεῖν τὰ κοινά.* Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 18 lin. 10 segg.

(1) Iscr. cit., col. IV, lin. 60 = Dittenberger, cit., lin. 216.

(2) Iscr. cit., col. IV, lin. 37 = Dittenberger, cit., lin. 193.

(3) Esso era dapprima conosciuto a Pergamo solo per l'età romana dalla iscrizione Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 591, lin. 10 segg.: *τούτου ἀντίγραφ[ον ἀπετέθη | ἐτ]εὸν εἰς τὸ ἐν Περ[γάμῳ ἀρχεῖ]]ον.* Il decreto riportato da Flavio Giuseppe menziona pure i *δημόσια γράμματα* (Ioseph., *Antiq. Iud.*, XIV, 10, 22). Per l'*ἀρχεῖον* vedasi pure, oltre Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 268, lin. 18 (a Nacrasa, del tempo di Attalo I), Dareste in " Bull. de Corr. Hell. " VI (1882), pag. 241 segg.; e cfr. XI (1887), pag. 395. Per gli *ἀρχεῖα*, collegi di magistrati, cfr. Dittenberger, *Syll.*², I, 239, lin. 7; *Or. Gr. Inscr.*, I, 219, lin. 149 e n. 41, ecc. Si veda ancora Keil und Premerstein, *Bericht über eine zweite Reise in Lydien*, nelle " Denkschriften der Kais. Akad. der Wissenschaften in Wien ", Philos.-hist. Klasse, LIV (1911), N. 97, 109 (a Thyateira), 196 (a Sardi); e la iscrizione N. 5, di una località non identificata della Lidia, nella quale si legge (lin. 10 sgg.): *Ὁμοίως το|ύτων ἀποτεθήσεται τὸ | ἁπλοῦν ἀντείγρ[α]φον εἰς τὸ | ἀ[ρχεῖο]ν.*

(4) Le Bas-Waddington, *Inscriptions d'Asie Mineure*, 1721; Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 383, 395, 397, 441; cfr. 384, 398, ecc. Anche altrove noi troviamo che gli strateghi fanno innalzare statue, la cui erezione

essi debbono incaricarsi della preparazione e della collocazione della stele ricordante gli onori concessi ai Tegeati, facendosi consegnare l'ammontare delle spese dai *ταμίαι* (1). In questa stessa occasione essi appaiono ancora come i rappresentanti di tutta la cittadinanza, perchè ad essi stessi viene affidato l'incarico di fare la pubblica *ἀναγόρευσις* di tali onori (2). Analogamente in una iscrizione che appartiene ai primi anni dell'età romana, o forse ancora agli ultimi anni della dominazione degli Attalidi, troviamo che agli strateghi è affidata la cura di sorvegliare che si faccia un giuramento da parte della città (3); ed ancora vediamo che al tempo di Eumene I viene dato agli strateghi l'incarico di sacrificare una vittima in onore del dinasta ed in nome della città stessa: *διδότωσαν δὲ αὐτοῖς* (cioè *τοῖς στρατηγοῖς*) *ἀεὶ οἱ ταμίαι οἱ κα|τιστάμενοι κατ' ἐνιαυτὸν ἐν τοῖς Εὐμενείοις πρόβατον, οἱ δὲ | λαμβάνοντες θυέτωσαν Εὐμένει εὐεργέτηι ἵνα φανερὸς ἦι ὁ δῆμ[ο]ς | ἅπασιν εὐχάριστος ὤν* (4).

Come ho già sopra osservato, le attribuzioni militari degli strateghi indicate dallo stesso loro nome erano state sopraffatte dalle funzioni di carattere civile ed amministrativo; tuttavia non sarebbe in modo assoluto escluso che in qualche caso avessero ancora ritenuto qualche parte delle loro attribuzioni primitive. Per vero noi non ne troviamo accennato nulla per l'età attalica; ma in una iscrizione appartenente ad un tempo di poco

---

è stata decretata dal popolo; così a Chio in onore dell'Imperatore Lucio Aurelio Vero, *CIGr.*, II, 2217: ...*ἐπιμεληθέντος τῆς | ἀναστάσεως Πομπηΐου| Λατρίου τοῦ πρώτου στρατηγοῦ.*

(1) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 156, lin. 24 segg.: *[τὴν] δὲ [στά]σιν τῆς [στήλης] καὶ τὴ[ν | ἀναγραφὴ]ν [ποήσασθαι τοὺς στρατηγούς, τοὺς δὲ τ]αμίας | [δοῦναι ἐς αὐτὰ τὸ ἀνάλωμα ἐκ τῶν πολιτικῶν π]ροσ[όδων].* Come si vede l'iscrizione a questo punto è assai guasta, ma la ricostruzione sembra abbastanza sicura; da ciò abbiamo una conferma dell'interpretazione che si è data sopra intorno alle relazioni che intercedono fra il tesoriere sacro e gli strateghi.

(2) Iscr. cit., lin. 14 seg.: *τὴν δὲ ἀναγόρευσιν [τοῦ | στεφάνου] πο[ήσ]ασ[θ]α[ι] τοὺς στρατ[η]γούς.*

(3) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 251, lin. 33 seg.: *τοὺς δὲ στρατηγοὺς τοὺς ἐπ[ὶ] | Καβείρου πρυτάνεως ἐπιμεληθῆναι, ὅπως συντελεσθῇ ὁ ὅρκος καθάπερ γέγραπται.*

(4) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 18 = Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 267, lin. 33 segg.

posteriore all'età regia si potrebbero ancor vedere delle traccie, quantunque non ben sicure, di uno stratego al quale venne affidato un comando militare in una guerra, almeno se si accetta la lezione del Fränkel: [*Ὁ δῆμος ἐ*]*τίμησεν* | [. . . . .]*άρχον κατασταῖ*|[*θέντα στρατηγὸν ἐν*] *τῶι συνστάντι* | [*πολέμωι, σώσαντα τὴν ἀπ*]*ολει(φ)θεῖσαν ὑπὸ* | [*Μιθραδάτου οὐσίαν ἐν τῆι ἀ*]*κροπόλει καὶ συντη*|[*ρήσαντα Ῥωμαίοις πᾶσαν*] *πίστιν ἀεὶ ὡς τῇ συ*|[*γκλήτωι πειθαρχοῦντα, γ*]*ενόμενον δὲ κα*[*ὶ* | *σύμβουλον καὶ φίλον τῶ*]*ν ἡγουμένων, ἔ*[*τι* | *δὲ ἀναστραφέντα καλῶς*] *πρὸς πάντας* (1). Ad ogni modo se pur si deve sempre tener presente la distinzione tra gli strateghi comandanti militari e gli strateghi magistrati cittadini, noi vediamo che in realtà le competenze civili degli strateghi nella città di Pergamo, come in altre città greche, si sono sostituite in massima alle funzioni militari. Ricordiamo del resto che già sotto gli Attalidi si trova che sono fatti comandanti dei corpi d'esercito gli stessi capi dei soldati mercenari, e durante la dominazione romana gli strateghi appaiono sempre e soltanto con funzioni di carattere civile ed amministrativo (2).

Nell'epoca romana poi gli strateghi sono anche magistrati eponimi, come appare dalle iscrizioni e da numerose monete, anche se non si tratta più in questi casi dell'eponimia classica tradizionale (3). La formula della datazione più semplice è: *ἐπὶ*

---

(1) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 455, confrontata con 453 C e 454. Voglio però ricordare che è possibile supplire anche in modo diverso le parole mancanti in questa iscrizione, per esempio: [*Ὁ δῆμος ἐ*]*τίμησεν*| [*τὸν δεῖνα* . . .]*άρχον κατασταῖ*|[*θέντα ἡγεμόνα ἐν*] *τῶι συνστάντι* | [*πολέμωι κτλ.*, e vedasi pure la nota seguente.

(2) Cfr. Chapot, *La Province Romaine d'Asie*, pag. 240. Un bell'esempio ci è fornito da una iscrizione di Efeso dalla quale appare che nell'86 a. C. per la guerra contro Mitridate furon creati appunto degli *ἡγεμόνες* come comandanti delle truppe; Le Bas-Waddington, N. 136 *a* = Michel, *Recueil d'Inscr. Grecques*, N. 496, lin. 43 segg.: *Εἶναι δὲ καὶ τοὺς ἰσοτελεῖς καὶ παροίκους* | *καὶ ἱεροὺς καὶ ἐξελευθέρους καὶ ξένους ὅσοι ἂν ἀναλάβωσιν τὰ ὅπλα καὶ πρὸς το*[*ὺς*] | *ἡγεμόνας ἀπογράψωνται, πάντας πολίτας ἐφ' ἴσῃ καὶ ὁμοίαι, ὧν καὶ τὰ ὀνόματα δια*|*σαφησάτωσαν οἱ ἡγεμόνες τοῖς προέδροις καὶ τῶι γραμματεῖ τῆς βουλῆς*. E nell'età imperiale romana troviamo ancora per Efeso: [*ἡγ*]*εμόν*[*ος*] *δ*[*ὲ*] *Τιβερίου Κλαυδίου*. Per ciò che si riferisce a Pergamo si veda anche l'iscrizione *CIGr.*, II, 3538, lin. 26.

(3) Come ha notato il Lévy, *Études sur la vie municipale de l'Asie Mineure sous les Antonins*, in " Revue des Études Grecques ", VIII (1895), pag. 271 seg.

στρατηγοῦ τοῦ δεῖνος κτλ. (1); ma talvolta la datazione è fatta non già col solo nome dello stratego che a Pergamo è a capo del collegio formato dagli strateghi stessi, bensì mediante tutto il collegio riunito: *Ἐπὶ στρατηγῶν | Γ. Ἰουλίου Βάσσου Κλαυδιανοῦ | Γαΐου Σειλίου Ὀτακιλιανοῦ | Τιβερίου Ἰουλίου Τατιανοῦ | Τίτου Φλαουίου Κλαυδιανοῦ | Π. Αἰλίου Ὀτακιλίου Μόσχου* (2). Troviamo però assai più frequentemente indicata l'eponimia mediante sacerdozi o meglio ancora mediante il *πρύτανις* (3).

Il fatto stesso che troviamo gli strateghi come magistrati eponimi dimostra che essi duravano in carica un anno, e questa loro durata annuale nella carica noi troviamo che l'hanno tanto nell'epoca attalica quanto durante l'età romana (4).

Il numero degli strateghi in generale non è ben sicuro, e non era uguale per tutte le città dell'Asia Minore. A Pergamo però sappiamo con sicurezza che, tanto durante l'età attalica quanto durante l'età romana, gli strateghi erano in numero di cinque. Infatti nella iscrizione che contiene la lettera già più volte citata di Eumene al popolo pergameno intorno agli strateghi ed il decreto popolare relativo a questa lettera troviamo appunto ricordati i nomi di cinque strateghi: *ἐπειδὴ οἱ κατασταθέντες ὑπ' Εὐμένους στρατηγοί, Παλάμανδρος, Σκύμνος, | Μη-*

(1) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 267: *Ἐπὶ στρα[τηγοῦ...]*, cfr. N. 269, lin. 7. Per le monete cfr. Mionnet, II, pag. 558 segg., N. 491-494; 523-525; 527; 552; 556; 561-565; 571 segg.; Suppl. V, pag. 422 segg., N. 877; 916; 950; 964; 968; 979 segg., ecc.; Head, *Historia Numorum*[2], pag. 536.

(2) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 361 e 362 che sono la medesima iscrizione; e si cfr. anche l'iscrizione N. 363 sebbene mutila: *ἐπὶ τῶν περὶ | [τὸν δεῖνα στρατηγῶν]* nella quale il supplemento del Fränkel è reso assai probabile dal confronto con altre iscrizioni. Anche in un'altra iscrizione scoperta più recentemente leggiamo *Ἀγαθῆι τύχηι | Ἐπὶ στρα[τ]ηγῶν τῶν περὶ... | Ἀρχίαν τὸ[ν δι]ὰ γένου[ς ἱερέα] | τοῦ Σωτῆ[ρος Ἀσκ]λη[πιοῦ]*, in " Athen. Mitteil. ", XXXII (1907), pag. 302, N. 21; vedasi anche appresso pag. 729, nota 4.

(3) Su ciò cfr. le mie *Ricerche ellenistiche*, cit., pag. 505 segg.

(4) Cfr. l'iscrizione Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 251, lin. 33: *τοὺς δὲ στρατηγοὺς τοὺς ἐπὶ Χαβείρου πρυτάνεως*, e per il tempo di Eumene I la già citata iscrizione Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 18, lin. 13 = Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 267 = Michel, *Recueil d'Inscr. Grecques*, 38 e 516.

τρόδωρος, Θεότιμος, Φιλίσκος, καλῶς τῆς ἀρχῆς προέστη|σαν, καθάπερ καὶ Εὐμένης ἐπέστειλε κτλ. (1). Anche per l'età romana abbiamo alcune iscrizioni nelle quali sono rimasti pure i nomi di cinque strateghi e nella meglio conservata tra esse leggiamo: *ἐπιμεληθέντων | Μ. Καιρελλίου Ρουτειλίου Λούπου Σε . . , | Γν. Ὀτακιλίου Σενεκίωνος τὸ δεύτερο[ν,] | Μ. Ἀλβεινίου Βάσσου Σεμπρωνια[νοῦ,] | Γν. Ὀτακιλίου Σενεκίωνος νέο[υ,] | Μ. Ἀντωνίου Οὐλπίου Φλαουιανοῦ, | τῶν στρατηγῶν* (2). Probabilmente possiamo trovare una analogia a Temnos, dove troviamo menzionati da Cicerone cinque *praetores*, col quale vocabolo devono essere indicati appunto degli strateghi (3).

In tempi posteriori alla fine della monarchia attalica troviamo, come già s'è visto, per indicare gli strateghi l'espressione *οἱ περὶ τὸν δεῖνα στρατηγοί.* (4); e questa frase, come e meglio l'altra, che pure qualche volta s'incontra, *στρατηγὸς πρῶτος* (5), accenna chiaramente al fatto che nel collegio for-

(1) È l'iscrizione testè citata, lin. 21 segg.; al principio l'iscrizione è guasta ed i nomi degli strateghi che qui pure si trovavano, sono caduti quasi per intero. Fu qualche volta affermato che qui abbiamo i nomi dei primi cinque strateghi nominati da Eumene I (Mahaffy, in " Hermathena ", IX (1896), pag. 391 seg.); ciò è possibile, ma non è sicuro; cfr. Cardinali, *Il regno di Pergamo*, pag. 254, nota 1.

(2) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 395, lin. 9 segg.; ma vedansi pure le iscrizioni N. 383 B, lin. 6 segg., e 397, lin. 12 segg.

(3) Cic., *Pro Flacco*, 19, 44: " *in qua (civitate) nullus commoveri nummus potest sine* QUINQUE PRAETORIBUS, *tribus quaestoribus, quatuor mensariis, qui apud illos a populo creantur..... Si praetor dedit..... a quaestore numeravit. quaestor a mensa publica, mensa aut ex vectigali aut ex tributo* ". Oltre ai cinque strateghi vediamo qui menzionati tre *ταμίαι* e quattro *τραπεζῖται*. In altri luoghi si trovano tre strateghi ed in qualche caso anche sei; cfr. Chapot, *La Province Romaine d'Asie*, pag. 241.

(4) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 363: *Ἐπὶ τῶν περὶ | [τὸν δεῖνα στρατηγῶν]*, e meglio la iscrizione N. 383 C, lin. 4 seg.: *ἐπιμεληθέντω[ν] τῶν περὶ | [Τ]ι(βέριον) Ἰούλιον Ροῦφον στρατηγῶν*; così in " Athen. Mitteil. ", XXVII (1902), pag. 96, N. 89: *Ἐπὶ στρατηγῶν | τῶν περὶ Ἀὐρήλιανὸν Μηνογένους*, e cfr. sopra pag. 728, nota 2.

(5) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, II, N. 467, lin. 5 seg.: [...*στρατηγ|ὸν πρ*]*ῶτο*[*ν*], e più chiaramente N. 523, lin. 11. È probabile che in questa funzione si trovasse quello stratego che è indicato come *σύντροφος* del re, v. sopra pag. 722, nota 4, data l'importanza che in genere hanno i *σύντροφοι* dei re ellenistici; cfr. su di essi le mie *Ricerche Ellenistiche*, cit., pag. 521 segg. Analogamente troviamo un *σατράπης τῶν σατραπῶν* presso gli Arsacidi, Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 431 *b*.

mato dagli strateghi uno di essi aveva la presidenza sugli altri. È assai probabile che ciò sia avvenuto anche nei tempi anteriori, durante il dominio degli Attalidi, poichè abbiamo notevoli analogie di altre città, ad esempio Mitilene (1), negli ultimi tempi del regno di Pergamo.

Le poche notizie che le epigrafi ci hanno conservato intorno agli strateghi di Pergamo ci confermano appunto che questi funzionari originariamente militari hanno perduto anche qui le loro funzioni primitive, e sono diventati come in altre città i primi magistrati cittadini con funzioni in massima politiche, civili ed amministrative; ma essi, sebbene siano stati almeno in un certo tempo nominati dal re, apparivano sempre non già in qualità di funzionari regî, bensì di magistrati della città.

(1) Fränkel, *Inschr. von Pergamon*, I, N. 245 = Dittenberger, *Or. Gr. Inscr.*, I, 335, lin. 84.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

CLASSI UNITE

Adunanza del 13 Aprile 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Camerano, Vice-Presidente dell'Accademia, Naccari, Direttore della Classe, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Mattirolo, Somigliana, Fusari. — Scusa l'assenza il Socio Salvadori;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Manno, Direttore della Classe, Carle, Renier, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi e De Sanctis, Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 9 marzo 1913.

Il Presidente comunica la lettera di S. E. il Ministro della Real Casa in cui ringrazia a nome di S. M. il Re per l'omaggio del vol. LXIII (Ser. 2ª) delle *Memorie* della nostra Accademia.

Il Socio Segre, richiamando la deliberazione presa dalla nostra Accademia nell'adunanza del 21 gennaio 1912 di promuovere la pubblicazione di uno o due volumi di memorie in onore di Lagrange in occasione del centenario della morte, che ricorre il 10 aprile 1913, affidandone l'incarico alla Direzione degli " Annali di Matematica ", presenta in quattro esemplari il primo di quei volumi, che figura nella Serie degli " Annali di Matematica " come tomo XX della Serie III. A proposta dello stesso Socio Segre si delibera d'inviare in dono una copia di esso volume alle Accademie di Berlino e di Parigi e alla R. Accademia dei Lincei.

Il Socio Naccari, invitato dal Presidente, legge la relazione della prima Giunta del XVIII premio Bressa (nazionale, quadriennio 1909-1912), nella quale sono indicate le opere su cui la Giunta crede che debba particolarmente richiamarsi l'attenzione dell'Accademia. Il Presidente apre la discussione in proposito. Nessuno prendendo la parola, nè facendo nuove proposte, il campo delle proposte pel XVIII premio Bressa rimane chiuso a norma del Regolamento.

Si procede quindi alla nomina della 2ª Giunta pel XVIII premio Bressa, e riescono nominati per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali i Soci: Naccari, Camerano, Fusari, Guareschi e Foà e della Classe di scienze morali, storiche e filologiche i Soci Ruffini, Renier, De Sanctis, Stampini e Sforza.

Il Presidente comunica che l'Accademia è chiamata quest'anno a giudicare intorno al conferimento del premio istituito dal Senatore Giovanni Morelli a favore di quel giovane della città e provincia di Bergamo che presenti la migliore opera scientifica. Il giudizio è dato per turno dall'Istituto Lombardo, dall' Istituto Veneto, dall'Accademia dei Lincei e dalla nostra Accademia delle scienze. La nostra Accademia già due volte, nel 1905 e nel 1909, deliberò di disimpegnare il còmpito affidatole.

Su proposta del Socio Renier si conviene di formare una Commissione giudicatrice di tre membri per ciascuna Classe, più il Presidente.

Si procede alla votazione per la detta Commissione giudicatrice e riescono eletti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali i Soci Guidi, Guareschi e Segre e della Classe di scienze, morali, storiche e filologiche i Soci Stampini, Einaudi e Renier.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Aprile 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti il Vice-Presidente CAMERANO, il Direttore della Classe NACCARI, ed i Soci: D'OVIDIO, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO, SOMIGLIANA, FUSARI, e SEGRE Segretario. — Scusa l'assenza il Socio SALVADORI.

È letto ed approvato il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio corrispondente BASSANI ha inviato in omaggio una sua Nota: *Sopra una nuova fumarola nel fondo della solfatara di Pozzuoli*; ed il Socio corrispondente PIROTTA le sue Note: 1) *L'alternanza di generazioni nelle piante superiori*; 2) *Hanno le piante organi dei sensi?* 3) *Relazione* (fatta col Dr. F. CORTESI) *sulle piante raccolte nel Karakoram dalla spedizione di S. A. R. il Duca degli Abruzzi.*

Il Vice-Presidente CAMERANO presenta, per incarico dell'Autore, due pubblicazioni del sig. Paul HELBRONNER: *Description géométrique détaillée des Alpes françaises*, T. I, *Chaîne méridienne de Savoie*; e *Résumé des opérations exécutées jusqu'à la fin de 1911 pour la description géométrique détaillée des Alpes françaises,* rilevando la grande importanza dell'opera a cui l'Autore si è dedicato, ed anche la bellezza e ricchezza tipografica del 1° volume.

Per la stampa negli *Atti* il Socio Guareschi presenta le sue *Ricerche intorno ai bromuri*, Nota IV; ed il Socio Peano una sua Nota, *Sulla definizione di limite.*

Per il volume delle *Memorie*, la Classe unanime accoglie alcune *Notizie storiche intorno a Luigi Lagrange* del Socio Guareschi; ed incarica i Soci Camerano e Mattirolo di riferire intorno ad una *Contribuzione allo studio degli organi escretori fogliari*. del Prof. Edoardo Martel, presentata dal Socio Mattirolo.

LETTURE

Ricerche intorno ai bromuri.

Nota IV del Socio ICILIO GUARESCHI.

Nella mia Nota III: *Altre osservazioni sulle nuove reazioni caratteristiche e sensibilissime del bromo* (1) io ho dimostrato che colle mie reazioni del bromo si possono fare molte esperienze che dimostrano la decomposizione di alcuni bromuri metallici solamente per riscaldamento, oppure insieme al jodo. Ho esposto alcune osservazioni fatte sui bromuri di: potassio, bario, mercurio, arsenico, antimonio ecc. Ho continuato queste ricerche su un gran numero di bromuri ed ora espongo alcuni dei risultati ottenuti.

Ho fatto una rivista sperimentale dell'azione del calore su quasi tutti i bromuri metallici e non metallici, ed anche organici, essendovi su questo argomento dei dati talora incerti od anche errati, e in altri casi non essendo stata ancora studiata l'azione del calore. Come pure l'azione del jodo, con o senza la presenza dell'acqua.

I bromuri adoperati furono da me preparati, o in gran parte acquistati dalle migliori fabbriche di prodotti chimici ed accuratamente da me esaminati. Erano purissimi.

Per svelare le piccole quantità di bromo che in determinate condizioni si mettono in libertà ho adoperato i reattivi già accennati nella nota I cioè: la fucsina decolorata coll'acido solforoso o col bisolfito di sodio (reattivo di Schiff per le aldeidi) (2) e il violetto d'Hofmann pure decolorato nello stesso modo.

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, 1912, t. XLVIII, pag. 4.

(2) Il reattivo di Schiff per le aldeidi non cessa di essere tale anche se modificato, sia che si adoperi per ridurre incolora la materia colorante il gas solforoso, il bisolfito o l'idrosolfito oppure che si renda incolora con *acido solforico* più o meno diluito. Il reattivo è caratterizzato dalla presenza di un sale di rosanilina. Io, ad esempio, ho visto che l'acido solforico potrebbe essere sostituito anche dall'acido fosforico. Ma è da preferirsi il gas solforoso od il bisolfito.

In taluni casi non conviene scaldare direttamente il bromuro contenente l'acqua di cristallizzazione perchè l'acqua reagisce col bromuro, forma acido bromidrico ed il residuo che contiene il bromuro anidro misto a dell'ossido o a dell'ossibromuro, sviluppa più facilmente del bromo. Poi ho visto che in molti casi si hanno dei dati discordanti sulla quantità d'acqua di cristallizzazione e sulla maggiore o minore facilità di questa ad eliminarsi. Ho creduto utile esaminare in quali condizioni veramente si elimina tutta o parte dell'acqua.

Molti bromuri sono ancora imperfettamente studiati sotto l'aspetto della loro acqua di cristallizzazione e in quale stato vi esista. Per i singoli composti cristallizzati con più molecole di acqua di cristallizzazione bisogna trovare le condizioni nelle quali perdono successivamente le molecole d'acqua, per fornire gli idrati successivi e così potere meglio studiare le proprietà fisico-chimiche dei vari gradi di idratazione. Un esempio l'abbiamo nel bromuro di cobalto $CoBr^2.6H^2O$, dal quale ho potuto ottenere successivamente gli idrati con $5H^2O$...$4H^2O$...$2H^2O$...$1H^2O$; non ho potuto invece ottenere quello con $3H^2O$. Il che conferma quanto già in parte si sapeva che l'acqua sta combinata al composto metallico in modo diverso secondo le diverse molecole d'acqua. Alcune di queste mie osservazioni potranno servire a discutere la questione del modo di esistere delle diverse molecole d'acqua nei sali cristallizzati; il che è tutt'altro che facile a spiegarsi.

I. **Bromuri metallici** Me Br.

I bromuri dei metalli del gruppo primo ossia Me Br sono in generale i più stabili. Però vi è una certa differenza nel modo di comportarsi al calore tra i diversi bromuri del medesimo gruppo. Tutti questi bromuri scaldati con soluzione di acido cromico al 25 % od al 50 % sviluppano il bromo.

Bromuro di Litio Li Br.

Il *bromuro di litio anidro* quando è scaldato sino a fusione, entro un tubo di vetro resistente, sviluppa del bromo riconoscibile mediante i reattivi già da me indicati, e sviluppa bromo

molto più presto che non il bromuro di potassio nelle stesse condizioni.

Se si scalda all'ebollizione del bromuro di litio con dell'acqua e del jodo si sviluppa pure del bromo, ma poco.

Nei migliori trattati di chimica inorganica non si trova cenno che il bromuro di litio si decomponga per l'azione del calore sviluppando del bromo. Secondo Ramsay ed Eumorfopoulos (1) il bromuro di litio fonde a 442° e secondo Carnelley a 547° $\pm$ 5°; ma questi autori non accennano a decomposizione. Secondo le ricerche di Bogordsky (2) il bromuro di litio può esistere in tre stati di idratazione: con $3H^2O$, $2H^2O$ e $1H^2O$.

Io invece in due campioni di bromuro di litio fornitimi da due delle primarie fabbriche di prodotti chimici tedesche ho trovato meno di 1 $^1/_2 H^2O$.

Gr. 2.1146 dopo 5 ore a 100° perdettero 0.0973 cioè 4.6 %; dopo 28 ore a 110° perdettero ancora 0.3658 cioè 17.3 %; in totale 0.4639 cioè 21.9 %.

Gr. 0.6802 scaldati a 112° perdettero 0.0352 cioè 5.1 %; dopo 10 ore a 150° perdettero 0.1010; a 180° non perdettero più nulla; in totale 20.08 %.

Per $LiBr + 1\,^1/_2\,H^2O$ si calcola:

$$H^2O\ \% = 23.6.$$

Per $LiBr + H^2O$ si calcola:

$$H^2O\ \% = 17.2.$$

Il bromuro di litio *anidro* riprende, stando all'aria, l'acqua di cristallizzazione; gr. 0.5537 di bromuro di litio precedentemente disidratato sino a 180° riassorbirono 0.1981 cioè 35.7 % mentre per l'assorbimento di 1 $^1/_2 H^2O$ si calcola 31,02 e per $2H^2O$ si calcola 41.3 %.

Bromuro di ammonio.

Scaldato si volatilizza, sublima, ma non dà bromo libero; si dissocia, come è noto, in HBr e NH^3.

(1) " Phil. Mag. ", (5), 41, p. 62.

(2) " J. russ. phys. Gesell. ", 1893 [1], p. 318, e 1894, pag. 209 cit. in Gmelin-Kraut-Friedheim, *Handb. anorg. Chem.*, Bd. II, parte I, p. 257.

Bromuro di sodio $NaBr.2H^2O$.

Il bromuro di sodio *anidro* fonde verso 760°. Cristallizzato a temperatura ordinaria da 15° a 20° contiene $2H^2O$ mentre se cristallizzato sopra 30° cristallizza *anidro*. Perde l'acqua di cristallizzazione a 30°.

Quando si scalda il sale $NaBr.2H^2O$ fonde nell'acqua di cristallizzazione, poi rifonde allo stato anidro e mantenuto anche a temperatura superiore a quella della fusione e per lungo tempo non perde bromo, o delle minime traccie.

Il bromuro di potassio nelle stesse condizioni dà subito del bromo, riconoscibile all'estremo freddo del tubo, col mio reattivo.

Il bromuro cristallizzato con $2H^2O$ non solamente perde l'acqua a 30°, ma già stando nell'aria secca, sull'acido solforico, alla pressione di 40 mm.:

Gr. 0.9459 perdettero 0.2501 di acqua:

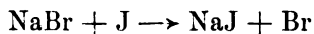
	trovata	calcolata per $NaBr.2H^2O$
H^2O %	26.2	25.9

Anche stando in aria seccata col cloruro di calcio perde tutta l'acqua:

Gr. 1.1907 di bromuro di sodio dopo 10 giorni in disseccatore a cloruro di calcio perdettero 0.3110:

	trovata	calcolata
H^2O %	26.1	25.9

Quando si scalda il bromuro di sodio con eccesso di jodo, rapidamente si osserva l'eliminazione di bromo. La reazione:

$$NaBr + J \longrightarrow NaJ + Br$$

è molto bene visibile operando nel mio apparecchietto, al punto che con circa 0.1 di NaBr e due o tre volte il suo peso di jodo si può fare un evidente esperimento di lezione.

Bromuro di potassio KBr.

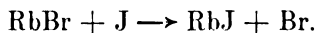
Ho già detto nella mia terza nota che il bromuro di potassio per l'azione del calore manda facilmente dei vapori di bromo già alla temperatura di fusione; però meno facilmente che non il bromuro di' litio.

Il bromuro di potassio puro fonde verso 745°.

Bromuro di rubidio RbBr.

Il bromuro di rubidio adoperato era *anidro* e cristallino. Scaldato fonde, poi dà manifesto sviluppo di bromo. Invece scaldato con poca acqua e del jodo non dà che minime traccie di bromo.

Se invece si scalda la miscela secca di bromuro di rubidio e di jodo si sviluppa molto bromo. Intensissima reazione di bromo si ha nel mio apparecchietto (V. Nota III) scaldando rapidamente una miscela di 0.3 di RbBr con 0.5 di jodo. La reazione va nel senso di:

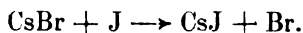
$$RbBr + J \longrightarrow RbJ + Br.$$

Bromuro di cesio CsBr.

Il bromuro di cesio adoperato era *anidro* ed in cristalli incolori ma non regolari. Quando lo si scalda fonde, sublima anche, in piccola quantità, ma *non dà bromo*. Il bromuro di cesio fonde più difficilmente del bromuro di rubidio. La sua soluzione acquosa era neutra. Dopo fusione assume reazione alcalina; probabilmente in causa dell'azione sul vetro.

Quando si scalda il bromuro di cesio con acqua e jodo dà delle minime traccie di bromo; invece, moltissimo bromo si ottiene quando si scalda a secco nel mio apparecchietto un miscuglio di bromuro di cesio e jodo. Già a temperatura ordinaria un miscuglio di bromuro di cesio e jodo dà del bromo.

Nel caso del bromuro di cesio mescolato col jodo si ha una miscela omogenea colorata in bruno (probabilmente $CsBrJ^2$ o anche $CsBrJ^4$) che rapidamente scaldata dà una grande quantità di bromo.

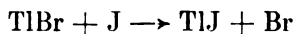
Anche in tubo da saggio se si scalda il bromuro di cesio (e così pure il bromuro di rubidio) con del jodo si può dimostrare facilmente lo sviluppo del bromo:

$$CsBr + J \longrightarrow CsJ + Br.$$

La reazione ha luogo più facilmente col bromuro di cesio che non con quello di rubidio. Questo è d'accordo col fatto che col cesio si possono avere anche i joduri CsJ^3, CsJ^5 e forse CsJ^9, mentre col rubidio credo che sino ad ora, non si sia ottenuto più di RbJ^3 (1).

Bromuro di Tallio TlBr.

Il bromuro di tallio anidro quando è scaldato in tubo di vetro molto resistente si fa giallo, poi fonde in un liquido di color ranciato, ma non dà bromo; anche a temperatura molto più elevata non dà bromo. È stabilissimo; più dei bromuri di potassio e di sodio.

Quando si scalda rapidamente un miscuglio di bromuro di tallio e di jodo nel mio apparecchietto già descritto si osserva subito l'eliminazione del bromo. La reazione:

$$TlBr + J \longrightarrow TlJ + Br$$

è più pronta e più rapida che non col bromuro di sodio.

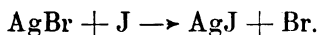
Bromuro d'argento.

Il bromuro d'argento secondo Carnelley fonde a 427 ± 4°.5. Scaldato per lungo tempo alla temperatura di fusione, non

(1) Il *bromuro di cesio* CsBr fu preparato da Wells, Wheeler e Penfield (" Am. Journ. of Sc. „ (3), t. 44, p. 42), da Beketoff (" Bull. Soc. Pétersb. „ (4), 2, p. 197 cit. in Gmelin-Kraut-Friedheim, II, I, p. 224) ma non analizzato. C. Chabrié (" C. R. „, 1901, t. 132, p. 678) invece lo preparò e lo analizzò. Ditte (" A. Ch. „ (6), VIII, p. 427) afferma che è cristallizzato e anidro, ma non dice di averlo preparato. Nessuno però di questi autori accenna alla grande stabilità di questo bromuro per l'azione del calore solamente.

Wells e Penfield (" Zeitschr. anorg. Chem. „, I, p. 85) e Wells e Wheler (ivi, II, p. 255) prepararono un $CsBr^3$ e un $CsBr^5$, che io non ho esaminato.

solo, ma anche a temperatura molto più elevata non dà bromo; pare che in piccola quantità sublimi. È stabilissimo. Però scaldando, in tubo d'assaggio di vetro resistente, il bromuro d'argento con del jodo si manifesta lo sviluppo del bromo visibile colle mie carte reattive. È l'esperimento già conosciuto di Julius, il quale però scaldava il bromuro in corrente di vapore di jodo:

$$AgBr + J \longrightarrow AgJ + Br.$$

Così pure scaldando il bromuro d'argento con acqua e jodo si ha del bromo libero.

Il bromuro d'argento scaldato con soluzione d'acido cromico al 25 % dà nettamente la reazione del bromo, ma ancor più con soluzione al 50 % (1).

Dunque si potrebbe concludere che i bromuri MeBr si possono dividere in due gruppi: quelli decomponibili per l'azione diretta del calore e che dànno bromo libero, e quelli che rimangono inalterati e non dànno bromo libero:

LiBr	dà facilmente bromo
NH^4Br	non dà bromo
NaBr	traccie di bromo
KBr	dà bromo
RbBr	dà bromo
CsBr	non dà bromo
TlBr	non dà bromo
AgBr	non dà bromo.

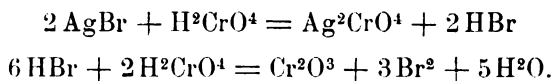
I tre ultimi sono quelli a peso atomico più elevato. Non ho potuto esaminare i bromuri di *indio* e di *gallio* che appartengono al gruppo del tallio.

(1) Se si scalda il bromuro di potassio (anche senza aggiunta di acido borico) con anidride molibdica, si sublima l'ossibromuro di molibdeno MoO^2Br^2 in cristallini rossastri. Se invece si scalda nello stesso modo il bromuro d'argento, si sviluppano dei vapori di bromo, ma non si ha l'ossibromuro.

II. Ricerca e riconoscimento di traccie di bromuro d'argento nel cloruro e nel joduro d'argento.

Colla reazione sopra indicata si possono svelare e volendo anche dosare delle minime traccie di bromuro d'argento contenute nel cloruro o nel joduro d'argento; anche quando si ha la miscela dei tre composti d'argento. Già a temperatura ordinaria il miscuglio di bromuro d'argento ed anidride cromica (1) sviluppa del bromo riconoscibile facilmente col mio reattivo. In questo modo del cloruro d'argento contenente circa 1 p. di bromuro d'argento per 5 o 6000 p. di cloruro trattato e mescolato bene con anidride cromica, dà lentamente già a temperatura ordinaria, e rapidamente scaldando un poco, nettamente la reazione del bromo:

$$2\,AgBr + H^2CrO^4 = Ag^2CrO^4 + 2\,HBr$$

$$6\,HBr + 2\,H^2CrO^4 = Cr^2O^3 + 3\,Br^2 + 5\,H^2O.$$

Azione dell'anidride cromica sul bromuro d'argento.

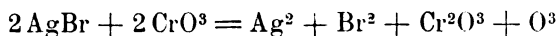
Quando si scalda una miscela di 1 mol. di bromuro d'argento con 1 mol. di anidride cromica (e meglio anche di più) quasi istantaneamente si sviluppa tutto il bromo insieme a del-

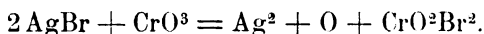
---

(1) Dirò che l'anidride cromica adoperata conteneva delle minime traccie di acido solforico. Non sono riuscito ad avere delle notevoli quantità di anidride priva di acido solforico. Del resto per queste esperienze invece dell'anidride cromica può servire benissimo il bicromato potassico in polvere e l'acido solforico concentrato. Dopo pochi minuti e anche senza bisogno di scaldare si riconosce il bromo col mio reattivo; basta quel calore che si sviluppa nella reazione. È una reazione di estrema sensibilità. Per la ricerca di minime traccie di bromuri negli altri sali non è necessario sempre adoperare la soluzione di acido cromico al 25 od al 50 %; basta mescolare il sale da analizzare con anidride cromica, meglio se l'una sostanza e l'altra sono un poco umide. Il sal comune ad esempio mescolato con anidride cromica dà subito la reazione del bromo riconoscibile col mio reattivo. Basta 1 parte di bromuro in 6000 a 8000 p. di cloruro.

Si può così operare in tutti quei casi in cui non è possibile un miscuglio esplosivo coll'anidride cromica, come ad esempio coi solfocianati, ipofosfiti, ecc. Sulla ricerca dei *bromuri in presenza dei solfocianati* dirò in una prossima nota.

l'ossigeno, e rimane un residuo con splendore metallico giallo e dell'ossido cromico verde insieme ad argento metallico. Io credo che la reazione abbia avuto luogo nel modo seguente:

$$2\,AgBr + 2\,CrO^3 = Ag^2 + Br^2 + Cr^2O^3 + O^3$$

e probabilmente insieme al bromo anche dell'ossibromuro di cromo molto instabile:

$$2\,AgBr + CrO^3 = Ag^2 + O + CrO^2Br^2.$$

Anche il cromato d'argento per riscaldamento si riduce a Cr^2O^3 e Ag (Vauquelin) e così pure il bicromato d'argento (Helmsauer). La reazione tra anidride cromica e bromuro d'argento sarà in seguito, forse, meglio studiata, perchè parmi non sia ancora stata ben esaminata.

Anche il *joduro d'argento* contenente delle traccie di bromuro (circa 1 : 5000 a 6000) dà nettamente la reazione del bromo quando lo si scalda con anidride cromica e pochissima acqua o col miscuglio cromico.

Un vecchio campione di cloruro d'argento fuso (*luna cornea*), che da più di quaranta anni era stato preparato in questo laboratorio, dava la reazione del bromo. Così pure un vecchio campione di joduro d'argento.

Egualmente un miscuglio a parti uguali di joduro e cloruro d'argento contenente traccie minime di bromuro d'argento, trattato nello stesso modo dà subito netta la reazione del bromo.

Io credo che in altro modo sia impossibile riconoscere, con una reazione così semplice e sicura, delle piccolissime quantità di bromuro d'argento misto a cloruro e joduro, se non impiegando una quantità grandissima di sostanza; nel modo che ho detto basta operare anche in tubo da saggio e con piccola quantità del miscuglio; per cui la quantità di bromo riconosciuta è estremamente piccola.

Io ho precipitato 7 gr. di nitrato d'argento con acido cloridrico puro e 1-2 milligr. di bromuro di potassio, e nel precipitato raccolto, lavato e disseccato ho potuto riconoscere il bromo.

III. Bromuri Me^2Br^2.

Bromuro mercuroso Hg^2Br^2.

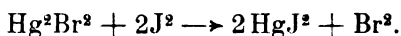
Questo bromuro, preparato per precipitazione poi fatto sublimare, era in piccoli cristalli incolori.

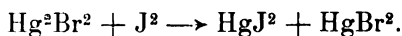
Quando si scalda sublima inalterato; può essere che si dissoci in $Hg^2 + Br^2$, ma il fatto è che durante la sublimazione non si riconosce la presenza del bromo libero, anche colle reazioni più sensibili. Scaldato anche molto rapidamente ad alta temperatura non dà bromo. Ma dà bromo se lo si scalda rapidamente con eccesso di jodo.

Il bromuro mercuroso, scaldato con soluzione di acido cromico al 25 %, ed anche al 50 % non sviluppa bromo, o solamente delle traccie minime; bisogna adoperare la soluzione concentratissima, o meglio, l'anidride cromica e qualche goccia d'acqua. Se si dibatte il bromuro rameoso con soluzione di joduro potassico, e la miscela annerita si scalda con soluzione al 50 % di acido cromico, allora si sviluppa facilmente il bromo.

Azione del jodo sul bromuro mercuroso.

Quando si scalda il bromuro mercuroso con eccesso di jodo allora i vapori contengono del bromo, e quindi, in parte almeno, ha luogo la reazione:

$$Hg^2Br^2 + 2J^2 \longrightarrow 2HgJ^2 + Br^2.$$

Però quando si aggiunge a poco a poco il jodo al bromuro mercuroso riscaldato, viene assorbito e forma una massa facilmente fusibile. Il liquido che si ottiene si consolida in massa cristallina di color giallo grigiastro come quando si fondono insieme bromuro e joduro mercurico. Ho fatto la mescolanza nel rapporto di $Hg^2Br^2 + J^2$ ed ho ottenuto un prodotto che in tutto si comporta come la miscela di joduro e bromuro mercurici cioè:

$$Hg^2Br^2 + J^2 \longrightarrow HgJ^2 + HgBr^2.$$

Quando si mescolano molecole eguali di bromuro mercuroso (Hg^2Br^2) e di jodo (J^2) questo a poco a poco viene assorbito; scaldando la massa fonde, si fa omogenea. Dopo raffreddamento si ha un prodotto giallastro che riscaldato fonde di nuovo poi sublima, sviluppando appena delle traccie di jodo, e dando un sublimato giallo che permane giallo anche dopo raffreddamento. Ha tutti i caratteri del prodotto che si ottiene sublimando una miscela equimolecolare di joduro mercurico e bromuro mercurico.

Anche il punto di fusione è lo stesso; la miscela ottenuta da $Hg^2Br^2 + J^2$ fonde a 220°-222°; una mescolanza a molecole uguali di $HgJ^2 + HgBr^2$ fonde precisamente a 220°-222°.

La miscela fusa quando è fatta cristallizzare dall'alcool a 90 % bollente fornisce dei cristalli giallognoli e dei cristalli rossi di joduro mercurico, ben distinti e separati gli uni dagli altri. Si ottiene pure una miscela di joduro mercurico e bromuro mercurico quando si aggiunga a poco a poco il jodo al bromuro mercuroso in presenza di alcool bollente.

Ma la stessa reazione ha luogo a temperatura ordinaria. Una molecola (gr. 5.6) di bromuro mercuroso fu mescolata con una molecola di jodo (gr. 2.54). La miscela ben intima fu lasciata a sè per alcuni giorni ed il jodo era tutto o quasi tutto assorbito. Allora trattai, sempre a temperatura ordinaria, di 14°-15°, con alcool assoluto nel quale si sciolse quasi tutto colorandosi un poco in giallo, eccetto un piccolo residuo bianco che aveva i caratteri del bromuro mercurico, e dal liquido a poco a poco si depositarono dei magnifici cristalli rossi di joduro mercurico.

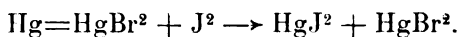
Ho fatto l'esperienza in altro modo; gr. 2.5 di Hg^2Br^2 furono mescolati con 30 cm^3 di alcool assoluto, nel quale rimasero insolubili; aggiungi 1.1 gr. di jodo sciolto in 25 cm^3 di alcool assoluto, dibattendo la miscela. Allora dopo pochi momenti tutto il bromuro mercuroso si sciolse e si ebbe un liquido trasparente, un poco rossastro per jodo. Lasciata a sè questa soluzione depositò quasi subito dei cristallini rossi di joduro mercurico. La reazione del jodo sul bromuro mercuroso è dunque rapidissima anche a temperatura ordinaria. Non ho analizzati i cristalli rossi per assicurarmi che siano proprio di HgJ^2 e non contenessero $Hg\langle{}^{Br}_{J}$, perchè hanno tutti i caratteri del bijoduro di mercurio.

Il joduro rosso separatosi prima in bei cristalli diventava giallo verso 120° e fondeva a 245°-246°, ma ricristallizzato dall'alcool diventava giallo a 140° circa e fondeva a 255°-257°. Non conteneva bromuro.

Dalle acque madri si separarono dei bei cristalli giallognoli di bromuro ed altri cristalli rossi.

Non sono sicuro se queste esperienze siano mai state fatte da altri. Ad ogni modo sarà una conferma.

Dunque evidentemente per l'azione del jodo e con grande facilità, e già a temperatura ordinaria si è formato del joduro mercurico. E la reazione si spiega benissimo così:

$$Hg{=}HgBr^2 + J^2 \longrightarrow HgJ^2 + HgBr^2.$$

Anche questo è uno di quei fatti che concordano bene coll'ammissione della formola: $Hg{=}HgBr^2$ pel bromuro mercuroso. In generale, i sali mercurosi sarebbero rappresentati secondo le idee di Werner dalla formola: $Hg.HgR^2$
formola che si accorda con molte delle proprietà e reazioni di questi sali e specialmente col fatto che con grande facilità si trasformano in mercurio e sale mercurico.

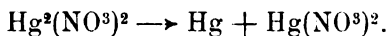
Io speravo che per l'azione del jodo sul bromuro mercuroso a temperatura ordinaria si potesse formare un vero jodobromuro $Hg\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup Br}{\diagdown J}$ (1). Invece si forma subito il joduro mercurico e questo fatto, come dissi, è favorevole all'ammissione di $Hg{=}HgBr^2$ perchè sia con $\begin{matrix}HgBr\\ |\\ HgBr\end{matrix}$ od anche con $\begin{matrix}HgBr\\ |\end{matrix}$ bisognerebbe ammettere uno spostamento di metà del bromo.

Del resto Lœwig aveva già osservato che il bromuro mercuroso per l'azione del cloruro e del bromuro di ammonio in soluzione bollente si decompone in bromuro mercurico che si scioglie e in mercurio metallico.

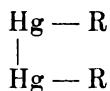
---

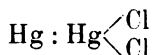
(1) Secondo Thomas (" C. R. ,, 128, p. 1234 e " Bull. ,, (3), XIX, p. 598) esisterebbero i composti seguenti $Pb\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup Cl}{\diagdown Br}$, $Pb\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup Cl}{\diagdown J}$, $Pb\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup Br}{\diagdown J}$; ma forse sono miscele di $PbJ^2.PbBr^2$ ecc.

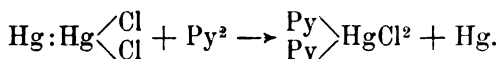
Si sa inoltre che W. Lang (1) per l'azione della piridina sul cloruro e sul nitrato mercuroso si forma un sale mercurico e del mercurio ridotto:

$$Hg^2(NO^3)^2 \longrightarrow Hg + Hg(NO^3)^2.$$

È una decomposizione analoga a quella che si conosceva già da lungo tempo del cloruro mercuroso coll'acido cloridrico o del joduro mercuroso col joduro di potassio. Un fatto analogo osservò François (2) per l'azione dell'anilina sul joduro mercuroso, che dà Hg e $HgJ^2(C^6H^5NH^2)^2$.

Queste ed altre analoghe reazioni non si spiegano bene colla formola:

$$\begin{array}{l} Hg - R \\ | \\ Hg - R \end{array}$$

E giustamente il Werner nel 1897 (3) ammise come più probabile che al cloruro mercuroso spetti la formola:

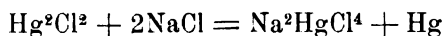
$$Hg : Hg\begin{array}{l}\diagup Cl \\ \diagdown Cl\end{array}$$

La reazione coll'anilina o colla piridina allora si spiega con:

$$Hg:Hg\begin{array}{l}\diagup Cl \\ \diagdown Cl\end{array} + Py^2 \longrightarrow \begin{array}{r}Py\diagdown \\ Py\diagup\end{array}HgCl^2 + Hg.$$

Ammessa pel bromuro mercuroso la formola $Hg{=}Hg\,Br^2$ non potrebbe esistere un isomero forse più stabile: $BrHg:HgBr$, analogamente a quanto si ha pei due etileni bibromurati $CH^2 = CBr^2$ e $BrCH{=}CHBr$?

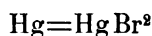
L'altro fatto che il calomelano coi cloruri alcalini si trasforma facilmente in cloruro mercurico e mercurio metallico

(1) "Berichte", 1888, p. 1587.
(2) "C. R.", 1895, t. 121, p. 253.
(3) "Zeitschr. f. anorg. Chem.", 1897, t. XV, p. 5.

(Fr. SELMI; e Jul. Gewecke, in " Zeits. phys. Chem. ", 1903, vol. 45, p. 684 e " Bull. " (3) t. 34 p. 903):

$$Hg^2Cl^2 + 2NaCl = Na^2HgCl^4 + Hg$$

prova, secondo me, che sia $Hg{=}HgCl^2$.

Che poi il bromuro mercuroso possa essere rappresentato da:

$$Hg{=}HgBr^2$$

se ne avrebbe una controprova anche nel fatto che coll'acido cianidrico si comporta come il cloruro mercuroso, cioè dà Hg metallico e cianuro mercurico (1).

Ad ogni modo qualunque sia la formola di costituzione di Hg^2Br^2 tutte le reazioni sovra accennate si accordano con questa formola doppia e non con quella vecchia semplice HgBr.

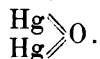
Se è vero che esiste l'*ossido mercuroso* Hg^2O questo deve essere:

$$Hg{=}HgO$$

a meno di non ammettervi il gruppo:

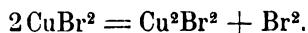
$$\begin{matrix} Hg \\ | \\ Hg \end{matrix} \!\!>\! O$$

oppure l'ossigeno tetravalente:

$$\begin{matrix} Hg \\ Hg \end{matrix} \!\gg\! O.$$

Bromuro rameoso Cu^2Br^2.

È noto che il bromuro rameico scaldato al rosso perde la metà del bromo e si trasforma in bromuro rameoso:

$$2CuBr^2 = Cu^2Br^2 + Br^2.$$

---

(1) E. ESTEVE, " Chem.-Zeitung ", 1911, p. 1153. Questo fatto ho confermato anch'io coll'acqua di mandorle amare, la quale dibattuta col bromuro mercuroso lo fa diventare bruno per mercurio metallico.

Il *bromuro rameoso* invece è descritto come fusibile a 504° ± 7° e bollente a 861° — 954° senza decomporsi (1). Da altri è descritto come una polvere bianca fusibile al rosso diventando grigio brunastra a struttura cristallina e che pura non si volatilizza se non difficilmente in una corrente di azoto e si decompone a poco a poco in una corrente di aria dando dell'ossido (2).

Io invece ho visto che questo bromuro anidro e ben secco, scaldato in tubo di vetro resistente, fonde colorandosi e sviluppando del bromo; contrariamente a quanto affermava il Berthemot che cioè non si decompone per l'azione del calore (3).

Il bromuro rameoso scaldato con soluzione al 25 % di acido cromico sviluppa facilmente il bromo, come i bromuri MeBr. Ora fra tutti i bromuri metallici esaminati in questa nota, non vi è che il bromuro mercuroso il quale non dia bromo quando lo si scaldi con soluzione di acido cromico ed occorra l'anidride cromica con pochissima acqua. Così si comporta, vedremo in un'altra nota, anche il bromuro mercurico.

In una prossima nota dirò dei bromuri $MeBr^2$ e di altri bromuri.

Torino. R. Università. Istituto di Chimica farm. e tossic.
Aprile 1913.

---

(1) Carnelley, " J. Ch. Soc. ", 1878, t. 33, p. 273 e in Abegg, *Handb. anorg. Chem.*, vol. II, parte I, pag. 582.

(2) Wurtz, *Dictionn. de Chim.*

(3) *Mém. pour servir à l'histoire des brommes*, in " A. Ch. ", 1830 (2), t. 44, pag. 385 e in Gmelin-Kraut-Friedheim, *Handb. anorg. Chem.*, V, part I, p. 935. Il Berthemot scrive a proposito del bromuro rameoso: " Exposé au " feu dans un tube, on peut le chauffer fortement sans le décomposer; " tandis qu'au contact de l'air, dans un creuset, il se volatilise en vapeurs " qui colorent la flamme en vert, et il reste dans le creuset de l'oxide de " cuivre ".

Sulla definizione di limite.

Nota del Socio GIUSEPPE PEANO

Il presente scritto è uno studio critico comparativo di alcune definizioni di limite, quali trovansi nei trattati ad uso delle scuole secondarie e universitarie. L'occasione a questa raccolta di definizioni fu una discussione fra alcuni colleghi sulla convenienza, o meno, di introdurre nelle scuole secondarie la derivata d'una funzione. Questa innovazione già fu fatta o tentata all'estero; in Italia, i " Programmi di Matematica, proposti per i licei moderni ", pubblicati nel " Bollettino della Mathesis ", dicembre 1912, con prefazione del prof. G. Castelnuovo, della R. Università di Roma, contengono appunto, per la II Classe: " Concetto di limite. Tangente ad una curva. Lunghezza d'un arco e derivata d'una funzione ". E per la III Classe: " Cenno sull'integrale definito ".

Il " Formulario Mathematico ", edizione del 1906-08, contiene la seguente definizione del limite d'una successione:

Definizione I.

$$x \in \mathrm{q\,F\,N_1} . a \in \mathrm{q} . \supset \therefore a = \lim x . = : h \in \mathrm{Q} . \supset_h . \exists \mathrm{N_1} \cap m \ni [n \in \mathrm{N_1} . \supset_n . \mathrm{mod}\,(x_{m+n} - a) < h].$$

" Se x è una quantità funzione dei numeri naturali (ossia se $x_1\ x_2\ x_3$ ... sono quantità, o se x è una successione di quantità); e se a è una quantità (determinata e finita), allora dire che a è il limite di x, significa dire che, comunque si prenda la quantità positiva h, ne risulta che si può prendere un numero m tale che, comunque si prenda il numero n, sempre si ha che il valor assoluto di $x_{m+n} - a$ sia minore di h ".

La parte aritmetica della definizione è:

$$\operatorname{mod}(x_{m+n} - a) < h,$$

che contiene i soli segni $+$, $-$, $<$, mod. Sicchè la definizione si può dare anche prima della moltiplicazione dei numeri reali.

Sotto l'aspetto logico, la definizione ha un'ipotesi, che precisa il significato delle lettere x ed a: x è una successione di quantità, ed a è una quantità finita. Il primo membro, il definito, è tutta l'eguaglianza $a = \lim x$, che contiene le variabili reali a ed x. Il secondo membro poi, o definiente, contiene, oltre alle variabili reali x ed a, tre variabili apparenti h, m, n, rispettivamente accompagnate dai simboli Ɔ, ∃, Ɔ; o nel linguaggio comune " per ogni h, e per qualche m, e per ogni n "; cioè la proposizione è universale in h, particolare in m, ed universale in n.

Non è permesso di invertire l'ordine delle tre lettere h, m, n; nè di scambiare i segni Ɔ ed ∃, senza alterare il senso del definiente.

La definizione precedente di limite è ben nota, e fa parte di tutti i buoni trattati. Eccone un esempio:

Baire, *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité,* pag. 18.

" *On dit que la suite*

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

a pour limite le nombre λ, *si, quels que soient les nombres* λ *et* λ' *satisfaisant aux conditions*

$$\lambda' < \lambda < \lambda''$$

il y a un entier p *tel que, pour* n > p, *on a*

$$\lambda' < u_n < \lambda'' \text{ ''}.$$

Basta, al posto di u, λ, λ', λ'', p, n leggere x, a, $a-h$, $a+h$, m, $m+n$, per avere la definizione I.

Alcuni autori preferiscono cominciare dal caso particolare in cui il limite è zero:

DEFINIZIONE II.

$$x \epsilon \mathrm{q F N_1} . \supset \therefore \lim x = 0 . = : h \epsilon \mathrm{Q} . \supset_h . \exists \mathrm{N_1} \frown m \ni [n \epsilon \mathrm{N_1} . \supset_n . \mathrm{mod}\, x_n < h].$$

Da essa si risale al limite generale colla definizione:

$$x \epsilon \mathrm{q F N_1} . a \epsilon \mathrm{q} . \supset : \lim x = a . = . \lim (x_n - a) | n = 0.$$

Così fa CESÀRO, *Introduzione al Calcolo infinitesimale*:

" Si dice che il numero a_n è infinitesimo, o che tende a 0, se ad ogni numero positivo ϵ corrisponde un numero ν tale che per $n > \nu$ sia sempre $|a_n| < \epsilon$ „.

" Si dice che a_n tende ad a, quando la differenza $a_n - a$ è infinitesima „.

L'unica obbiezione che si possa fare, è se convenga, oltre alla nomenclatura " $\lim x = 0$ „, di usare anche la equivalente " x è infinitesima „.

La definizione II contiene una variabile reale di meno che la I, poichè manca la lettera a. Ma il membro definiente contiene sempre tre lettere apparenti; e deve essere completata colla definizione successiva. Sicchè non c'è vantaggio della II sulla I.

Per definire la derivata, come limite del rapporto incrementale, bisogna aver definito il limite d'una funzione quando la variabile assume valori costituenti un gruppo qualunque di quantità, per esempio in un intervallo. I numeri costituenti un intervallo non sono disposti in successione, e per un celebre teorema di Cantor, non si possono disporre in successione. La definizione secondo il " Formulario „, pag. 232, è:

DEFINIZIONE III.

$$u \epsilon \mathrm{Cls'q} . x \epsilon \delta u . f \epsilon \mathrm{q f} u . a \epsilon \mathrm{q} . \supset \therefore a = \lim (f, u, x) . = : k \epsilon \mathrm{Q} . \supset_k . \exists \mathrm{Q} \frown h \ni [y \epsilon u \sim \iota x . \mathrm{mod}\,(y - x) < h . \supset_y . \mathrm{mod}\,(fy - a) < k].$$

" Sia u una classe di quantità (un gruppo o insieme di numeri), e sia x un elemento della classe derivata di u (cioè sia x infinitamente prossimo ad u differenti da esso). Sia f una quan-

tità funzione data pei valori u della variabile; e sia a una quantità determinata e finita. Allora diremo che a è il limite della funzione f, nel campo u, pel valore x, quando, comunque si fissi la quantità positiva k, si può fissare la quantità positiva h, in modo che comunque si fissi un valore y nel campo u, differente da x, ma tale che disti da x meno di h, sempre si ha $\mathrm{mod}\,(fy - a) < k$ „.

Questa definizione contiene nell'ipotesi, e nel membro definito, quattro lettere reali u, x, f, a; nel membro definiente, oltre alle stesse lettere reali, contiene le apparenti k, h, y, accompagnate rispettivamente dai simboli logici Ɔ, ∃, Ɔ.

Essa si trova in tutti i buoni trattati:

D'Arcais, *Calcolo infinitesimale*:

“ Diciamo che l è il limite di y per x convergente ad a, pei valori di G, se dovremo solo considerare i valori del gruppo G, quando dato σ, possiamo determinare o sappiamo che esista in un intorno di a, pei punti x del quale sia:

$$|y - l| < \sigma \text{ „.}$$

Invece della nostra notazione $\lim\,(f, u, x) = a$, è più comune la

$$\lim_{z=x} f(z) = a,$$

la quale contiene una lettera apparente, e non necessaria z; in essa si scrive $z \doteq x$, per dire “ z assume tutti i valori, eccetto il valore x „, cioè proprio l'opposto di ciò che sta scritto; e infine la notazione comune non contiene la variabile reale u, cioè il campo di variabilità della variabile indipendente.

Anche le notazioni abbastanza diffuse:

$$\lim_{z=x+0} f(z) \quad \text{e} \quad \lim_{z=x-0} f(z)$$

per dire:

$$\lim\,[f, u \frown (x + Q), x] \quad \text{e} \quad \lim\,[f, u \frown (x - Q), x],$$

difettano della variabile reale u; e sono contrarie alle notazioni dell'algebra elementare, secondo cui $x + 0 = x - 0 = x$.

La definizione III è un po' più lunga, ma non più complicata della definizione I. Arzelà tentò di far dipendere la III

dalla I, dicendo: “ noi diremo che $\lim (f, u, x) = a$, quando comunque si prenda una successione $y_1 \, y_2 \ldots$ di valori appartenenti alla classe u, e vergenti ad x, il limite della successione $f(y_1) \, f(y_2) \ldots$ è a „. Ma per dimostrare l'equivalenza di questa definizione colla III e per dedurre i teoremi sui limiti, è necessario ammettere che si possano scegliere ad arbitrio infiniti elementi; il che non è lecito.

* * *

Alcuni autori invece di dire “ comunque si prenda la quantità positiva h „ dicono “ comunque piccola si prenda h „, o “ essendo h un quantità piccolissima, arbitrariamente piccola, ecc. „. Quest'aggiunta non è necessaria; ed è un pleonasmo. In modo simile si dovrebbe dire “ per m sufficientemente grande „ e “ per n comunque grande „. Le due prime aggiunte si trovano in:

GRASSI, *Preparazione matematica allo studio della chimica fisica*, 1912, pag. 7:

“ Tutte le volte che dato un numero ϵ *piccolo ad arbitrio* si possa trovare un valore di n *abbastanza grande* perchè il termine ennesimo della successione e tutti i seguenti siano in valore assoluto inferiore ad ϵ si dirà che la successione ha per limite lo zero, oppure che il termine generico a_n di essa è infinitesimo col tendere di n all' ∞ „.

È probabile che qualche studioso, nel leggere queste definizioni, si domanderà che cosa sia una quantità comunque piccola, o sufficientemente piccola, e potrà arenarsi, prima di accorgersi che quegli aggettivi sono pleonasmi. Io credo conveniente di sopprimere tutti i pleonasmi. La matematica brilla per la sua semplicità.

Una variante alla definizione di limite si trova in alcuni autori:

ARZELÀ, *Calcolo infinitesimale*:

“ Se assegnato a piacere un numero positivo σ, comunque piccolo, si può sempre trovare nella successione uno dei termini che sia, esso e tutti i successivi, in valore assoluto inferiore a σ si dirà che la successione tende al limite zero „.

Qui si dice " si può trovare un termine, che coi successivi ", invece di dire " si può trovare un posto, un indice, tale che coi successivi ". Ora, dato l'indice, è determinato il termine; ma non viceversa; poichè se la corrispondenza fra posto e termine non è univoca, uno stesso termine può occupare più posti.

Per esempio, ogni termine della serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots$$

è pure termine della serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$$

tuttavia, la somma della prima non è minore della somma della seconda, come dice chi confonde i termini cogli indici.

La prima definizione di limite, in cui si trovano le tre variabili apparenti (h, m, n della I), scritte nell'ordine voluto, e di cui si fanno le precise affermazioni universale, particolare, e universale, è, secondo le mie ricerche, di Ossian Bonnet, del 1871 (" Formul. ", pag. 232).

Nei tempi precedenti (e anche in autori successivi) o manca qualche lettera, o le variabili apparenti sono permutate.

Ebbe grande diffusione la forma adottata da SERRET, *Calcul différentiel* (3ème éd., 1886): " La différence puisse devenir et demeurer constamment inférieure à une quantité donnée quelconque ".

Qui le tre variabili apparenti m, n, h sono espresse dalle parole " devenir ", " demeurer ", " quantité donnée ".

La generazione precedente invece studiò la definizione di DUHAMEL, *Cours d'Analyse* (2ème éd., 1847): " Nous appelons limite d'une variable une quantité constante dont la variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre ".

Secondo questa definizione, il limite del poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di raggio 1, è il quadrato di lato 2, poichè l'area del poligono si va avvicinando senza fine,

senza raggiungerlo mai. E il limite del pendolo oscillante in un mezzo resistente, cioè della funzione $\frac{\sin x}{x}$ per x infinito, non è la posizione d'equilibrio, perchè la raggiunge infinite volte, avvicinandosi ed allontanandosi alternativamente.

***

È noto che si possono commutare due segni $\supset$ successivi: " se per ogni m si ha che per ogni n, si ha ecc. „ significa " se per ogni n si ha che per ogni m, si ha ecc. „. E si possono pure commutare due $\exists$ successivi " se si può fissare m, in modo che si può fissare n „ significa " se si può fissare n in modo che si può fissare m „. Ma i segni $\supset$ $\exists$ non si possono commutare.

La proposizione:

$$x \varepsilon Q . \supset_x . \exists Q \frown y \ni (y < x).$$

" Se x è una quantità positiva, si può determinare una quantità positiva y tale che si abbia $y < x$ „ è vera. Commutando si ha:

$$\exists Q \frown y \ni (x \varepsilon Q . \supset_x . y < x).$$

" Si può determinare una quantità positiva y, tale che se x è una quantità positiva, si abbia $y < x$ „ che è falsa.

Cioè " data una quantità, si può trovare una quantità minore „, ma non è vero che " si possa trovare una quantità minore di ogni data quantità „.

Se nella definizione I, ci permettiamo di portare h dopo m ed n, si ha la relazione fra a ed x:

$$\exists N_1 \frown m \ni [n \varepsilon N_1 . \supset_n : h \varepsilon Q . \supset_h . \operatorname{mod}(x_{m+n} - a) < h].$$

" Si può determinare un ordine m, in modo che qualunque sia l'indice $m + n$, successivo ad m, la differenza $x_{m+n} - a$ sia sempre in valore assoluto minore della quantità positiva prefissata h „.

Essa evidentemente si riduce alla proposizione con due sole lettere apparenti:

$$\exists N_1 \frown m \ni (n \varepsilon N_1 . \supset_n . x_{m+n} = a).$$

Questa relazione fu da me indicata colla scrittura $a = \text{fine}\, x$, in un articolo *Sugli ordini degli infiniti*, “ R. Accad. dei Lincei „, 16 giugno 1910. Questi fini delle funzioni hanno notevoli proprietà; la loro introduzione nell'insegnamento professionale pare prematura. Basta il constatare che, mutando il posto di h, si ottiene un ente tutto diverso.

Scambiando l'ordine delle lettere m ed n, si ha la nuova relazione fra a ed x:

$$h \varepsilon Q \,.\, \supset_h : n \varepsilon N_1 \,.\, \supset_n \,.\, \exists\, N_1 \frown m \ni [\text{mod}\,(x_{m+n} - a) < h]$$

che nel “ Formulario „ è indicata col simbolo $a \varepsilon \text{Lm}\, x$, “ a è un elemento della classe limite di x:

“ Qualunque si sia la quantità positiva h, ed il numero n, sempre posso determinare un numero m, tale che la differenza fra x_{m+n} ed a risulti in valore assoluto minore della quantità che abbiamo prefissata in h „.

Questa classe limite d'una funzione si trova chiaramente in Cauchy, anno 1821; poi andò giù di moda, e fu sostituito col teorema che una funzione non può avere che un limite solo (il che è vero o falso, secondochè per limite intendiamo uno dei simboli lim o Lm); da alcuni anni ritornano in uso il massimo e il minimo della classe limite, col nome di “ estremi di indeterminazione „.

Le tre lettere h, m, n sono suscettibili di 6 permutazioni; unendo ad ognuna di esse o il segno $\supset$ di proposizione universale, o il segno $\exists$ della particolare, si ottengono 48 proposizioni, ognuna delle quali contiene le affermazioni:

$$h \varepsilon Q \,.\, m \varepsilon N_1 \,.\, n \varepsilon N_1 \,.\, \text{mod}\,(x_{m+n} - a) < h \,.$$

Una di esse è la definizione di limite; le altre 47 esprimono altri enti.

Siccome in Francia già si sono introdotte le derivate nelle scuole secondarie, il Borel, uno dei matematici viventi più illustri, pubblicò un libro ad uso delle scuole, col titolo: *Algèbre, second cycle*, 1905.

Ivi, a pag. 309, si definisce la derivata, senza aver prima definito il limite:

“ On appelle dérivée d'une fonction y ce que devient l'expression du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction y à l'accroissement correspondant de la variable x, lorsque dans ce rapport exprimé au moyen de x et de Δx, on remplace Δx par zéro „.

Questa definizione è notoriamente illusoria; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando al posto di Δx si ponga zero, assume la forma $\frac{0}{0}$, che non ha senso; dando a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, prima di porre $\Delta x = 0$, altre forme, può avvenire che in alcune di queste si ottenga il limite ponendo $\Delta x = 0$; ma si possono dare altre forme, per es. la primitiva, in cui il limite non si ottiene colla semplice sostituzione. Durante una generazione, gli analisti, invece di dire limite, dissero “ valor vero „ della funzione. Secondo questa nomenclatura, la derivata è il “ valor vero „ di $\Delta y / \Delta x$, per $\Delta x = 0$, senza essere il “ vero valore „ di questo rapporto.

Nello stesso trattato scolastico l'autore, più avanti, a pagina 321, definisce il limite:

“ Étant donnée une fonction y d'une variable x, on dit que y a pour limite b lorsque x tend vers a, lorsque l'on peut prendre x assez voisin de a pour que y diffère de b aussi peu que l'on veut „.

Ma questa non è la definizione del valor limite o “ lim „ del “ Formulario „, bensì quella della classe limite “ Lm „. Così, per prendere l'esempio dato da Cauchy nel 1821, la funzione $\sin \frac{1}{x}$ della variabile x, ha per limite 0, e 1, e -1, quando x tende a 0; poichè si può prendere x assai vicino a 0, dandogli la forma $1/(N_1 \pi)$, per cui $\sin \frac{1}{x}$ vale 0, che è il solo valore differente da 0 di tanto poco quanto si vuole.

M. Jules Tannery è l'autore di pregiati libri di analisi per l'insegnamento superiore; e questi libri sono mirabili per il rigore, la chiarezza e la semplicità dei mezzi; qualità che generalmente trovansi riunite. La definizione di limite vi è più volte data in modo preciso; per es. nelle *Leçons d'algèbre et d'analyse*, 1906:

" Dire que u_n a pour limite A, c'est dire que quelque petit que soit le nombre positif ϵ, on peut lui faire correspondre un nombre naturel p tel que la valeur absolue de la différence entre A et u_n soit moindre que ϵ, pourvu que n soit plus grand que p ", ove si presentano le tre variabili apparenti ϵ, p, n, nell'ordine voluto, colle condizioni necessarie.

Lo stesso Autore pubblicò, per uso della " Classe de philosophie " dei licei di Francia, un libro *Notions de Mathématiques* (Paris, senza data, ma dev'essere del 1906), già tradotto in tedesco da Klaess. Questo libro a pag. 210 definisce la tangente ad una curva come il limite della secante (cioè dà la definizione comune), senzachè prima sia definito il limite; questo anzi è solo definito a pag. 304. E il limite definito 100 pagine più tardi è il limite d'un numero, non è il limite d'una figura, come una retta, un piano, un cerchio; nè si estende immediatamente, perchè non si può dire che la differenza fra le due rette, o fra i piani, sia infinitesima. Inoltre l'autore ammette l'esistenza del limite, il che non si deve ammettere. La derivata è il limite del rapporto incrementale. Quindi se esiste il limite del rapporto, esiste la derivata; se non esiste quello, non esiste questa. Chi dice invece " la derivata è il limite, *se esiste*, del rapporto incrementale " fa una complicazione, non solo inutile, ma contraria alle convenzioni ordinarie: con questa aggiunta, non sonvi più funzioni senza derivata.

E a pag. 305 così il libro definisce il limite:

" Dire que $f(x)$ a pour limite A_0 lorsque la variable tend vers x_0, c'est dire que la différence $f(x) - A_0$ est en valeur absolue plus petite que tel nombre positif que l'on voudra, pourvu que la différence $x - x_0$ soit, elle même, suffisamment petite en valeur absolue ".

In questa definizione vediamo le tre variabili apparenti, indicate colle parole " tel nombre positif que l'on voudra ", colla lettera x, e poi con un " suffisamment petite ". Ma l'ultima è poco chiara, e non sono nell'ordine voluto. Come un lettore, non abituato a correggere le prove tipografiche, non rileva gli errori di stampa, che sono invece rilevati da chi impara a leggere; così chi conosce la definizione di limite, crede di leggere nelle linee precedenti la definizione solita. Ma uno studente intenderà probabilmente la proposizione alla lettera. Con questa

definizione dimostrerò che il limite di x^2, per x tendente a 0, vale 1. Infatti o la differenza $x^2 - 1$ è nulla, ed allora essa è minore in valore assoluto d'ogni numero positivo che si voglia; poichè dire che è un numero minore in valor assoluto di ogni numero positivo che si voglia è una frase elegante per dire numero nullo. In tal caso x sarà $= \pm 1$, e questi valori saranno sufficientemente piccoli in valore assoluto. Ovvero $x^2 - 1$ non è nullo, perciò la piccolezza di x non è sufficiente.

***

Colla parola *limite* si intendono in matematica idee differenti che nel " Formulario „ sono distinte coi simboli:

$$\mathrm{l}' \quad \mathrm{l}_1 \quad \lambda \quad \eth \quad \mathrm{Lm} \quad \mathrm{lim}.$$

I primi quattro operano su classi, gli ultimi due su funzioni. L'ultimo, indicato col simbolo lim, e nella cui definizione occorrono tre variabili apparenti, è quello che è necessario per la definizione generale di derivata.

Ma in matematica elementare si studia la tangente ad una circonferenza, l'area, l'arco, i volumi e le superficie dei solidi di rivoluzione; e le definizioni e teoremi relativi si trovano già in gran parte in Euclide. Ivi, ciò che occorre, non è già il limite d'una funzione " lim „, ma bensì la prima idea, rappresentata dal simbolo " l′ „ cioè " limite superiore „ d'una classe.

Perciò si può studiare fin dove si arriva colla sola nozione di limite superiore.

Richiamo anzitutto la definizione di *massimo*, idea simile al limite superiore (" Formul. „, pag. 46):

$$u \,\epsilon\, \mathrm{Cls}'\,\mathrm{N}_1 \,.\, \supset \therefore x = \max u \,.=: x \,\epsilon\, u : y \,\epsilon\, u \,.\, \supset_y .\, y \leqq x.$$

" Se u è una classe di numeri naturali (a cui possiamo limitarci, o di numeri reali, se si preferisce), allora dire che x è il massimo degli u significa dire che x è un elemento della classe u; e che inoltre, comunque si prenda y nella classe u, sempre si ha $y \leqq x$ „.

In modo analogo si definisce il *minimo*.

Il membro definiente contiene una sola lettera apparente y.

Data una classe (gruppo, insieme) di numeri reali, allora il " limite superiore ", secondo Guilmin nel 1847, " obere Grenze " di Weierstrass, " massimo ideale " di Jordan e di Pringsheim, si definisce così (" Formul. ", pag. 116):

$$u \epsilon \mathrm{Cls'q} \,.\, \supset .\, \mathrm{l'}u = \min \mathrm{q} \cap x \ni [y \epsilon u \,.\, \supset_y .\, y \leqq x].$$

" Data una classe u di quantità, per limite superiore degli u s'intende la più piccola quantità x tale che comunque si prenda y in u, sempre si abbia $y \leqq x$ ".

Il membro definiente contiene il simbolo " minimo " ora definito, e inoltre una variabile apparente y; sostituendo il simbolo " minimo " mediante la sua definizione, si avrà, come nel " Formul. ", t. I, pag. 59:

$$u \epsilon \mathrm{Cls'q} \,.\, a \epsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \therefore a = \mathrm{l'}u \,.\, = : x \epsilon u \,.\, \supset_x .\, x \leqq a : y \epsilon \mathrm{q} \,.\, y < a \,.\, \supset_y .\, \exists\, u \cap z \ni (y < z).$$

" Sia u una classe di quantità, e sia a una quantità determinata e finita. Allora dire che a è il limite superiore degli u, vuol dire: che ogni elemento x della classe u soddisfa alla condizione $x \leqq a$; e che se y è una quantità minore di a, allora esiste un u e z tale che $y < z$ ".

Il membro definiente è l'affermazione simultanea di due proposizioni, di cui una contiene la lettera apparente x, e l'altra due lettere apparenti y e z. La parte aritmetica si riduce a disuguaglianze della forma $y < z$.

La definizione di limite superiore d'una classe è più semplice di quella di limite d'una funzione; perchè nella prima la proposizione più complicata contiene due variabili apparenti, mentre la seconda ne contiene tre.

In modo analogo si definisce il limite superiore infinito e il limite inferiore. Le definizioni sono tutte scritte nel " Formulario ".

Allora si ha un teorema esistenziale:

$$u \epsilon \mathrm{Cls'q} \,.\, \supset .\, \mathrm{l'}u \epsilon \mathrm{q} \cap \iota \pm \infty.$$

Ogni classe di quantità ha sempre un limite superiore determinato, finito o infinito ".

Se si vuol eliminare l'infinito, la stessa proposizione assume la forma:

$$u \in \text{Cls}'\text{q} \,.\, \exists u \,.\, m \in \text{q} \,.\, \sim \exists u \cap (m + \text{Q}) \,.\, \supset \,.\, \text{l}'u \in \text{q} \,.\, \text{l}'u \leqq m.$$

" Dato il gruppo u, effettivamente esistente (cioè non vuoto), se m è una quantità tale che non esista alcun u maggiore di m, allora il limite superiore degli u è una quantità determinata e finita, e precisamente minore di m „.

Invece, data una successione, o funzione, non sempre esiste il limite; e la condizione affinchè questo limite sia determinato e finito, è complicata.

***

La proposizione sull'esistenza del limite superiore delle classi di numeri reali si riduce subito a quella per le classi di numeri razionali e, se vogliamo, positivi:

$$u \in \text{Cls}'\text{R} \,.\, \exists u \,.\, m \in \text{R} \,.\, \sim \exists u \cap (m + \text{R}) \,.\, \supset \,.\, \text{l}'u \in \text{Q}.$$

" Se u è una classe di razionali positivi, classe non vuota, e se c'è un certo numero razionale m, in modo che non esistano degli u maggiori di m, allora il limite superiore degli u è un numero reale (non necessariamente razionale) „.

E questa proposizione esistenziale dipende dalla definizione di numero reale, irrazionale compreso.

I matematici non sono tuttora d'accordo sulla definizione migliore degli irrazionali.

Comincio col richiamare la definizione Euclidea.

Euclide, nel libro V, dà la definizione, che porta il N. 5, e che io traduco:

" Nella stessa ragione quattro grandezze diconsi essere, la prima alla seconda e la terza alla quarta, quando equimoltiplici della prima e della terza insieme sono maggiori, o eguali o minori delle equimoltiplici della seconda e della quarta „.

Chiamiamo a, b, c, d le quattro grandezze, ed m e n i numeri secondo cui si fanno le equimoltiplici. Essa diventa:

" Date quattro grandezze a, b, c, d, diremo che $a/b = c/d$,

quando, essendo m ed n numeri naturali, se $ma > nb$, sarà $mc > nd$, se $ma = nb$ sarà $mc = nd$, se $ma < nb$ sarà $mc < nd$ „.

La ragione a/b di due grandezze è ciò che oggi si chiama “ numero reale „, in simboli Q; la relazione $ma > nb$ si può scrivere $a/b > m/n$; la ragione di due interi m ed n oggi si chiama “ numero razionale „.

Sicchè in linguaggio matematico moderno, la definizione Euclidea diventa:

“ Dati due numeri reali x e y, diremo che $x = y$, quando, comunque si prenda il numero razionale z, se $x > z$, sarà anche $y > z$, se $x = z$ sarà $y = z$, se $x < z$ sarà $y < z$ „.

In simboli:

$$x\,,\,y \,\epsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset : x = y \,. = .\, \mathrm{R} \cap z \ni (z < x) = \mathrm{R} \cap z \ni (z < y).$$

“ I due numeri reali x e y diconsi eguali, quando la classe dei razionali minori del primo coincide colla classe dei razionali minori del secondo „.

Ogni numero reale produce nella classe dei razionali una *sezione*, o *Schnitt* dei matematici tedeschi, o *coupure* dei francesi; dice la definizione Euclidea, che due numeri reali sono eguali, se ad essi corrisponde una stessa sezione.

Perciò la sezione dei numeri razionali, che individua un numero reale, popolarizzata da Dedekind nel 1872, che però già si trova in trattati precedenti, si può far rimontare ad Euclide.

Ciò che manca in Euclide, è l'affermazione che ad ogni sezione corrisponde un numero reale esistente. E ciò non si trova mai in Euclide, poichè le grandezze che egli considera sono tutte costruibili colla riga e compasso. Quindi Dedekind dice che se non esiste il razionale che produce quella sezione, noi creiamo “ wir erschaffen „ un nuovo numero che ha quella proprietà.

Questa creazione di nuovi numeri presenta delle difficoltà. Alcuni autori ammettono la proposizione esistenziale precedente come un postulato, che alcuno, e a torto, chiama postulato di Dedekind. Ma questa proposizione esistenziale contiene l'ente nuovo “ numero reale „ che si vuol definire; e perciò ha piuttosto i caratteri d'una definizione. E alcuni Autori la chiamano *definizione*, e scrivono “ noi conveniamo che... „. Ora essa non ha la forma d'una definizione, poichè non è un'eguaglianza il

cui primo membro è il segno nuovo, che si definisce, ed il secondo è un gruppo di segni noti.

Invece di dire " distinguiamo tutti i razionali in due classi, in modo che ogni numero della prima sia minore d'ogni numero della seconda ", possiamo considerare una classe sola, la prima; poichè la seconda si ottiene dalla prima colla negazione. Questa classe unica fu considerata da Pasch, nel 1882, col nome di " segmento di razionali " o " segmento ", " Strecke ".

Il Pasch, ed altri autori, identificano il numero reale col segmento di razionali, e pongono ad esempio:

$$\sqrt{2} = \mathrm{R} \cap x \ni (x^2 < 2).$$

" $\sqrt{2}$ è l'insieme dei razionali positivi, il cui quadrato è minore 2 ".

Una chiara esposizione dei numeri reali, trattati come segmenti di razionali, fu fatta dal prof. Cipolla, dell'Università di Catania, nel " Periodico di Matematica ", anno 1910; e fu adottata in parecchi trattati.

Però, se c'è corrispondenza univoca fra segmento e numero reale, questi enti hanno proprietà diverse. Chi identifica numero reale col segmento, dovrà dire:

$$1 \epsilon \sqrt{2} \qquad \text{invece di} \qquad 1 < \sqrt{2},$$

$$\sqrt{2} \supset \sqrt{3} \qquad \text{invece di} \qquad \sqrt{2} < \sqrt{3}.$$

Il simbolo 1 rappresenterà tanto l'unità, quanto la classe delle frazioni proprie, di cui 1 è limite superiore.

La definizione Euclidea è una definizione per astrazione, ed io ritengo che così si debbano definire i numeri reali:

$$u \epsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, x \epsilon \mathrm{R} \,.\supset.\, x < \mathrm{l}'u \,.=.\, \exists\, u \cap y \ni (x < y).$$

" Se u è una classe di razionali (positivi), ed x è un razionale, diremo che x è minore del limite superiore degli u, quando x è minore di qualche u ". Sicchè il segno l′ qui ha il valore di " qualche ". Poi si definisce l'eguaglianza, con Euclide:

$$u\,, v \epsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\supset:\, \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v \,.=.\, \mathrm{R} \cap z \ni (z < \mathrm{l}'u) = \mathrm{R} \cap z \ni (z < \mathrm{l}'v),$$

e poi, con definizioni opportune, si introduce la somma, e le altre operazioni.

Le definizioni per astrazione hanno la forma:

$$\varphi x = \varphi y \,.=.\, p_{x,y}$$

ove φx è un nuovo ente; non si pone $\varphi x =$ espressione nota, ma bensì si definisce solo l'eguaglianza $\varphi x = \varphi y$, come equivalente ad una proposizione $p_{x,y}$ contenente le due variabili x ed y.

La più celebre definizione per astrazione è quella ora riportata di Euclide. Le definizioni di direzione (o punto all'infinito) d'una retta, o di potenza d'un insieme, e tante altre, sono definizioni per astrazione:

direzione di $a =$ direzione di $b \,.=.\,$ la retta a è parallela a b;

potenza dell'insieme $a =$ potenza di $b \,.=.\,$ si possono porre gli a e i b in corrispondenza univoca e reciproca.

Già il compianto prof. Pieri, e poi Russell e Burali-Forti, affermarono che ogni definizione per astrazione si può rendere nominale, ponendo:

$$\varphi x = y \ni (p_{x,y}),$$

cioè eguagliando φx all'insieme degli enti y che stanno nella relazione $p_{x,y}$ con x. Allora il numero reale diventa identico al segmento di razionali; il punto all'infinito è una stella di rette parallele; la potenza d'una classe è la classe delle classi che si possono mettere in corrispondenza univoca colla data.

Non negando la possibilità di fare ciò, io ne nego la convenienza. Queste definizioni nominali, oltre all'attribuire all'ente definito, limite superiore, punto all'infinito, potenza d'un insieme, le proprietà che esso ha, gli attribuiscono pure altre proprietà che esso non ha, secondo il linguaggio ordinario.

Dirò ancora due parole sulle *classi contigue*. Alcuni autori introducono la definizione:

$$a, b \,\epsilon\, \mathrm{Cls'R} \,.\supset.\, a \text{ è contigua a } b \,.=:\, x \,\epsilon\, a \,.\, y \,\epsilon\, b \,.\supset_{x,y}.\, x < y :$$
$$h \,\epsilon\, \mathrm{R} \,.\supset_h.\, \exists\, (x; y) \,\epsilon\, (x \,\epsilon\, a \,.\, y \,\epsilon\, b \,.\, y - x < h).$$

" Le due classi a e b diconsi contigue, quando ogni elemento di x della a è minore d'ogni elemento y della b; e inoltre, fissato ad arbitrio una quantità (razionale positiva) h, si può determinare un elemento x nella prima, e uno y nella seconda tali che $y - x < h$ „.

E si deduce che, se a e b sono classi contigue, allora esiste, nel campo dei numeri reali, il limite superiore degli a (o limite inferiore dei b).

Sotto l'aspetto del rigore, non c'è luogo ad obbiezione. Ma si può osservare che l'ente, di cui si afferma l'esistenza, dipende da una sola delle due classi contigue; quindi l'altra si può sopprimere. E che non c'è la corrispondenza univoca fra numero reale e coppia di classi contigue; ciò che può essere dimenticato non solo da studenti, ma anche da professori, poichè veggo stampato: " il numero irrazionale è una coppia di classi contigue „.

***

La lunghezza d'un arco di curva fu definito dal Serret come " il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte in esso, quando il numero dei lati cresca indefinitamente, e ogni lato tenda a zero „.

Qui si parla del limite d'una funzione, non di una variabile, come sopra si è detto, ma bensì dei valori del parametro da cui dipendono le posizioni dei vertici; e questi valori crescono in numero indefinitamente. Sicchè quella definizione significa:

" Dire che l'arco AB è eguale al segmento rettilineo CD, significa dire, che fissata una quantità positiva h, si può determinare una nuova quantità positiva k, in modo che ogni linea poligonale inscritta in AB, e di cui ogni lato sia minore di k, abbia una lunghezza compresa fra $\mathrm{CD} - h$ e $\mathrm{CD} + h$ „. E il dire per quali linee esista il segmento CD che verifica questa condizione, ossia quali linee sono rettificabili, non è cosa agevole.

Seguendo invece Archimede, diremo che la lunghezza d'un arco è " il limite superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte in esso „.

Sicchè, con questa definizione " dire che l'arco AB è eguale al segmento rettilineo CD, significa dire che, ogni poligono inscritto in AB è minore di CD, e che fissato un segmento CE minore di CD, esiste un poligono inscritto in AB e maggiore

di CE „. E risulta che ogni arco ha lunghezza finita od infinita, perchè sempre esiste il limite superiore d'una classe di grandezze.

Si vede così come l'introduzione del limite generale, invece dell'idea più semplice di limite superiore, abbia complicato una antica e semplice teoria. Libri più recenti, a furia di condizioni inutili, resero la definizione di arco, di una complicazione inverosimile.

L'area d'una figura piana, limitata da un contorno curvilineo qualunque, è il limite superiore delle aree dei poligoni inscritti in essa. Qui *inscritto* ha il significato etimologico di *scritto dentro*, se la figura non è convessa. Sarà l'area anche il limite verso cui converge l'area d'un poligono inscritto nella figura, quando il numero dei lati cresca indefinitamente, e ogni lato decresca indefinitamente? È chiaro che no.

Invece dei poligoni inscritti, si può parlare di poligoni circoscritti e del loro limite inferiore; nei casi più comuni si riconosce facilmente che questo limite inferiore coincide col limite superiore degli inscritti. L'insegnante delle scuole secondarie può tacere che potrebbe questa coincidenza non avvenire. Non è necessario che egli ammetta che questa coincidenza avviene sempre; non è necessario di costrurre la matematica sul falso.

L'equivalente analitico dell'area è l'integrale; e siccome l'area si definisce naturalmente come limite superiore, traducendo il linguaggio geometrico in analitico, si ottiene la definizione di integrale, mediante il solo concetto di limite superiore d'una classe, senza introdurre quello di limite d'una funzione. La definizione di integrale, che dipende dal limite d'una classe, è più semplice di quella di derivata, che dipende dal limite di una funzione; e storicamente l'integrale precede la derivata.

La somma d'una serie a termini positivi è il limite superiore delle somme d'un numero finito di suoi termini.

La base " e „ dei logaritmi naturali si può definire come il limite superiore dell'insieme dei valori assunti da $(1+1/n)^n$, quando n è un numero naturale qualunque (o anche reale e positivo). Si può anche definire come il limite inferiore della classe dei valori di $(1+1/n)^{n+1}$; e si ha così:

$$n \epsilon N_1 . \supset . (1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}.$$

Non è necessario, in un insegnamento secondario, di dire che e è anche il limite verso cui tende $(1+1/n)^n$ col tendere di n all'infinito; cioè di dire che, fissata ad arbitrio una quantità positiva (piccolissima) h, si può determinare un intero m, in guisa che per ogni n maggiore di m, si abbia un valor assoluto $e-(1+1/n)^n < h$.

Risulta dalle cose dette, che nelle definizioni di numero irrazionale, di lunghezza d'un arco, di area, di integrale, e in parecchie altre questioni di analisi, si presenta naturalmente il limite (superiore) d'una classe, e non il limite d'una funzione. Il primo contiene due variabili apparenti, ed il secondo ne contiene tre.

Ma la definizione di derivata, o di tangente ad una curva, o di velocità d'un punto (idee equivalenti, espressi con termini di analisi, o di geometria, o di meccanica), esige il concetto di limite d'una funzione, se si vuol dare in generale.

Perciò, volendosi dare questi concetti nelle scuole secondarie, si può ritornare ai metodi di 2000 anni fa; la tangente è la retta che *tange* la curva, cioè sta tutta da una parte della curva, o di un arco di curva. Si ha la tangente al circolo, ellisse, parabola, iperbole, spirale d'Archimede (già trovata da questo matematico) e delle principali curve. Restano esclusi i punti di flesso, e le curve non piane, il cui studio si può rimandare ai corsi superiori.

O anche, dopo aver utilizzato il concetto di limite d'una classe, si può anche fare il passo al limite di una funzione, il quale limite contiene una variabile di più che il precedente.

La permutazione della proposizione universale colla particolare, ossia lo scrivere Ǝɔ volendosi dire ɔƎ, non è raro in alcuni libri, producendo confusioni e anche errori, di cui darò pochi esempi.

È proposizione di aritmetica elementare, anzi è parte della definizione di numero naturale, la proprietà " dato un numero, esiste un numero più grande di esso „; commutando si ha la proposizione falsa " esiste un numero più grande di ogni numero dato „. Questo numero contradittorio in sè, dicesi da alcuni l'*infinito*; e siccome dall'assurdo consegue tutto, sia il vero che il falso, sopra questo infinito assurdo si pubblicarono volumi, e volumi si pubblicano tuttora.

Cauchy, *Analyse Algébrique*, 1821, a pag. 120, così ragiona: " Abbiasi una serie, i cui termini dipendono da una variabile x, e sia convergente per ogni valore di x in un certo campo. Allora dato x, si può prendere n così grande, che il resto della serie dopo n termini sia minore d'una quantità piccolissima ", e invertendo deduce: " si può prendere n così grande, che dato x, il resto delle serie dopo n termini sia minore della quantità piccolissima "; e quindi dedusse che la somma d'una serie, i cui termini sono funzioni continue d'una variabile, è pure funzione continua. Abel notò l'inesattezza di questa deduzione; oggi la serie che soddisfa alla prima condizione si dice di convergenza semplice; e di convergenza equabile se soddisfa alla seconda.

La così detta condizione necessaria e sufficiente per la convergenza delle serie diede luogo a divergenze.

Catalan, *Traité des séries*, 1860, pag. 4, dichiara *fausse* la proposizione seguente:

" Pour qu'une série soit convergente, la condition nécessaire et suffisante consiste en ce que la somme d'un nombre quelconque de termes au delà de u_n, soit aussi petite que l'on voudra, si n est suffisamment grand ".

Egli dice che questa proposizione si trova " par inadvertence, dans un fort bon traité ". E effettivamente essa si trova in Sturm e in una moltitudine di libri posteriori; e prima si trova, un po' più confusa, in Cauchy, *Analyse Algébrique*, p. 116, e in *Exercices de mathématique*, t. 2, p. 221:

" Pour qu'une série soit convergente il est nécessaire et il suffit que la différence $S_{n+m} - S_n = u_n + u_{n+1} + ... + u_n + u_{m-1}$ devienne infiniment petite, quand on attribue au nombre n une valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre entier représenté par m ".

Il Catalan dà più esempi; il più semplice è questo. Considero la serie armonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$; il termine generale tende a zero; perciò anche la somma di 2, 3 termini, ed in generale la somma di m termini seguenti quello d'indice n tende a zero, col tendere di n ad infinito; pure la serie non è convergente.

Il Catalan attribuisce alla proposizione il senso seguente:

$$h \epsilon \mathrm{Q} \,.\, m \epsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \supset_{h,m} \exists\, \mathrm{N}_1 \frown n \ni [\mathrm{mod}\, \Sigma\, (u\,,\, n \cdots (n+m)) < h]$$

la quale, necessaria per la convergenza, non è sufficiente. Invece Cauchy e i suoi seguaci intendevano:

$$h \epsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h \,.\, \exists\, \mathrm{N}_1 \frown n \ni [m \epsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \supset_m .\, \mathrm{mod}\, \Sigma\, (u\,,\, n \cdots (n+m)) < h]$$

che è condizione necessaria e sufficiente. Le due proposizioni contengono gli stessi elementi in ordine diverso.

Noterò che la frase " *la* condizione necessaria e sufficiente per la convergenza „ può condurre qualche studente a credere che questa condizione sia unica.

" Condizione necessaria e sufficiente „ d'una proposizione è ogni proposizione equivalente ad essa.

Quindi " condizione necessaria e sufficiente „ affinchè una serie converga, è che converga, per il principio d'identità. Ovvero, per la definizione di convergenza, essa significa che la successione delle somme dei suoi termini abbia un limite (lim); ovvero, siccome il limite è l'unico valore della classe limite (Lm) della successione, la condizione si trasforma nell'altra che la classe limite della successione delle somme si riduca ad un solo valore; cioè che il massimo valore limite coincida col minimo, e così via, fino ad ottenere la condizione precedente, la quale però è di utilità scarsa.

Prima di Cauchy, il Bolzano nel 1817 enunciò la stessa regola per la convergenza d'una successione; essa è riprodotta nel " Formulario „, pag. 215; ma le variabili apparenti sono in disordine; sicchè la proposizione si può interpretare sia nel senso giusto che nel falso.

Ancora un esempio, dal Fine, *College Algebra*, 1905, libro del resto ottimo. Ivi, pag. 527, si legge:

" The positive series $u_1 + u_2 + \ldots$ is convergent if ratio of each of its terms to the immediately preceding term is less than some number r which itself is less than 1 „.

Obbietta uno studente: " Dire che il rapporto d'un termine al precedente è minore di un numero r minore di 1, vuol dire solo che questo rapporto è minore di 1; poichè ogni numero

minore di 1 è minore di infiniti numeri r minori di 1. Perciò l'ipotesi è " se il rapporto d'un termine al precedente è minore di 1„, da cui non segue che " la serie è convergente „.

Risponde l'insegnante: " Ma quel numero r è fisso, costante „.

Replica lo studioso: " La parola *costante* è termine relativo, non assoluto; come è egualmente senza senso il dire che " 2 è maggiore „ o " 2 è minore „, poichè 2 è maggiore di 1, ed è minore di 3; così è egualmente senza senso il dire che r è costante, quanto dire che r è variabile. Del resto, nella serie armonica $1 + 1/2 + 1/3 + ...$, il rapporto del secondo termine al primo è 1/2, minore di 2/3, quantità costante assoluta, perchè è un numero; e il rapporto del terzo termine al secondo vale 2/3, minore della costante assoluta 3/4; e così via; e la serie diverge „.

Allora l'insegnante modifica la proposizione, dicendo " minore d'un numero prefissato r minore di 1 „; ma questo " prefissato „ significa " che non è stato prefissato „, " che ci siamo dimenticati di prefissare „. E siccome nella proposizione si sono fatte più affermazioni prima di dire $u_{n+1}/u_n < r$, secondochè noi prefissiamo r in un posto o nell'altro, la proposizione sarà giusta o falsa.

***

Confrontando i programmi proposti per le scuole italiane, con quelli francesi, del 31 maggio 1902, giudico migliori i nostri perchè più liberali. Nei programmi francesi è quasi imposto il metodo d'insegnamento. Vi si dice per esempio " problème inverse de la recherche de la dérivée „, il che indica che l'integrale si debba definire come l'inverso della derivata; mentre storicamente si ebbe lo sviluppo inverso; e la maggioranza dei trattati ora definisce direttamente l'integrale, senza passare per le derivate; e parecchi autori (Jordan, Arzelà, Vivanti) cominciano addirittura dall'integrale. Anche la frase del programma " en négligeant des quantités infiniment petites „ indica un modo di esprimersi scomparso da molti libri, i quali non trascurano più gli infinitamente piccoli.

*
* *

In conclusione, colla parola *limite* (o *infinitesimo*, o altre equivalenti) si intendono in matematica idee diverse, quali il limite superiore d'una classe, ed il limite verso cui tende una funzione. E questa confusione ha prodotto equivoci, non solo fra gli studiosi, ma anche fra i matematici sommi. Il linguaggio ordinario è uno strumento imperfetto per enunciare delle proposizioni con più variabili apparenti. La cosa diventa più facile colla distinzione fra proposizioni universali e particolari, fatta dalla logica generale, e meglio ancora coi simboli equivalenti Ɔ ed ∃ della logica matematica. Se l'insegnante delle scuole medie impiega la sua prima lezione a sviluppare tutto il formalismo della logica matematica, avrà uno strumento per spiegare in modo semplicissimo queste complicazioni. Altrimenti io temo che l'introduzione del limite delle funzioni (invece di quello delle classi) riproduca nelle scuole medie quella serie di confusioni, da cui si è a stento (e non completamente) liberato il Calcolo infinitesimale odierno.

Le questioni didattiche sono del massimo interesse, perchè ogni miglioramento produce un'economia di lavoro nella moltitudine degli studenti. Perciò esposi la mia opinione su questo soggetto; e sarebbe desiderabile che questa questione fosse più ampiamente discussa; e che qualcuno magari pubblicasse i capitoli che si dovrebbero aggiungere agli attuali trattati, per sviluppare i futuri programmi.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 20 Aprile 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. RODOLFO RENIER
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli e del Socio Manno, Direttore della Classe.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 6 aprile 1913.

Il Presidente presenta il vol. VII della *Storia dell'arte italiana* del prof. Adolfo Venturi (Milano, Hoepli, 1913), dall'autore nostro Socio corrispondente offerto in omaggio all'Accademia, e i *Documents relatifs au règne de Louis XII et à sa politique en Italie*, raccolti da Léon G. Pélissier (Montpellier, 1912) insieme con altri opuscoli del Pélissier, inviati in dono dalla vedova; e ne prende occasione per ricordare l'opera del compianto erudito (morto il 9 novembre 1912) e in particolare le sue pregevoli ricerche sulle relazioni tra Francia ed Italia al tempo di Luigi XII e le lettere da lui pubblicate della contessa d'Albany, dolendosi che un così accurato e conscienzioso ricercatore di documenti sia stato tanto presto rapito alla scienza.

Il Socio De Sanctis offre per la inserzione negli *Atti* un saggio del Dr. Ettore Bignone, intitolato: *Studi critici su gli Ichneutai di Sofocle.*

LETTURE

Studi critici su gl' Ichneutai di Sofocle

di ETTORE BIGNONE.

L'ultimo volume dei papiri di Ossirinco (1912) ci offre una preziosa scoperta, quella degli *Indagatori* di Sofocle (così infatti bene traduce il titolo il Fraccaroli), cioè buona parte di un nuovo dramma satiresco, e per di più di Sofocle, di cui non avevamo che scarsi frammenti di tal genere.

Il valore estetico è minore di quello che forse ci attendevamo. Non mancano alcuni tratti comici graziosi, come la corsa disordinata dei satiri inseguenti le tracce degli armenti di Apollo rapiti, e il loro risibile spavento al disusato suono della lira di Ermete. La rappresentazione scenica ne rilevava forse alcuni che male appariscono dalla lettura, ma in paragone del *Ciclope* di Euripide tutto fresco e vivido di una comicità arguta e fine, il nuovo dramma satiresco di Sofocle perde assai.

Direi anzi che la scena della *Guardia* (vv. 388 sgg.) dell'*Antigone* ricca di una vivace rappresentazione realistica nei tratti dello stile, ci lasciava sperare di più da Sofocle autore di drammi satireschi. Ciò che piace più che altro è lo stile sofocleo, fine sempre e felice, anche se il riso languisca alquanto in queste pagine graziose, composte, ma raramente comiche. La trovata è curiosa ma Sofocle non va molto oltre alla trovata.

Prima però di studiare l'opera di Sofocle più addentro nel suo valore artistico, è necessario che essa possa leggersi agevolmente, senza intoppi e grandi lacune, o con quelle lacune solamente che sono inevitabili per la perdita di qualche colonna. A questo intento si è adoperato con grande amore l'editore inglese, coadiuvato dai suoi collaboratori, ma, come è naturale, nè l'edizione principe, nè la minore (*Tragicorum Graecorum fragmenta papyracea nuper reperta rec.* A. S. HUNT Oxonii s. a.)

pubblicata poco dopo nella collezione oxoniense dei classici, hanno colmati tutti i vuoti. Mi occuperò adunque di quelle parti in cui credo aver trovato qualcosa di utile agli studiosi.

E veniamo subito ai primi versi. I vv. 2-5 sono lasciati incompleti nelle due edizioni. Il Rossbach, in " Berl. philol. Woch. „ 1912 p. 1460, propone per 2-3 (1):

1 [πᾶσιν θεοῖς καὶ πᾶσι]ν ἀγγέλλω βροτο[ῖς
[τόδ' ἔργον ἦδε δῶρ' ὑπισ]χνοῦμαι τελεῖ[ν
[εἴτ' ἐγγύθεν τις οἶδεν εἴτ' ἀ]πόπροθεν.....

Il Rossbach introduce nel v. 3, 22 lettere, nella parte mancante, invece di 18 segnate dallo Hunt, è vero però che molti sono gli ε e ι che son lettere assai strette; giova invece osservare: 1) che l'integrazione vorrebbe la riprova del 4° e del 5° verso, 2) che il terzo verso mi pare poco felice. Che il ladro sia stato veduto da vicino o da lontano non deve importare gran che: l'importante è che Apollo, che fa il bando, abbia notizie sul furto, e che sia aiutato nella ricerca; questo doveva dire il bando che egli fa. Vediamo dunque di indagare che cosa egli abbia potuto dire più precisamente, e che cosa debbasi integrare. Anzitutto è chiaro che la chiave della ricostruzione deve essere data da ἀπόπροθεν che certamente è l'elemento più significativo di questi versi. Ora se si osserva che poco dopo per ben 15 versi (13-32) si descrive il lungo viaggio che Apollo ha fatto attraverso i diversi popoli e le varie regioni (queste enumerazioni geografiche sono care ai tragici, che ancora son vicini alla curiosità dell'epopea ionica d'Omero — basti ricordare gli errori di Io descritti nel *Prometeo* di Eschilo —), è evidente che il senso di ἀπόπροθεν doveva essere assai lontano da quello supposto dal Rossbach; esso doveva quasi certamente indicare la lunga corsa che ha fatto Apollo. E poichè è questo un dramma satiresco, la figura di Apollo affannato ed ansante dava un risalto che non si deve

(1) Il v. 1 è dal Rossbach dato quale lo integra l'ed., così pure dal Hunt proviene ὑπισ]χνοῦμαι che pare certo. Il Fraccaroli " Riv. di Filol. „ 1913 p. 125, propone per il primo verso [θεοῖσι πᾶσι, πᾶσι]ν ἀγγ. βροτ. Anche ἀ]πόπροθεν si deve al Hunt.

distruggere (cfr. anche 13 [*στείχ*]*ω ματεύω, παντελὲς κήρυγμ' ἔχων* e 15 [*ἀκολο*]*υθίᾳ γὰρ ἐμμανὴς κυνηγετῶ*]) (1).

L'invito all'aiuto che Apollo si aspetta pare debba venire più esplicitamente dopo, perchè si trova ai vv. 36 sgg.: qui ci aspettiamo piuttosto la notizia del furto.

L'intento dunque di questi primi versi, come si rivela anche da quelli che seguono, deve essere di indicare la ragione per cui Apollo chiama a raccolta uomini e divinità e di narrare il fatto. Un simile racconto in principio del dramma si trova anche in Sofocle nelle Trachinie. Ora lasciando insoluta la questione se il verso con cui incomincia il papiro sia il 1, o se qualcun altro precedesse, mi pare che il brano possa scriversi così:

[*πᾶσιν θεοῖς καὶ πᾶσι*]*ν ἀγγέλλω βροτοῖς*
[*ἆθλον δόσιν θ' οἷαν ὑπισ*]*χνοῦμαι τελεῖν·*
[*ἐρῶ δ' ὁθούνεκ' ἦλθον ὧδ' ἀ*]*πόπροθεν* (2)
[*ἔχων*] *ὄν*[*ειδος ἄλλο δύσ*]*λοφον φρενί,*
5 [*ἅπαν*]*τ' ἀ*[*ποστερείς γε βο*]*ῦς ἀμολγάδας*
[*μόσ*]*χους* [*τε καὶ νέων νόμευμ*]*α πορτίδων,*
[*ἔρρο*]*ντα φρ*[*οῦδα, καὶ μάτη*]*ν ἰχνοσκοπῶ*
[*λαθ*]*ραῖ' ἰόν*[*τα τῆλε βου*]*στάθμου κάπης*
[*ἀφα*]*νῶς τέχνα*[*ισιν·*

Nei vv. 6 e sgg. ho date le integrazioni dell'editore, (eccetto *ἔρροντα* che è mio integramento invece di *ἅπαντα*), ma ho modificata la punteggiatura. Egli pone un punto dopo *πορτίδων* (v. 6), ciò che toglie tutta l'enfasi di *ἔρροντα φροῦδα* che viene come un grido doloroso dopo l'enumerazione dei belli armenti che erano il vanto di Apollo. I versi 1-2 propongono, come ho detto, brevemente l'impresa e il premio (per *δόσιν* v. v. 38, 50) che Apollo promette (3). Quanto ad *ἀπόπροθεν* col

(1) In questo verso il papiro da *ἐμμαν*[[*ε*]]*ῖς* che fu corretto in *ἐμμανής* dall'editore; non so se non sia più prossimo allo stile sofocleo e più vigoroso leggere *ἐμμανεῖ*, il correttore del papiro non si presenta degno di molta fede per lo stesso itacismo della sua lezione. V. anche Aesch. *Prom.* *ἐμμανεῖ σκιρτήματι.*

(2) Cfr. infra, detto dal Coro, 253 *ὅτου μὲν οὕνεκ' ἤλθων ὕστερον φράσω.*

(3) Per il v. 3 cfr. *O. R.* 7 *ὧδ' ἐλήλυθα*: *Tr.* 496 *προσελθόνθ' ὧδε σὺν πολλῷ στόλῳ.*

valore di moto da luogo vedi Apoll. *Arg.* III 1111 sg. *ἔλθοι δ' ἡμὶν ἀπόπροθεν ἠέ τις ὄσσα, Ἠέ τις ἄγγελος ὄρνις, ὅτ' ἐκλάθοιο ἐμεῖο.* Col nostro passo confronta anche la parlata di Apollo nell'inno omerico v. 367 *Κυλλήνης ἐν ὄρεσσι, πολὺν διὰ χῶρον ἀνύσσας.* *Ἔχων* del v. 4 pare debole e potrebbe senza difficoltà sostituirsi *φέρων* o *παθών* essendo il numero delle lettere nel principio dei versi sempre meno determinabile sicuramente, e dato che la lettera iniziale è talora più grande talora più piccola, ma lo lascio per le frequentissime circoscrizioni con *ἔχω* che particolarmente Sofocle ama e che si trovano raccolte dal Dindorf nel suo lessico sofocleo (1): *ἄλλο* perchè questa è una nuova sventura di Apollo, dopo i tristi casi (cioè l'uccisione del figlio Asclepio per opera di Zeus e la condanna per la vendetta sui Ciclopi (2)) che lo han condotto servire Admeto come pastore.

Quanto ad *ἀποστερείς* del v. 5 cfr. *στερείς* Euripide *Alc.* 622 *e. a.* (cfr. anche *infra* 76 *Φοίβου κλοπαίας βοῦς ἀπεστερημένου*). Rispetto al numero delle lettere va notato che, oltre a *ι* anche *ε* e *ρ* sono assai piccoli nel papiro.

Il v. 17 è pure lasciato incompleto dagli editori, che ne integrano solo le due prime parole: si può pensare seguisse così:

[ἀλλ' οὔ]τις [οὐδὲν εἶχεν ὥστε μοι φρά]σ[αι

cfr. *O. R.* 118 sgg.:

θνήσκουσι γάρ, πλὴν εἷς τις ὃς φόβῳ φυγὼν
ὧν εἶδε πλὴν ἓν οὐδὲν εἶχ' εἰδὼς φράσαι.

Nel v. 31 sgg. dopo una serie di versi lacunosi si giunge alla fine della descrizione del viaggio:

---

(1) Cfr. anche Herod. IX 71 *εἶχεν ὄνειδος καὶ ἀτιμίην.*

(2) Anche Euripide fa che proprio in principio dell'*Alcesti* li ricordi Apollo: Eur. *Alc.* 1 sgg.: *Ὦ δώματ' Ἀδμήτει', ἐν οἷς ἔτλην ἐγὼ Θῆσσαν τράπεζαν αἰνέσαι, θεός περ ὤν. Ζεὺς γὰρ κατακτὰς παῖδα τὸν ἐμὸν αἴτιος, Ἀσκληπιόν, στέρνοισιν ἐμβαλὼν φλόγα. Οὗ δὴ χολωθεὶς τέκτονας δίου πυρὸς Κτείνω Κύκλωπας· καί με θητεύειν πατὴρ... τῶνδ' ἄποιν' ἠνάγκασεν.*

31 [. . . . . . . Κυλ]λήνης τε δύ[σβατον
[. . . . .] τε χῶρον ἐς δ' ὑ[
[ὡς εἴτε ποι]μὴν εἴτ' ἀγρωτήρ[ων τις ἢ
[μαριλοκαυ]τῶν ἐν λόγῳ παρίσταται
. . . .
. . . . πᾶσιν ἀγγέλ[λω τάδε . . . .

Nel verso 32 è evidente che all'inizio è caduto un aggettivo parallelo a *δύσβατον*; trattandosi di valli montane abitate da pastori è probabile si debba integrare con l'editore *δυσήνεμον*: la finale del verso mi sembra poi possa essere *ἐς δ' ὑ[μᾶς περῶ*: il *ϑ* che si vede nel margine come nota, forse di Teone, era o una variante in luogo di *δ'*, o l'inizio di *Θ[έωνος*. Per *περῶ εἰς ὑμᾶς* cfr. Aesch. *Pers*. 65 (1).

***

Al bando di Apollo accorre Sileno trafelato, vecchio e pingue come è: ecco il principio della sua parlata che mi pare abbia ancora bisogno di qualche chiarimento.

V. 39 sgg. L'editore pubblica il testo così con qualche dubbio per le prime parole del v. 39:

39 [ὦ Φοῖβε,] σοῦ φωνήμαϑ' ὡς ἐπέκλυον
[βοῶ]ντος ὀρϑίοισι σὺν κηρύγμασι,
σπουδῇ τάδ' ἢ πάρεστι πρεσβύτῃ [μαϑών,
σοί, Φοῖβ' Ἄπολλον, προσφιλὴς εὐε[ργέτης
ϑέλων γενέσϑαι τῷδ' ἐπεσσύϑην δρ[ό]μ[ῳ],
ἄν πως τὸ χρῆμα τοῦτό σοι κυνηγέσω.

μαϑών del v. 41 a prima vista pare integramento non accettabile, perchè, a tutta prima, non si comprende come Sileno durasse tempo, se anche vecchio, a capire ciò che Apollo pro-

(1) Il Wilamowitz voleva invece correggere in 32 *εἰ* invece di *ἐς* e integrare *εἰ δ' ὑ[ληβάτης ἐνταῦϑα ποι]μὴν κ. τ. ἑ.*, ma come si vede, non vi è bisogno di nessuna correzione.

clamava ad alte grida, ed anzi io ero tentato a integrare *βαρεῖ* (cfr. *Reg.* I 4, 18 *ὅτι πρεσβύτης ὁ ἄνθρωπος καὶ βαρύς*) riferendo *τάδε* a *προσφιλὴς εὐεργέτης θέλων γενέσθαι* come in un simile esempio in *Oed. Tyr.* 264 sg. (cfr. *Ai.* 1346), ma riflettendo bene non è necessario mutare la lezione dell'editore. Sileno è lontano quando incomincia a sentire le grida di Apollo, e poichè la sua corsa è tarda e impacciata, solo a poco a poco esse gli giungono più distinte sì che ne *comprenda le parole* distintamente, ed allora egli vie più si affretta (*τῷδ' ἐπεσσύθην δρόμῳ*) ad accorrere avendo compreso che può venire in aiuto ad Apollo. Questo esprimono nella loro forma sintetica i versi di Sofocle che non di subito si intendono nella loro intera portata. Infatti tanto il Robert come il Reinach, che traducono l'uno (1):

" O Phoebus, kaum vernahm ich deinen Götterruf,
Der wie des Herolds Stimme durchs Gebirge hallt,
So stürm ich mit der Eile, die dem Alten Mann
Noch zu Gebote steht, im schnellsten Lauf hierher,
Voll Eifer dir zu dienen "

e l'altro (2):

" Phébus, ta voix sonore et ton appel retentissant sont venus jusqu'à moi. Aussitôt, avec toute la hâte dont un vieillard dispose, je suis accouru vers toi; je me suis élancé d'une course rapide, m'offrant pour être, Phébus Apollon, ton bienfaiteur, ton ami, si je puis en bon chasseur te ramener ce gibier ".

dimostrano con la libertà della traduzione di essere in dubbio sulla lezione del passo e sulla sua esatta significazione.

Il discorso del vecchio Sileno continua subito dopo con alcuni versi che presentano molta difficoltà:

45 *τ[ό]τ' ἄγγε[λό]ς μοι κείμενον χρ[υ]σὸ[ν σ]τέφε·*
μά[λι]στ' ἐπ[.....]αισ[ι π]ρόσθε σ.[..... ..]ν,
παῖδας δ' ἐμ[οὺ]ς ὅσσοισι[...] ανε[.]βα[..].[....]

Il v. 45 è dubbio se sia integrato giustamente dallo Hunt che commenta " Silenus means that he wishes his success to be proclaimed, like that of a victor in the games ". Veniamo al

(1) *Die Spürhunde ein Satyrspiel von Sophokles*, Berlin, 1912, p. 10.
(2) " Revue de Paris " (1° aprile), p. 457.

v. 46: il Murray proponeva *τ[ά]τ' ἄγγε', [οἷ]ς μοι..... μά[λι]στ', ἐπ' [αὐλεί]αισ[ι π]ρόσθε σ[οῦ 'φερο]ν* ma già l'editore ha scartata la proposta. È chiaro da quel che segue, nel verso che vien dopo e nelle scene successive, che Sileno vuole che Apollo si affidi ai suoi figli, perciò forse si può supplire:

μάλιστ' ἐπ[είγων (o *ἔπειγε·*) *π]αισ[ὶ π]ρόσθες [τήνδ' ἄγρα]ν*

Più chiara è la fine dei vv. 21 sg. di cui il primo contiene la fine della parlata di Sileno e il secondo è la risposta di Apollo.

. . . . *εἴπερ ἐκτελεῖς ἅπερ λέγεις.*
(Απ.) . . . .]*ω· μοῦνον ἐμπ[έδου τ]ά[δε.*

per il v. 22 propongo di integrare *[ἅπαντα πράξ]ω· μοῦνον.....* Apollo deve infatti assicurare Sileno che manterrà le sue promesse. Nè credo dovesse esservi contenuto nè *μισθόν* nè *χρυσόν* come suggerisce l'editore, perchè del resto non si vedrebbe la ragione per cui Sileno ribatta ancora nel verso seguente, *τὰ[ς βοῦς ἀπάξω σ]οι· σὺ δ' ἐμπέδου [δόσι]ν*, che quantunque lacunoso è per il senso chiaro. Nel verso precedente Apollo dunque doveva avere fatta una promessa che potesse parere a Sileno un poco vaga (come appunto *ἅπαντα πράξω*), ed egli ne vuole una assicurazione più decisa che ci saranno soldi per lo scopritore, donde ancora una volta Apollo deve ripetere: *[ἕξει σφ' ὅ γ' εὑ]ρὼν ὅστις ἔσθ'· ἑτ[οῖ]μ[α] δέ*, come bene integra lo Hunt.

*
* *

Fatti gli accordi Sileno si raccomanda alla Fortuna e invita i presenti a rivelargli se alcuno ha veduto il ladro, o sa dargli notizia del furto:

. . . .
77 *τῶν* [sc. *βοῶν*] *εἴ τις ὀπτήρ ἐστιν ἢ κατήκοος,*
ἐμοί τ' ἂν εἴη προσφιλὴς φράσας τόδε,
Φοίβῳ τ' ἄνακτι συντελὴς εὐεργέτης·
[. . . . . . .]*α[. .]τ[. .]ς τοῦ λό[γο]υ θ' ἅμα[*
μηνυ[

Il v. 81 è scritto nella colonna seguente (IV), ma dal numero dei versi delle singole colonne si rileva che segue immediatamente ai precedenti, e senza stacco lo stampa l'editore nell'*editio minor*, integrando *μήνυ[τρα*.

Nel v. 80 τ̣ è dubbio, non credo perciò sia troppo ardito leggere ϱ e integrare:

[*Τούτων* (o *ἀνθ' ὧν*) *δ'*]*ἀ*[*πα*]*ϱ*[*χὰς τοῦ λό*[*γο*]*υ θ' ἅμ' ἄ*[*ξιον*
μήνυ[*τϱον ἕξει χϱυσὸν ὃν Φοῖβος τελεῖ.*

con *ἀπαϱχάς* e *χϱυσόν* cfr. *Ichneutai* v. 201 sg.: *καὶ πλούτ*[*ει λαβὼν*] *Τὰς βοῦς τε καὶ τὸν χϱυσόν*..... cfr. anche l'episodio corrispondente delle *Metamorfòsi* di Ovidio II 699:

" Rustice, vidisti siquas hoc limite ", dixit,
" ire boves, fer opem, furtoque silentia deme
iuncta suo pariter dabitur tibi foemina tauro ".

Per *μήνυτϱον* v. *Hymn. Hom. in Merc.* v. 264: *οὐκ ἂν μηνύσαιμ', οὐκ ἂν μήνυτϱον ἀϱοίμην*, cfr. *ibid.* 364.

***

Dopo tre versi lacunosi del coro, segue l' invito di Sileno ai satiretti perchè si mettano all'opera:

85 *Σι. Φησίν τις, ἢ* [*οὐδεὶς φησιν εἰδέναι τάδε;*
ἔοικεν ἤδη κ[*αὶ πϱὸς ἔϱγ' ὁϱμᾶν με δεῖν.*
ἄγ' εἶα δὴ πᾶς σ[
ϱινηλατῶν ὀσμ[*αῖσι*
αὔϱας ἐάν πη πϱ[
διπλοὺς ὀκλάζω[*ν* . . . .]*ν*
ὕποσμος ἐν χϱῷ . [. . . . .]
οὕτως ἔϱευναν καὶ π[. . . . .] . (1)
ἅπαντα χϱηστὰ κα[*ὶ* . . . . *τε*]*λεῖν.*

---

(1) In questo verso il *facsimile* dell'*editio princeps* dà 12 lettere mancanti, e nel seguente 11.

Così dà l'editore il testo lacunoso, ma mi sembra che si possa integrare *exempli causa*:

88 *ἄγ' εἶα δὴ πᾶς σ[τόλος ὅδ' ἐλθέτω δρόμῳ*
ῥινηλατῶν ὀσμ[αῖσιν, ὡς εὖρις κύων,
αὔρας, ἐάν πῃ πρ[όσφορόν τι σῆμ' ἕλῃ,
διπλοὺς ὀκλάζω[ν εἰς ὀπισθίους, βοῶ]ν,
ὕποσμος ἐν χρῷ [γῆς, ἵνα στίβον λάβῃ· (1)
οὕτως ἐρευνᾶν καὶ π[ερισκοπεῖν ἔνι
ἅπαντα χρηστὰ κἄ[ν τύχῃ τόδ' εὖ τε]λεῖν χρῆσθαι οὕ⟨τως⟩ ἐν τ⟨ῷ⟩ Θέω⟨νος⟩

Nel v. 89 *ὡς εὖρις κύων* in relazione con *ῥινηλατῶν* è suggerito da Polluce *ῥινηλάτης κύων ἡ τραγῳδία* (fr. adesp. 426) cfr. Aesch. *Ag.* 1185 *ἴχνος κακῶν Ῥινηλατούσῃ τῶν πάλαι πεπραγμένων*, dove *ῥιν.* come qui, è usato nel senso di *naribus investigare*. *εὖρις κύων* è anche in Sofocle altrove *Ai.* 7: *εὖ δέ σ' ἐκφέρει Κυνὸς Λακαίνης ὥς τις εὔρινος βάσις*. Cfr. Aesch. *Ag.* 1093: *ἔοικεν εὖρις ἡ ξένη κυνὸς δίκην*. E qui i satiretti son considerati come dei veri cani da pesta, v. Poll. V 10: *ἰχνευτὴς καὶ ἀνὴρ καὶ κύων*, e sono detti *θῆρες* 139, 147, 215. Come cani essi si accosciano per fiutare la pesta, cfr. Ael. *N. A.* VII 4 *ὀκλάσαντες* (*τοὺς ταύρους*) *τοὺς προσθίους* (naturalmente qui invece deve essere indicato l'atto consueto del cane che fiuta piegando *τοὺς ὀπισθίους*; cfr. anche Luc. *d. mort.* 27. 4 *ὀκλ. εἰς τὸ γόνυ*). Con *ὕποσμος* cfr. Hesych. *ὕποσμος, ὀσφραινόμενος*.

Una difficoltà nell'integrare i versi 93 sg. è data dalla seconda lezione *χρῆσθαι*, che è segnata in margine, come proveniente dal manoscritto di Teone. Le lezioni di Teone non valgono assai spesso gran che, come si può vedere da altri passi del nostro dramma, p. e. dal 323 dove l'esemplare di Teone recava una lezione metricamente falsa. Ad ogni modo nella mia integrazione *χρῆσθαι*, che non è certo da preferirsi a *χρηστά*, si spiega secondo un costrutto noto con *ὥστε* sottinteso. Cfr. Plat. *Phaedr.* 229 B *Ἐκεῖ σκιά τ' ἐστὶ καὶ πνεῦμα μέτριον, καὶ πόα καθίζεσθαι*, cfr. anche *Ichn.* v. 14.

---

(1) Vedi Xen. *Cyn.* VI 14 *ἐπειδὰν ἡ κύων λάβῃ τὸ ἴχνος.*

***

Vien poi l'affannosa ricerca dei satiretti segugi i quali quando credono di avere trovate le peste vedono che presto esse s'intralciano sì che essi cominciano a perdere la pazienza:

99 (Ἡμιχ.) *τί; τοῖσ[ι] ταύτῃ πῶς δοκεῖ;*
(Ἡμ.) *δοκεῖ πάνυ.*
σαφῆ γὰρ αὖθ' ἕκαστα σημαίνει τάδε.
(Ἡμ.) *ἰδοὺ ἰδού·*
καὶ τοὐπίσημον αὐτὸ τῶν ὁπλῶν πάλιν.
(Ἡμ.) *ἄθρει μάλα·*
αὔτ' ἐστὶ τοῦτο μέτρον ἐκμε[τρού]μενον.
(Ἡμ.) *χώρει δρόμῳ· καὶ τα[...........].ν ἔχου*

Come si vede, in v. 105, una delle due schiere ha trovato una nuova pesta e chiama addietro i compagni, perchè la seguano: mi pare dunque si sia assai prossimi al vero interpungendo dopo *δρόμῳ* e integrando *καὶ τα[ῦτ' ἴσ' αὖ· στίβω]ν ἔχου*; cfr. 113 *δέδορκεν αὖ* (*παλινστραφῆ*), 115 *τὰ δ' αὖ*; 118 *τίν' αὖ* (1).

***

Nelle parole di Cillene (215 sgg.) dopo un tratto che corre assai spedito ne segue un altro lacunoso e che l'editore non integra, 224 sgg.:

.... *θαῦμα γάρ· κατέκλυον*
ὁμοῦ πρέπον κέλευμά πως κυνηγετῶν
ἐγγὺς μολόντων θηρὸς εὐναίου τροφῆς,
ὁμοῦ δ' ἂν αὐτι[ς..]..αι φωρ[...]..[..]
γλώσσης ἐτείνε[τ' ε]ἴς κλοπὴν [.....].έναι·

(1) L'editore nell'*editio princeps* avverte che]*ων* è possibile, date le tracce che scorgonsi sul papiro.

αὖτις δ' α[....]τ[....]..μένων[........]α
230 κηρυκ[..]..ι[.....].κηρυγμα[...
καὶ ταῦτ' ἀφεῖσα σὺν ποδῶν λακ[τίσμασι
κληδὼν ὁμοῦ πάμφυρτ' ἐγειτν[ία στέγη.]
[καὶ] ταῦτ' ἂν ἄλλως ἢ κλ[.].....μ[.......]
[φων]ῶν ἀκούσασ' ὧδε παραπεπαισμένων
...[...]φ.[.]η[.]....νων ὑμᾶς νοσεῖν
235 νο[σ..τί νύμφη]ν ἔτι ποεῖτ' ἀναιτίαν;

Credo anzitutto opportuno osservare, poichè il Reinach (1) nella sua traduzione confonde i diversi momenti a cui si allude nel testo lacunoso, che *κηρυγμα*[.. del 230 non ha che fare con gli *ὄρθια κηρύγματα* di Apollo v. 40 (cfr. v. 13), perchè essi sono precedenti alla caccia e fatti lontano dalla grotta di Cillene. Quattro devono essere i momenti a cui si allude, e precisamente nello stesso rapporto di successione delle scene precedenti: 1) l'invito di Sileno alla caccia, 225 seg.; 2) le imprecazioni al ladro, 227 sg.; 3) l'incitamento ai satiri spaventati, 229 sg.; 4) lo scalciare contro la porta, 231 sg.

In v. 224 preferirei interpungere *θαῦμα γὰρ κατέκλυον*, confrontando *τί δεῖμ' ὄπωπας* v. 127 e le simili espressioni dei tragici. Nel v. 226 *τροφῆς* a prima vista è strano e il Wilamowitz propone *στροφῆς*, ma a confortare *τροφῆς* credo opportuno citare il confronto con Lucrezio I 405 canes ut montivagae persaepe *ferarum* Naribus inveniunt intectas fronde *quietes*, dove *ferarum quietes* è usato con metafora affatto corrispondente a *θηρὸς εὐναίου τροφῆς*.

In 427 *ἂν* deve essere iterativo, cfr. in Sofocle stesso *Phil.* 289 sgg.: *πρὸς δὲ τοῦθ', ὅ μοι βάλοι Νευροσπαδὴς ἄτρακτος, αὐτὸς ἂν τάλας Εἱλυόμην, δύστηνον ἐξέλκων πόδα, Πρὸς τοῦτ' ἄν· εἴ τ' ἔδει τι καὶ ποτὸν λαβεῖν, Καί που πάγου χυθέντος οἷα χείματι, Ξύλον τι θραῦσαι, ταῦτ' ἂν ἐξέρπων τάλας 'Εμη-*

(1) V. *loc. cit.* p. 462: " Tout m'étonne. Presque à la fois, j'ai entendu un appel, comme si des chasseurs cernaient les petits d'une bête prise au gîte, et je ne sais quels propos mordants au sujet d'un voleur et d'un vol: *puis l'annonce d'une recompense*; et tout de suite une rumeur confuse, s'approchant de mon logis avec un bruit de ruades ".

χανώμην. Cfr. Eur. *Ph.* 401 sg. Ar. *Pl.* 1179 sgg.: *καί τοι τότε, Ὅτ' εἶχον οὐδέν, ὁ μὲν ἂν ἥκων ἔμπορος Ἔθυσεν ἱερεῖόν τι σωθείς, ...ὁ δ' ἂν ἐκαλλιερεῖτό τις, Κἀμέ γ' ἐκάλει τὸν ἱερέα...* Ciò posto è possibile che i vv. 227 sg. debbano leggersi così: *ὁμοῦ δ' ἂν αὖτι[ς ὡς ὑπ]αὶ φωρ[ᾶς κρότος]* (1) *Γλώσσης ἐτεῖνε[τ' ε]ἰς κλοπήν...* la finale doveva contenere con probabilità un infinito perfetto; al numero delle lettere corrisponderebbe *ὥστ' εἰ]κέναι* (2) cioè forse *ὥστ' εἰκέναι εἰς κλοπὴν* (*τείνεσθαι*), cfr. Soph. *O. Col.* 1108: *τῷ τεκόντι πᾶν* (sc. *τεχθέν*) *φίλον*; Thuc. VIII 141: *ἀφεὶς τὸ ἐς τὴν Χίον* (sc. *πλεῖν*) *ἔπλει ἐς τὴν Καῦνον*, solo mi riesce dura la ripetizione di *φωρ[ᾶς* o *φωρ[ός* e *εἰς κλοπὴν τείνεσθαι*, che pure non vedo come possa evitarsi. Per *ὑπαί* cfr. Soph. *Ant.* 1035 *ὑπαὶ γένους* e *El.* 711. Nei vv. 229 sg. dovrebbe essere contenuto un cenno allo spavento dei satiri, ma l' integrazione di tutto il resto non mi riesce abbastanza persuasiva (3), forse *σ]τ[ροβου]μένων [ὑμῶν πικρ]ὰ..... κηρύγμα[τα.*

***

In vv. 330 sgg. disputano fra loro Cillene e il Corifeo, perchè la ninfa non vuole ammettere che il piccolo Ermete abbia rubati gli armenti:

330 (*Κυ.*) *[τίς ἔχει πλά]νη σε; τίνα κλοπὴν ὠνείδισας;*
(*Χο.*) *[οὐ μὰ Δία σ', ὦ πρέσ]βειρα, χειμάζειν [θέλω,*
(*Κυ.*) *[μῶν τὸν Διὸς παῖδ' ὄ]ντα φηλήτην κα[λεῖς;*
(*Χο.*) [. . . . .]*ἂν αὐτῇ τῇ κλοπῇ.*
(*Κυ.*) [. . . . . *ε]ἴ γε τἀληθῆ λέ[γεις.*
335 (*Χο.*) [. . . . . *τ]ἀληθῆ λέγ[ω.*

Dei versi seguenti (4) è incerto se il primo si debba a Cil-

---

(1) Cfr. *Oed. Tyr.* 634: *τί τὴν ἄβουλον, ὦ ταλαίπωροι, στάσιν Γλώσσης ἐπήρασθε.*

(2) Lo Hunt avverte che la finale doveva sicuramente essere *κέναι* o *χέναι*.

(3) *[αὖτις δ' ἅ[ν ὡς σ]τ[ροβου]μένων [ὑμῶν πικρ]ὰ.... κηρύγμα[τα?* cfr. Soph. *Ai.* 904: *ὡς ὧδε τοῦδ' ἔχοντος αἰάζειν πάρα*: Xenoph. *Hell.* V 4, 9: *ἐκήρυττον ἐξιέναι πάντας ὡς τῶν τυράννων τεθνεώτων*].

(4) 336 [. . . . . *κεκλο]φέναι σάφ'[οἶδ' ἐγὼ*
[. . . . .] *δὲ βοῦς πάνυ*
[. . . . .] *ρ καθήρμο[σε*
[. . . . .] *λου τεμὼν* [
[. . . . .] *φο . δ[ο]ρα*[

lene o ancora al Coro (come quasi certamente sono detti dal Coro gli ultimi): esso potrebbe tanto contenere l'affermazione, del Coro, che Ermete può aver rubato i buoi; come un nuovo diniego di Cillene. Gli ultimi probabilmente devono dare come indizio del furto l'uso della pelle dei buoi (come nell'inno omerico) per costruire la lira. Ciò posto mi sembra che si possano integrare *exempli causa* i primi in cui il senso mi pare più sicuro: per il v. 333 propose già lo stesso Hunt *δν γ' ἐντυχὼν λάβοιμ'*]*ἂν....* intendendo *κλοπῇ* come l'oggetto rubato cfr. Eurip. *Hel.* 1675 dove è usato il plurale *κλοπάς*.

Per i due rimanenti propongo *exempli causa*:

(*Κυ.*) [*πῶς δ' οὖν πύθοιμ' ἄν, ε*]*ἴ γε τἀληθῆ λέ*[*γεις;*
(*Χο.*) [*δείξει τὰ πράγματ', εἴ γε τ*]*ἀληθῆ λέγ*[*ω.*

Il discorso del Coro è evidentemente interrotto da Cillene che nella colonna seguente si dimostra sdegnata credendosi derisa, non però tutti i versi sono stati integrati:

343 [...........] *ἄρτι μανθάνω χρόνῳ*
[.........*ἐγχ*]*άσκοντα τῇ 'μῇ μωρίᾳ*
[...........*ο*]*ὐδέν, ἀλλὰ παιδιᾶς χάριν.*
[*σὺ δ' οὖν τὸ λοιπὸ*]*ν εἰς ἔμ' εὐδίαν ἔχων,*
[*εἴ σοι φέρει χάρ*]*μ' ἤ τι κερδαίνειν δοκεῖς,*
[*ὅπως θέλεις κά*]*χαζε καὶ τέρπου φρένα·*
[*τὸν παῖδα δ' ὄ*]*ντα τοῦ Διός σαφεῖ λόγῳ,*
[*μὴ σκῶπτε ποι*]*ῶν ἐν νέῳ νέον λόγον.*

Credo che i primi tre versi si possano *exempli causa* integrare.

[*ἅλις λόγων, ὡς*] *ἄρτι μανθάνω χρόνῳ,*
[*λέγειν σέ γ' ἐγχ*]*άσκοντα τῇ 'μῇ μωρίᾳ*
[*πρόσφορά θ' ἅμ' ο*]*ὐδὲν, ἀλλὰ παιδιᾶς χάριν.*

Con il primo verso cfr. Soph. *Oed. Col.* 1016 sg.: *ἅλις λόγων, ὡς οἱ μὲν ἐξηρπασμένοι Σπεύδουσιν, ἡμεῖς δ' οἱ παθόντες ἕσταμεν.*

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Aprile 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe NACCARI, ed i Soci: SALVADORI, D'OVIDIO, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI e SEGRE, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio SOMIGLIANA.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Sono state inviate in omaggio alla nostra Accademia le seguenti pubblicazioni:

dal Socio straniero HELMERT, *Rapport sur les travaux du Bureau central de l'Association géodésique internationale en 1912 et programme des travaux pour l'exercice de 1913*;

dal Socio corrispondente CELORIA: 1) *Differenza di longitudine fra Milano (Osservatorio di Brera) e Roma (Monte Mario)*, determinata da V. REJNA, E. BIANCHI, L. GABBA e G. A. FAVARO; 2) *Anno 1914: Articoli generali del calendario ed Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Milano*;

dal Socio corrispondente MANGIN, un suo scritto su *Edouard Bornet*;

dall'Associazione elettrotecnica italiana: *Descrizione di una macchinetta elettro-magnetica*, del Dr. Antonio PACINOTTI; riprodotta dal " Nuovo Cimento ", fasc. del giugno 1864, e tradotta in varie lingue.

Il Socio Mattirolo presenta pure, in omaggio, il vol. LV (1912) degli *Annali della R. Accademia di Agricoltura di Torino.*

Per la stampa negli *Atti* il Socio Jadanza offre una Nota di Luigi Carnera, *Osservazioni sul calcolo degli errori medii*, ed una di G. A. Favaro, *Sulla flessione del Circolo meridiano Reichenbach del R. Osservatorio astronomico di Torino.* E così il Socio D'Ovidio la Nota di Angelo Scribanti, *Ancora intorno al planimetro a scure applicato all'integrazione di equazioni differenziali.*

Il Socio Mattirolo, anche a nome del collega Camerano, legge la relazione sulla Memoria di E. Martel, *Contribuzione allo studio degli organi escretori fogliari.* Accogliendo le conclusioni della relazione, la Classe delibera la stampa di quella Memoria nei volumi accademici.

Pure per questi volumi vengono presentate, rispettivamente dai Soci Fusari e Peano, le seguenti Memorie:

Dr. Cesare Staurenghi, " *Fonticulus bregmaticus lateralis* " *e* " *Fissura bregmatica lateralis* " *in alcune specie di Mammiferi e di Uccelli.* — " *Fonticulus lambdoidalis lateralis* " *e* " *Fissura lambdoidalis lateralis* " *degli Equidae*;

Dr. Vincenzo Mago, *Teoria degli ordini.*

Riferiranno alla Classe sulla prima Memoria i Soci Camerano e Fusari, sulla seconda i Soci D'Ovidio e Peano.

LETTURE

Sulla flessione del Circolo meridiano Reichenbach del R. Osservatorio Astronomico di Torino.

Nota del Dr. G. A. FAVARO.

In seguito ai risultati ottenuti per la flessione del piccolo Meridiano BAMBERG (1), mi venne desiderio di fare una simile determinazione per il Circolo Meridiano REICHENBACH (2), sia per vedere la differenza di flessione fra il cannocchiale spezzato del BAMBERG e il cannocchiale diritto del REICHENBACH, sia per rassicurarmi delle migliori condizioni di questo istrumento per quanto riguarda la stabilità del supporto dei microscopî micrometrici.

Così ebbi pur modo di fare un assaggio dei nuovi microscopî micrometrici, da poco tempo applicati dal Salmoiraghi di Milano, e di avere una prima idea sul comportamento delle varie parti dell'istrumento nelle osservazioni di distanze zenitali, dovendo esso istrumento servirmi in seguito per osservare

(1) V. *Sulla flessione del piccolo Meridiano Bamberg del R. Osservatorio Astronomico di Torino*, Nota di G. A. FAVARO, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XLVIII, 1912.

(2) Per l'ubicazione e la descrizione dell'istrumento, si può vedere la relazione del Dott. V. FONTANA: *Di alcune modificazioni apportate al Circolo Meridiano di Reichenbach del R. Osservatorio Astronomico di Torino*, 2ª Appendice dell'Annuario Astronomico pel 1911, Torino. — Il BESSEL ha descritto particolareggiatamente (nella VI *Abth.* delle *Königsberger Beobacht.*) il circolo meridiano di Königsberg che ha forma e dimensioni eguali a quello di Torino. — Il BRIOSCHI nei *Comentarii Astronomici* (Napoli, 1826) descrisse il Cerchio meridiano di Reichenbach del R. Osservatorio di Capodimonte, e il NOBILE, nella sua pubblicazione: *Il cerchio meridiano Reichenbach-Heurtraux del R. Oss. di Capodimonte*, descrisse lo stesso Cerchio meridiano dopo la trasformazione compiuta dall'Heurtraux.

le declinazioni delle stelle di riferimento per il catalogo fotografico di Catania.

Dei quattro microscopi micrometrici, due servono per le letture del cerchio ad E e due per quelle ad W; i due microscopi di ciascuna coppia sono collocati, oppostamente l'uno all'altro rispetto al centro del cerchio, alle estremità dei supporti collegati superiormente ai due pilastri che reggono l'asse orizzontale del cannocchiale.

Le difficoltà di applicare delle livelle di spia, difficoltà in parte anche di ordine economico addotte dal Sig. Direttore dell'Osservatorio, hanno fatto nascere necessariamente la speranza che siano stabili a sufficienza i due pilastri e quindi i supporti dei microscopi: di questo d'altra parte potranno con molta probabilità essere buoni testimoni le osservazioni stesse.

Non ripeterò qui le considerazioni d'indole generale fatte nella mia precedente Nota. Invece credo opportuno riportare quanto scrisse il Dr. Fontana sul *cannocchiale* del Reichenbach a pag. 95 della sua Nota citata in calce.

" Due... facce opposte del cubo centrale dell'asse di rotazione sono traforate e portano, fortemente avvitati ad esse, due tubi cilindrici di lamiera d'ottone, i quali costituiscono il corpo del cannocchiale; a uno è adattato l'obbiettivo col suo castone, all'altro l'oculare. Ciascun tronco è lungo cm. 70,5 ed ha un diametro di cm. 12,5.

" Per eliminare (o, direi meglio, per attenuare) la flessione del cannocchiale, il costruttore ricorse al sistema dei contrappesi, adattandone uno a ciascun tronco. Questa disposizione consisteva in due forti bracci di ottone avvitati solidamente, a poca distanza tra loro, lungo la parte mediana di una faccia del cubo centrale dell'asse di rotazione e disposti nella direzione di uno dei tronchi del cannocchiale. Ad una quarantina di centimetri dall'estremità libera di questo tronco era stato stretto al tubo un anello d'ottone che portava un occhio sporgente. Un'asta d'acciaio entrava liberamente con una sua estremità in quest'occhio e s'imperniava, con sufficiente gioco, nei due cilindretti che riunivano le due estremità libere dei due bracci di ottone. Nell'altra estremità dell'asta d'acciaio scorreva un peso che si fissava nel punto opportuno dell'asta con una vite di pressione.

" Per il nostro scopo non sarebbe stato necessario curarci della flessione del cannocchiale e quindi della sostituzione di questi sistemi di leve e contrappesi ingombranti, delicati e non rispondenti pienamente alla loro missione. Tuttavia parve opportuno sostituire ad essi due semi-losanghe di ottone fuso, lunghe ciascuna m. 1,43, che si avvitarono a due facce opposte del cubo centrale. Due robusti anelli di ottone ne collegano le estremità libere dalla parte dell'obbiettivo e da quella dell'oculare.

" Da ciascuno di questi anelli, a 90° dagli attacchi delle losanghe, partono due tiranti, che vanno a due fori praticati appositamente nei tronchi di cono dell'asse di rotazione. Ivi si avvitano dall' interno con due dadi, mentre dalla parte dell'anello son tenuti da una testa a madrevite, che ne può regolare la tensione.

" Tutto ciò serve a contribuire efficacemente ad una rigidità maggiore del cannocchiale ".

Il diametro del circolo è di m. 0,95 la lunghezza focale del cannocchiale è di m. 1,624, l'obbiettivo è un'apertura di mm. 109,4.

TAB. I. — *Programma delle osservazioni.*

	*	Gr.	α 1912.0	δ 1912.0	*Z* vera
			h m s	° ′ ″	° ′ ″
1	ι Pisc. Austr.	4.4	21.39.42	— 33.25.40	78.29.48 S
2	π² Cygni	4.3	21.43.32	+ 48.54. 7	3.50.25 N
3	Gr. 1586	6.3	9.50.32	+ 73.17.55	61.38.22 N
4	η Pisc. Austr.	5.4	21.55.47	— 28.52.35	73.56.38 S
5	32 Urs. Maj.	5.7	10.11.39	+ 65.32.52	69.23.24 N
6	30 H.Urs.Maj.	5.0	10.17.48	+ 66. 0.43	68.55.34 N
7	9 H. Draconis	4.9	10.27.39	+ 76.10. 0	58.46.19 N
8	ε Pisc. Austr.	4.0	22.35.47	— 27.30.10	72.34.11 S
9	13 Lacertae	5.4	22.40.10	+ 41.21.26	4.22.14 S
10	α Pisc. Austr.	1.2	22.52.47	— 30. 5.20	75. 9.20 S
11	α Ursae Maj.	1.8	10.58.18	+ 62.13.35	72.42.43 N
12	c² Aquarii	3.7	23. 4.45	— 21.39. 1	66.42.57 S
13	Gr. 1771	6.2	11.17.38	+ 64.48.44	70. 7.34 N
14	λ Draconis	3.6	11.26.12	+ 69.49. 1	65. 7.18 N
15	ι Androm.	4.1	23.33.49	+ 42.46.51	2.16.48 S
16	3 Draconis	5.4	11.37.34	+ 67.13.55	67.42.23 N
17	Lac. δ Sculpt.	4.4	23.44.21	— 28.37. 1	73.40.57 S

Il cerchio dà con le sue divisioni i 3 primi, ed i microscopi micrometrici dànno, con le divisioni dei tamburi, il secondo d'arco: a stima si possono poi avere i decimi di secondo.

Anche per questa determinazione mi son servito di osservazioni di stelle fondamentali, fatte due sere con cerchio ad *W* e due sere con cerchio ad *E*, leggendo i due rispettivi microscopi micrometrici. Nella tabella I è riportato il programma delle osservazioni con le posizioni approssimate delle stelle e le loro distanze zenitali vere.

La temperatura è stata letta ad un termometro collocato in vicinanza dell'istrumento, e la pressione è stata letta al barometro posto nella stessa stanza meridiana in cui trovasi il Cerchio Meridiano.

Le puntate furono eseguite bisecando le stelle con uno dei due fili orizzontali del reticolo.

Riporto qui i valori delle costanti istrumentali (1) determinate in alcune sere nel periodo delle osservazioni:

1912	23 Ott.	31 Ott.	6 Nov.
azimut	$-0^s.05$	$-0^s.42$	$+0^s.08$
collimaz.	-1.40	-3.24	$+2.92$
inclinaz.	$+0.03$	$+0.20$	-1.11

Le riduzioni furono eseguite applicando alla media delle due letture l_1 e l_2, fatte ai due tratti comprendenti la linea di fede, la correzione secondo la formola

$$\Delta\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{l_1+l_2}{2}\,\frac{1}{180}\right)(l_1-l_2)$$

(essendo 180″ compresi fra due tratti successivi del cerchio del Reichenbach) e tratta da un'apposita tabella costruita secondo le norme date nella mia precedente Nota sulla flessione del Bamberg a pag. 10 (2).

---

(1) Durante il periodo d'osservazione sono state corrette collimazione ed inclinazione: ma sistema oculare e livella sono in condizioni tali da non poter con tutta facilità ridurre queste due costanti istrumentali piccole come si vorrebbe.

(2) In questo caso la tabella porta nelle colonne estreme, per $\frac{1}{2}(l_1+l_2)$ i numeri che si ottengono da 0,0 con progressione aritmetica e con la dif-

Con la formola

$$\log R = \log \alpha \operatorname{tg} z + \log B + \log T + \lambda \log \gamma$$

e usando le tavole di Albrecht, è stata calcolata la rifrazione. I risultati sono riferiti nelle tabelle II, III, IV e V; il punto equatoriale E_n è stato ottenuto dalle letture corrette L_1 e L_2 dei due microscopi, dalla correzione di rifrazione r e dalla declinazione apparente δ con le espressioni:

$$E_n = \frac{L_1 + L_2}{2} + r \pm \delta \qquad \text{per le stelle culminanti superiormente}$$

$$E_n = \frac{L_1 + L_2}{2} + r \pm (180^\circ - \delta) \qquad \text{» » inferiormente}$$

dove vale il segno $+$ per cerchio ad E e il segno — per cerchio ad W.

Con le equazioni di condizione

$$E_n = E \pm f \operatorname{sen} z_n$$

dove vale il segno $+$ per cerchio ad E e stella a N e per cerchio ad W e stella a S, e vale il segno — per cerchio ad E e stella a S e per cerchio ad W e stella a N, sono state ottenute le equazioni normali e con queste i valori del punto equatoriale E e della flessione f.

Dai valori di f di ogni sera è stato tratto il valore finale di f dando ai singoli valori pesi inversamente proporzionali ai quadrati degli errori medi.

Riporto insieme con gli errori medi anche gli errori probabili per offrire un immediato confronto con quelli corrispondenti ottenuti nella determinazione della flessione del BAMBERG.

---

ferenza 1″,8. In queste osservazioni la differenza $l_1 - l_2$ non ha mai raggiunto 3″; per tale valore, $l_1 - l_2 = 3''$, si ha al massimo la discordanza di 0″.03 fra il valore dato dalla mia tabella e quello fornito dalla formola rigorosa; per $l_1 - l_2 = 10''$ la discordanza massima è di 0″.29.

Tab. II. — **27 Ottobre 1912** — Cerchio ad W.

a $22^h,0$ $t = 11^\circ.7$ $p = 744^{mm}.30$ [$12^\circ.7$] a $23^h,8$ $t = 10^\circ.5$ $p = 744^{mm}.80$ [$12^\circ.4$]

*		$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$	r	δ	E_n	*ANNOTAZIONI*		
		° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″			
5	N ; i	72.14.22.13	+2.28.24	+65.32.30.3	317.49.20.7	$r = 2$-3	$s = 2.$	Cielo prima sereno poi velato
7	N ; i	61.38.13.15	+1.32.58	+76. 9.35.9	21.6			r = tranquillità dell'imm.
8	S	290.22.18.75	—2.57.00	—27.30. 2.0	23.8	$r = 3$	$s = 1$	s = nitidezza
9	S	359.11.20.35	— 3.65	+41.21.52.3	24.4	$r = 3$	$s = 1$	1 = ottima; 2, 3, 4 = pessima.
10	S	287.47.42.50	—3.28.65	—30. 5.10.4	24.2	$r = 3$-4	$s = 1$	
11	N ; i	75.33.10.32	+2.58.69	+62.13.12.4	21.4	$r = 3$-4	$s = 1$	
12	S	296.12.44.32	—2.10.17	—21.38.48.1	22.3	$r = 3$	$s = 1$	
13	N ; i	72.58.26.33	+2.34.59	+64.48.21.4	22.3	$r = 2$-3	$s = 3$	
14	N ; i	67.58.42.95	+2. 1.06	+69.48.37.0	21.0	$r = 3$	$s = 2$	
15	S	0.36.44.96	— 2.25	+42.47.18.0	24.7	$r = 2$	$s = 1$	
16	N ; i	70.33.32.35	+2.16.73	+67.13.32.3	21.4	$r = 3$	$s = 2$	
17	S	290.15.47.39	—3.10.12	—28.36.47.3	24.6	$r = 3$	$s = 3$-4	

Equazioni normali: $32''.40 = 12.00\,E - 1.60 f$ $7''.00 = -1.60\,E + 8.70 f$

dalle quali:

$E = 317^\circ\,49'\,22''.7$: errore medio $\pm 0'',3$ $f = +1''.33$: errore medio $\pm 0''.36$.

" prob. $\pm 0''.2$ " prob. $\pm 0''.24$.

Tab. III. — 1 Novembre 1912 — Cerchio ad W.

a $22^h,0$ $t = 13°.0$ $p = 739^{mm}.80$ [13°.9] a $22^h,8$ $t = 13°.0$ $p = 740^{mm}.10$ [13°.8] a $23^h,8$ $t = 12°.8$ $p = 740^{mm}.60$ [13°.8]

*		$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$	r	δ	E_n	ANNOTAZIONI
		° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
3	N ; i	64.30. 9.33	+1.42.66	+73.17.31.1	317.49.23.1	$r = 2$–3 $s = 2$. Cielo sereno con nebbia.
4	S	289. 0. 1.61	—3.10.31	—28.52.29.9	21.2	$r = 2$–3 $s = 3$
5	N ; i	72.14.29.30	+2.26.65	+65.32.29.1	25.1	$r = 2$–3 $s = 2$
6	N ; i	71.46.39.14	+2.23.18	+66. 0.19.4	21.7	$r = 3$ $s = 2$
7	N ; i	61.38.18.20	+1.31.54	+76. 9.34.8	24.5	$r = 3$ $s = 2$
8	S	290.22.17.22	—2.54.95	—27.30. 2.5	24.8	$r = 3$–4 $s = 2$
9	S	359.11.23.05	— 3.61	+41.21.52.9	26.5	$r = 3$ $s = 2$
10	S	287.47.38.35	—3.26.11	—30. 5.11.0	23.3	$r = 3$–4 $s = 3$
11	N ; i	75.33.18.17	+2.56.47	+62.13.11.1	25.7	$r = 3$ $s = 2$
12	S	296.12.44.50	—2. 8.53	—21.38.48.6	24.6	
13	N ; i	72.58.32.90	+2.32.59	+64.48.20.0	25.5	$r = 2$ $s = 2$
14	N ; i	67.58.48.67	+1.59.47	+69.48.35.6	23.7	$r = 3$ $s = 3$
15	S	0.36.48.40	— 2.24	+42.47.18.85	27.3	$r = 2$ $s = 1$
16	N ; i	70.33.37.94	+2.14.91	+67.13.30.8	23.6	$r = 3$ $s = 3$
17	S	289.15.43.93	—3. 3.25	—28.36.48.05	28.7	$r = 3$ $s = 2$

Equazioni normali: $54''.30 = 15.00\,E - 2.46f$ $-5''.50 = -2.46\,E + 11.27f$

dalle quali: $E = 317°\,49'\,24''.7$; errore medio $\pm 0''.5$ $f = +0''.31$; errore medio $\pm 0''.61$.

„ prob. $\pm 0''.4$ „ prob. $\pm 0''.41$.

Tab. IV. — **3 Novembre 1912** — Cerchio ad E.

a $22^h,0$ $t = 8^o.8$ $p = 740^{mm}.65$ [11°.9] a $23^h,8$ $t = 8^o.0$ $p = 741^{mm}.00$ [10°.6]

*		$\frac{1}{2}(L_1+L_2)$	r	δ	E_n	ANNOTAZIONI
		° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
3	N ; *i*	209.37.15.42	—1.44.29	+73.17.30.7	316.17.60.4	$r = 2$-3 $s = 2$. Cielo sereno con nebbia.
4	S	365. 7.15.40	+3.13.43	—28.52.30.1	58.7	$r = 2$-3 $s = 3$-4
5	N ; *i*	201.52.58.36	—2.29.07	+65.32.28.7	60.6	$r = 2$ $s = 2$
6	N ; *i*	202.20.44.51	—2.25.58	+66. 0.18.9	60.0	$r = 2$ $s = 2$
7	N ; *i*	212.29.10.45	—1.33.09	+76. 9.34.3	63.1	$r = 2$-3 $s = 2$
8	S	343.45. 2.70	+2.57.95	—27.30. 2.9	57.8	$r = 2$ $s = 2$
9	S	274.56. 4.44	+ 3.67	+41.21.53.1	61.2	
10	S	346.19.40.75	+3.29.76	—30. 5.11.2	59.3	$r = 3$ $s = 3$
11	N ; *i*	198.34.11.40	—2.59.62	+62.13.10.5	61.3	$r = 2$ $s = 2$
12	S	337.54.35.70	+2.10.83	—21.38.48.8	57.7	$r = 3$ $s = 2$
13	N ; *i*	201. 8.53.10	—2.35.36	+64.48.19.4	58.3	$r = 2$-3 $s = 2$
14	N ; *i*	206. 8.35.40	—2. 1.64	+69.48.34.9	58.9	$r = 2$ $s = 2$
15	S	273.30.37.22	+ 2.26	+42.46.79.2	58.7	
16	N ; *i*	203.33.45.07	—2.17.40	+67.13.30.15	57.5	
17	S	344.51.37.11	+3.11.00	—28.36.48.35	59.8	$r = 2$ $s = 3$

Equazioni normali: $38''.30 = 15.00\,E + 2.46 f$ $13''.56 = 2.46\,E + 11.27 f$

dalle quali: $E = 136°17'59''.4$; errore medio $\pm 0''.4$ $f = +\,0''.67$; errore medio $\pm 0''.45$.
  " prob. $\pm 0''.3$ " prob. $\pm 0''.30$.

TAB. V. — **7 Novembre 1912** — Cerchio ad E.

a $21^h,6$ $t = 7^o.5$ $p = 743^{mm}.20$ [9°.3] a $22^h,8$ $t = 6^o.1$ $p = 743^{mm}.20$ [8°.7] a $23^h.8$ $t = 5^o.5$ $p = 743^{mm}.59$ [8°.1]

*		$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$	r	δ	E_n	ANNOTAZIONI		
1	S	349°.39′. 7″.40	+4′.31″.69	−33°.25′.38″.55	316°.17′.60″.5	$r=3$	$s=3$-4.	Cielo sereno con nebbia all'orizzonte.
2	N	267.23.30.41	− 3.83	+48.54.33.1	59.7	$r=2$	$s=2$	
3	N ; *i*	209.37.13.48	−1.45.39	+73.17.29.9	58.2	$r=3$	$s=3$-4	
4	S	345. 7.12.05	+3.15.55	−28.52.30.4	57.2	$r=3$	$s=3$-4	
5	N ; *i*	201.52.57.70	−2.30.75	+65.32.27.8	59.2	$r=3$	$s=3$-4	
6	N ; *i*	202.20.44.42	−2.27.28	+66. 0.18.0	59.1	$r=2$	$s=3$-4	
7	N ; *i*	212.29. 7.20	−1.34.19	+76. 9.33.3	59.7	$r=3$	$s=2$	
8	S	343.45. 1.50	+3. 0.16	−27.30. 3.3	58.4	$r=3$	$s=2$	
9	S	274.56. 3.50	+ 3.17	+41.21.53.6	60.3	$r=2$	$s=2$	
10	S	346.19.39.03	+3.32.47	−30. 5.11.7	59.8	$r=3$	$s=2$-3	
11	N ; *i*	198.34.13.45	−3. 1.93	+62.13. 9.3	62.2	$r=3$	$s=2$-3	
12	S	337.54.36.45	+2.12.50	−21.38.49.2	59.7	$r=2$	$s=2$	
13	N ; *i*	201. 8.56.51	−2.37.37	+64.48.18.2	60.9	$r=2$	$s=3$-4	
14	N ; *i*	206. 8.35.67	−2. 3.22	+69.48.33.65	58.8	$r=3$	$s=2$	
15	S	273.30.39.39	+ 2.29	+42.47.19.9	61.6	$r=2$	$s=2$	
16	N ; *i*	203.33.47.22	−2.19.19	+67.13.29.2	58.8	$r=2$	$s=2$	
17	S	344.51.35.23	+3.13.50	−28.36.48.95	59.8	$r=2$	$s=3$	

Equazioni normali: $44''.9 = 17.00\,E + 1.54f$ $6''.23 = 1.54\,E + 12.23f$

dalle quali: $E = 316^\circ\,17'\,59''.6$; errore medio $\pm 0''.3$ $f = +0''.18$; errore medio $\pm 0''.36$.

„ prob. $\pm 0''.2$ „ prob. $\pm 0''.25$.

Riunisco i valori di f ottenuti dalle 4 sere d'osservazione:

f	error medio	error probabile
$+1''.31$	$\pm 0''.36$	$\pm 0''.24$
$+0.31$	0.61	0.41
$+0.67$	0.45	0.30
$+0.18$	0.36	0.25

dai quali si ha il valore

$$f = +0''.68 \quad \text{con error medio} \quad \pm 0''.28$$
$$\text{„ \quad „ \quad probab.} \pm 0''.19$$

Confrontando il risultato di questa determinazione con quello della determinazione esposta nella mia Nota precedente, si rileva subito la piccolezza del valore della flessione del REICHENBACH rispetto a quello ottenuto per il BAMBERG, come era già da prevedersi (1).

Stanno poi a constatare le molto migliori condizioni d'osservazione al REICHENBACH gli errori probabili dei valori della flessione ottenuti nelle singole sere, che sono notevolmente più piccoli di quelli ottenuti per il BAMBERG, come anche l'errore probabile del valore finale di f, quando si consideri che in quest'ultima determinazione sono soltanto 4 le sere d'osservazione.

Quanto al metodo seguìto nelle due determinazioni di flessione, sembra di poter argomentare che, se esso non conduce a risultati del tutto soddisfacenti, si debba attribuire al fatto che quasi sempre poco tranquille e poco nitide si mostrano le immagini stellari vicino all'orizzonte e che a così forti distanze zenitali tanto più si fanno sentire gli effetti non computabili delle ineguaglianze di temperatura della stanza d'osservazione (cfr. nota in calce a pag. 4 della mia precedente Nota: *Sulla flessione del piccolo meridiano Bamberg*) e della poco esatta conoscenza delle leggi di variabilità della rifrazione, di quelle specialmente che riguardano le variazioni diurne e le variazioni irregolari a breve periodo.

(1) Il valore della flessione, ottenuto da A. NOBILE per il Cerchio meridiano Reichenbach-Heurtraux del R. Osservatorio di Capodimonte (vedi a pag. 21 della sua pubblicazione: *Risultati delle osservazioni meridiane della 2ª metà del 1890*, Napoli, 1891) è di $2''.00$; questo fa credere che le modificazioni apportate al Cerchio meridiano di Torino condussero, nei riguardi della flessione, a risultati migliori che non quelle apportate al Cerchio meridiano di Capodimonte.

Ancora intorno al planimetro a scure applicato all'integrazione di equazioni differenziali.

Nota di ANGELO SCRIBANTI.

Osservazione prima.

§ **1.** — In una mia precedente Nota che fu inserita in questi Atti (vol. XLVIII, pag. 14 e segg.) e alle cui notazioni qui ancora mi riferisco, ho rilevato che la curva

$$\eta = \varphi(\xi)$$

lasciata sul foglio come traccia del passaggio della scure di un planimetro di lunghezza l, il cui calcatoio percorra una assegnata linea

$$y = f(x),$$

è caratterizzata da un'equazione differenziale che qui mi giova di riprodurre sotto la forma

$$\text{(I)} \qquad \eta = f\left(\xi + \frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} - l\right) - l\frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}},$$

dove si intende essere

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\lambda$$

eguale cioè alla tangente dell'angolo generico di obliquità dell'asta del planimetro.

Ricavando dalla relazione differenziale testè richiamata i valori delle derivate parziali

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{\partial f}{\partial\xi} \qquad\qquad \frac{\partial\eta}{\partial\eta'} = \frac{\partial f}{\partial\eta'} - \frac{l}{(1+\eta'^2)^{3/2}}$$

e introducendoli nella nota espressione generale del differenziale totale

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \eta}{\partial \eta'} d\eta',$$

questa si trasformerà immediatamente nella

$$\text{(II)} \qquad \eta' = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \left[\frac{\partial f}{\partial \eta'} - \frac{l}{(1+\eta'^2)^{3/2}}\right] \frac{d\eta'}{d\xi},$$

la quale costituisce un'equazione differenziale in ξ, η'. Ora, se per ogni percorso assiale ξ compiuto dalla scure noi rileviamo in figura le corrispondenti tangenti d'obliquità η' dell'asta, gli elementi così associati soddisfaranno per la loro stessa costruzione alla equazione differenziale or ora scritta, la quale non è che una trasformata dell'equazione fondamentale del funzionamento del planimetro a scure.

Ciò si lascia interpretare col dire che il planimetro a scure, come mediante il tracciamento della curva $\eta = \varphi(\xi)$ funziona quale integrafo delle equazioni differenziali riducibili al tipo (I), così mediante il rilevamento di coppie di valori associati $\xi, \eta' = \operatorname{tg}\lambda$, esso funziona altresì come integrometro per le equazioni differenziali facienti capo al tipo (II). Tale è la proprietà del planimetro a scure che intendevo stabilire in questa Osservazione prima; giova completarla con una proprietà accessoria che scaturisce dal presentare la equazione differenziale (II) sotto una differente forma.

§ 2. — Invero, qualunque possa essere la

$$f(x) \qquad \text{ossia} \qquad f\left(\xi + \frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} - l\right)$$

che individua la linea percorsa dal calcatoio, si potrà sempre porre

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \psi \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial \eta'} = -\chi \frac{l\eta'}{(1+\eta'^2)^{3/2}}$$

dove si intenda che i simboli ψ e χ stiano a denotare certe funzioni delle variabili ξ, η' le quali risulteranno determinate

per ogni singolo caso dall' operazione di derivazione parziale. Sostituendo nella (II), questa si trasformerà tosto nella

$$\eta' = \psi - l(\chi\eta' + 1)\frac{\frac{d\eta'}{d\xi}}{(1+\eta'^2)^{3/2}},$$

circa la quale si osserva subito che la grandezza in essa comparente

$$\rho = \frac{(1+\eta'^2)^{3/2}}{d\eta'/d\xi} = \frac{(1+\eta'^2)^{3/2}}{d^2\eta/d\xi^2}$$

non è altro che il raggio di curvatura della curva traccia del passaggio della scure sul foglio nel punto individuato dallo spostamento assiale ξ della scure e dalla tangente di obliquità $\eta' = \operatorname{tg}\lambda$ dell'asta. Quindi la (II) dà luogo senz'altro alla

$$\text{(III)} \qquad \rho = \frac{1+\chi\eta'}{\psi - \eta'}\,l,$$

offrendo così il modo di calcolare, in funzione degli elementi caratteristici della posizione generica dell'asta, il raggio di curvatura della curva tracciata dalla scure nel corrispondente punto.

§ 3. — L'applicazione più semplice che si possa fare delle cose precedentemente esposte è quella relativa al caso nel quale il calcatoio percorre una retta obliqua

$$y = kx$$

e corrispondentemente la scure descrive una curva la quale non è altro che una trattrice avente l'obliqua per asintoto. In questo caso avendosi

$$f = k\left(\xi + \frac{l}{\sqrt{1+\eta'^2}} - l\right)$$

e conseguentemente

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = k \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta'} = -k\frac{l\eta'}{(1+\eta'^2)^{3/2}}$$

con

$$\psi = k \qquad \chi = k,$$

la (III) individua come espressione generale del raggio di curvatura della trattrice la

$$\rho = \frac{1 + k\eta'}{k - \eta'}\, l\,,$$

la quale a sua volta definisce in

$$\rho_0 = \frac{l}{k}$$

il valore del raggio di curvatura nel punto che, nella presente costruzione meccanica della trattrice fatta per mezzo di un planimetro a scure, assume la veste di punto origine.

§ 4. — D'altra parte la sostituzione dei surriferiti valori delle derivate parziali fa, in questo caso, prendere alla (II) la forma particolare

$$(\eta' - k)\, d\xi = -\, l \left[k\, \frac{\eta'}{(1 + \eta'^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1 + \eta'^2)^{3/2}} \right] d\eta'$$

o altrimenti

$$\xi = l \int_{\eta_0'}^{\eta'} \frac{1 + k\eta'}{(k - \eta')\,(1 + \eta'^2)^{3/2}}\, d\eta'.$$

Questa espressione mostra che nel presente caso semplice di applicazione lo strumento funziona come un integratore, o meglio come un esecutore di integrale, nel senso che, se si rileva in disegno lo spostamento assiale ξ subíto dalla scure allorchè l'asta passa da una tangente di obliquità iniziale η_0' a una tangente di obliquità finale η' mentre il calcatoio percorre una obliqua di pendenza k, allora lo strumento accusa nel valore sperimentale

$$\frac{\xi}{l}$$

il valore numerico dell'integrale definito

$$H = \int_{\eta_0'}^{\eta'} \frac{1 + k\eta'}{(k - \eta')\,(1 + \eta'^2)^{3/2}}\, d\eta'.$$

Questo integrale potrebbe essere computato per via analitica; invero mediante il cambiamento di variabile

$$t = \sqrt{1 + \eta'^2} - \eta'$$

e applicando l'ordinario processo di decomposizione di una funzione fratta in altre più semplici, si perverrebbe, lungo una via alquanto laboriosa ma sicura, a riconoscere (*) che, posto

$$m = -(k + \sqrt{1 + k^2}) \qquad n = -(k - \sqrt{1 + k^2}),$$

risulta

$$H = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \eta'^2}} + M \log(t - m) + N \log(t - n)\right]_{\eta_0'}^{\eta'}$$

per

$$M = -2\frac{k(m^3 + 3m) - 2}{(m^2 + 1)^2 (m + k)} \qquad N = -2\frac{k(n^3 + 3n) - 2}{(n^2 + 1)^2 (n + k)}.$$

Ma è evidente che, anche indipendentemente dalla laboriosità del processo di integrazione analitica dell'integrale qui considerato, la calcolazione aritmetica del valore dell'integrale definito, fatta in base alla formola risolutiva qui ricordata, riesce di gran lunga meno agevole che non la valutazione dello stesso fatta mediante il valore

$$H = \frac{\xi}{l}$$

desunto da una semplicissima lettura strumentale.

§ **5.** — Affinchè non rimanessero dubbi sull'esattezza delle conclusioni qui tratte, ho voluto fare applicazione di queste al caso concreto che si realizza allorchè al calcatoio viene fatta percorrere la bisettrice degli assi e si prende come posizione iniziale dell'asta quella per la quale essa si trova adagiata sull'asse delle ascisse e come posizione finale quella per la quale essa si trova ad avere sull'asse delle ascisse una obliquità de-

(*) Questo computo è stato eseguito per me dal dott. Cesare Spelta del personale docente della R. Scuola Navale Superiore di Genova.

finita da una tangente trigonometrica eguale alla metà di quella relativa alla retta percorsa dal calcatoio. Ciò equivale a considerare un caso individuato dai dati

$$k = 1 \qquad \eta_0' = \text{zero} \qquad \eta' = \frac{1}{2}$$

in corrispondenza dei quali le costanti comparenti nella formola risolutiva dell'integrale prendono i valori semplici

$$M = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad N = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$m = -(1 + \sqrt{2}) \qquad n = -(1 - \sqrt{2})$$

e la formola risolutiva stessa si muta nella

$$H = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \eta'^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1 - n}{1 - m} \frac{t - m}{t - n}$$

la quale, fatte le sostituzioni numeriche correlative ai dati come sopra assunti, definisce in

$$H = 0{,}768$$

il valore del proposto integrale.

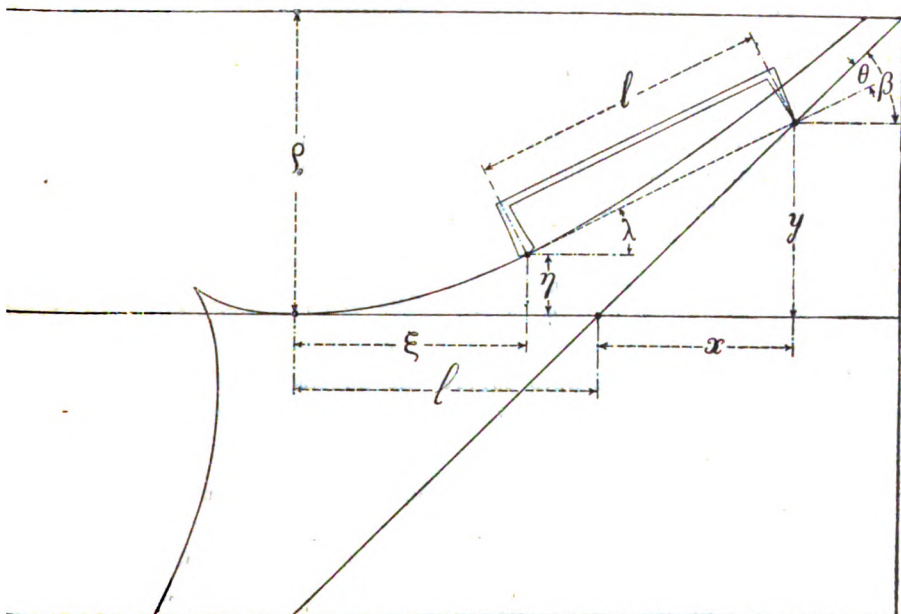
Orbene la annessa figura — che qui per ovvie ragioni tipografiche viene riprodotta in grandezza assai più piccola della grandezza naturale in cui fu effettivamente disegnata — mostra che la scure di un planimetro di lunghezza l, in conseguenza del fatto che l'asta inizialmente adagiata sull'asse delle ascisse passi ad una posizione di obliquità $\lambda = \text{artg}\,\frac{1}{2}$ mentre il calcatoio percorre un'obliqua a quarantacinque gradi sugli assi, subisce uno spostamento assiale ξ tale che

$$\xi / l = 0{,}76$$

come può rilevarsi in figura osservando la curva descritta dalla scure. I due valori così determinati, l'uno per via analitica, l'altro per via strumentale, sono fra di loro abbastanza vicini

perchè possa dirsi verificata la attitudine del planimetro a scure a eseguire l'integrale proposto. Di passata gioverà osservare che la figura mostra verificata anche la proprietà della trattrice di avere nel suo punto origine un raggio di curvatura

$$\rho_0 = l$$

in armonia con una proprietà più generale enunciata più sopra.

Analoghe verificazioni numeriche ho eseguite in corrispondenza dei casi

$$k = \text{zero} \qquad\qquad k = \infty$$

per i quali la formola risolutiva dell'integrale prende aspetti assai semplici: ometto per brevità di riferirne i risultati.

§ **6.** — L'equazione differenziale (II), della quale il planimetro a scure può essere strumento integrometro, viene rapidamente complicandosi via via che diventa meno semplice la

natura analitica della curva fatta percorrere al calcatoio. Così nel caso, abbastanza semplice, che il calcatoio percorra la parabola

$$y = k\,x^2$$

si troverà che l'equazione connettente i percorsi assiali ξ della scure alle tangenti d'obliquità η' dell'asta prende una forma già abbastanza intricata per non prestarsi a essere utilmente sottoposta a trattazione analitica, il che rende tanto più pregevole la propietà che ha lo strumento di dare in modo semplice una soluzione dell'equazione medesima. Si riconoscerà altresì che quando l'arco di parabola percorso dal calcatoio, nei dintorni dell'origine, sia o abbastanza breve o di curvatura abbastanza poco sentita da dar luogo a obliquità dell'asta sufficientemente piccole perchè risulti sempre $\eta^{2'} =$ zero, l'equazione (II) si ridurrà alla

$$l\,\frac{d\eta'}{d\xi} + \eta' - 2k\xi = 0\ ;$$

potrà essere interessante sapere che questa può in via di approssimazione essere risoluta mediante il planimetro a scure.

§ 7. — Mentre sto trascrivendo queste mie considerazioni, vengo messo a conoscenza di una Nota pubblicata dal prof. E. Pascal nei Rendiconti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli (febb. 1913). In essa il Pascal, prendendo lo spunto dalla surriferita mia precedente nota intorno al planimetro a scure considerato come integrafo per equazioni differenziali, mostra come, associando al planimetro a scure uno speciale dispositivo cinematico da lui felicemente usato nella costruzione di altri integrafi, si venga a ottenere un integrafo a vettore di lunghezza costante, il quale riesce atto a integrare un'equazione differenziale più generale che non quella di tipo (I) da me considerata. Naturalmente se allo strumento così modificato venissero applicati i criterii che hanno servito di base ai ragionamenti della presente Osservazione, si troverebbe che esso è atto a risolvere, come integrometro, un'equazione di tipo più complesso che non sia quello del tipo (II).

L'innovazione introdotta dal Pascal nel planimetro a scure per trasformarlo in integrafo è certamente geniale e pregevole: tuttavia io osserverò che con essa lo strumento, se guadagna in potenza e precisione, perde però quella caratteristica di estrema semplicità che è tipica nel planimetro a scure.

Il Pascal rileva nella sua nota che non sembra potersi ammettere per buona la mia osservazione, secondo la quale il planimetro a scure, se applicato in associazione a figure che diano luogo a obliquità dell'asta opportunamente piccole, dovrebbe poter costituire in prima approssimazione l'integrafo Pascal a riga rettilinea. Rileva a tale riguardo il Pascal non potersi dire che l'ordine di grandezza della quantità che si trascura sia maggiore di quello della quantità restante nella equazione differenziale e, se mai, ciò essere vero solo per speciali fissazioni della costante di integrazione e non per tutti gli altri infiniti integrali particolari dell'equazione differenziale proposta. Pare a me che l'appunto rivoltomi cessi di avere efficacia, ove si abbia presente che la mia deduzione partiva dal presupposto che l'asta dello strumento fosse inizialmente adagiata sull'asse delle ascisse, dando così luogo ad un valore iniziale nullo dell'obliquità e fissando così la costante di integrazione, oltre che dal presupposto che il calcatoio non dovesse percorrere che un arco sufficientemente corto della curva proposta nei dintorni del punto nel quale essa incontra l'asse delle ascisse. Mi pare fuori di dubbio che in queste presupposte ipotesi restrittive la linea tracciata da un planimetro a scure deve sensibilmente coincidere con quella che sarebbe tracciata dalla rotella integrafica di un integrafo a riga rettilinea di pari lunghezza d'asta e inizialmente orientato nello stesso modo che il planimetro a scure. Questa e non altra era la portata della mia deduzione.

Osservazione seconda.

§ 8. — I ragionamenti che a proposito delle proprietà del planimetro a scure sono stati svolti tanto nella mia precedente Nota quanto nella Osservazione prima, presentano questo di caratteristico, che essi sono rivolti a interpretare il significato dei valori ξ, η ovvero dei valori ξ, η', insomma il significato di

elementi relativi alla linea lasciata sul foglio come traccia del passaggio della scure. Il generale Jacob, dell'artiglieria navale francese, ha introdotto un procedimento nel quale vengono invece interpretati elementi relativi alla linea percorsa dal calcatoio di un planimetro a scure, e di tale procedimento si è valso per applicare tale planimetro come integrometro di equazioni di Riccati. Io qui mi propongo di esporre una generalizzazione di quel procedimento, per la quale il planimetro a scure diventa atto a servire da integrometro per equazioni differenziali di più complessa natura.

Con riferimento alla figura annessa alla mia precedente Nota, o anche a quella qui riportata a paragr. 5, rilevo che le relazioni fondamentali fra le coordinate dei punti rispettivamente occupati dal calcatoio e dalla scure

$$\eta = y - l \operatorname{sen} \lambda \qquad \xi = l + x - l \cos \lambda$$

dànno luogo ai valori differenziali

$$d\eta = dy - l \cos \lambda \, d\lambda \qquad d\xi = dx + l \operatorname{sen} \lambda \, d\lambda \,,$$

i quali, ove vengano sostituiti nella relazione

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \lambda$$

ossia

$$\cos \lambda \,.\, d\eta = \operatorname{sen} \lambda \,.\, d\xi$$

caratteristica del funzionamento dell'apparecchio, la trasformano nella

$$l \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dy}{dt} \cos \lambda - \frac{dx}{dt} \operatorname{sen} \lambda \,,$$

nello scrivere la quale si è evidentemente supposto che le coordinate x, y dei punti della curva percorsa dal calcatoio dipendano da una variabile arbitraria t. Se poi, imaginando che l'obliquità generica λ dell'asta sia una assegnata funzione di un'altra variabile u, si pone

$$\lambda = F(u) \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{d\lambda}{dt} = F'(u) \frac{du}{dt} \,,$$

l'equazione stessa potrà allora essere presentata sotto la forma

$$\text{(IV)} \qquad \frac{du}{dt} = A \frac{\cos F(u)}{F'(u)} - B \frac{\operatorname{sen} F(u)}{F'(u)}$$

nella quale si supponga

$$A = \frac{1}{l} \frac{dy}{dt} \qquad B = \frac{1}{l} \frac{dx}{dt}.$$

Segue da ciò che il planimetro a scure può fungere da integrometro per l'equazione differenziale (IV) quando al suo calcatoio venga fatta percorrere una curva all'uopo descritta per punti di coordinate

$$y = l \int A\, dt \qquad x = l \int B\, dt$$

essendo A e B due assegnate funzioni della variabile t: si intende che esse possono come caso particolare essere costanti.

§ **9.** — Se come esempio di applicazione si considera il caso di

$$\lambda = F(u) = u \qquad \text{e quindi} \qquad F'(u) = 1$$

e si prendono le A e B come costanti, l'equazione rispetto alla quale lo strumento può fungere da integrometro si ridurrà alla

$$\frac{du}{dt} = A \cos u - B \operatorname{sen} u$$

che per integrazione dà luogo al valore

$$t = \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{A \cos \lambda - B \operatorname{sen} \lambda}$$

il quale in ogni caso concreto potrebbe essere calcolato mediante applicazione di una nota formola di calcolo integrale. D'altra parte avendosi nella presente ipotesi

$$y = l A t \qquad x = l B t,$$

il valore di t corrispondente al passaggio dell'asta dall'obliquità zero all'obliquità λ deve restar accusato meccanicamente dallo strumento nell'una o nell'altra delle quantità

$$\frac{y}{lA} \qquad \frac{x}{lB}$$

di guisa che nell'una o nell'altra di esse noi dobbiamo trovar computato il valore dell'integrale definito

$$\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{A\cos\lambda - B\,\mathrm{sen}\,\lambda}\,.$$

A titolo di riprova diretta ho considerato il caso di $A = B = 1$, evidentemente verificantesi allorchè il calcatoio percorre una obliqua a quarantacinque gradi sugli assi, e mediante la formola analitica che risolve l'integrale testè scritto ho desunto che il valore di esso, considerato nel campo da $\lambda = 0$ a $\lambda = \mathrm{ar\,tg}\,\frac{1}{2}$, vale 0,615; la figura a paragrafo 5 indica che tale appunto è anche il valore assunto da $\frac{y}{l}$ per un passaggio dell' asta dalla posizione di adagiamento sull'asse delle ascisse alla posizione di obliquità $\lambda = \mathrm{ar\,tg}\,\frac{1}{2}$.

§ **10**. — Come altro esempio di applicazione può essere interessante considerare il caso

$$\lambda = F(u) = 2\,\mathrm{ar\,tg}\,u \qquad \text{ossia} \qquad u = \mathrm{tg}\,\frac{\lambda}{2}\,;$$

un opportuno svolgimento di calcolo algebrico, del quale qui per brevità ometto i particolari, mostrerebbe che in questo caso si ha

$$F'(u) = \frac{2}{1+u^2} \qquad \cos F(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \mathrm{sen}\,F(u) = 2\,\frac{u}{1+u^2}$$

e che l'equazione generale (IV) si riduce a

$$\frac{du}{dt} = \frac{A}{2} - Bu - \frac{A}{2}\,u^2$$

cioè ad una equazione di Riccati nella quale i coefficienti del primo e del terzo termine sono fra loro eguali e opposti nel segno. Il planimetro a scure può dunque essere impiegato come integrometro di questa particolare equazione.

§ **11.** — La relazione (IV) può essere altrimenti presentata. A tale uopo si ponga per semplicità di scrittura

$$\beta(u) = \frac{\operatorname{sen} F(u)}{F'(u)} \qquad \text{ossia} \qquad \beta(u) = \frac{\operatorname{sen} F(u)}{d F(u)} du \, ;$$

si può allora scrivere altresì

$$\frac{du}{\beta(u)} = \frac{d F(u)}{\operatorname{sen} F(u)} \qquad \text{e} \qquad \int \frac{du}{\beta(u)} = \int \frac{d F(u)}{\operatorname{sen} F(u)}$$

e conseguentemente

$$\int \frac{du}{\beta(u)} = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} F(u)$$

il che determina le relazioni

$$F(u) = 2 \operatorname{ar\,tg} e^{\int \frac{du}{\beta(u)}} \qquad \text{e} \qquad F'(u) = 2 \frac{e^{\int \frac{du}{\beta(u)}}}{1 + e^{2\int \frac{du}{\beta(u)}}} \frac{1}{\beta(u)} \, .$$

Orbene se nella (IV) vengono sostituiti i valori di $\cos F(u)$ e di $F'(u)$ espressi in funzione di $\beta(u)$, si riconoscerà, con breve sviluppo di calcolo che qui si omette di riportare, che alla relazione originaria (IV) può essere sostituita come ad essa equivalente la seguente altra

$$\text{(V)} \qquad \frac{du}{dt} = \left[- A \frac{e^{\int \frac{du}{\beta(u)}} - e^{-\int \frac{du}{\beta(u)}}}{2} - B \right] \beta(u)$$

la quale costituisce una nuova forma sotto la quale mi interessava di presentare l'equazione differenziale caratteristica del funzionamento dell'apparecchio. Il planimetro a scure può dunque essere considerato anche come integrometro delle equazioni differenziali riducibili al tipo (V), e ciò nella intesa che al calcatoio venga fatta percorrere una curva costruita mediante le assegnate funzioni A e B come a § 8, e che la variabile u si intenda legata alla obliquità corrente λ dell'asta dalla relazione

$$\lambda = 2 \operatorname{ar\,tg} e^{\int \frac{du}{\beta(u)}} \qquad \text{ossia} \qquad \int \frac{du}{\beta(u)} = \log \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \, .$$

§ **12**. — Se a cagion d'esempio si considera il caso semplice di

$$\beta(u) = u \qquad \text{ossia} \qquad u = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}$$

il quale dà luogo a

$$\int \frac{du}{\beta(u)} = \int \frac{du}{u} = \log u \,,$$

allora l'equazione generale, alla cui integrazione lo strumento riesce atto, si particolarizza in

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} A - Bu - \frac{1}{2} Au^2$$

con che si è ricaduti, come è ovvio, nella stessa equazione di Riccati precedentemente considerata.

§ **13**. — Ferma restando (cfr. § 8) la forma primitiva

$$l \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dy}{dt} \cos\lambda - \frac{dx}{dt} \operatorname{sen}\lambda$$

sotto cui considerare l'equazione caratteristica del funzionamento del planimetro a scure, ci giova osservare che giusta le nostre figure si può porre

$$\lambda = \beta - \theta \qquad \text{con} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx}$$

se con β si indica l'angolo di inclinazione locale della curva percorsa dal calcatoio e con θ l'angolo locale della curva stessa con l'asta. Se, imaginando che tale angolo θ sia legato a una variabile v, si pone

$$\theta = F(v) \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{d\theta}{dt} = F'(v) \frac{dv}{dt} \,,$$

'equazione caratteristica del funzionamento dell'apparecchio potrà allora essere agevolmente presentata sotto la forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A}{F'(v)} - B \frac{\operatorname{sen} F(v)}{F'(v)} + C \frac{\cos F(v)}{F'(v)}$$

dove si intenda essere

$$A = \frac{d\beta}{dt}$$

$$B = \frac{1}{l}\left[\frac{dx}{dt}\cos\beta + \frac{dy}{dt}\operatorname{sen}\beta\right]$$

$$C = \frac{1}{l}\left[\frac{dx}{dt}\operatorname{sen}\beta - \frac{dy}{dt}\cos\beta\right]$$

e dove si tenga conto che è

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

Avuto riguardo a questa ultima relazione si riconosce facilmente che risulta

$$A = \frac{d\beta}{dt} \qquad C = \text{zero},$$

$$B = \frac{1}{l}\,\frac{dx}{dt}\,\frac{1}{\cos\beta} \qquad \text{oppure} \qquad B = \frac{1}{l}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}$$

il che tutto può essere interpretato col dire che il planimetro a scure è atto a fungere da integrometro per l'equazione differenziale

$$\text{(VI)} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{A}{F'(v)} - B\,\frac{\operatorname{sen}F(v)}{F'(v)}$$

quando al calcatoio venga fatta percorrere una curva previamente descritta per punti di coordinate

$$y = l\int B\operatorname{sen}\beta\,.\,dt \qquad x = l\int B\cos\beta\,dt$$

essendo

$$\beta = \int A\,dt\,,$$

con tutte le integrazioni estese da zero a t.

§ **14.** — Se a titolo di esempio applicativo si prende

$$\theta = F(v) = 2\operatorname{ar\,tg} v \quad \text{ossia} \quad v = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad F'(v) = \frac{2}{1+v^2},$$

con svolgimento di calcolo analogo a quello accennato a § 10, si troverà

$$\frac{\operatorname{sen} F(v)}{F'(v)} = v$$

e si riconoscerà che l'equazione differenziale (VI) si particolarizza nella

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} A - Bv + \frac{1}{2} Av^2$$

ossia in una equazione di Riccati avente i coefficienti del primo e terzo termine fra loro eguali e concordi nel segno. Il planimetro a scure riesce atto a servire da integrometro per detta equazione, nel senso che il valore θ, rilevato in figura per quella posizione dell'asta per la quale il calcatoio occupa il punto avente coordinate corrispondenti (giusta le espressioni date infine del § 13) a un assegnato valore t della variabile indipendente, determina mediante la

$$v = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

un valore che soddisfa la proposta equazione.

Si potrebbero moltiplicare gli esempi di applicazione; basterà però rilevare che dalla presente Osservazione seconda emerge come il planimetro a scure sia atto a fungere da integrometro per le equazioni differenziali dei tipi (IV), (V) e (VI) rispetto alle quali quelle trattate dal Jacob, con procedimento sul quale quello delle presenti pagine è ricalcato, non sono che casi particolari.

Osservazioni sul calcolo degli errori medii.

Nota di LUIGI CARNERA

1. — In una nota apparsa di recente nelle " Astronomische Nachrichten ", N. 4611, pag. 39, il Meissner accenna ad un errore, a cui facilmente si può essere indotti nel calcolo degli errori medii di risultati dedotti da valori singoli, aventi peso diverso. Egli fa notare con esempio numerico che, se ai valori aventi un peso eguale ad un multiplo dell'unità si sostituiscono un egual numero di valori eguali fra di loro, e si considerano tutti di peso uno, l'errore medio che si ha per il risultato è in questo caso ben diverso dal primitivo; e soggiunge che per ottenere risultati analoghi conviene sostituire non valori eguali fra di loro, bensì opportunamente scelti; il Meissner peraltro non approfondisce la ricerca del come tale scelta debba essere fatta.

Che sostituendo valori diversi fra di loro, ma atti a ricondurre ancor alla media primitiva, sia possibile ottenere per errore medio la quantità che più può desiderarsi è cosa troppo evidente, perchè valga la pena di insistere con spiegazioni; ma chiarire invece in modo preciso e rigoroso come possa verificarsi l'accennata diversità di risultati, rintracciandone la causa vera, mi pare possa non essere priva d'interesse.

2. — Se da una serie di n misure si sono ottenuti n valori, egualmente attendibili e meritevoli quindi tutti d'un egual peso, e che indicheremo con $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il valore più probabile del risultato sarà dato notoriamente da $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i$; e la misura dell'esattezza sua verrà data dall'errore medio, che notoriamente sarà $\epsilon_A = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n(n-1)}}$ essendo $v_i = a_i - A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Supponiamo ora di dividere gli n valori in m gruppi composti di $r_1, r_2, \ldots, r_m$ valori singoli.

Se formiamo le medie parziali:

$$A_1 = \frac{1}{r_1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1})$$

$$A_2 = \frac{1}{r_2}(a_{r_1+1} + a_{r_1+2} + \ldots + a_{r_1+r_2})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_m = \frac{1}{r_m}(a_{r_1+r_2+\ldots+1} + a_{r_1+r_2+\ldots+2} + \ldots + a_{r_1+r_2+\ldots+r_m})$$

noi otterremo ancora per risultato definitivo il primitivo valore di A, se attribuiremo ad $A_1, A_2, \ldots, A_m$ rispettivamente i pesi $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Ma se vogliamo avere l'errore medio del risultato ottenuto seguendo questa nuova via, per le note formole avremo:

$$\epsilon_A' = \pm \sqrt{\frac{\Sigma r_i E_i^2}{(m-1)\Sigma r_i}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma r_i E_i^2}{n(m-1)}},$$

o essendo:

$$E_i = A_i - A = \frac{1}{r_i}[a_{r_1+r_2+\ldots+1} + \ldots + a_{r_1+r_2+\ldots+r_i} - r_i A] =$$
$$= \frac{1}{r_i}[v_{r_1+r_2+\ldots+1} + v_{r_1+r_2+\ldots+2} + \ldots + v_{r_1+r_2+\ldots+r_i}]$$

$$\epsilon_A' = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^m \frac{1}{r_i}\left[\sum_{s=1}^{s=i} v_{r_1+r_2+\ldots s}\right]^2}{n(m-1)}}$$

mentre l'errore medio corrispondente al valore di peso eguale ad uno sarà dato da:

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^m \frac{1}{r_i}\left[\sum_{s=1}^{s=i} v_{r_1+r_2+\ldots s}\right]^2}{m-1}}$$

valore questo in generale ben diverso da quello che si sarebbe trovato seguendo il procedimento precedente e che è dato dall'espressione:

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-1}}.$$

Ora poichè per definizione i pesi devono essere inversamente proporzionali ai quadrati degli errori medii, dalla diversità di questi potremo dedurre quella dei primi. Di conseguenza nel caso da noi considerato si avrà che non si possono senz'altro paragonare fra di loro i risultati, essendo diverse le unità di peso, alle quali sono riferiti i valori. Ma se noi per rendere possibile il confronto assumiamo quale unità quella che corrisponde all'errore medio ϵ, il peso che corrisponderà ad un valore avente per errore medio η, sarà: $\frac{\epsilon^2}{\eta^2} = p'$.

In generale se si indica con e l'errore medio che corrisponde ad un valore di peso uno, è noto che ad un valore di peso p corrisponde un errore medio eguale ad $\frac{e}{\sqrt{p}}$; nel caso nostro essendo ϵ l'errore medio unitario, per il valore di peso p' sarà $\frac{\epsilon . \eta}{\epsilon} = \eta$, come era da attendersi; ed analogamente per il risultato dedotto nel secondo modo essendo il peso suo $n . p'$, risulterà doverne essere l'errore medio

$$\epsilon_A' = \epsilon \sqrt{\frac{1}{n . p'}} = \epsilon \frac{\eta}{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\eta}{\sqrt{n}}.$$

Si vede da ciò come necessariamente si venga ricondotti ai valori primitivi, e non sussista differenza alcuna nei risultati, se si tien conto esatto dei pesi.

3. — Premessa questa trattazione generica, immediatamente si comprende il caso inverso, quello cioè considerato negli esempi numerici del Meissner nell'articolo citato più sopra, ed evidente appare il punto ove facilmente si può essere condotti in errore.

Avendo un certo numero di valori A_1, A_2, ..., A_m di pesi p_1, p_2, ..., p_m per valore più attendibile si assume notoriamente il valore di:

$$A = \frac{\Sigma p_i A_i}{\Sigma p_i}$$

essendo l'errore medio del risultato:

$$\epsilon_A = \pm \sqrt{\frac{\Sigma p_i . E_i^2}{(m-1) \Sigma p_i}}$$

o quello di un valore di peso unitario:

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\Sigma p_i . E_i^2}{m-1}}$$

ove si indichi con E_i la differenza $(A_i - A)$.

Ora per definizione un valore che abbia il peso p è bensì equivalente a p valori aventi peso unitario, ma perchè una tale sostituzione sia lecita è necessario che i valori che si sostituiscono siano realmente tali da meritare il peso uno, o in altre parole, tali che l'errore medio loro competente, sia quello che si aveva nel sistema primitivo per un valore di peso unitario. Se quindi al valore A_i sostituiamo p_i valori singoli *di peso uno e tutti eguali ad* A_i, il valore di A resterà bensì invariato, ma non così quello dell'errore medio in quanto questo risulterà essere eguale a:

$$\epsilon_A' = \pm \sqrt{\frac{\Sigma_i p_i E_i^2}{n(n-1)}}$$

essendo:

$$n = \Sigma p_i$$

mentre quello di una singola osservazione risultando:

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\Sigma p_i E_i^2}{n-1}}$$

paragonato al valore precedentemente trovato mostra ad evidenza che l'unità di peso al quale ci si riferisce nei due casi deve esser variata, essendo diversi gli errori medii corrispondenti. Ne segue che, volendo arrivare a risultati identici, mantenendo invariato il numero dei valori di peso unitario che si sostituiscono agli originali, non è possibile essi siano fra di loro tutti eguali. Il sistema potrà invece rimanere perfetta-

mente equivalente, se i singoli valori saranno scelti in modo tale da risultare:

$$(a) \qquad \frac{\Sigma\, p_i\, E_i^2}{m-1} = \frac{\Sigma\, v_i^2}{n-1}$$

e contemporaneamente sarà:

$$(b) \qquad E_i = \frac{1}{p_i} \sum_K v_K\,.$$

Quindi i valori che potremo sostituire alle m quantità A_i, dovranno sodisfare ad $(m+1)$ relazioni, e poichè per lo meno ci sarà una A_i avente il peso 2, chè altrimenti sarebbero già tutte di peso unitario, esisterà sempre almeno un sistema di valori equivalente al primitivo e composto esclusivamente di valori di peso unitario; anzi, poichè il numero delle equazioni che devono essere sodisfatte dagli n valori è $(m+1)$, noi potremo sempre assegnare ad arbitrio $(n-m-1)$ valori, restando dopo di ciò perfettamente determinati gli altri.

4. — Consideriamo, per es., il caso numerico portato dal Meissner nel luogo citato. Egli suppone di avere 12 valori determinati, distinti fra di loro, e meritevoli di un egual peso, tali che la differenza fra il valore medio e i valori singoli sono rispettivamente:

$$+19,\ +33;\ -26,\ +14,\ -34;\ +10,\ -13,\ +47,\ +16;\ -31,\ -1,\ -26.$$

Da questi si ritrae che l'errore medio del risultato deve essere eguale a ± 8. Ma se riuniamo in una media successivamente i due primi, poi i tre successivi, indi i quattro ed infine i rimanenti tre, avremo quattro valori che presenteranno gli scarti $+21$, -15, $+15$, -19: se ora si assegnano rispettivamente i pesi 2, 3, 4, 3 otterremo bensì ancora la stessa media, ma non più l'errore medio di prima, l'unità di peso essendo variata.

Infatti facendo uso delle abituali formole si trova ± 10. Se poi al nuovo sistema di valori aventi i pesi 2, 3, 4 e 3 e rispettivamente gli scarti $+21$, -15, $+15$, -19 si voles-

sero sostituire valori di peso eguale ed unitario, ed in modo che in luogo del primo vi siano due eguali fra di loro, e presentanti ambedue lo scarto $+21$, poi in luogo del secondo tre eguali e con lo scarto -15 e così via, per quanto si è visto, il risultato non varierebbe, ma l'errore suo medio sarebbe di appena ± 5. Per poter ottenere un risultato veramente equivalente bisogna che gli scarti dei nuovi valori sodisfino alle relazioni (a) e (b), cioè sia:

$$\begin{aligned}
&v_1 + v_2 = +42 \\
&v_3 + v_4 + v_5 = -45 \\
&v_6 + v_7 + v_8 + v_9 = +60 \\
&v_{10} + v_{11} + v_{12} = -57 \\
&v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2 + v_7^2 + v_8^2 + v_9^2 + v_{10}^2 + v_{11}^2 + v_{12}^2 = 12980.
\end{aligned}$$

Ossia eliminando per es. le v_1, v_3, v_6 e v_{10} con le prime quattro equazioni deve restare sodisfatta l'equazione:

$$(c) \qquad \begin{aligned} 1171 = {} & v_2^2 + 42 v_2 + v_4^2 + v_5^2 + v_4 v_5 + 45 v_4 + 45 v_5 + v_7^2 + \\ & + v_8^2 + v_9^2 + v_7 v_9 + v_8 v_9 - 60 v_7 - 60 v_8 - 60 v_9 + v_{11}^2 + \\ & + v_{12}^2 + v_{11} v_{12} + 57 v_{11} + 57 v_{12} \end{aligned}$$

che ammette ∞^7 soluzioni. Se quindi l'arbitrarietà si fissa ponendo p. e.:

$$\begin{aligned}
v_2 &= +21 \\
v_4 = v_5 &= -15 \\
v_7 = v_8 = v_9 &= +15 \\
v_{11} &= -19
\end{aligned}$$

risultano dalle prime relazioni essere:

$$v_1 = +21\,, \qquad v_3 = -15\,, \qquad v_{16} = +15$$

e dalla (c):

$$v_{12} = -87.7 \qquad \text{e} \qquad v_{10} = +49.7$$

ovvero:

$$v_{12} = +49.7 \qquad \text{e} \qquad v_{10} = -87.7.$$

Col sistema di valori così composto si ricava realmente il preciso ed identico errore medio che si era trovato nel caso

originariamente considerato dei quattro valori con peso diverso, come risulta dalla tabellina che segue:

v_i	v_i^2	V_i	p	V_i^2	v_i'	$v_i'^2$
+ 19	361	+ 21	2	882	+ 21	441
+ 33	1089				+ 21	441
— 26	676				+ 15	225
— 14	196	+ 15	3	675	+ 15	225
— 34	1156				+ 15	225
+ 10	100				+ 15	225
— 13	169	— 15	4	900	— 15	225
+ 47	2209				— 15	225
+ 16	256				— 15	225
— 31	961				+ 49.7	2470
— 1	1	— 19	3	1083	— 19	361
— 26	676				+ 89.7	7691

$\sum v_i^2 = 7850$ $\qquad \sum p V_i^2 = 3540$ $\qquad \sum v_i'^2 = 12979$

$n(n-1) = 131$ $\qquad (m-1)\sum p_i = 36$ $\qquad n(n-1) = 131$

$$\sqrt{\frac{7850}{131}} = \pm 8 \qquad \sqrt{\frac{3540}{36}} = \pm 10 \qquad \sqrt{\frac{12979}{131}} = \pm 10 .$$

7 Marzo 1913.

Relazione sulla Memoria presentata dal Prof. E. MARTEL dal titolo: *Contribuzione allo studio degli organi escretori fogliari.*

L'A. fu indotto a questo suo lavoro in seguito alle notevoli differenze da lui rilevate nelle conclusioni alle quali erano giunti gli autori che precedentemente si erano occupati dello studio degli organi escretori fogliari.

L'A. inizia il suo lavoro colla esposizione di quanto finora fu fatto, giungendo alla conclusione che, per il massimo numero di ricercatori, i nettari estranuziali delle foglie, altrimenti detti *idatodi*, *stomi acquiferi*, sarebbero da considerarsi come semplici organi di secrezione, senza però assegnare alle sostanze secrete un ufficio ben definito; da tutti però venne escluso che possano servire allo adescamento degli insetti.

Posto mente al fatto che, all'infuori di pochi casi, l'armatura vascolare è costante nel più gran numero dei nettarii estranuziali e che in alcuni di essi è straordinariamente sviluppata, l'A. intese allo studio della loro funzione, appoggiandosi a ricerche anatomiche. Esaminando successivamente i nettari di moltissime specie vegetali, egli fu condotto ad ammettere che i nettari fogliari, ovverosia gli *idatodi* fogliari, possono essere di due sorta; *secretivi*: quelli cioè il cui secreto è adoperato a immediato benefizio del vegetale, la cui struttura è puramente cellulare (*Clerodendron*, *Prunus Lauro-Cerasus*); e questi soli sarebbero quindi da ritenersi, come veri e proprii nettarii estranuziali; e in *escretivi*: che servono alla eliminazione dei materiali nocivi, o per lo meno inutili.

Solo i *nettarii* o gli *idatodi* di questa ultima categoria, sono muniti di armatura vascolare. In alcuni di essi la comunicazione fra i vasi e l'atmosfera si constata già nei primi stadii evolutivi della foglia (*Primula*; *Ficus elastica*); mentre nel massimo numero di essi invece, tale comunicazione si verifica solo negli ultimi stadii vitali delle foglie stesse; perocchè nei primi periodi la comunicazione viene impedita dalla presenza di un tessuto parenchimatoso, oppure di un tessuto ghiandolare occupante il vertice del nettario stesso.

Seguendo il ciclo di sviluppo di tali formazioni è facile osservare, che se dapprima il tessuto ghiandolare ha predominio su quello vascolare, nel secondo periodo invece si manifesta la relazione opposta. La porzione ghiandolare a poco a poco avvizzisce e la comunicazione dei vasi coll'atmosfera ambiente, si fa quindi liberamente, anche perchè in alcuni casi il materiale ghiandolare essiccato viene eliminato da uno strato fellogenico.

L'A. quindi è indotto dalle sue ricerche a ritenere che tanto il parenchima, quanto il tessuto ghiandolare non abbiano che una funzione transitoria di protezione, sino al momento in cui l'apparato vascolare entra in funzione, quando si manifesta il rallentamento dell'attività degli stomi in seguito (crede egli) ai depositi minerali che vi si accumulano (ossalato di calcio in modo speciale).

Secondo l'A., gli scienziati osservatori che lo precedettero avrebbero avuto il torto di studiare solamente le prime fasi di sviluppo dei nettari fogliari e perciò li ritennero come organi secretori; mentre egli, studiandone tutto il ciclo di sviluppo, crede di poter affermare che i nettari in questione debbano invece essere considerati quali organi di escrezione, cioè identici a quelli noti nella letteratura botanica coi nomi di *Idatodi* (Haberlandt) e di *Stomi acquiferi* (De Bary).

Il lavoro è corredato da molteplici figure tratte dai preparati e accuratamente eseguite.

Da quanto è stato esposto, vista l'importanza dell'argomento trattato e le conclusioni a cui è giunto l'Autore, i relatori ritengono che la Memoria del Prof. Martel sia degna di essere accolta nei volumi delle Memorie Accademiche.

Torino, 25 Aprile 1913.

L. Camerano
O. Mattirolo, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Maggio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. RODOLFO RENIER
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: RUFFINI, STAMPINI, BAUDI DI VESME, EINAUDI e DE SANCTIS Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente BOSELLI, del Direttore della Classe MANNO, dei Soci CARLE, SFORZA e BRONDI.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 20 aprile 1913.

Il Socio STAMPINI propone che sieno inviate condoglianze al Socio PIZZI per la morte del fratello Sig. Maestro Filippo avvenuta il 2 corrente maggio. La proposta è accolta con voto unanime.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Maggio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Jadanza, Foà, Guareschi, Fileti, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

La Reale Accademia dei Lincei e la Reale Accademia delle Scienze di Berlino hanno inviato lettere di ringraziamento pel dono a loro fatto del volume in onore di Lagrange.

È giunto all'Accademia il volume 14° delle *Œuvres complètes de Laplace*, inviato in omaggio dagli eredi di quel sommo matematico.

Il Socio Jadanza, per incarico del Socio corrispondente Cerulli, Presidente della Società astronomica italiana, presenta in omaggio i primi sette volumi della *Rivista di astronomia e scienze affini*, pubblicata da quella Società astronomica.

Similmente vengono presentati in dono:

dal Socio Mattirolo tre sue Note: 1° *Rudolph Hesse*; 2° *Amedeo Genesy*; 3° *Un Micete nuovo per il Ruwenzori*;

dal Socio Grassi i volumi 1° e 3° degli *Atti del Congresso internazionale delle applicazioni elettriche, tenutosi in Torino dal 10 al 16 settembre 1911*;

dal Socio Somigliana una sua Nota: *Sopra un criterio di classificazione dei massimi e dei minimi delle funzioni di più variabili.*

Per la stampa negli *Atti* i Soci D'Ovidio e Somigliana offrono, rispettivamente, le seguenti Note:

F. Giolitti e N. Boyer, *Sulla cristallizzazione dell'acciaio*, Nota II;
F. Vercelli, *Considerazioni complementari alla Memoria " Sulla previsione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini „ di C. Somigliana e F. Vercelli.*

Il Socio Fusari, anche a nome del Collega Camerano, riferisce intorno alla Memoria del Dr. Cesare Staurenghi, da lui presentata nell'adunanza precedente. Con votazione unanime la Classe accoglie le conclusioni della Relazione, favorevoli alla stampa della Memoria.

LETTURE

Sulla cristallizzazione dell'acciaio.

Nota II di F. GIOLITTI e N. BOYER.

(Con una Tavola).

In una Nota pubblicata due mesi addietro (1), uno di noi faceva notare come la nota struttura " reticolare „, caratteristica della massima parte degli acciai il cui tenore di carbonio è compreso fra 0.4 % e 0.8 %, non possa per nulla spiegarsi — come taluno ha fatto — con una ipotetica tendenza della ferrite a separarsi alla periferia dei cristalli misti di formazione primaria: chè alla verisimiglianza di tale spiegazione si oppone il modo stesso secondo il quale la concentrazione del carbonio deve necessariamente variare dall'asse alla periferia di ogni singolo cristallo di separazione primaria, per effetto dell'andamento — ormai stabilito in modo del tutto certo — della cristallizzazione delle soluzioni solide ferro-carbonio. Del resto, che l'andamento della variazione della concentrazione del carbonio nei singoli cristalli misti sia precisamente l'opposto di quello che potrebbe provocare la separazione della ferrite alla periferia dei cristalli stessi, è provato da un gran numero di fatti positivi: fra i quali basti ricordare il fenomeno, accuratamente studiato ed analizzato da Howe e Lévy (2), della formazione del reticolo di cementite negli acciai ipereutectici.

Nella stessa Nota sopra citata, pubblicata da uno di noi, era anche un accenno della spiegazione più razionale che della struttura reticolare negli acciai ipoeutectici può darsi in base alla considerazione del diverso modo di svilupparsi dei cristalli

(1) V. " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XLVIII, pag. 609; e " La Metallurgia italiana „, V, 1913, fasc. 3°.

(2) V. Comunicazioni dell'Associazione internazionale per lo studio dei materiali da costruzione, vol. II, N. 13, 6 agosto 1912, pag. 1-15.

di ferrite α e di quelli di ferrite β. Tale spiegazione era fondata sull'interpretazione razionale delle strutture che la ferrite *completamente segregata* presenta in una serie di acciai sottoposti a determinati trattamenti termici.

Ora vogliamo dimostrare come si possano confermare pienamente le conclusioni formulate nella Nota precedente intorno alla genesi delle strutture in questione, in base all'osservazione diretta delle diverse fasi del processo di formazione delle strutture stesse. Fra tutte le vie per giungere alla conferma dell'ipotesi formulata, è questa, evidentemente, la più diretta e la più sicura.

Non ci è apparso superfluo cercar di chiarire meglio la genesi della struttura reticolare degli acciai ipoeutectici, sia per la grande importanza pratica dei fenomeni costituenti il processo di formazione di tale struttura (importanza ben nota, e messa in evidenza anche nella precedente Nota); sia per la frequenza colla quale si trovano nei trattati spiegazioni erronee della struttura stessa.

Per una prima serie di esperienze ci siamo serviti di un acciaio al carbonio della seguente composizione:

Carbonio	0.62 %
Manganese	0.58 %
Silicio	0.07 %
Zolfo	0.02 %
Fosforo	0.03 %.

L'acciaio fu tirato al maglio in forma di sbarra a sezione quadra di 30 mm. di lato; e dalla sbarra furono ricavati dei cubi del metallo, di 25 mm. di spigolo.

Sei dei cubi, così ottenuti, furono riscaldati per un'ora a 900° C. nel bagno di sali di un ordinario forno da tempra, mantenendoli sospesi nella parte mediana del bagno. Poi il forno fu spento ed il bagno lasciato raffreddare lentamente, agitandolo continuamente, e tenendovi continuamente immersa la coppia termoelettrica di un pirometro Le Chatelier, in modo da conoscere ad ogni istante la temperatura dei pezzi di acciaio.

Quando la temperatura fu scesa a 750° C. uno dei pezzi fu rapidamente temprato in acqua fredda (a circa 15° C.). Il secondo

fu temprato in modo identico a 740° C.: e così via di dieci in dieci gradi, fino al sesto pezzo, che fu temprato a 700° C.

I sei pezzi così trattati furono poi fatti rinvenire al bagno di piombo fra 550° e 600° C., per risolvere la martensite.

All'esame microscopico i primi due pezzi (temprati successivamente a 750° e 740°) apparvero formati di sole troostite e sorbite: ciò che, del resto, era prevedibile.

Le strutture degli altri quattro pezzi sono riprodotte nelle prime sei micrografie della tavola qui unita: e da esse risultano chiaramente caratterizzate le fasi successive della segregazione della ferrite.

Tutte le micrografie riprodotte nella tavola qui unita furono eseguite su provette levigate ed attaccate colla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 $^0/_0$.

Nella fig. 1 (provetta temprata a 730° C. ingrandimento: 160 diam.) si vedono i primi germi di cristallizzazione della ferrite, separatisi nel breve intervallo di temperatura che intercede fra il punto dell'inizio della segregazione della ferrite (circa 740° C. per un acciaio della composizione di quello adoperato nelle nostre esperienze) e la temperatura della tempra (730°), alla quale il processo normale della segregazione della ferrite fu bruscamente interrotto.

Già da questa prima provetta si vede (ciò che risulterà ancora assai più evidente dall'esame delle provette successive) che la ferrite non manifesta, nemmeno all'inizio della sua segregazione, alcuna tendenza a disporsi “ secondo gli orli „ dei cristalli misti; ma si separa in piccole masse isolate. Il fatto diventa sopra tutto evidente quando si confrontino le figure qui unite colle micrografie pubblicate da Howe e Lévy (l. c.), relative all'andamento della segregazione della cementite, la quale realmente si separa alla periferia dei singoli cristalli misti.

La struttura della seconda provetta (v. fig. 2, ingrandimento: 160 diam.), nella quale la tempra eseguita a temperatura più bassa (720° C.) ha permesso al processo della segregazione della ferrite di svolgersi nelle condizioni normali, durante un intervallo maggiore, pone bene in evidenza il fatto che i cristalli di ferrite si sono sviluppati intorno a “ centri „ o “ nuclei „ di cristallizzazione, e non già secondo le linee caratteristiche formanti i “ contorni „ dei singoli cristalli misti. In

tali condizioni, i cristalli di ferrite conservano le loro forme caratteristiche di masse isolate; nelle quali, però, si manifesta già evidente l'inizio della formazione di protuberanze acute, dovute alla tendenza della ferrite α a cristallizzare in quelle sue forme lamellari che abbiamo veduto (nella precedente Nota) dar luogo alla struttura di Widmanstätten, ogniqualvolta la ferrite α possa separarsi lentamente da una soluzione solida omogenea, nè sia costretta — come avviene nel caso che ora esaminiamo — a separarsi secondo una " trama „ rigidamente prestabilita dalla variazione della concentrazione del carbonio dal centro alla periferia dei cristalli misti primari.

In altre parole: i nuclei di ferrite che troviamo nelle nostre prime provette riproducono la forma e la posizione delle regioni di minor concentrazione del carbonio (nuclei di cristalli misti): mentre le ramificazioni che già cominciano a protendersi attorno ai nuclei stessi, sono dovute alla tendenza della ferrite α ad assumere il suo abito cristallino caratteristico, vincendo l'ostacolo opposto allo sviluppo delle sue forme lamellari (nella sezione: aghi) dalla disposizione delle superficie di ugual concentrazione del carbonio, in forma di involucri avvolgenti i nuclei.

L'esame della terza provetta, temprata a 710° C. (v. fig. 3, ingrandimento: 160 diam.) conferma pienamente — ponendoli anche meglio in evidenza — i fatti che abbiamo osservati nella seconda provetta. Infatti, ritroviamo anche qui i " nuclei „ di ferrite, colle loro caratteristiche protuberanze acute: se non che la maggior ampiezza dell'intervallo di temperatura (da circa 740° a 710° C.) entro il quale in questo caso ha potuto svolgersi il processo normale della segregazione della ferrite, in confronto a quella del corrispondente intervallo del caso precedente (da circa 740° a 720° C.), ha fatto sì che in questa terza provetta sia i nuclei che le protuberanze hanno raggiunto uno sviluppo assai maggiore che non nel caso precedente.

Se ora osserviamo nel suo complesso la disposizione degli elementi strutturali dei due costituenti (ferrite e troosto-sorbite) che entrano a formare il metallo dell'ultima provetta esaminata, vediamo che i nuclei di ferrite, colle loro protuberanze, sono disposti già in modo da simulare gli elementi di un reticolo *a maglie interrotte*.

Tale fatto risulta ancora più evidente se si osserva lo

stesso materiale sotto un ingrandimento minore: poichè in tal caso riesce più facile all'occhio il percepire la struttura nel suo complesso. Così la struttura a reticolo a maglie interrotte, appare molto evidente nella fig. 4, la quale riproduce la struttura dello stesso materiale riprodotto nella fig. 3, ma con un ingrandimento di soli 50 diametri.

È inutile insistere per dimostrare che la struttura così ottenuta non è quella di un vero e proprio reticolo, ma soltanto una struttura che imita quella del reticolo. Ciò risulta in modo evidentissimo, sia dalla genesi della struttura stessa che abbiamo minutamente analizzata; sia dal fatto che in essa permangono sempre le masse granulari di ferrite che hanno generato gli elementi dello " pseudo-reticolo „; sia — infine — dalle ampie lacune che tuttora separano gli elementi della ferrite.

Una ulteriore conferma evidentissima di tutto ciò è ancora fornita da un semplice confronto delle strutture riprodotte nelle figure qui unite, con quelle pubblicate da Howe e Lévy (l. c.), le quali illustrano la genesi dei veri e proprî reticoli di cementite.

Eseguendo la tempra in modo che la segregazione normale della ferrite avvenga in un intervallo di temperatura ancor maggiore, i fenomeni osservati divengono ancor più evidenti: e — proseguendo lo svolgimento dei varî fenomeni secondo il meccanismo che abbiamo già analizzato — i nuclei di ferrite si ingrandiscono, e si sviluppano maggiormente le appendici lamellari formatesi alla loro periferia.

Ciò risulta in modo evidente nella fig. 5, qui unita; la quale riproduce — coll'ingrandimento di 160 diametri — la struttura dell'acciaio della provetta successiva a quella delle fig. 3 e 4, temprata a 700° C.

È naturale che — sviluppandosi maggiormente la struttura della precedente provetta — anche l'apparenza simile alla struttura reticolare risulti accentuata: e ciò pel semplice intensificarsi delle cause che abbiamo veduto dare origine a tale struttura nel caso precedente.

Ciò appare già nella figura 5: ma — per le stesse ragioni alle quali abbiamo accennato pel caso precedente — il fenomeno è assai più evidente quando la stessa struttura sia esaminata sotto un ingrandimento minore. È questo il caso della figura 6, la quale riproduce la struttura dello stesso materiale

al quale si riferisce la figura 5, ma coll'ingrandimento di soli 70 diametri.

Anche per quest'ultimo caso valgono le stesse considerazioni svolte pei casi precedenti onde porre in evidenza la natura vera della struttura pseudo-reticolare: ed anche in questo caso tali considerazioni trovano una evidente conferma nel confronto delle strutture esaminate, con quelle dei veri reticoli di cementite, studiati ed illustrati da Howe e Lévy (l. c.).

Risultati del tutto analoghi — ed anche più evidenti — s ottengono " invertendo ", in certo modo, le condizioni sperimentali realizzate nelle prove descritte nelle pagine che precedono. E — precisamente — temprando *ad una determinata temperatura* un acciaio a tenore di carbonio variante gradualmente da circa 0.3 % fino oltre il 0.8 %, in luogo di temprare a temperature gradualmente decrescenti un acciaio di composizione costante. Ciò che equivale, evidentemente, a far variare l'ampiezza dell'intervallo della segregazione normale della ferrite spostando la temperatura dell'inizio al raffreddamento dell'intervallo stesso, in luogo di ottenere la stessa variazione, spostando (come nel caso precedente) la temperatura della sua fine al raffreddamento (tempra).

Le nuove condizioni si realizzano nel modo più semplice sottoponendo al trattamento termico voluto un pezzo di acciaio cementato parzialmente.

Ciò appare appunto nella fig. 7, qui unita, la quale riproduce (1) la struttura della regione periferica di una provetta di acciaio della seguente composizione:

Carbonio	0.19 %
Manganese	0.52 %
Silicio	0.11 %
Zolfo	0.03 %
Fosforo	0.03 %

cementata per tre ore a 1000° C. con ossido di carbonio e carbone di legno, lasciata raffreddare lentamente, ricotta per un'ora

(1) Ingrandimento 70 diam.; attacco alla soluzione amilica di acido nitrico.

a 900° C. al bagno di sale, lasciata raffreddare nel forno fino a 720° C., temprata a questa temperatura in acqua a 15°, e, infine, fatta rinvenire a 550°-600° in bagno di piombo.

Senza che occorra ripetere le considerazioni già svolte, basta esaminare le variazioni che la struttura dell'acciaio riprodotto nella figura subisce a mano a mano che si procede dalla regione più carburata (nella quale l'intervallo della segregazione normale della ferrite è stato minimo) verso la regione meno carburata (nella quale l'intervallo stesso è andato gradualmente crescendo), per ritrovare — raccolti qui in un solo fotogramma — tutti i fatti caratteristici che abbiamo analizzati nelle pagine che precedono, ed avere, quindi, una ulteriore conferma delle nostre conclusioni.

Riassumendo le considerazioni svolte:

La formazione del reticolo di ferrite negli acciai ipoeutectici costituisce un fenomeno fondamentalmente diverso da quello della formazione del reticolo di cementite negli acciai ipereutectici: poichè — mentre quest'ultimo consiste appunto nella segregazione della cementite *alla periferia* dei cristalli misti — nel primo la ferrite comincia a separarsi in masse isolate nelle regioni *centrali* dei cristalli misti: e soltanto nell'ulteriore procedere della segregazione lo sviluppo delle forme cristalline allungate, caratteristiche della ferrite α, reso a mano a mano più facile dalla graduale diminuzione delle variazioni locali della concentrazione del carbonio nei cristalli misti, dà luogo alla struttura imitante il reticolo; nel quale la formazione e la chiusura dei singoli elementi è dovuta all'azione esercitata sopra le successive porzioni di ferrite α, che a mano a mano si vanno separando, dai germi di cristallizzazione che si sono già formati nella fase immediatamente precedente del processo.

Quest'ultimo effetto dei germi di cristallizzazione della ferrite α è provato direttamente da un grandissimo numero di osservazioni: osservazioni che — del resto — si presentano quotidianamente a chiunque abbia occasione di osservare frequentemente le strutture che si presentano di solito negli acciai ipoeutectici.

Per non dilungarci troppo, vogliamo citare qui, come esempio, due sole di tali osservazioni, scegliendole fra i casi nei quali l'andamento del fenomeno si manifesta con maggiore evidenza.

La figura 8, qui unita, riproduce, coll'ingrandimento di 40 diametri (1), la struttura della regione periferica di un lingotto medio (12 tonn.) di acciaio al carbonio, della seguente composizione:

Carbonio	0.55 %
Manganese	0.58 %
Silicio	0.26 %
Zolfo	0.018 %
Fosforo	0.04 %.

In seguito ad incidenti occorsi agli apparecchi di manovra, il lingotto rimase nel forno di riscaldo — prima della fucinazione — durante circa quattro giorni alla temperatura di circa 1150° C.

Il trattamento termico subito dal metallo era quindi stato tale da dar luogo ad una buona omogeneità della concentrazione del carbonio. Finito il riscaldo, il lingotto non fu sottoposto alla fucinazione, ma fu lasciato raffreddare lentamente sotto le ceneri. Anche questa seconda parte del trattamento fu dunque tale da permettere alla ferrite di segregarsi liberamente.

Ora, se osserviamo la micrografia, vediamo chiaramente che i cristalli di ferrite — in ciascuno dei quali ritroviamo le caratteristiche morfologiche la cui genesi abbiamo già ampiamente analizzata nella Nota precedente — hanno incominciato a formarsi presso la ferrite preesistente nella zona affinata alla periferia della massa di acciaio (agente essa per la prima come germe di cristallizzazione), ed hanno poi continuato a disporsi — nelle fasi successive della segregazione — gli uni accanto agli altri, costituendo nel loro insieme una di quelle catene che abbiamo veduto imitare gli elementi di un reticolo. Nè vi è dubbio che in questo caso non possa trattarsi di una separazione " agli orli dei cristalli misti ": poichè a tale supposizione si oppone il trattamento subìto dal metallo, ed — oltre a ciò — la presenza di grosse masse isolate di ferrite, due delle quali sono riprodotte nella micrografia qui unita.

---

(1) Attacco colla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 %.

Un secondo esempio è quello riprodotto nelle due figure 9 e 10, le quali rappresentano (coll'ingrandimento di 65 diametri) due aspetti diversi della struttura di un lingotto di 7 tonn. di acciaio al nichelio della seguente composizione:

Nichelio	1.98 %
Carbonio	0.43 %
Manganese.	0.42 %
Zolfo	0.007 %
Fosforo	0.021 %
Silicio	0.22 %

sottoposto a un trattamento termico del tutto analogo a quello che abbiamo indicato per l'esempio precedente. Senza che occorrano ulteriori spiegazioni, è evidente che le due ultime micrografie confermano pienamente le nostre conclusioni.

Riteniamo che i dati sperimentali che abbiamo citati provino a sufficienza che la formazione della struttura reticolare negli acciai ipoeutectici non è dovuta ad un processo di cristallizzazione della ferrite alla periferia dei cristalli misti primarî: processo che non potrebbe accordarsi in alcun modo coll'andamento ben noto della formazione dei cristalli misti stessi. La formazione di tale struttura è invece dovuta alla funzione di " germi di cristallizzazione „ esercitata dai primi cristalli di ferrite formatisi, su quelli che vanno a mano a mano formandosi durante l'ulteriore procedere della cristallizzazione. La realtà di tale funzione è provata da un grandissimo numero di osservazioni analoghe alle due che abbiamo citate come esempî.

Torino. R. Politecnico. Aprile 1913.

Considerazioni complementari alla Memoria:

" Sulla previsione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini " di C. Somigliana e F. Vercelli.

Nota di FRANCESCO VERCELLI

I.

Il Prof. C. Somigliana e lo scrivente, nella Memoria: " *Sulla previsione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini* ", hanno dato formole che permettono il calcolo della temperatura in ogni punto interno a una data massa montuosa, noti che siano il gradiente termico a grande profondità sotto il monte e la temperatura superficiale.

Lo spazio S in cui devesi determinare la temperatura u è supposto limitato:

dalla superficie topografica s del monte,
da un piano orizzontale s_0 a livello del mare,
da una superficie cilindrica s_1 avente generatrici verticali;

e si suppone inoltre che:

sopra s siano conosciuti i valori della temperatura u;
" s_0 " " " del gradiente termico;
" s_1 " nulli i valori della derivata normale di u.

È pure trattato il caso in cui la superficie s_0, invece che a livello del mare, sia scelta a distanza grandissima; e allora si suppone noto il gradiente limite a quella profondità.

La temperatura u sulla superficie esterna è un dato di osservazione; il gradiente termico sul piano s_0 è pure noto con approssimazione e può essere anche determinato con maggiore esattezza mediante scavi sino a una profondità sufficiente; e l'ipotesi che la derivata normale della funzione u sia nulla in ogni punto della superficie cilindrica s_1, è pure verificata

quando il contorno della superficie topografica s sia costituito da linee di valle o di cresta. È noto infatti che le isoterme di un monte presentano valli e creste che corrispondono all'incirca alle grandi valli e alle maggiori creste della montagna stessa: un cilindro verticale, che abbia come direttrici tali linee, soddisfa assai prossimamente alla condizione che le normali ad esso siano in pari tempo tangenti alle superficie isoterme e quindi sia nullo il gradiente termico normale.

Nella Memoria citata è trattato il caso in cui la s si proietti sul piano orizzontale s_0 in una figura assimilabile ad un rettangolo, di guisa che il cilindro s_1 abbia sezioni orizzontali rettangolari.

Non sarà privo di interesse generalizzare i risultati ottenuti, studiando il problema stesso nell'ipotesi che il cilindro s_1 abbia sezione diversa dalla rettangolare: di guisa che, nelle applicazioni pratiche, si possano, anche in tali casi, rappresentare i contorni effettivi colla maggiore approssimazione.

Qualunque sia il contorno della sezione orizzontale del cilindro s_1 vale la seguente considerazione.

L'equazione di Laplace

$$\Delta_2 u = 0 , \tag{1}$$

quando si supponga u della forma

$$u = \psi(x, y) \, . \cosh kz \tag{2}$$

ovvero

$$u = \psi(x, y) \, . e^{-kz} , \tag{2'}$$

si riduce a

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 \tag{3}$$

ove

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} .$$

La (3) è la equazione stessa che si presenta in numerosi problemi di Fisica-Matematica, quali le vibrazioni delle membrane elastiche, moti dei liquidi in due dimensioni, ecc. Il problema nostro, dunque, si riduce ad essere analogo a questi, e può essere trattato cogli stessi procedimenti.

II. — Cilindro con sezione circolare.

Torna utile in questo caso fare uso delle coordinate cilindriche r, φ, z.

L'equazione di Laplace assume allora la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0\,;$$

e questa con una delle sostituzioni (2), (2′) diventa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2\psi = 0. \tag{4}$$

Se poniamo

$$\psi = F(r)\,.\cos(n\varphi + \alpha)$$

ove $F(r)$ sia funzione della sola r, e siano α, n costanti qualunque, la (4) si riduce a

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)F(r) = 0. \tag{5}$$

Questa è l'equazione differenziale delle funzioni di Bessel di ordine n ed ha per integrale generale, quando n è intero,

$$F = CJ_n(kr) + DY_n(kr) \tag{6}$$

e quando n non è intero

$$F = CJ_n(kr) + DJ_{-n}(kr) \tag{7}$$

ove C, D sono costanti arbitrarie, e J_n, Y_n funzioni di Bessel di ordine n e rispettivamente di prima e di seconda specie [1], e sono date dagli sviluppi noti:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s\, x^{n+2s}}{2^{n+2s}\,.\,s!\,(n+s)!}$$

---

[1] La funzione Y_n, introdotta da C. Neumann, è da taluni autori chiamata *funzione di Neumann* [Cfr. Gray and Mathews, *A treatise on Bessel functions*, 1895, pag. 14]. Comunemente però è chiamata funzione di Bessel di seconda specie.

$$Y_n(x) = J_n \log x - \left\{ 2^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} + 2^{n-3}\frac{(n-2)!}{1!}\, x^{-n+2} + \dots \right\}$$
$$- \frac{x^n}{2^{n+1}\,.\, n!} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} k_{n,s}\, x^{n+2s}}{2^{n+2s}\,.\, s!\,(n+s)!}$$

ove

$$k_{n,s} = \sum_{1}^{s} \left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(n+s)} \right) - \sum_{1}^{n} \frac{1}{2s} \,.$$

Se la sezione del cilindro è *un cerchio intero*, la funzione u deve soddisfare alle due condizioni:

1° essere periodica rispetto a φ, dovendo riacquistare gli stessi valori quando φ aumenti di un multiplo di 2π;

2° essere finita anche per $r = 0$.

Ne consegue che la costante n dev'essere intera, e che dobbiamo escludere dalla soluzione (6) la Y_n, che per $r = 0$, tende ad infinito come $\log r$.

Concludiamo che le soluzioni della equazione $\Delta_2 u = 0$, nel caso del *cerchio intero*, si riducono alle funzioni

$$u_{n,k} = C J_n(kr)\,.\cos(n\varphi + \alpha)\,.\cosh kz \tag{8}$$

ovvero, nel caso che il piano s_0 sia supposto a distanza infinita,

$$u_{n,k} = C J_n(kr)\,.\cos(n\varphi + \alpha)\,.\, e^{-kz} \tag{9}$$

colle costanti arbitrarie n, k (n intera). Queste formole differiscono dalle analoghe, trovate nel caso di un cilindro a sezione rettangolare, per la sostituzione delle funzioni di Bessel J_n alle funzioni circolari.

Determiniamo ora le costanti in guisa da soddisfare le condizioni al contorno.

Sulla superficie s_1 del cilindro di raggio R, dev'essere

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} = 0$$

cioè per le (8), (9)

$$\frac{\partial J_n(kr)}{\partial r} = 0. \tag{10}$$

È noto che la (10) ammette infinite radici reali [1]: indichiamo con $K_{n,l}$ una qualunque di esse. Nella (10) bisogna porre allora

$$kR = K_{n,l},$$

da cui

$$k = \frac{K_{n,l}}{R}.$$

Dando ad n tutti i valori da 0 ad ∞, e ad l gli infiniti valori che corrispondono a ciascun valore di n, si ottengono le soluzioni generali (vedi Memoria citata, pag. 28)

$$(11) \qquad u = cz + \sum_n \sum_l C_{n,l} J_n \left(\frac{r K_{n,l}}{R}\right) \cos n\varphi \,.\, \cosh \left(\frac{z K_{n,l}}{R}\right)$$

$$(12) \qquad u = cz + \sum_n \sum_l C_{n,l} J_n \left(\frac{r K_{n,l}}{R}\right) \cos n\varphi \,.\, e^{-\frac{z K_{n,l}}{R}}$$

ovvero le stesse formole in cui $\cos n\varphi$ sia sostituito con $\operatorname{sen} n\varphi$.

Questi sviluppi sono tali che soddisfano alle condizioni al contorno: devono inoltre rappresentare su ogni punto della superficie esterna la temperatura ivi direttamente osservata. Siamo dunque condotti a studiare se è possibile rappresentare colle (11), (12) una funzione arbitraria $u = u(r, \varphi, z)$ sulla superficie topografica $z = f(r, \varphi)$.

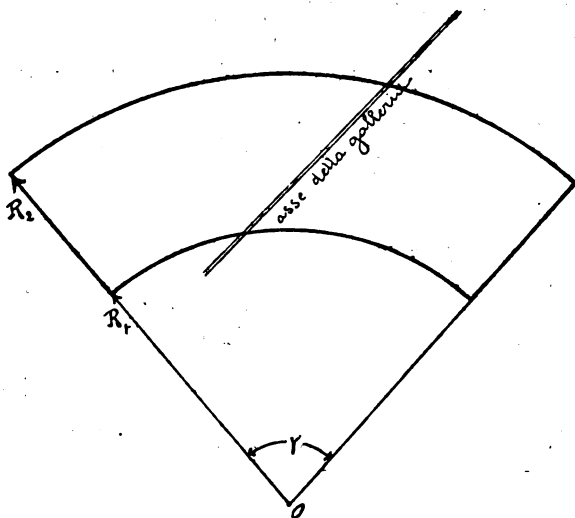
Lo studio della possibilità di una tale rappresentazione, anche nel caso più semplice in cui la superficie esterna fosse ridotta ad un cerchio non è stata ancora dimostrata: ma dal lato fisico tale studio non presenta interesse, poichè praticamente le serie sono sostituite con polinomi, e alla condizione, che essi rappresentino sulla superficie i valori della u osservati, possiamo soddisfare, con sufficiente approssimazione, determinando le costanti $C_{n,l}$ col metodo dei minimi quadrati, come è fatto nella Memoria citata.

---

[1] Cfr. Gray and Mathews, loc. cit., pag. 46. — Nello stesso trattato, a pag. 241, è data la formola per il calcolo delle radici della equazione $J_n'(x) = 0$, formola dovuta a J. Mc Mahon.

III. — Cilindro avente per sezione un settore di corona circolare.

Di notevole importanza è il caso in cui la sezione del cilindro s_1 sia assimilabile ad un settore di corona circolare, limitato da due archi di cerchio aventi raggi R_1, R_2 e da due raggi formanti tra loro un angolo γ.

Quando i raggi R_1, R_2 sono molto grandi e γ invece molto piccolo, si ha al limite un *rettangolo*; se $\gamma = 2\pi$ si ha una *corona circolare*; se $\gamma = 2\pi$ ed $R_1 = 0$ si ha il *cerchio* intero. Il

caso del settore comprende quindi, come casi limiti, quelli finora considerati, e bene si presta a rappresentare con approssimazione contorni che effettivamente possono presentarsi nelle applicazioni.

La costante n delle formole precedenti non è più ora necessariamente intera; in luogo dell'integrale (6) devesi quindi ora adottare la (7).

La condizione che u sia periodica è sostituita dall'altra

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$$

sui raggi del contorno, che supponiamo corrispondano ai valori 0, γ di φ; dev'essere perciò

$$
\text{(13)} \qquad \begin{array}{lll} \text{per } \varphi = 0\,, & \alpha = 0 & \\ \;\;\text{„} \quad \varphi = \gamma\,, & n = \dfrac{\nu\pi}{\gamma} & (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{array}
$$

Le soluzioni del problema saranno date quindi dalle funzioni

$$
\text{(14)} \quad u_{n,l} = \{ A_{n,l}\, J_n (rK_{n,l}) + A_{-n,l}\, J_{-n}(rK_{n,l}) \} \cos n\varphi \,.\, \cosh zK_{n,l}
$$

$$
\text{(15)} \quad u_{n,l} = \{ A_{n,l}\, J_n (rK_{n,l}) + A_{-n,l}\, J_{-n}(rK_{n,l}) \} \cos n\varphi \,.\, e^{-zK_{n,l}}
$$

nelle quali:

n ha il valore dato dalla (13);

$K_{n,l}$ ed il rapporto $A_{n,l} : A_{-n,l}$ si deducono come nel paragrafo precedente, tenendo conto delle condizioni al contorno sui cerchi di raggio R_1 ed R_2.

Se supponiamo γ parte aliquota di π, allora n diventa intero e nelle (14), (15) le J_n, J_{-n} non rappresentano più due funzioni distinte. Allora J_{-n} andrebbe sostituita colla funzione Y_n.

Se poi fosse $\gamma = 2\pi$ il settore si ridurrebbe ad una *corona circolare*; e ancora la soluzione generale sarebbe data dalle (14), (15) in cui però la funzione J_{-n} sia sostituita colla funzione di seconda specie Y_n.

Le formole sinora ottenute contengono funzioni che sono tabulate o che si possono facilmente calcolare numericamente e quindi si prestano alle applicazioni.

IV. — Cilindro con sezione ellittica o limitata da coniche omofocali.

In luogo delle coordinate polari r, φ facciamo uso delle coordinate ellittiche ξ, η nel piano $z = 0$, definite dalle relazioni

$$
\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = e \cosh \eta \cos \xi = e \cos i\eta \cos \xi \\ y = e \,\mathrm{senh}\, \eta \,\mathrm{sen}\, \xi = e\, i \,\mathrm{sen}\, i\eta \,\mathrm{sen}\, \xi \\ \qquad x + iy = e \cos (\xi + i\eta) \end{array} \right.
$$

ove e rappresenta l'eccentricità comune del sistema di ellissi ed iperboli omofocali.

L'equazione $\Delta_2 u = 0$, ove al solito si ponga $u = \varphi(\xi, \eta)\, e^{-kz}$ ovvero $u = \varphi(\xi, \eta) \cosh kz$, diventa

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + k^2 e^2 \operatorname{sen}(\xi + i\eta) \operatorname{sen}(\xi - i\eta)\, \varphi = 0$$

cioè

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + k'^2 (\cosh^2\eta - \cos^2\xi)\, \varphi = 0 \tag{2}$$

ove $k' = ke$.

Se poniamo sia $\varphi = \Xi(\xi) \,.\, \mathrm{H}(\eta)$ la (2) dà origine alle due equazioni differenziali

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\Xi}{d\xi^2} - (k'^2 \cos^2\xi - a)\, \Xi = 0 \\ &\frac{d^2\mathrm{H}}{d\eta^2} + (k'^2 \cosh^2\eta - a)\, \mathrm{H} = 0 \end{aligned} \right. \tag{3}$$

ove a è una costante indeterminata.

Le funzioni Ξ, H definite dalle (3) furono dette da Heine " funzioni del cilindro ellittico ", e di esse si occuparono diversi autori [1].

Nel caso dell'ellisse completa, Ξ deve essere periodica quando ξ venga aumentato di 2π: sotto questo aspetto le (3) vennero studiate, a proposito delle vibrazioni di una lastra ellittica, dal Mathieu [2] che diede le funzioni Ξ, H sviluppate in serie di potenze di $\operatorname{sen}\xi$ e $\cos\xi$.

Siccome però gli sviluppi in serie delle funzioni Ξ, H non si prestano, a differenza delle funzioni di Bessel, ai calcoli numerici che il problema termico esige, non ci interessa studiare di proposito le soluzioni del problema del cilindro ellittico.

---

[1] Vedi F. Pockels, *Ueber die partielle Differentialgleichung* $\Delta_2 u + k^2 u = 0$; Leipzig, 1891, pag. 116.

[2] " Journal de Liouville ", (2) XIII, 1868. — *Cours de Physique mathématique*, 1873.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSI UNITE

Adunanza del 18 Maggio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Camerano, Vice-Presidente, Naccari, Direttore della Classe, Salvadori, D'Ovidio, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Fusari, Balbiano. — È scusata l'assenza dei Soci Parona, Mattirolo, Grassi e Somigliana.

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci Carle e Sforza.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 13 aprile 1913.

Si procede alla designazione del Presidente per compiuto triennio dell' attuale Presidente S. E. Boselli. Il Presidente Boselli viene riconfermato per un altro triennio, salvo l'approvazione sovrana.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Maggio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: RENIER, PIZZI, CHIRONI, RUFFINI, STAMPINI, D'ERCOLE, BRONDI, EINAUDI, BAUDI DI VESME, SCHIAPARELLI e DE SANCTIS Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci CARLE e SFORZA.

È letto ed approvato l' atto verbale dell'adunanza antecedente, 4 maggio 1913.

Il Socio PIZZI presenta con parole d'encomio il volume *L'arabo parlato in Egitto* (2ª edizione, Milano, Hoepli, 1913) del prof. C. A. NALLINO e la memoria dello stesso autore *La scienza astronomica - Sua storia presso gli Arabi nel Medio Evo*, edita, in arabo, nelle " Pubblicazioni dell'Univers. del Cairo „ (a. 1909-10).

In seduta privata si procede alla nomina del Direttore e del Segretario di Classe per compiuto secondo triennio dei Soci MANNO e DE SANCTIS. Riescono eletti, salvo l'approvazione sovrana, a Direttore di Classe il Socio G. CHIRONI e a Segretario il Socio R. RENIER.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Fig. 1.

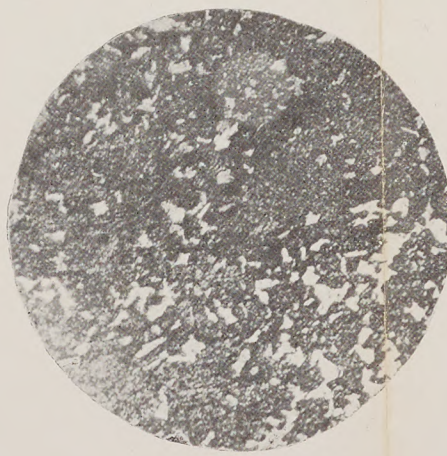



Fig. 2.

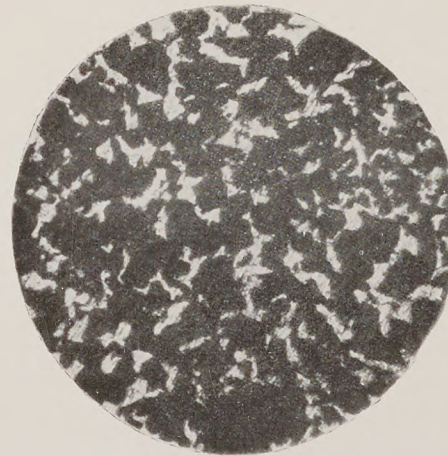



Fig. 3.

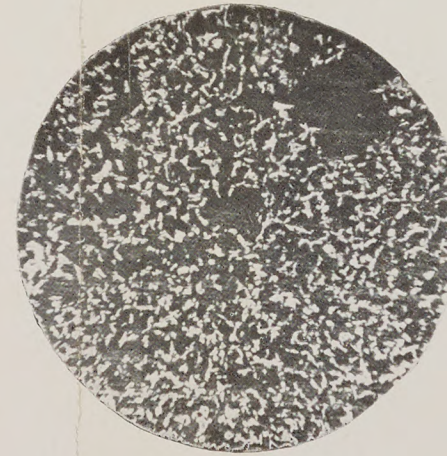



Fig. 4.

Fig. 5.

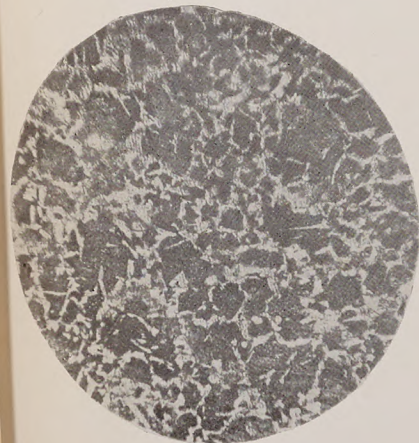



Fig. 6.

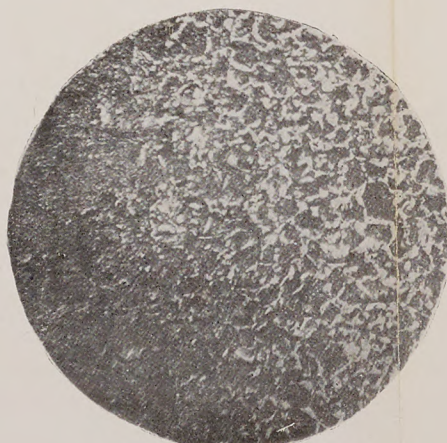



Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

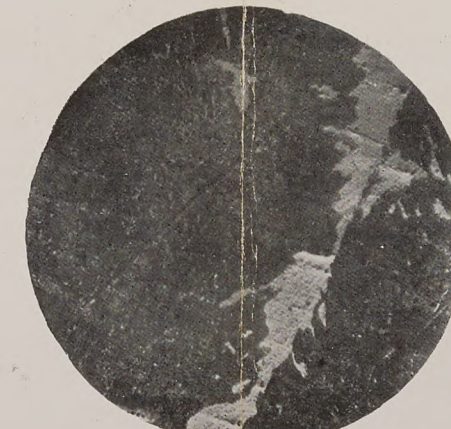



Fig. 10.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Maggio 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe, NACCARI, ed i Soci D'OVIDIO, JADANZA, GUARESCHI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, BALBIANO, e SEGRE, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci GUIDI e SOMIGLIANA.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente saluta, a nome della Classe, il Socio PARONA, ritornato dalla missione scientifica in Tripolitania. Il Socio PARONA ringrazia, e si riserva di comunicare in seguito alcuni risultati di quel suo viaggio.

Il Socio GUARESCHI, per incarico del Socio corrispondente HALLER, offre una medaglia in bronzo, coniata in occasione delle feste giubilari di quell'illustre Chimico. La Classe ringrazia.

Lo stesso Socio GUARESCHI presenta in omaggio due suoi opuscoli: 1° *La storia delle scienze e Domenico Guglielmini*; 2° *Nota sulla storia del movimento Browniano.*

Il Presidente, anche a nome del Socio SALVADORI, offre il vol. 5° della 3ª serie (1911-1913) degli " Annali del Museo Civico di Storia naturale di Genova ".

Vengono presentate per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

G. Colonnetti, *Sulla teoria degli archi*, dal Socio Segre, a nome del Socio Guidi;

F. Chelli, *Prima determinazione della latitudine della Sala Meridiana del nuovo Osservatorio di Torino in Pino Torinese*, dal Socio Jadanza;

G. Charrier e G. Ferreri, *Eterificazione di o-ossiazocomposti*, Nota III, dal Socio Fileti.

Infine il Socio Naccari presenta una Memoria di A. Campetti e C. Del Grosso, *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili*, Parte III: *Studio della fase gassosa*. Si dà incarico di riferire su di essa ai Soci Naccari e Grassi.

LETTURE

Sulla teoria degli archi.

Nota del Dott. Ing. GUSTAVO COLONNETTI.

(Con una Tavola).

Nell'esporre, or non è molto tempo, una forma nuova del principio di reciprocità (1), ho accennato alla possibilità di ridurre, in ogni caso, la ricerca delle caratteristiche della sollecitazione relativa ad una data sezione di un qualunque sistema elastico (ovvero della reazione di un dato suo vincolo) prodotta da una qualsiasi condizione di carico, al problema, quasi sempre più semplice, dell'analisi delle variazioni di configurazione che si produrrebbero nel sistema qualora, praticato idealmente un taglio in corrispondenza di quella sezione (o in adiacenza di quel vincolo), si potesse provocare un conveniente spostamento relativo dell'una faccia del taglio rispetto all'altra, mediante l'applicazione, sulle faccie stesse, di due forze eguali e contrarie.

Mi è sembrato, ora, non privo di interesse il ritornare sull'argomento per rilevare la facilità con cui tali sollecitazioni fittizie possono essere, nei singoli casi speciali, studiate in virtù di una caratteristica proprietà dell'ellisse di elasticità, proprietà che qui mi propongo di mettere in evidenza riferendomi, per fissar le idee, al classico problema dell'arco elastico piano rigidamente incastrato ad entrambi gli estremi.

Siano AB e CD le due sezioni terminali di un tale arco; è noto che se, fissa restando la sezione AB, si immagina appli-

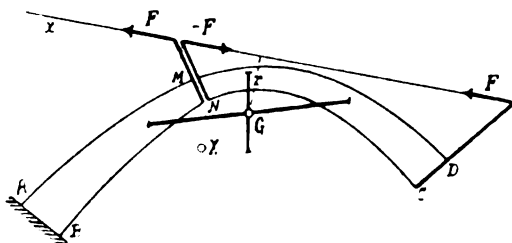
(1) Cfr. la mia Nota: *Sul principio di reciprocità*, " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „, vol. XXI, serie 5ª, 1° sem. 1912, pag. 393. In questa Nota sono incorso in una svista, priva bensì di ogni conseguenza, ma che mi sembra doveroso rettificare, a scanso di equivoci, avvertendo che è da sopprimersi il segno negativo nel secondo membro della formola (I) a pag. 395.

cata all'altra sezione CD, ipoteticamente liberata da ogni vincolo, una forza qualunque F, nella deformazione elastica che ne deriva, la sezione CD subisce una rotazione attorno al punto X, antipolo della linea d'azione x della forza rispetto all'ellisse di elasticità dell'arco, misurata dal prodotto

$$F \, . \, r \, . \, \mathcal{G}$$

della forza data per il momento statico del peso elastico totale $\mathcal{G}$ rispetto all'asse x.

Per altra parte è evidente che si può, senza turbare menomamente lo stato di deformazione elastica del sistema, prati-

care attraverso ad esso un qualsiasi taglio MN purchè alle due faccie del taglio si ritengano applicate due distribuzioni di forze equipollenti alle tensioni interne che ivi esistevano prima del taglio.

Ciò premesso si immagini di imprimere all'intiero tronco $MNCD$ dell'arco dato (tronco libero ormai da ogni legame), un moto rigido di rotazione attorno al punto X misurato da

$$- F \, . \, r \, . \, \mathcal{G}$$

cioè eguale ed opposto a quello che, durante la deformazione, aveva subìto la sezione terminale CD. Questo moto, mentre (per la caratteristica sua piccolezza) non altera le primitive condizioni di equilibrio elastico degli elementi deformati dell'arco, riporta ovviamente la sezione terminale CD nella sua posizione primitiva (cioè anteriore alla deformazione). Ne segue che la nuova configurazione che il sistema viene così ad assumere non

può differire da quella che esso avrebbe assunta spontaneamente qualora, mantenendosi l'arco rigidamente incastrato ad entrambi gli etremi, si fossero idealmente applicate alle due faccie del taglio praticato lungo la sezione MN le due sollecitazioni, eguali ed opposte,

$$F \quad \text{e} \quad -F.$$

Il punto X viene allora ad assumere la funzione di centro di rotazione nel moto *relativo* dell'una faccia del taglio rispetto all'altra, la grandezza della rotazione *relativa* restando quella espressa dal prodotto sopra indicato. Le note proprietà dell'ellisse di elasticità, le quali si riferiscono agli spostamenti prodotti nella sezione terminale da una forza qualunque, possono venire immediatamente estese, senza restrizione, agli spostamenti *relativi* delle due faccie di un taglio, comunque praticato nell'arco, supposte sollecitate da due forze eguali e contrarie.

È ovvia la importanza della estensione a cui si accenna nello studio dei diagrammi di influenza delle varie caratteristiche del sistema di tensioni interne relative ad una sezione generica dell'arco, ove questi si vogliano considerare come deformate dell'arco stesso idealmente tagliato in corrispondenza di quella sezione.

Nella tavola che accompagna la presente Nota si è eseguita, a titolo di esempio, la ricerca della linea d'influenza del momento flettente prodotto in una certa sezione di un noto arco (2) da carichi verticali direttamente applicati sul suo asse geometrico.

La generalità delle considerazioni che precedono ci sconsiglia dal soffermarci qui troppo a lungo sulle particolarità, del resto non nuove, delle operazioni grafiche adottate.

---

(2) Si tratta della grande arcata del ponte *Antoinette* (splendida costruzione in muratura di pietra eseguita in Francia nel 1884 per la linea ferroviaria Montauban-Castres) che fu già esaurientemente trattata dal professore C. Guidi nella classica sua Memoria su *L'arco elastico senza cerniere*, " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino ", 1903. Cfr. anche le *Lezioni sulla Scienza delle costruzioni* dello stesso Autore, parte IV, cap. XI.

Basterà accennare che, assunta per linea d'azione, comune, delle due forze da applicarsi alle due faccie del taglio supposto praticato lungo la sezione generica *MN*, l'antipolare, rispetto all'ellisse di elasticità dell'intiero arco, del baricentro O della sezione stessa, e determinata la grandezza, pure comune, delle stesse forze per modo che risulti soddisfatta la condizione

$$F \cdot r \cdot \mathcal{G} = 1$$

si è costruito un primo poligono funicolare (di distanza polare λ) collegante i pesi elastici dei singoli tronchi elementari che compongono l'arco applicati ai rispettivi baricentri nella direzione delle forze suddette; da esso si sono dedotti i momenti statici degli stessi pesi elastici rispetto alla linea d'azione delle stesse forze.

Questi momenti statici, considerati come nuove forze applicate verticalmente agli antipoli della detta linea d'azione rispetto alle singole ellissi parziali di elasticità, vennero poi collegati mediante un secondo poligono funicolare (di distanza polare μ) così disposto da fornire colla sua ordinata generica (cioè situata sulla verticale di un qualsiasi punto dell'asse geometrico dell'arco) la misura del momento centrifugo, preso rispetto alla stessa verticale ed alla suddetta linea d'azione, del sistema di pesi elastici relativo alla porzione di arco che è compresa fra il punto che si considera e l'incastro a cui esso punto è connesso.

Per rappresentare lo spostamento verticale che, per effetto della sollecitazione ideale prescelta, e denotata in figura, subirebbe il punto generico considerato, una tale ordinata dovrà allora venir moltiplicata per

$$295 \frac{\lambda \cdot \mu}{\mathcal{G} \cdot r} = 295 \frac{328 \cdot 328}{825 \cdot 352} = 109 \sim$$

1 : 295 essendo la scala in cui trovasi in disegno riprodotta l'arcata (3).

---

(3) Più rapidamente può ottenersi lo stesso risultato osservando che il

Ciò equivale a dire che, nell'interpretare la deformata così ottenuta come linea d'influenza del cercato momento flettente, quella ordinata generica dovrà venir letta assumendo

$$1 \text{ cm.} = 109 \text{ cm.} \times \text{unità di forza}$$

Con metodi, se non identici dal punto di vista dell'esecuzione, certo perfettamente analoghi sotto l'aspetto del loro concetto informatore, si potrebbero, studiando le altre caratteristiche del sistema delle tensioni interne, trovare altri risultati non meno degni di attenzione.

In particolare è notevole il fatto che, ove la sezione considerata venisse a coincidere con una delle due sezioni terminali, assumendo come centro di riduzione delle forze il baricentro elastico G, e come assi coordinati i soliti due diametri coniugati dell'ellisse di elasticità, si ritroverebbero per questa via, affatto immutate, tutte le costruzioni grafiche note, quali trovansi esposte, ad es., nelle opere già citate del Prof. Guidi.

Genova, Maggio 1913.

---

diagramma da noi costruito è affine a quello degli spostamenti testè definiti, con rapporto di affinità

$$\frac{\overline{P'P''}}{\mu}$$

di guisa che, essendo la scala del disegno di 1 : 295, quegli spostamenti risultano rappresentati nella scala

$$\frac{1}{295} \cdot \frac{\overline{P'P''}}{\mu} = \frac{1}{295} \cdot \frac{890}{328} = \frac{1}{109} \sim .$$

Eterificazione di o-ossiazocomposti.

Nota III[a] dei Dottori G. CHARRIER e G. FERRERI

Nella presente nota descriviamo nitrati di eteri di arilazoβnaftoli, dei quali alcuni erano stati descritti in una precedente Memoria (1). Essi si preparano aggiungendo una soluzione eterea di acido nitrico (2) in piccolo eccesso alle soluzioni eteree degli eteri, e formano in generale sostanze ben cristallizzate, contenenti due molecole di acido nitrico (3), quasi insolubili nell'etere in presenza di acido nitrico, facilmente ottenibili allo stato puro. Sono in generale molto solubili nell'alcool decomponendosi in parte, discretamente solubili nel cloroformio, poco nell'etere, nel benzolo e nella ligroina. Per la maggior parte cristallizzano bene dal cloroformio, alcuni si possono cristallizzare anche dal benzolo. Si sciolgono inalterati nell'acido nitrico diluito, mentre sono decomposti dall'acqua lentamente in acido nitrico e nell'etere da cui derivano.

Stabili all'aria, si possono conservare anche per lungo tempo: talora però danno luogo a decomposizioni spontanee, quale quella che fu osservata nel caso del nitrato dell'etere etilico del fenilazoβnaftol.

---

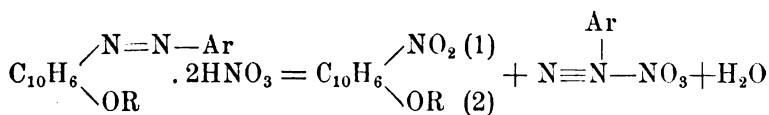
(1) G. Charrier e G. Ferreri, *Sul meccanismo di formazione e di scissione degli ossiazocomposti*, G. *43* (1913).

(2) Questa soluzione si può preparare facilmente aggiungendo ad etere ben raffreddato in ghiaccio circa il 20 % di acido nitrico (D = 1,48).

(3) Rimane dunque stabilito che gli eteri degli arilazoβnaftoli funzionano generalmente da basi biacide, combinandosi con due molecole di acido cloridrico o di acido nitrico per formare rispettivamente i cloridrati e i nitrati.

I cloridrati, descritti nella Nota I[a] (" Atti ", vol. XLVII, 811 [1911-12]) come monocloridrati, vennero ottenuti lasciando a sè per qualche tempo i bicloridrati nel vuoto. È dubbio se in queste condizioni si elimini una molecola di acido cloridrico, formandosi dei monocloridrati o se invece si decomponga completamente una parte del bicloridrato, dimodochè la miscela dia all'analisi numeri corrispondenti a un monocloridrato.

Generalmente hanno una stabilità molto maggiore dei cloridrati, non perdono acido nitrico all'aria od anche nel vuoto (mentre i cloridrati in queste condizioni perdono facilmente acido cloridrico) e sono finora i soli sali di ossiazocomposti, di cui si sia potuto eseguire l'analisi elementare, nonchè la determinazione del peso molecolare. I nitrati degli eteri degli arilazoβnaftoli, a differenza dei cloridrati (1), presentano un punto di fusione ben determinato: la sostanza fusa però per raffreddamento non ridà il nitrato, ma si mostra invece costituita dalla miscela equimolecolare di due altre sostanze, l'etere dell'1-nitro-2naftol e il nitrato dell'arildiazonio, corpi che si formarono secondo l'equazione seguente:

$$C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N{-}Ar \\ OR \end{cases} .2HNO_3 = C_{10}H_6\begin{cases} NO_2\ (1) \\ OR\ \ (2) \end{cases} + \overset{\displaystyle Ar}{\overset{|}{N{\equiv}N}}{-}NO_3 + H_2O$$

Se si porta la temperatura al disopra del punto di fusione, o si riscalda rapidamente il nitrato in quantità rilevante sino al punto di fusione, allora si nota una decomposizione violenta (non però detonazione) accompagnata da vivissimo svolgimento gassoso, e l'unico prodotto che si riesce ancora ad isolare si è l'etere del nitronaftol.

Per interpretare la scissione, che i nitrati degli eteri degli arilazoβnaftoli presentano per azione del calore, scissione che venne riconosciuta come generale in tutti i numerosi casi finora esaminati, si deve ammettere che uno dei due residui dell'acido nitrico sia legato all'atomo di azoto, a cui aderisce il radicale aromatico, poichè si elimina appunto legato a questo atomo di azoto sotto forma di nitrato di diazonio: sono possibili in questo caso per i nitrati le tre formole generali seguenti, delle quali

---

(1) I cloridrati degli eteri degli arilazoβnaftoli per azione del calore non si fondono, ma si scindono invece (Nota IIª, "Atti", vol. 48, 539 [1912-13]) nell'arilazoβnaftol da cui derivano, nel cloruro alchilico corrispondente al radicale alcoolico, che contengono, e in acido cloridrico; il cloruro alchilico e l'acido cloridrico si sviluppano, e rimane l'arilazoβnaftol, che fonde poi, continuando il riscaldamento, alla temperatura propria al suo punto di fusione.

la I. e II. contengono l'anello aromatico, la III. contiene invece l'anello chinonico:

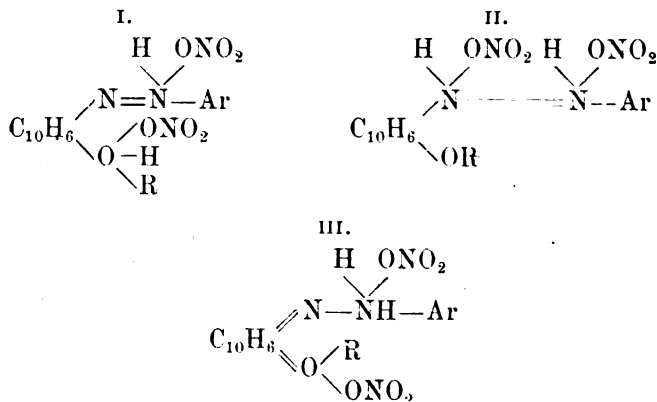
I.

$$\begin{array}{l} \qquad\quad H \;\; ONO_2 \\ \qquad\quad\;\; \diagdown\diagup \\ \quad\;\diagup N{=}N{-}Ar \\ C_{10}H_6 \qquad \diagup ONO_2 \\ \quad\;\diagdown O{-}H \\ \qquad\;\; \diagdown R \end{array}$$

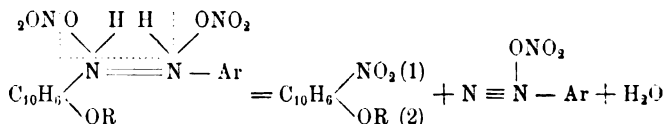
II.

$$\begin{array}{l} \quad H \;\; ONO_2 \;\; H \;\; ONO_2 \\ \quad\;\; \diagdown\diagup \qquad\;\; \diagdown\diagup \\ \;\;\diagup N \;\cdots\cdots = N{-}{-}Ar \\ C_{10}H_6 \\ \;\;\diagdown OR \end{array}$$

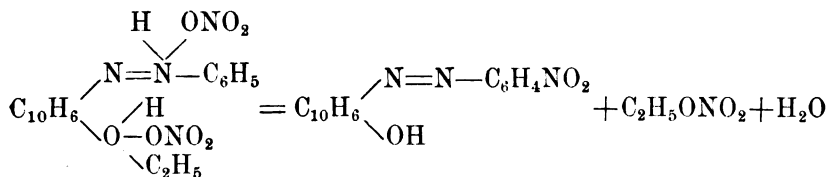
III.

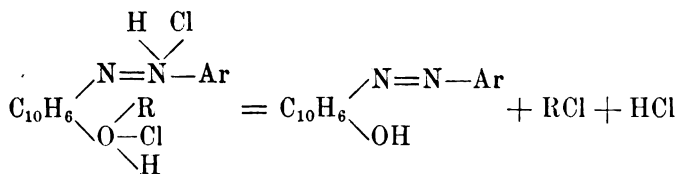
$$\begin{array}{l} \qquad\quad H \;\; ONO_2 \\ \qquad\quad\;\; \diagdown\diagup \\ \quad\;\diagup\!\!\diagup N{-}NH{-}Ar \\ C_{10}H_6 \\ \quad\;\diagdown\!\!\diagdown O \diagup R \\ \qquad\qquad \diagdown ONO_2 \end{array}$$

Per quanto riguarda la presenza di un nucleo aromatico o chinonico nei nitrati, facciamo osservare, che gli eteri degli arilazoβnaftoli, come è stato da noi dimostrato, hanno certamente struttura di veri azocomposti, analogamente d'altronde a quanto si ammette generalmente per gli altri eteri di ossiazocomposti: inoltre, nella scissione dei nitrati si forma l'etere di un nitronaftol, che contiene evidentemente il nucleo aromatico: ammettere che i nitrati debbano possedere la struttura chinonica, mentre i corpi da cui derivano e quelli che da essi provengono contengono indubbiamente il nucleo aromatico, ci pare non necessario, tanto più quando la scissione dei nitrati si spiega benissimo ammettendo per essi la forma di veri azocomposti. Messa da parte per queste considerazioni la formola III. a struttura chinonica, rimangono in discussione le formole I. e II. (1). di

(1) Anche colla formola II. la scissione dei nitrati si spiega in modo soddisfacente:

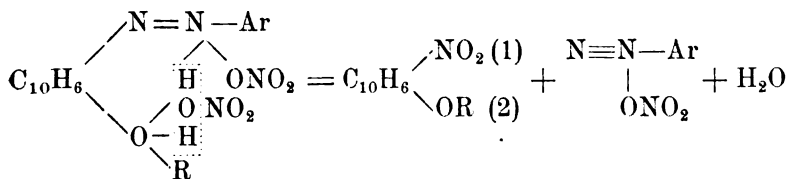
$$\begin{array}{l} \quad {}_2ON\,O \;\; H \; H \;\; ONO_2 \\ \qquad \diagdown\diagup \quad \diagdown\diagup \\ \;\;\diagup N =\!= N - Ar \\ C_{10}H_6 \\ \;\;\diagdown OR \end{array} = C_{10}H_6\begin{array}{l}\diagup NO_2\,(1) \\ \\ \diagdown OR\;(2)\end{array} + N \equiv \overset{\displaystyle ONO_2}{\overset{|}{N}} - Ar + H_2O$$

Ma con questa formola, oltrechè doversi ammettere l'esistenza di due atomi di azoto pentavalenti legati in modo finora poco comune, non si può tener conto dell'analogia esistente tra cloridrati e nitrati.

cui la I. ci pare la più probabile e per l'analogia di costituzione che deve esistere tra i nitrati e i cloridrati, i quali ultimi contengono l'atomo di cloro legato all'atomo di ossigeno dell'ossidrile naftolico (1) e per la decomposizione spontanea osservata in un caso e che si potrà probabilmente confermare in altri, nel caso cioè del nitrato dell'etere etilico del fenilazoβnaftol, il quale lasciato a sè si decompose in etere etilico del nitronaftol e in nitrato di fenildiazonio, ma diede altresì origine a nitrofenilazoβnaftol (2), il quale potè formarsi soltanto in virtù dell'equazione:

$$C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N=\overset{H\ \ ONO_2}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}-C_6H_5 \\ \quad \diagup H \\ O-ONO_2 \\ \quad \diagdown C_2H_5 \end{array}\right. = C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N=N-C_6H_4NO_2 \\ OH \end{array}\right. + C_2H_5ONO_2 + H_2O$$

perfettamente analoga a quella che rappresenta la scissione dei cloridrati:

$$C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N=\overset{H\ \ Cl}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}-Ar \\ \quad \diagup R \\ O-Cl \\ \quad \diagdown H \end{array}\right. = C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N=N-Ar \\ OH \end{array}\right. + RCl + HCl$$

Colla formola I., che considera i nitrati analogamente ai cloridrati come sali di ammonio e di ossonio sostituiti, la scissione di questi composti si può rappresentare molto semplicemente così:

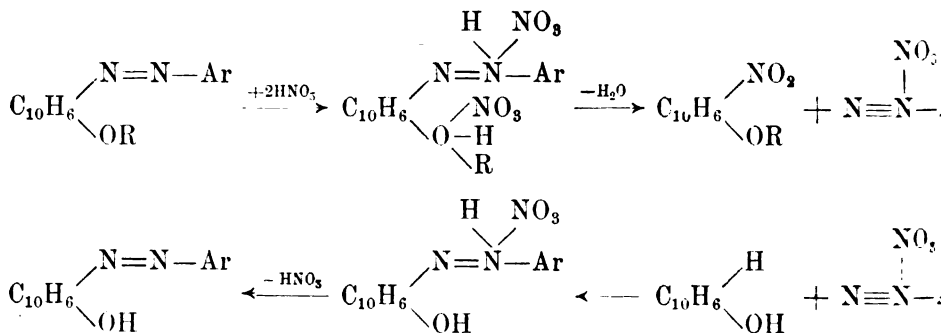
$$C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N=\underset{\diagup\ \ \diagdown}{N}-Ar \\ \quad\ \ H\ \ \ ONO_2 \\ \quad\ \diagup O\,NO_2 \\ O-H \\ \quad \diagdown R \end{array}\right. = C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} NO_2\ (1) \\ OR\ \ (2) \end{array}\right. + \begin{array}{c} N\equiv N-Ar \\ | \\ ONO_2 \end{array} + H_2O$$

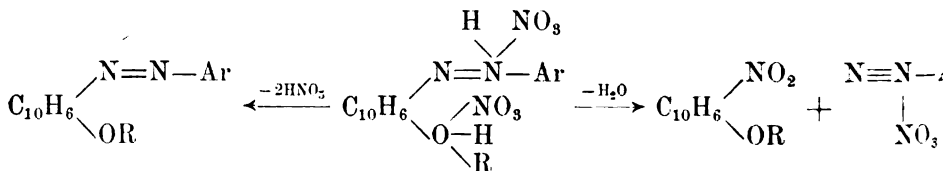
---

(1) Vedi Nota II[a], loc. cit.

(2) *Sul meccanismo di formazione e di scissione degli ossiazocomposti*, G. *43* (1913).

I nitrati degli eteri degli arilazoβnaftoli sono finora gli unici rappresentanti conosciuti di composti che stanno tra gli ossiazocomposti da una parte e i sali di diazonio e fenoli dall'altra, composti intermedii la cui esistenza e il modo di decomposizione valgono a confermare sperimentalmente la formola di Blomstrand dei sali di diazonio e a spiegare il meccanismo della copulazione applicando appunto questa formola, che, come è noto, finora non si prestava a interpretare in modo semplice la formazione degli ossiazocomposti e degli amidoazocomposti:

$$C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N{-}Ar\\OR\end{cases} \xrightarrow{+2HNO_3} C_{10}H_6\begin{cases}N{=}\overset{H\ \ NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}{-}Ar\\O\begin{matrix}\diagup NO_3\\-H\\\diagdown R\end{matrix}\end{cases} \xrightarrow{-H_2O} C_{10}H_6\begin{cases}NO_2\\OR\end{cases} + \overset{NO_3}{\overset{|}{N}}{\equiv}N{-}\ldots$$

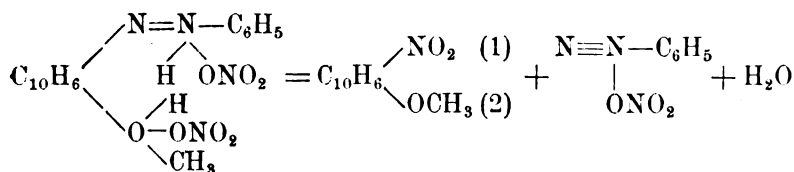
$$C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N{-}Ar\\OH\end{cases} \xleftarrow{-HNO_3} C_{10}H_6\begin{cases}N{=}\overset{H\ \ NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}{-}Ar\\OH\end{cases} \longleftarrow C_{10}H_6\begin{cases}H\\OH\end{cases} + \overset{NO_3}{\overset{|}{N}}{\equiv}N{-}\ldots$$

L'aggruppamento molecolare che in essi esiste è poco stabile, ma ha grande tendenza a trasformarsi da un lato in quello degli ossiazocomposti, dall'altro a scindersi in nitrato di diazonio ed etere del nitronaftol:

$$C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N{-}Ar\\OR\end{cases} \xleftarrow{-2HNO_3} C_{10}H_6\begin{cases}N{=}\overset{H\ \ NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}{-}Ar\\O\begin{matrix}\diagup NO_3\\-H\\\diagdown R\end{matrix}\end{cases} \xrightarrow{-H_2O} C_{10}H_6\begin{cases}NO_2\\OR\end{cases} + \underset{NO_3}{\underset{|}{N}}{\equiv}N{-}\ldots$$

Etere metilico del fenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N{-}C_6H_5 & (1)\\OCH_3 & (2)\end{cases}$

Nitrato $C_{17}H_{14}N_2O.2HNO_3$. Questo composto dell'etere metilico del fenilazoβnaftol con acido nitrico si ottiene facilmente, come venne già in altro luogo descritto (1), per azione di una

(1) G. Charrier e G. Ferreri, *Sul meccanismo di formazione e di scissione degli ossiazocomposti*, G. *43* (1913).

soluzione eterea di acido nitrico sulla soluzione dell'etere metilico del fenilazoβnaftol in etere e forma grandi aghi setacei di color rosso, con riflessi dorati, fusibili a 67° e che si decompongono tumultuosamente con vivo sviluppo gassoso a 69-70°.

I numeri ottenuti dalle analisi e la determinazione di peso molecolare eseguita col metodo ebulliscopico, solvente il cloroformio, concordano colla formola soprascritta (1). Il nitrato dell'etere metilico del fenilazoβnaftol è solubile con parziale decomposizione in alcool, si scioglie poco nell'etere e nel benzolo ed è insolubile nella ligroina: dal cloroformio nel quale è relativamente abbastanza solubile a caldo, si separa cristallizzato in fogliette dorate. Per azione dell'acqua si scinde in acido nitrico ed in etere etilico del fenilazoβnaftol. Per azione del calore, sottoposto a cauto riscaldamento, o in altre condizioni già descritte (2) e anche spontaneamente si scinde in etere metilico dell'1-nitro-2naftol e nitrato di fenildiazonio secondo l'equazione

$$C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} N{=}N{-}C_6H_5 \\ \quad H \quad ONO_2 \\ \quad H \\ O{-}ONO_2 \\ \quad CH_3\end{array}\right. = C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l} NO_2\ (1)\\ OCH_3\ (2)\end{array}\right. + \begin{array}{c} N{\equiv}N{-}C_6H_5 \\ | \\ ONO_2\end{array} + H_2O$$

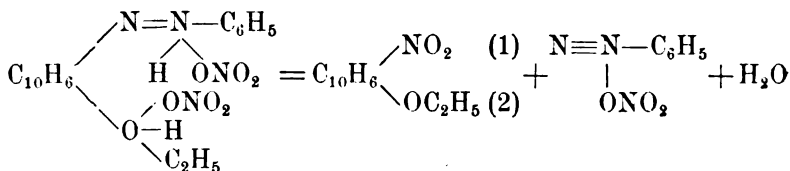
Etere etilico del fenilazoβnaftol $C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{ll} N{=}N{-}C_6H_5 & (1) \\ OC_2H_5 & (2)\end{array}\right.$

Nitrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HNO_3$. Ottenuto in modo analogo al nitrato dell'etere metilico, forma aggregati di grandi tavole prismatiche quadrangolari di color verde cantaride per riflessione e rosso-rubino per trasparenza, fusibili con decomposizione accompagnata da vivissimo svolgimento gassoso a 80-81°. È poco solubile in etere, più solubile in alcool con parziale dissociazione, solubile in cloroformio, dal quale solvente può cristallizzare in forma di minute fogliette di lucentezza metallica, quasi insolubile in benzolo e ligroina. Stabile per lungo tempo all'aria, coll'acqua il nitrato si idrolizza lentamente in etere etilico del

(1) Vedi loc. cit.
(2) Vedi loc. cit.

fenilazoβnaftol e acido nitrico; deve perciò venir considerato come un vero sale dell'acido nitrico e dell'etere etilico del fenil-azoβnaftol.

Il nitrato dell'etere etilico del fenilazoβnaftol per azione del calore specialmente, ma anche in altre condizioni e talora spontaneamente, come già è stato altrove descritto (1), ha grande tendenza a scindersi secondo lo schema:

$$C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N{-}C_6H_5 \\ \quad H \quad ONO_2 \\ \quad ONO_2 \\ O{-}H \\ \quad C_2H_5 \end{cases} = C_{10}H_6\begin{cases} NO_2 \; (1) \\ OC_2H_5 \; (2) \end{cases} + \begin{matrix} N{\equiv}N{-}C_6H_5 \\ | \\ ONO_2 \end{matrix} + H_2O$$

Etere metilico dell'o-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N(1)C_6H_4(2)CH_3 \\ OCH_3 \end{cases}$

Cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HCl$: si ottiene per azione di una soluzione eterea di acido cloridrico sulla soluzione dell'etere metilico in etere anidro e forma fini aghi verdi con riflesso metallico. Per azione del calore si scinde in acido cloridrico, cloruro di metile e o-tolilazoβnaftol fusibile a 132°. L'acqua lo decompone istantaneamente e completamente in etere metilico dell'o-tolilazoβnaftol e acido cloridrico.

Nitrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HNO_3$: si separa in grandi cristalli aghiformi di color verde cantaride splendente, fusibili a 71° con viva decomposizione, aggiungendo ad una soluzione eterea dell'etere metilico acido nitrico sciolto in etere assoluto.

Gr. 0,1063 di sostanza diedero cc. 13,5 di azoto ($H_0 = 725,128$ $t = 18°$), ossia gr. 0,014980.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O.2HNO_3$
Azoto	14,08	13,93

Poco solubile in etere in presenza di acido nitrico, si scioglie invece molto nell'etere puro e nell'alcool: è poco solubile in

(1) G. Charrier e G. Ferreri, *Sul meccanismo di formazione e di scissione degli ossiazocomposti*, G. *43* (1913).

ligroina e benzolo, si scioglie invece discretamente in cloroformio.

Scaldato cautamente e in piccola quantità si scinde in etere metilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 128° e in nitrato di o-tolildiazonio, che copulato con βnaftol diede dell'o-tolilazoβnaftol, fusibile a 132°.

È idrolizzato facilmente dall'acqua in acido nitrico e in etere metilico dell'o-tolilazoβnaftol, fusibile a 58°.

Etere etilico dell'o-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6 \langle {N=N(1)C_6H_4(2)CH_3 \atop OC_2H_5}$

Nitrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$: si separa in cristalli costituiti da fogliette splendenti di color verde cantaride, fusibili con decomposizione a 62°-63°, aggiungendo acido nitrico sciolto in etere ad una soluzione eterea di etere etilico dell'o-tolilazo-βnaftol.

Gr.0,1150 di sostanza diedero cc. 13,6 di azoto ($H_0 = 734,221$ $t = 17°$), ossia gr. 0,015347.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$
Azoto	13,34	13,46

Solubile abbastanza in alcool e cloroformio, è meno solubile nell'etere in presenza di acido nitrico, nel benzolo e nella ligroina. Scaldato cautamente fornisce etere etilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 104-105° e nitrato di o-tolildiazonio, che copulato con βnaftol diede o-tolilazoβnaftol, fusibile a 132°.

Coll'acqua si idrolizza facilmente in acido nitrico e in etere etilico dell'o-tolilazoβnaftol, fusibile a 36°.

Etere metilico del m-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6 \langle {N=N(1)C_6H_4(3)CH_3 \atop OCH_3}$

Nitrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HNO_3$: ottenuto per azione della soluzione eterea di acido nitrico al 20 % sulla soluzione eterea dell'etere metilico, forma fogliette splendenti, di color verde cantaride, fusibili con decomposizione a 72°. Verso 74°-75° la decomposizione è accompagnata da vivo sviluppo gassoso.

Gr. 0,1875 di sostanza diedero cc. 22,5 di azoto ($H_0 = 732,221$ $t = 17°$), ossia gr. 0,025320.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O.2HNO_3$
Azoto	13,50	13,93

Molto solubile in alcool e cloroformio, si scioglie meno in etere e benzolo, pochissimo in ligroina.

Scaldato con precauzione verso il punto di fusione si scinde in etere metilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 128°, e in nitrato di m-tolildiazonio, che copulato con βnaftol, fornisce il m-tolilazoβnaftol, fusibile a 141°. Dall'acqua viene scisso in acido nitrico e in etere metilico del m-tolilazoβnaftol, fusibile a 81°.

Etere etilico del m-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle {N=N(1)C_6H_4(3)CH_3 \atop OC_2H_5}$

Nitrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$: è costituito da fogliette ben sviluppate di color verde cantaride, fusibili a 84° con decomposizione, che si ottengono per azione dell'acido nitrico sciolto in etere su una soluzione eterea di etere etilico del m-tolilazo-βnaftol.

Gr. 0,1945 di sostanza fornirono cc. 23 di azoto ($H_0 = 734,221$ $t = 17°$), ossia gr. 0,025955.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$
Azoto	13,34	13,46

Solubile in alcool e in cloroformio, si scioglie poco in etere in presenza di acido nitrico; è quasi insolubile in benzolo e ligroina.

Per azione del calore si scinde in 1-nitro-2naftoletiletere, fusibile a 105° e in nitrato di m-tolildiazonio, che copulato con β-naftol fornisce m-tolilazoβnaftol, fusibile a 141°.

Coll'acqua si idrolizza dando acido nitrico ed etere etilico del m-tolilazoβnaftol, fusibile a 84°.

Etere metilico del p-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N(1)C_6H_4(4)CH_3}_{OCH_3}$

Cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HCl$: cristallizzato in finissimi aghetti rossi con riflesso dorato si separa per aggiunta di acido cloridrico sciolto in etere alla soluzione eterea dell'etere metilico. Scaldato verso 100° si decompone formando acido cloridrico, cloruro di metile e p-tolilazoβnaftol, fusibile a 135°. È decomposto istantaneamente dall'acqua.

Bromidrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HBr$: ottenuto nello stesso modo del cloridrato, è costituito da finissimi aghetti verdi con riflesso metallico.

Nitrato $C_{18}H_{16}N_2O.2HNO_3$: ottenuto aggiungendo soluzione eterea di acido nitrico ad una soluzione dell'etere metilico in etere assoluto, forma aghi ben sviluppati di color rosso cupo con riflesso metallico verde, fusibili a 77° con decomposizione.

Gr. 0,0966 di sostanza fornirono cc. 12,3 di azoto ($H_0 = 730,351$ $t = 19°$), ossia gr. 0,013689.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O.2HNO_3$
Azoto	14,17	13,93

Il nitrato dell'etere metilico del p-tolilazoβnaftol è poco solubile in etere, più solubile in alcool con evidente dissociazione, insolubile in benzolo e ligroina, piuttosto solubile in cloroformio a caldo e cristallizzabile da questo solvente.

Scaldato vicino al suo punto di fusione si scinde facilmente in etere metilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 127°-128° ed in nitrato di p-tolildiazonio, che trattato con βnaftol in soluzione alcalina dà subito l'ossiazocomposto, il p-tolilazoβnaftol fusibile a 135°.

Per azione dell'acqua il nitrato si idrolizza facilmente dando acido nitrico ed etere metilico del p-tolilazoβnaftol, fusibile a 68°.

Etere etilico del p-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N(1)C_6H_4(4)CH_3}_{OC_2H_5}$

Nitrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$. Aggiungendo una soluzione eterea di acido nitrico ad una soluzione in etere del p-tolilazoβnaftol-etiletere si separa subito il nitrato sotto forma di fogliette lucenti, di color rosso granato con riflesso dorato, fusibili a 94° con decomposizione e vivissimo svolgimento gassoso.

Gr. 0,1904 di sostanza diedero cc. 22 di azoto ($H_0 = 732,103$ $t = 16°$), ossia gr. 0,024859.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$
Azoto	13,05	13,46

Abbastanza solubile in alcool e cloroformio, si scioglie meno in etere e in benzolo specialmente in presenza di acido nitrico, è quasi insolubile in ligroina e in etere di petrolio.

Se si scalda il nitrato, immergendo la provetta in cui si trova in acqua bollente, in modo da fonderlo completamente, si ha con grande facilità e con rendimento quantitativo la scissione di esso in etere etilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 105° e in nitrato di p-tolildiazonio, che si può ottenere ben cristallizzato in aghetti bianchi dall'alcool assoluto mediante aggiunta di etere anidro, e che presenta le proprietà caratteristiche dei nitrati di diazonio, sia per l'esplosione violenta causata dal riscaldamento, sia pei prodotti di copulazione ottenuti con βnaftol (p-tolilazoβnaftol P. F. 135°) e con βnaftilamina (p-tolilazoβnaftilamina P. F. 113°).

Il nitrato dell'etere etilico del p-tolilazoβnaftol trattato con acqua dà acido nitrico ed etere etilico del p-tolilazoβnaftol fusibile a 48°.

Etere metilico dell'as-o-xililazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N(4)C_6H_3(1,2)(C}_{OCH_3}$

L'as-o-xililazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N(4)C_6H_3(1,2)(CH_3)_2}_{OH}$, non ancora descritto venne ottenuto per azione del cloruro di as-o-xlilil-diazonio sul βnaftol in soluzione alcalina: cristallizzato dall'alcool

forma lunghi aghi di color rosso ciliegia, con riflesso dorato, fusibili a 146°.

Gr. 0,1364 di sostanza diedero cc. 12 di azoto ($H_0 = 738,925$ $t = 17°$), ossia gr. 0,013629.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O$
Azoto	9,99	10,14

Poco solubile a caldo, pochissimo a freddo nell'alcool, si scioglie di più nell'etere, ed è solubilissimo nel cloroformio e nel benzolo. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con intensa colorazione rossa.

L'etere metilico cristallizza dall'alcool in forma di fogliette prismatiche ben sviluppate, di color rosso mattone, fusibili a 106°.

Gr. 0,1200 di sostanza diedero cc. 10 di azoto ($H_0 = 736,925$ $t = 16°$) ossia gr. 0,011374.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O$
Azoto	9,47	9,65

Si scioglie abbondantemente nella maggior parte dei solventi organici comunemente impiegati in laboratorio: impartisce all'acido solforico concentrato, sciogliendovisi, una intensa colorazione rossa.

Negli acidi diluiti è piuttosto solubile anche a freddo. Scaldato con acidi diluiti si saponifica facilmente, fornendo as-o-xilil-azoβnaftol, fusibile a 146°.

Il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HCl$ si separa dalla soluzione eterea dell'etere per aggiunta di acido cloridrico in forma di fini aghi rossi con riflesso dorato.

Il bromidrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HBr$ è costituito da finissimi aghi di color rosso granato.

Il nitrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$ è costituito da fini scagliette lucenti, di color caffè con riflessi dorati, che fondono a 87°-88° con decomposizione.

Gr. 0,1008 di sostanza diedero cc. 12 di azoto ($H_0 = 733,103$ $t = 18^{\circ}$), ossia gr. 0,013463.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$
Azoto	13,35	13,46

Poco solubile in etere, in benzolo e in ligroina, si scioglie invece molto nell'alcool e nel cloroformio.

Scaldato cautamente a temperatura prossima a quella di fusione, si scinde in etere metilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 128° e in nitrato di as-o-xilildiazonio, che, copulato con βnaftol, diede dell'as-o-xililazoβnaftol, fusibile a 146°. Con acqua dà acido nitrico ed etere metilico dell'as-o-xililazoβnaftol, fusibile a 106°.

Etere etilico dell'as-o-xililazoβnaftol $C_{10}H_6 \langle {N=N(4)C_6H_3(1,2)(CH \atop OC_2H_5}$

Cristallizza dall'alcool in fini aghi di color rosso chiaro, con riflesso dorato, fusibili a 94-95°.

Gr. 0,1482 di sostanza diedero cc. 12,5 di azoto ($H_0 = 740,925$ $t = 17^{\circ}$), ossia gr. 0,014236.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{20}N_2O$
Azoto	9,60	9,21

Discretamente solubile in tutti i comuni solventi organici, quali l'alcool, l'etere, il benzolo, il cloroformio e la ligroina, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa. Negli acidi diluiti è pure solubile con colorazione rosso vinosa.

Scaldato all'ebollizione con acidi diluiti si saponifica facilmente, fornendo as-o-xililazoβnaftol, fusibile a 146°.

Il cloridrato $C_{20}H_{20}N_2O.2HCl$ è costituito da una sostanza cristallizzata in finissimi aghetti di color caffè, con riflessi metallici, il bromidrato $C_{20}H_{20}N_2O.2HBr$ è formato da minutissimi aghetti rossi.

Etere metilico dell'as-m-xililazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{N=N(4)C_6H_3(1,3)(CH_3)_2 \atop OCH_3}$

Cristallizza dall'alcool in dense fogliette prismatiche di color rosso granato, con riflesso violaceo, fusibili a 72°-73°.

Gr. 0,1715 di sostanza diedero cc. 15,0 di azoto ($H_0 = 735,288$ $t = 15°$), ossia gr. 0,017088.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O$
Azoto	9,96	9,65

È discretamente solubile in alcool a caldo, meno a freddo, molto solubile in etere, cloroformio e benzolo: si scioglie poco negli acidi diluiti, molto nei concentrati con colorazione rossa.

L'etere metilico dell'as-m-xililazoβnaftol saponificato, per ebollizione con acidi diluiti, fornisce as-m-xililazoβnaftol, fusibile a 163°-164°, ridotto dà as-m-xilidina ed etere metilico dell'1-amido-2naftol.

Il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HCl$ e il bromidrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HBr$ ottenuti in soluzione eterea rispettivamente colle soluzioni eteree di acido cloridrico e di acido bromidrico, formano sostanze cristalline, costituite da aghi finissimi microscopici di color rosso granato.

Il nitrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$ è costituito da grandi aghi lucenti, di color verde cantaride, che si ottengono per azione dell'acido nitrico su una soluzione eterea di etere metilico dell'as-m-xililazoβnaftol.

Fonde a 83° decomponendosi con vivo svolgimento gassoso a 84°.

Gr. 0,1318 di sostanza diedero cc. 15,5 di azoto ($H_0 = 733,221$ $t = 16°$), ossia gr. 0,017541.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$
Azoto	13,30	13,46

Molto solubile in alcool si scioglie meno in etere, ed è insolubile in ligroina. Dal cloroformio, nel quale solvente si scioglie discretamente a freddo e molto a caldo, e dal benzolo, in cui

è solubile solo a caldo, si separa ben cristallizzato. Per riscaldamento moderato verso il punto di fusione si scinde in nitrato di as-m-xilildiazonio, che trattato con βnaftol fornisce as-m-xlililazoβnaftol, fusibile a 163°-164°, ed in etere metilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 128°, e che venne inoltre caratterizzato trasformandolo con acido nitrico (D = 1,40) in etere metilico dell'1-6-dinitro-2naftol, fusibile a 157°-158°.

Gr. 0,2213 di sostanza fornirono gr. 0,4334 di anidride carbonica e gr. 0,0688 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{11}H_8N_2O_5$
Carbonio	53,40	53,22
Idrogeno	3,45	3,22

Il nitrato di as-m-xilildiazonio, ottenuto per azione del calore sul nitrato dell'etere metilico dell'as-m-xililazoβnaftol, venne inoltre copulato con βnaftilamina, ottenendosi così l'as-m-xililazoβnaftilamina, $C_{10}H_6\left\langle\begin{matrix}N{=}N(4)C_6H_3(1,3)(CH_3)_2\\NH_2\end{matrix}\right.$, che cristallizzata dall'alcool forma fogliette splendenti, di color rosso arancio fusibili a 128°.

Gr. 0,1624 di sostanza diedero cc. 21,6 di azoto (H_0 = 733,103 t = 17°), ossia gr. 0,024337.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_3$
Azoto	14,98	15,27

Discretamente solubile in alcool a caldo, poco a freddo, si scioglie molto nell'etere, nel benzolo e nel cloroformio, pochissimo invece nella ligroina. Nell'acido solforico concentrato è molto solubile con colorazione rosso-violetta.

Coll'acqua il nitrato dell'etere metilico dell'as-m-xililazo-βnaftol dà acido nitrico e etere metilico dell'as-m-xililazoβnaftol, fusibile a 72°-73°.

Etere etilico dell'as-m-xililazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N(4)C_6H_3(1,3)(CH_3)_2}_{OC_2H_5}$

Dall'alcool si separa in forma di lunghi aghi di color granato, fusibili a 47°.

Gr. 0,1594 di sostanza diedero cc. 13,3 di azoto (H_0 = 734,288 t = 15°), ossia gr. 0,015131.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{20}N_2O$
Azoto	9,49	9,21

Si scioglie molto in tutti i solventi organici: nell'alcool è molto solubile a caldo, un po' meno a freddo. Si scioglie in acido solforico concentrato e leggermente negli acidi diluiti con colorazione rossa.

Scaldato all'ebollizione cogli acidi diluiti in soluzione idroalcoolica si saponifica facilmente, dando as-m-xililazoβnaftol fusibile a 163°-164°. Per riduzione con polvere di zinco ed acido acetico fornisce as-m-xilidina ed etere etilico dell'1-amido-2naftol, che in soluzione acquosa dà la caratteristica intensa colorazione azzurra con cloruro ferrico.

Il cloridrato $C_{20}H_{20}N_2O.2HCl$ è costituito da finissimi aghetti di color bruno-caffè, il bromidrato $C_{20}H_{20}N_2O.2HBr$ forma fini aghi di color rosso granato.

Il nitrato $C_{20}H_{20}N_2O.2HNO_3$ si ottiene per azione dell'acido nitrico su una soluzione eterea dell'etere etilico dell'as-m-xililazoβnaftol, in forma di aghi finissimi, di color verde cantaride, fusibili con decomposizione a 82°.

Gr. 0,2000 di sostanza diedero cc. 23,0 di azoto (H_0 = 733,221 t = 16°), ossia gr. 0,026029.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{20}N_2O.2HNO_3$
Azoto	13,01	13,02

Solubile in alcool e cloroformio, si scioglie poco in etere e in benzolo, pochissimo in ligroina.

Per azione del calore si scinde in nitrato di as-m-xilildiazonio, che copulato con βnaftol diede dell'as-m-xililazoβnaftol,

fusibile a 163°-164°, ed in etere etilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 104°-105°. È dissociato dall'acqua in acido nitrico ed etere etilico dell'as-m-xililazoβnaftol, fusibile a 47°.

Etere metilico del p-xililazoβnaftol $C_{10}H_6\langle{}^{N=N(2)C_6H_3(1,4)(CH_3)_2}_{OCH_3}$

Cristallizzato dall'alcool forma larghe tavole prismatiche di color rosso granato, fusibili a 91°-92°.

Gr. 0,1869 di sostanza diedero cc. 16,0 di azoto ($H_0 = 735,288$ $t = 16°$), ossia gr. 0,018158.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O$
Azoto	9,71	9.65

È solubile abbondantemente nell'alcool, nell'etere, nel benzolo e nel cloroformio, meno nella ligroina. Negli acidi minerali concentrati si scioglie con intensa colorazione rossa.

L'etere metilico del p-xililazoβnaftol, saponificato da p-xililazoβnaftol, fusibile a 150°, ridotto fornisce p-xilidina ed etere metilico dell'1-amido-2naftol.

Il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HCl$ è costituito da finissimi aghetti di color rosso granato, il bromidrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HBr$ da aghetti di color caffè.

Il nitrato $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$, ottenuto per azione di una soluzione eterea di acido nitrico sull'etere metilico sciolto in etere, forma laminette di color verde cantaride, fusibili a 75° con decomposizione.

Gr. 0,3010 di sostanza diedero cc. 34,8 di azoto ($H_0 = 731,221$ $t = 16°$), ossia gr. 0,039273.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O.2HNO_3$
Azoto	13,04	13,46

Solubile in alcool e cloroformio, si scioglie poco nell'etere, nel benzolo e nella ligroina.

Per azione del calore fornisce 1-nitro-2naftolmetiletere, e

nitrato di p-xilildiazonio, che venne con βnaftol trasformato in p-xililazoβnaftol, fusibile a 150°.

Con acqua dà acido nitrico ed etere metilico del p-xililazoβnaftol, che fonde verso 91°-92°.

Etere etilico del p-xililazoβnaftol $C_{10}H_6\langle {N=N(2)C_6H_3(1,4)(CH_3)_2 \atop OC_2H_5}$

Si separa dall'alcool in aggregati lamellari raggiati, costituiti da laminette di color rosso o in magnifici aghi di color granato, lucenti, fusibili a 61°-62°.

Gr. 0,1411 di sostanza diedero cc. 11,5 di azoto ($H_0 = 727,411$ $t = 16°$), ossia gr. 0,012910.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{20}N_2O$
Azoto	9,14	9,21

Molto solubile in tutti i solventi organici, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa. È pure leggermente solubile negli acidi diluiti.

Scaldato all'ebollizione con acidi diluiti fornisce facilmente per saponificazione p-xililazoβnaftol, fusibile a 150°. Ridotto con acido acetico e polvere di zinco dà p-xilidina, e etere etilico dell'1-amido-2naftol.

Il cloridrato $C_{20}H_{20}N_2O.2HCl$, ottenuto in soluzione eterea con acido cloridrico, è formato da aggregati mammellonari di finissimi aghetti di color rosso rame. Il bromidrato $C_{20}H_{20}N_2O.2HBr$ è costituito da finissimi aghetti di color rosso rame.

Il nitrato $C_{20}H_{20}N_2O.2HNO_3$ si separa in forma di laminette prismatiche, pesanti, di color rosso cupo metallico con riflesso dorato, fusibili a 71° con decomposizione, quando si tratta con soluzione eterea di acido nitrico una soluzione eterea dell'etere etilico.

Gr. 0,2765 di sostanza diedero cc. 31,0 di azoto ($H_0 = 731,221$ $t = 16°$), ossia gr. 0,034985.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{20}N_2O.2HNO_3$
Azoto	12,65	13,02

Presenta gli stessi caratteri di solubilità del nitrato dell'etere metilico. L'azione del calore fornisce etere etilico dell'1-nitro-2naftol, e nitrato di p-xilildiazonio, che diede con βnaftol del p-xililazoβnaftol, fusibile a 150°, ma la reazione è molto difficile da regolare e riesce soltanto con quantità molto piccole di sostanza.

L'acqua lo decompone in acido nitrico ed etere etilico del p-xililazoβnaftol, fusibile a 61°-62°.

Etere metilico dell'α-naftilazoβnaftol $C_{10}H_6\left\langle\begin{matrix}N{=}N(\alpha)C_{10}H_7\\OCH_3\end{matrix}\right.$

Cloridrato $C_{21}H_{16}N_2O.2HCl$: si ottiene aggiungendo acido cloridrico sciolto in etere ad una soluzione in etere assoluto di etere metilico dell'α-naftilazoβnaftol, e forma aghetti bleu-violetti, con riflessi metallici, abbastanza stabili all'aria secca, facilmente decomposti dall'aria umida e dall'acqua. Scaldato verso 100° si decompone in α-naftilazoβnaftol, fusibile a 230°, cloruro di metile e acido cloridrico.

Bromidrato $C_{21}H_{16}N_2O.2HBr$: ottenuto nello stesso modo del cloridrato, colla soluzione eterea di acido bromidrico, forma agh bruno verdastri iridescenti. Per azione del calore si scinde in α-naftilazoβnaftol, bromuro di metile e acido bromidrico. Dall'acqua è facilmente idrolizzato in acido bromidrico e in etere metilico dell'α-naftilazoβnaftol, fusibile a 67°.

Torino, Istituto Chimico della R. Università,
Maggio 1913.

Prima determinazione della latitudine della Sala Meridiana del nuovo Osservatorio di Torino in Pino Torinese.

Nota di FERNANDO CHELLI.

Impiantandosi il nuovo Osservatorio di Torino sulla collina detta Bric dei Francesi o della Torre Rotonda, presso Pino Torinese, il prof. Boccardi, direttore dell'Osservatorio, mi consegnò un teodolite, appartenente all'Osservatorio stesso, perchè potessi con esso determinare l'orientamento dei varii padiglioni. Quando determinai gli assi della sala meridiana, mediante osservazioni dell'azimut assoluto di Superga, pensai che, data la grande necessità di conoscere la latitudine del centro della sala stessa, era utile che cominciassi a determinarne un valore abbastanza approssimato, che poi potesse servire per la determinazione definitiva, che si farà necessariamente con uno strumento di maggiori dimensioni che non quelle del teodolite che avevo a mia disposizione.

Naturalmente ho cercato di ottenere dal teodolite adoperato quanto era possibile di ottenere da un piccolo strumento, e i risultati hanno corrisposto abbastanza al mio desiderio. Confrontando i risultati da me ottenuti con quelli ottenuti da altri, adoperando strumenti simili o maggiori, posso dedurre che era poco possibile ottenere di più.

Prima di entrare nei particolari occorre dire qualcosa sui criterii che mi hanno guidato nel lavoro. Dato il fatto che il teodolite da me usato non ha l'apparecchio di rovesciamento, non era conveniente adoperare il metodo di Struve osservando passaggi di stelle in Primo Verticale: sarebbe stato possibile osservare con gli altri metodi, ma non si sarebbero mai potuti ottenere risultati altrettanto buoni. Non potevo impiegare il metodo di Talcott-Horrebow mancandomi il micrometro a filo mobile e le livelle di Horrebow. Scelsi quindi il metodo dell'osservazione di distanze zenitali circummeridiane, perchè è asso-

lutamente da escludere quello dell'osservazione diretta di distanze zenitali meridiane, specialmente quando si adopera un teodolite e quando si osservano stelle zenitali. Sarebbe stato mio desiderio osservare stelle circumpolari nelle due culminazioni, ma, data la piccolezza dello strumento, questo metodo non mi conveniva, perchè non avrei potuto servirmi che della sola Stella Polare. Resta quindi nella latitudine da me calcolata tutta l'incertezza esistente nelle declinazioni delle stelle osservate.

Dato l'error medio, necessariamente forte, non ho creduto fosse il caso di tener conto della riduzione al polo medio, e d'altronde non ne avrei tenuto conto nemmeno se avessi adoperato un grande strumento, perchè i valori che si hanno attualmente per la suddetta riduzione non possono corrispondere alla verità, non essendo i metodi che si adoperano per tale ricerca quelli veramente adatti a raggiungere lo scopo che si prefiggono. Infatti è noto che le costanti della riduzione delle posizioni delle stelle al luogo apparente, e specialmente la costante dell'aberrazione della luce, necessitano di correzioni, che non siamo ancora in grado di fare con esattezza. Ora è evidente che gli errori esistenti nelle costanti assunte portano ad un errore periodico, che si trasporta sulle variazioni della latitudine, quando questa sia calcolata con metodi che partano dal falso presupposto che le declinazioni delle stelle ci siano note con esattezza, mentre possiamo dirci contenti quando la declinazione di una stella fondamentale ci è nota entro 0″,2. Solo così si può spiegare come determinazioni recenti di latitudine di uno stesso luogo, con errori medii molto piccoli diano risultati che differiscono tanto tra loro; nè di tutta questa differenza si possono accusare gli strumenti o la diversità dei metodi adoperati.

Consegue da quel che si è detto, che in qualunque determinazione di latitudine fatta con uno dei tre metodi ordinariamente usati è inutile scrivere il centesimo e il millesimo di secondo, che sono completamente arbitrarii; basta limitarsi al decimo, sebbene anch'esso sia incertissimo; anzi è desiderabile che, dopo il valore trovato per la latitudine, si indichi sempre da quale catalogo furono dedotte le declinazioni delle stelle e quali costanti di riduzione furono adoperate per la riduzione al luogo apparente; cioè si scriva:

$\varphi = ...$ (Catalogo di.....; costanti di.....).

Solo osservando una circumpolare nelle due culminazioni (naturalmente col metodo delle distanze zenitali circummeridiane e rovesciando lo strumento a metà dell'osservazione) si potranno avere risultati più precisi, purchè però si abbia l'avvertenza di calcolare direttamente, mediante formole differenziali, la variazione della declinazione nelle 12^h che intercedono tra una culminazione e l'altra.

In base ai criteri sopra esposti ho scelto le stelle in modo che potessi osservarle bene col piccolo strumento che volevo adoperare, che fossero distribuite uniformemente a nord e a sud dello zenit, e che avessero posizioni sufficientemente bene determinate. Sono stato quindi obbligato a ricorrere a stelle delle prime grandezze; il dire che queste stelle si osservano male a causa del forte splendore potrà anche essere vero, ma è anche vero che si elimina questa difficoltà intensificando l'illuminazione del campo (con che si diminuisce lo splendore) e, sopratutto, avvezzandosi ad osservarle, quando non si ricorra anche al ripiego di mettere dei diaframmi davanti all'obbiettivo del cannocchiale: sono certo che chi si avvezzasse ad osservare solo stelle delle prime grandezze si troverebbe a disagio quando si trovasse nella necessità di osservare stelle meno brillanti.

Naturalmente ho escluso le stelle che culminano troppo lontane dallo zenit; solo Sirio (tra le stelle osservate) supera, ma di poco, i 60° di distanza zenitale meridiana. Ho diviso le stelle in due gruppi. Il 1° comprende stelle culminanti tra i 30° e i 60° dallo zenit. Esse sono state osservate con oculare diritto, ortoscopico e a forte ingrandimento (circa 48); si tratta di 15 stelle (ma la Polare forma due serie) osservate ad angoli orari presso a poco simmetrici, facendo cinque puntate prima del passaggio pel meridiano e in una posizione del cerchio, e cinque puntate dopo del passaggio pel meridiano, nell'altra posizione del cerchio: ho fatto eccezione per la Polare, che fu osservata nella stessa maniera, ma a $4^h\,^1/_2$ e a $19^h\,^1/_2$ di angolo orario, in media.

Il 2° gruppo comprende stelle culminanti a meno di 30° dallo zenit. Essendo il cannocchiale diritto e centrale, queste stelle sono state dovute osservare coll'oculare spezzato, che naturalmente ha un piccolo ingrandimento, È noto che quanto più ci avviciniamo allo zenit, più forte è la variazione in azimut

nei pressi del meridiano; quindi per evitare che il coefficiente sec$A$ di dz nell'espressione di $d\varphi$ potesse assumere valori troppo diversi da 1, ho limitato l'osservazione di 18 stelle ad una sola puntata prima e una sola puntata dopo del passaggio pel meridiano, con circa 2^m di angolo orario e naturalmente in posizioni opposte del cerchio. Ho osservato quasi esattamente in meridiano (l'angolo orario è stato sempre di pochissimi secondi) due altre stelle, e cioè 50 α Cygni (Deneb) e 46 ξ Andromedae, che culminano una a 4′ a sud e l'altra a 2′ a nord dello zenit; però avendo tenuto sempre conto dell'angolo orario anche queste osservazioni si devono considerare circummeridiane.

Se si fa la somma delle distanze zenitali delle stelle osservate in ciascuno dei due gruppi e culminanti a sud dello zenit, si vede che questa è abbastanza prossima alla somma delle distanze zenitali delle stelle che culminano a nord dello zenit.

Le stelle del 1° gruppo culminanti a sud dello zenit (e di più la Polare che fu osservata fuori del meridiano a $1^h\,{}^1/_2$ dall'elongazione) sono state osservate facendo attraversare dalla stella il filo centrale orizzontale e segnando il tempo della bisezione: tutte le altre sono state osservate mettendo il filo sulla stella e segnando il tempo a cui quest'operazione era compiuta.

Essendomi avvezzato ad osservare con ingrandimenti forti mi è riuscito sempre un po' difficile adoperare quelli deboli, e per determinare lo zenit strumentale ho dovuto sempre adoperare l'ingrandimento maggiore, sebbene osservassi oggetti terrestri. Tale determinazione è stata sempre la più difficile fra tutte le operazioni, perchè mi è mancato sempre un oggetto da poter collimare bene; quindi sono dovuto ricorrere alla croce che sta sopra la cupola di Superga, che, essendo per isbieco rispetto a me, e molto complicata, mi ha portato sempre a risultati pessimi: di notte ho osservato anche dei lumi situati nei pressi del meridiano, con risultati identici a cagione della grandezza delle immagini: vero è però che ciò non mi ha recato danno, perchè combinando a due a due i risultati ottenuti per la latitudine, ho eliminato sempre l'errore esistente sullo zenit strumentale assunto.

Per il calcolo della rifrazione avevo con me un ottimo termometro che dà direttamente i quinti di grado; il barometro era ed è ancora nella palazzina piccola dell'Osservatorio, ma

prese alcune precauzioni che si resero necessarie ed evidenti dall'aver dovuto scartare l'osservazione di quattro stelle del 1° gruppo, potei contentarmi del come era situato. Le osservazioni furono fatte mettendo il teodolite sopra il treppiede e quindi fuori del centro della sala meridiana, ma perfettamente ad ovest del centro stesso, di modo che non c'è alcuna riduzione da fare per riferire ad esso la latitudine trovata.

Le osservazioni che qui trascrivo sono quelle che ho considerato accettabili: alcune furono scartate pel valore troppo forte o troppo debole della latitudine, o pel forte error medio (nel 1° gruppo). Però l'osservazione fu sempre ripetuta osservando la stessa stella, a fine di fare rimanere immutato il programma di osservazione. Per controllo fu ripetuto quasi interamente il 2° gruppo e allora fu scelto tra i due valori quello che più si accostava alla media ottenuta dal 1° gruppo.

Infine l'aver osservato a distanze zenitali diversissime e ben distribuite mi ha fatto quasi certo che poco o punto sia da temere da errori di graduazione esistenti nel cerchio. Essendo il cerchio fissato al cannocchiale non era possibile fare strati diversi.

Due parole infine sullo strumento. È un ottimo teodolite di Troughton e Simms, con cannocchiale centrale e diritto, munito di un obbiettivo eccellente, avente 38 mm. di apertura libera e che mi ha permesso di osservare stelle di grandezza 0 ed 1 a mezzogiorno vero, con l'oculare spezzato e con cielo non estremamente limpido: adoperando l'oculare ortoscopico, se il cielo è ben sereno, si possono osservare a qualunque ora stelle di 2ª grandezza, come la Polare. Il reticolo non ha filo mobile e consta di 7 fili fissi verticali e 3 orizzontali: il forte numero dei fili verticali rende atto lo strumento alla determinazione del tempo mediante osservazioni di passaggi di stelle nel verticale della Polare: in tali determinazioni ho avuto sempre risultati soddisfacentissimi. Lo strumento ha i due cerchi eguali e divisi di 10′ in 10′; la lettura si fa con microscopii a vite micrometrica, con cui si ha direttamente 10″ e si può stimare con molta approssimazione 1″. Di livelle ce ne sono 4; una, graduata, è nel piano del cerchio orizzontale (valore angolare di una parte = 10″); un'altra, non completamente graduata, è nel piano della prima e normalmente ad essa; la livella mobile

dell'asse ha pure 10″ come valore angolare di una parte; quella di spia ha il valore angolare di una parte $= 5''$: tutte le livelle hanno lo 0 al centro. È da deplorare che esse abbiano le divisioni marcate troppo grossolanamente, e quindi resta molto difficile stimare il decimo di parte. L'illuminazione del campo si faceva mediante una lampadina ad olio, ma, per evitare che il vento me la spegnesse, la ho fatta sostituire con una elettrica all'osram, in modo che posso ottenere un'illuminazione anche fortissima. Girando il portalampada si gradua benissimo l'illuminazione, cosicchè si riesce a vedere le stelle presso a poco come se fossero tutte della stessa grandezza. Aggiungerò in fine che mentre il cerchio verticale è fisso, quello orizzontale si può girare, e quindi resta possibile fare varii strati: me ne servirò prossimamente per qualche determinazione di azimut.

Prima di trascrivere i risultati delle osservazioni devo avvertire che è stata mia primissima cura l'osservare in condizioni buone; perciò ho osservato solo quando il cielo era completamente sereno e quando il vento era appena sensibile: essendo la collina, su cui sta l'osservatorio, quasi isolata, è molto difficile avere calma assoluta; con queste precauzioni ho avuto sempre immagini molto nitide e punto oscillanti; perciò ho potuto sempre collimar bene.

Riguardo ai dati che ho dedotto dall'osservazione dirò che leggevo spesso il termometro e quindi con pochissima interpolazione ho potuto ottenere i dati qui trascritti; al barometro pensavo prima e dopo l'osservazione, e, se c'era tempo, anche durante l'osservazione stessa; i valori qui trascritti sono stati interpolati da quelli ottenuti direttamente, dopo averli ridotti alla gravità normale. Lo stato del cronometro Kohlschitter è stato dedotto per interpolazione dai varii confronti fatti (generalmente prima e dopo l'osservazione) rispetto al pendolo Dent (che per ora è il pendolo normale); qualche volta è stato determinato direttamente osservando col teodolite nel verticale della Polare: d'altronde la disposizione simmetrica delle osservazioni tranquillizza riguardo all'influenza di eventuali errori nello stato assoluto del cronometro stesso. Le date sono indicate in tempo medio civile.

Per quel che riguarda le abbreviazioni: c = posizione del cerchio (destra o sinistra); h = ora letta sul cronometro; Δt = = stato del cronometro; θ = ora siderale; t = angolo orario. Alla livella: i = lettura dalla parte dell'osservatore; e = lettura dalla parte dell'oggetto; d = valore angolare di una parte della livella. Z = zenit strumentale; **D** = lettura sul cerchio in posizione destra; S = *idem* in posizione sinistra. α = ascensione retta, δ = declinazione, z = distanza zenitale osservata (vera), ζ = distanza zenitale meridiana per ciascuna stella. φ = latitudine. Br = pressione barometrica; Tb = temperatura del mercurio nel barometro; Te = temperatura dell'aria.

Le stelle 1 (Hevelius) Draconis e 29 (Hevelius) Camelopardalis sono state osservate in culminazione inferiore, e a questa sono riferiti gli angoli orarii: tutte le altre stelle (ad eccezione della Polare di cui già si parlò) sono state osservate in culminazione superiore.

Trascrivo tutti i dati di osservazione, perchè chiunque possa controllare il lavoro, sebbene tutte le riduzioni siano state eseguite due volte e con metodi diversi.

Lo zenit strumentale Z è stato calcolato mediante la formola

$$Z = \frac{1}{2}\left\{\left[D + \frac{1}{2}\,d(i-e)\right] + \left[S - \frac{1}{2}\,d(i_1-e_1)\right]\right\}.$$

Per le rifrazioni R è stata adoperata la tavola 31 della 4ª edizione di "Formeln und Hilfstafeln" del prof. Albrecht in cui trovo:

$$\log R = \log \alpha \operatorname{tang} z + A(\log B + \log T) + \lambda \log \gamma.$$

Il calcolo della distanza zenitale vera z si è fatto rispettivamente mediante le formule:

$$z = (D - Z) + \frac{1}{2}\,d(i-e) + R \qquad z = (Z - S) + \frac{1}{2}\,d(i-e) + R$$

Il calcolo della riduzione al meridiano è stato sempre fatto mediante le formule rigorose:

per la culminazione superiore sud dello zenit (C. S. S.)

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\zeta - z) = -\cos\varphi\cos\delta\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(\varphi - \delta + z)\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t$$

per la culminazione superiore a nord dello zenit (C. S. N.)

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}(\zeta - z) = -\cos\varphi\cos\delta\,\text{cosec}\,\frac{1}{2}(\delta - \varphi + z)\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}t$$

per la culminazione inferiore (C. I.)

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}(\zeta - z) = +\cos\varphi\cos\delta\,\sec\,\frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}t$$

da cui rispettivamente la latitudine

$$\varphi = \delta + \zeta \qquad \varphi = \delta - \zeta \qquad \varphi = 180^\circ - (\delta + \zeta).$$

Pel calcolo della riduzione al meridiano ho assunto come latitudine provvisoria $\varphi = + 45^\circ\,2'\,22''$ che mi è risultato da una determinazione approssimata fatta in estate.

Le posizioni apparenti delle stelle sono state desunte generalmente dal " Nautical Almanac „ e, quando ciò non era possibile, furono prese nell' "American Ephemeris „ e nell' "Annuario astronomico di Torino „. Siccome questi tre annuarii adoprano il catalogo di fondamentali di Newcomb, è come se avessi desunto le posizioni da un'unica Effemeride astronomica.

Osservazioni per il calcolo dello zenit strumentale Z.

c	Punto collimato	Microscopii C	Microscopii D	Livella i	Livella e	Z
		14 ottobre 1912 (mattina)				
		° ′ ″	° ′ ″	p	p	° ′ ″
S	Superga	181.44.36	1.44.28	14,0	19,2	180. 0.31,3
D	(croce)	358.16.15	178.16.17	16,8	16,2	
		14 ottobre 1912 (sera)				
D	Id. id.	358.16.12	178.16.18	17,8	14,2	180. 0.40,5
S		181.44.27	1.44.21	9,5	22,7	
		15 ottobre 1912 (mattina)				
S	Id. id.	181.44.54	1.44.50	16,0	16,8	180. 0.35,5
D		358.16. 4	178.16. 9	18,4	14,2	
		15 ottobre 1912 (sera)				
D	Id. id.	358.15.54	178.16. 0	19,2	12,6	180. 0.37,5
S		181.44.42	1.44.35	11,3	20,5	

c	Punto collimato	Microscopii C	Microscopii D	Livella i	Livella e	Z
		3 novembre 1912 (sera)				
S	Superga	181°.45′. 9″	1°.44′.59″	18,8ᵖ	15,9ᵖ	180°. 0′.47″,0
D	(croce)	358.16.10	178.16.18	22,0	12,7	
		4 novembre 1912 (mattina)				
S	Id. id.	181.45. 2	1.45. 0	18,4	16,6	180. 0.43,0
D		358.16.12	178.16.18	20,4	14,6	
		20 novembre 1912 (sera)				
D	Superga	0.38.42	180.38.45	23,0	12,4	180. 0.48,6
S	(lume)	179.22.20	359.22.18	16,1	19,4	
		22 novembre 1912 (mattina)				
D	Superga	358.15.56	178.16. 1	21,0	14,6	180. 0.38,0
S	(croce)	181.44.54	1.44.51	16,0	19,6	
		2, 3, 4 dicembre 1912				
S	Superga	181.42.19	1.42.24	9,4	22,9	180. 0.43,9
D	(palla)	358.18. 9	178.18.18	20,2	12,6	
S	Superga	181.44.59	1.44.58	18,3	16,2	180. 0.40,3
D	(croce)	358.16.21	178.16.23	18,3	16,2	
S	Superga	180.51.41	0.51.41	18,7	16,5	180. 0.44,4
D	(lume)	359. 9.41	179. 9.38	20,3	14,8	
D	Superga	358.16.12	178.16.24	21,3	12,3	180. 0.52,4
S	(croce)	181.45. 3	1.45. 4	16,8	17,1	
S	Id. id.	181.44.54	1.44.56	14,8	20,2	180. 0.48,8
D		358.16.16	178.16.27	19,0	16,0	
S	Pianura	176.50.48	356.50.42	19,0	17,0	180. 0.32,5
D	(lume)	3.10.26	183.10.34	17,0	19,0	
						Media = 180°0′43″,7
		30 e 31 dicembre 1912				
D	Superga	358.16. 0	178.16. 2	17,0	16,1	180. 0.17,8
S	(croce)	181.44.31	1.44.29	16,1	17,0	
S	Id. id.	181.44.33	1.44.33	16,2	16,6	180. 0.22,0
D		358.16. 0	178.16. 8	17,6	15,2	
D	Superga	359.49.50	179.49.58	22,1	12,7	180. 0.11,3
S	(lume)	180. 9.38	0. 9.36	11,8	23,0	
S	Superga	181.44.19	1.44.20	16,2	18,8	180. 0. 4,6
D	(croce)	358.15. 8	178.15.16	23,8	11,3	
S	Id. id.	181.44.29	1.44.28	18,8	16,8	179.59.56,9
D		358.15. 2	178.15.12	22,6	13,3	
S	Superga	180.10. 9	0.10. 2	16,0	19,8	180. 0.12,0
D	(lume)	359.49.55	179.49.58	20,4	15,4	
						Media = 180°0′10″,8

Osservazioni per la latitudine; calcolo delle distanze zenitali z e Z.

c	h	Microscopii C	Microscopii D	Livella i	Livella e	B_r	T_b	T_e
	14 ottobre 1912 (mattina) 58 α Orionis (Betelguese) Gr. 0,9 C. S. S.							
	h m s	° ' "	° ' "	p	p	mm	°	°
S	5.45.36,0	232.18.49	52.18.48	14,8	18,6	719,5	13,3	9,9
S	48.24.4	20.40	20.32	16,1	17,0			
S	50. 9,7	21.31	21.31	16,1	17,0			
S	51.29,7	22. 5	22. 5	16,1	17,0			10.0
S	53. 2,2	22.30	22.33	16,1	17,0			
D	6. 0.47,5	307.38.53	127.38.58	22,7	10,9	719,4		
D	4.17,9	40.40	40.39	23,8	9,9			
D	6.59,3	42.45	42.46	23,7	9,8			
D	8.46,6	44.13	44.19	23,7	9,8			
D	10.25,7	45.58	45.59	23,7	9,8			
	14 ottobre 1912 (sera) 1 κ Cephei Gr. 4,4 C. S. N.							
S	20. 7.48,7	237.35.41	57.35.48	15,5	16,7	718,2	13,8	13,0
S	11. 3,7	36. 9	36.12	14,7	17,3			
S	13.36,7	36.25	36.30	15,0	17,0			
S	15. 2,0	36.24	36.29	14,0	18,0			
S	16.30,4	36.23	36.29	14,0	18,0			
D	20.23.59,4	302.25. 1	122.25. 4	20,4	11,7	718,1		13,1
D	25.52,7	25.14	25.17	20,8	11,8			
D	27.17,4	25.26	25.30	20,6	11,7			
D	28.46,9	25.41	25.48	21,0	11,2			
D	30.44,2	26. 8	26.12	21,0	11,0			
	14 ottobre 1912 (sera) 1 (Hevelius) Draconis Gr. 4,6 C. I.							
S	21.21.57,1	216.47.11	36.47.13	14,6	17,8	717,9	13,9	13,3
S	23.34,8	47. 5	47. 3	14,8	17,6			
S	24.56,5	46.58	47. 0	14,8	17,6			
S	26.25,2	46.57	46.59	15,4	17,0			
S	27.53,9	46.58	46.59	15,3	17,0			
D	21.33.51,4	323.14.15	143.14.21	19,6	12,8			
D	35.43,5	14. 7	14.15	19,8	12,5			
D	36.55,7	14. 6	14.10	19,7	12,5		14,0	
D	38.31,8	14. 3	14. 8	19,7	12,6			
D	40. 7,4	13.51	13.59	19,0	13,0			
	2 dicembre 1912 (mattina) 16 α Bootis (Arturo) Gr. 0,2 C. S. S.							
D	14. 9. 9	295.25. 0	115.25. 0	16,4	17.4	710,7	11,1	4,1
S	13.16	244.36.32	64.36.32	15,2	18.5			

Δt	t	R	z	$\zeta - z$	ζ
$\alpha = 5^h 50^m 27^s,2$		$\delta = +7°23'44'',4$		$Z = 180°0'31'',3$	
m s	m s	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
—5.28,7	—10.19,9	0.42,3	37.42.15,6	—4. 0,3	37.38.15,3
—5.28,7	— 7.31,5	42,3	40.35,3	—2. 7,5	27,8
—5.28,7	— 5.46,2	42,2	39.40,2	—1.15,0	25,2
—5.28,7	— 4.26,2	42,2	39. 6,2	—0.44,3	21,9
—5.28,7	— 2.53,7	42,2	38.39,7	—0.18,9	20,8
—5.28,7	+ 4.51,6	0.42,2	37.39.35,9	—0.53,2	37.38.42,7
—5.28,7	+ 8.22,0	42,3	41.25,3	—2.37,6	47,7
—5.28,8	+11. 3,3	42,3	43.31,3	—4.35,0	56,3
—5.28,8	+12.50,6	42,4	45. 1,9	—6.11,1	50,8
—5.28,8	+14.29,7	42,4	46.44,4	—7.52,5	51,9
$\alpha = 20^h 11^m 50^s,5$		$\delta = +77°27'8'',2$		$Z = 180°0'40'',5$	
—5.30,9	— 9.32,7	0.34,3	32.25.27,3	—0.51,2	32.24.36,1
—5.30,9	— 6.17,7	34,3	24.57,8	—0.22,3	35,5
—5.30,9	— 3.44,7	34,3	24.42,3	—0. 7,9	34,4
—5.30,9	— 2.19,4	34,3	24.40,8	—0. 3,0	37,8
—5.31,0	— 0.51,1	34,3	24.41,3	—0. 0,4	40,9
—5.31,0	+ 6.37,9	0.34,3	32.25.18,1	—0.24,7	32.24.53,4
—5.31,0	+ 8.31,2	34,3	25.31,8	—0.40,8	51,0
—5.31,0	+ 9.55,9	34,3	25.44,1	—0.55,4	48,7
—5.31,0	+11.25,4	34,3	26. 2,8	—1.13,3	49,5
—5.31,0	+13.22,7	34,3	26.28,8	—1.40,6	48,2
$\alpha = 9^h 24^m 43^s,0$		$\delta = +81°42'39'',2$		$Z = 180°0'40'',5$	
—5.31,1	— 8.17,0	1.12,1	53.14.32,6	+0.17,1	53.14.49,7
—5.31,1	— 6.39,3	12,1	14.41,6	+0.11,1	52,7
—5.31,1	— 5.17,6	12,1	14.46,6	+0. 7,0	53,6
—5.31,1	— 3.48,9	12,1	14.50,6	+0. 3,6	54,2
—5.31,1	— 2.20,2	12,1	14.49,9	+0. 1,4	51,3
—5.31,1	+ 3.37,3	1.12,1	53.15. 6,6	+0. 3,3	53.15. 9,9
—5.31,2	+ 5.29,3	12,1	15. 0,9	+0. 7,5	8,4
—5.31,2	+ 6.41,5	12,1	14.57,6	+0.11,2	8,8
—5.31,2	+ 8.17,6	12,1	14.54,9	+0.17,2	12,1
—5.31,2	+ 9.53,2	12,1	14.41,6	+0.24,4	6,0
$\alpha = 14^h 11^m 40^s$		$\delta = +19°38'2'',2$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0.22	— 2. 9	0.26,2	25.24.40,0	—0.14,1	25.24.25,9
+0.22	+ 1.58	26,2	24.29,7	—0.11,8	24.17,9

c	h	Microscopii C	Microscopii D	Livella i	Livella e	B_r	T_i	T_e
14 ottobre 1912 (sera)		**29 (Hevelius) Camelopardalis**			**Gr. 5,6**			**C. I.**
	h m s	° ′ ″	° ′ ″	p	p	mm	°	°
D	22. 6.52,7	320.14.42	140.14.48	18,4	14,0			
D	8.33,5	14.54	15. 0	18,6	14,2			
D	10. 4,7	14.59	15. 7	18,4	14,2			13,4
D	11.15,5	15. 2	15.13	18,4	14,0	717,8	14,0	
D	12.28,0	15. 6	15.18	18,4	14,0			
S	22.30. 5,4	219.45.39	39.45.40	12,8	19,7			
S	32. 7,0	45.45	45.44	12,8	19,7			
S	33.54,5	45.49	45.53	12,4	19,9			13,3
S	35.34,4	45.56	46. 1	12,6	19,6	717,7	13,9	
S	36.59,4	45.59	46. 4	12,7	19,5			
14 ottobre 1912 (sera)		**39 (Hevelius) Cephei**			**Gr. 5,6**			**C. S. N.**
S	23.18.59,5	228.13.30	48.13.32	11,6	20,6			13,2
S	20.34,1	13.35	13.40	11,2	21,0			
S	22.13,9	13.41	13.42	12,0	20,0	717,7	13,9	
S	24. 5,6	13.41	13.47	11,2	20,8			
S	25.54,2	13.45	13.48	11,2	21,0			
D	23.37.33,9	311.47. 2	131.47. 8	19,7	12,4			13,1
D	40. 2,8	47. 6	47.11	19,7	12,4			
D	41.28,0	47. 8	47.13	20,0	12,1	717,6	13,8	
D	43.17,0	47. 9	47.13	20,6	11,7			
D	45.21,5	47.14	47.18	21,0	11,2			
15 ottobre 1912 (matt.)		**87 α Tauri (Aldebaran)**			**Gr. 1,1**			**C. S. S.**
S	4.24.56,7	241.12.55	61.12.59	14,7	18,1	717,1		9,5
S	26.37,1	14.32	14.33	14,2	18,6			
S	28. 0,3	15.39	15.43	14,2	18,6			
S	29.28,7	16.40	16.47	14,0	18,8		13,7	
S	30.50,3	17.31	17.35	14,1	18,7			
D	4.41.56,4	298.43.26	118.43.30	20,2	12,6	717,0		9,4
D	43.48,3	44.32	44.33	20,0	12,6			
D	45.52,6	46.10	46.13	19,6	13,2			
D	47.35,5	47.46	47.49	19,0	14,0		13,6	
D	49.15,0	49.33	49.37	18,8	14,1			
3 dicembre 1912 (sera)		**50 α Cygni (Deneb)**			**Gr. 1,3**			**C. S. S.**
D	20.38.19	270. 5. 1	90. 5. 3	18,3	16,2	714,5	12,0	5,0

Δt	t	R	z	ζ—z	ζ
$\alpha = 10^h 17^m 4^s,5$		$\delta = +84°41'38'',1$		$Z = 180°0'40'',5$	
m s	m s	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
—5.31,2	—15.43,0	1. 4,8	50.15.20,3	+0.41,2	50.16. 1,5
—5.31,2	—14. 2,2	4,8	15.32,3	+0.32,9	5,2
—5.31,2	—12.31,0	4,8	15.37,8	+0.26,1	3,9
—5.31,2	—11.20,2	4,8	15.42,8	+0.21,4	4,2
—5.31,2	—10. 7,7	4,8	15.47,3	+0.17,1	4,4
—5.31,3	+ 7.29,6	1. 4,8	50.15.48,0	+0. 9,4	50.15.57,4
—5.31,3	+ 9.31,2	4,8	15.43,0	+0.15,1	58,1
—5.31,3	+11.18,7	4,8	15.35,5	+0.21,3	56,8
—5.31,3	+12.58,6	4,8	15.29,3	+0.28,1	57,4
—5.31,3	+14.23,6	4,8	15.26,8	+0.34,6	61,4
$\alpha = 23^h 27^m 53^s,9$		$\delta = +86°49'42'',3$		$Z = 180°0'40'',5$	
—5.31,4	—14.25,8	0.48,2	41.47.35,2	—0.24,0	41.47.11,2
—5.31,4	—12.51,2	48,2	47.26,7	—0.19,0	7,7
—5.31,4	—11.11,4	48,2	47.27,2	—0.14,4	12,8
—5.31,4	— 9.19,7	48,2	47.20,7	—0.10,0	10,7
—5.31,4	— 7.31,1	48,2	47.17,7	—0. 6,5	11,2
—5.31,5	+ 4. 8,5	0.48,2	41.47.31,0	—0. 2,0	41.47.29,0
—5.31,5	+ 6.37,4	48,2	47.34,5	—0. 5,1	29,4
—5.31,5	+ 8. 2,6	48,2	47.38,0	—0. 7,5	30,5
—5.31,5	+ 9.51,6	48,2	47.41,0	—0.11,2	29,8
—5.31,5	+11.56,1	48,2	47.48,2	—0.16,4	31,8
$\alpha = 4^h 30^m 55^s,4$		$\delta = +16°20'16'',6$		$Z = 180°0'35'',5$	
—5.32,2	—11.30,9	0.30,1	28.48. 0,1	— 6. 6,9	28.41.53,2
—5.32,2	— 9.50,5	30,0	46.22,0	— 4.28,2	53,8
—5.32,2	— 8.27,3	30,0	45.13,5	— 3.18,0	55,5
—5.32,2	— 6.58,0	30,0	44.10,0	— 2.15,0	55,0
—5.32,2	— 5.37,3	30,0	43.21,0	— 1.27,6	53,4
—5.32,2	+ 5.28,8	0.30,0	28.43.41,5	— 1.23,2	28.42.18,3
—5.32,2	+ 7.20,7	30,0	44.45,5	— 2.29,4	16,1
—5.32,3	+ 9.24,9	30,0	46.22,0	— 4. 5,4	16,6
—5.32,3	+11. 7,8	30,1	47.54,6	— 5.42,8	11,8
—5.32,3	+12.47,3	30,1	49.41,4	— 7.32,4	9,0
$\alpha = 20^h 38^m 26^s$		$\delta = +44°58'13'',6$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0.13	+ 0. 6	0. 0,1	0. 4.23,6	—0. 7,9	0. 4.15,7

c	h	Microscopii C	Microscopii D	Livella i	Livella e	B_r	T_b	T_e
	15 ottobre 1912 (matt.)		**24 γ Orionis (Bellatrice)**		**Gr. 1,7**	**C.S.S.**		
	h m s	° ′ ″	° ′ ″	p	p	mm	°	°
D	5.11.52,3	308.52.47	128.52.53	21,2	11,6	716,9	13,6	9,3
D	13.40,8	51. 4	51. 6	21,4	11,4			
D	15.14,8	49.45	49.43	21,4	11,4			
D	17.45,6	47.51	47.58	22,0	10,8			9,2
D	19.26,5	46.58	47. 4	21,6	11,4			
S	5.33.30,9	231.13.25	51.13.24	14,0	19,0	716,8		
S	35.22,7	12.17	12.21	14,7	18,3			
S	36.58,0	11. 6	11. 4	14,2	18,8			
S	38.32,5	9.40	9.40	14,1	18,9			
S	40.31,3	7.38	7.38	14,0	19,0			9,1
	15 ottobre 1912 (mattina)		**1 α Ursae Minoris (Polare)**		**Gr. 2,1**	**ridotta a C. S. N.**		
D	5.52.26,3	314.27.44	134.27.47	21,4	11,3	716,8	13,5	9,1
D	56.17,3	28.45	28.51	21,4	11,3			
D	58.17,7	29.15	29.21	21,4	11,3			
D	6. 0.13,2	29.55	29.58	21,4	11.3			
D	1.40,0	30.18	30,19	21,4	11,3			
S	6. 7.51,6	225.28.48	45.28.48	14,1	18,7	716,7		9,0
S	10.20,7	28. 5	28. 3	14,1	18,7			
S	12.16,8	27.35	27.36	14,7	18,0			
S	14.18,1	26.54	27. 0	14,7	18,0			
S	16. 3,8	26.27	26.30	14,7	18,0			
	15 ottobre 1912 (sera)		**1 α Ursae Minoris (Polare)**		**Gr. 2,1**	**ridotta a C. S. N.**		
D	20.55.18,6	314.33.50	134.33.51	18,9	12,3	714,6	13,7	12,5
D	57. 5,1	33.12	33.17	19,8	11,6			
D	58.47,0	32.47	32.51	19,6	11,6			
D	21. 0.20,5	32.19	32.25	19,6	11,6			
D	1.55,4	31.53	32. 0	19,6	11,6			
S	21. 9.23,2	225.31. 6	45.31. 7	11,1	20,3	714,7		
S	11. 1,5	31.32	31.41	12,0	19,5			
S	12.36,9	32. 0	32. 6	12,4	19,0			
S	14.46,6	32.35	32.38	12,0	19,7			
S	16. 5,4	32.57	33. 0	12,4	19,0			12,4

Δt	t	R	z	$\zeta - z$	ζ
$\alpha = 5^h20^m27^s,6$		$\delta = +6°16'31'',8$		$Z = 180°0'35'',5$	
m s	m s	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
—5.32,3	—14. 7,6	0.44,1	38.53.22,6	— 7.18,9	38.46. 3,7
—5.32,3	—12.19,1	44,0	51.38,5	— 5.33,8	4,7
—5.32,3	—10.45,1	44,0	50.17,5	— 4.14,4	3,1
—5.32,3	— 8.14,3	44,0	48.31,0	— 2.29,4	1,6
—5.32,3	— 6.33,4	43,9	47.34,9	— 1.34,7	0,2
—5.32,4	+ 7.30,9	0.43,9	38.47.42,4	— 2. 4,3	38.45.38,1
—5.32,4	+ 9.22,7	44,0	48.51,5	— 3.13,6	37,9
—5.32,4	+10.58,0	44,0	50. 3,0	— 4.24,7	38,3
—5.32,4	+12.32,5	44,0	51.27,5	— 5.46,0	41,5
—5.32,4	+14.31,3	44,1	53.29,1	— 7.43,7	45,4
$\alpha = 1^h28^m45^s,0$		$\delta = +88°50'27'',7$		$Z = 180°0'35'',5$	
—5.32,4	4.18. 8,9	0.53,7	44.28.28,9	—40.13,3	43.48.15,6
—5.32,4	21.59,9	53,7	29.31,4	—41.17,4	14,0
—5.32,4	24. 0,3	53,7	30. 1,4	—41.51,0	10,4
—5.32,4	25.55,8	53,7	30.40,0	—42.23,3	16,7
—5.32,4	27.22,6	53,7	31. 2,0	—42.47,7	14,3
—5.32,5	4.33.34,1	0.53,8	44.32.29,8	—44.32,8	43.47.57,0
—5.32,5	36. 3,2	53,8	33.13,8	—45.15,2	58,6
—5.32,5	37.59,3	53,8	33.45,6	—45.48,4	57,2
—5.32,5	40. 0,6	53,9	34.24,1	—46.23,1	61,0
—5.32,5	41.46,3	53,9	34.52,6	—46.53,5	59,1
$\alpha = 1^h28^m45^s,1$		$\delta = +88°50'28'',0$		$Z = 180°0'37'',5$	
—5.34,7	19.20.58,8	0.53,0	44.34.22,5	—46. 5,8	43.48.16,7
—5.34,7	22.45,3	53,0	33.50,5	—45.35,3	15,2
—5.34,7	24.27,2	53,0	33.24,5	—45. 6,3	18,2
—5.34,7	26. 0,7	53,0	32.57,5	—44.39,6	17,9
—5.34,7	27.35,6	53,0	32.32,5	—44.12,7	19,8
—5.34,8	19.35. 3,3	0.52,9	44.30. 0,9	—42. 6,7	43.47.54,2
—5.34,8	36.41,6	52,9	29.35,1	—41.39,2	55,9
—5.34,8	38.17,0	52,9	29.10,9	—41.12,6	58,3
—5.34,8	40.26,7	52,9	28.34,6	—40.36,6	58,0
—5.34,8	41.45,5	52,9	28.15,4	—40.14,8	60,6

c	h	Microscopii C	D	Livella i	e	B_r	T_b	T_r
	3 novembre 1912 (sera)		**53 α Aquilae (Altair)**	Gr. 0,9		C.S.S.		
	h m s	° ′ ″	° ′ ″	p	p	mm	°	°
S	19.41.19,8	233.31.48	53.31.58	16,2	19,0			
S	43.36,8	33.42	33.42	15,3	20.0			7,5
S	45.27,8	34.57	34.59	16,1	19,1		15,7	
S	47.19,7	35.57	35.58	16,2	19,0			7,4
S	49.59,2	36.57	37. 2	16,2	19,0	711,8		
D	19.56.46,6	306.24.37	126.24.40	19,2	16,2			7,3
D	59.57,0	25.52	25.54	20,8	14.6			7,2
D	20. 2.11,7	27. 4	27. 8	22,0	13,2		15,6	
D	4. 7.6	28.28	28.30	22,0	13.2			7,1
D	6. 5,7	30.16	30.18	22,0	13,2			
	3 novembre 1912 (sera)		**76 Draconis**	Gr. 5,7		C.S.N.		
S	20.43.23	232.50.20	52.50.25	16,1	19,1			6,5
S	45.33	50.34	50.40	16,1	19,1			
S	47.14	50.45	50.49	16,1	19,1			6,4
S	49. 4	50.52	50.57	16,1	19,1		15,5	
S	50.33	50.59	51. 2	15,9	19,3	711,9		6,3
D	21. 2.25	307.10.32	127.10.32	23,0	12,1			
D	4.25	10.42	10.42	22,8	12,4			6,1
D	6.12	10.53	10.52	22,8	12,4			
D	8.31	11.16	11.18	22,7	12,5		15,4	
D	11.40	11.40	11.43	21,1	14,1			6,0
	4 novembre 1912 (mattina)		**19 β Orionis (Rigel)**	Gr. 0,3		C.S.S.		
S	5. 6.48,7	216.38.51	36.38.48	17,6	17,8			1,9
S	10.11,4	40.32	40.33	18,6	16.8	714,1	16,5	
S	11.49,8	41. 7	41. 9	18,6	16,8			1,8
S	13.42,4	41.39	41.47	19,3	16,4			
S	15.45,0	41.56	42. 0	20,1	15,8			
D	5.20.20,0	323.19.37	143.19.44	22,3	13,6			
D	23. 2,0	20.22	20.30	22,0	13,8			1,7
D	25. 4,1	21. 8	21.18	22,2	13,8	714,2	16,4	
D	27.51,0	22.37	22.48	21,7	14,2			
D	30. 4,5	24. 2	24. 9	22,0	13,8			1,6
	3 dicembre 1912 (sera)		**11 β Cassiopejae**	Gr. 2,4		C.S.N.		
D	0. 2.26	283.39. 2	103.39. 3	17,0	18,0	715,9	11,8	4,8
S	7.23	256.22.31	76.22.35	18,4	16,4		11,9	4,9

Δt	t	R	z	$\zeta - z$	ζ
$\alpha = 19^h46^m31^s.2$		$\delta = +8°38'14'',6$		$Z = 180°0'47'',0$	
m s	m s	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
—6.52,9	—12. 4,3	0.40,4	36.29.27,4	— 5.36,4	36.23.51,0
—6.52,9	— 9.47,3	40,4	27.33.6	— 3.41,3	52,3
—6.52,9	— 7.56,3	40,3	26.21,8	— 2.25,6	56,2
—6.53,0	— 6. 4,5	40,3	25.22,8	— 1.25,3	57,5
—6.53,0	— 3.25,0	40,3	24.20,8	— 0.27,0	53,8
—6.53,0	+ 3.20,4	0.40,3	36.24.39,3	— 0.25,8	36.24.13,5
—6.53,0	+ 6.32,8	40,4	26. 1,9	— 1.39,0	22,9
—6.53,0	+ 8.47,5	40,4	27.21,4	— 2.58,5	22,9
—6.53,0	+10.43,4	40,4	28.44,4	— 4.25,5	18,9
—6.53,0	+12.41,5	40,5	30.32,5	— 6.11,8	20,7
$\alpha = 20^h48^m54^s,9$		$\delta = +82°12'46'',0$		$Z = 180°0'47'',0$	
—6.53	—12.25	0.41,6	37.10.58,6	—0.48,0	37.10.10,6
—6.53	—10.15	41,6	10.44,1	—0.32,7	11,4
—6.53	— 8.34	41,6	10.34,1	—0.22,8	11,3
—6.53	— 6.44	41,6	10.26,6	—0.14,1	12,5
—6.53	— 5.15	41,6	10.19,6	—0. 8,6	11,0
—6.53	+ 6.37	0.41,6	37.10.53,9	—0.13,6	37.10.40,3
—6.53	+ 8.37	41,6	11. 2,6	—0.23,1	39,5
—6.53	+10.24	41,6	11.13,1	—0.33,6	39,5
—6.53	+12.43	41,7	11.37,2	—0.50,3	46,9
—6.53	+15.52	41,7	11.53,7	—1.18,3	35,4
$\alpha = 5^h10^m21^s,8$		$\delta = -8°17'49'',7$		$Z = 180°0'43'',0$	
—6.54,6	—10.27,7	1.15,2	53.23. 8,2	—3. 7,2	53.20. 1,0
—6.54,6	— 7. 5,0	15,2	21.30,2	—1.25,9	4,3
—6.54,6	— 5.26,6	15,2	20.54,7	—0.50,7	4,0
—6.54,6	— 3.34,0	15,1	20.22,4	—0.21,8	0,6
—6.54,6	— 1.31,4	15,1	20.10,9	—0. 4,0	6,9
—6.54,6	+ 3. 3,6	1.15,2	53.20.34,5	—0.16,0	53.20.18,5
—6.54,6	+ 5.45,6	15,2	21.18,7	—0.56,8	21,9
—6.54,6	+ 7.47,7	15,3	22. 6,3	—1.44,0	22,3
—6.54,6	+10.34,6	15,3	23.33,6	—3.11,4	22,2
—6.54,6	+12.48,1	15,4	24.58,4	—4.40,3	18,1
$\alpha = 0^h4^m31^s$		$\delta = +58°40'26'',8$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0.12	— 1.53	0.13,5	13.38.29,8	—0.10,9	13.38.18,9
+0.12	+ 3. 4	13,5	38.29,2	—0.28,8	38. 0,4

c	h	Microscopii C	Microscopii D	Livella i	Livella e	B_r	T_b	T_e
	20 novembre 1912 (sera) 35 γ Cephei Gr. 3,4 C.S.N.							
	h m s	° ′ ″	° ′ ″	p	p	mm	°	°
S	23.24.26,8	237.54. 2	57.54. 4	18,7	16,7		11,7	
S	27.24,7	54.28	54.31	18,7	16,7			
S	28.55,0	54.39	54.42	19,1	16,4			
S	30.24,3	54.48	54.49	19,1	16,4		11,6	
S	31.56.0	54.54	54.58	19,4	16,0	712,7		3,6
D	23.37.38,7	302. 6.56	122. 6.56	21,3	14,1			
D	39.48.0	7. 7	7. 8	20,9	14,6		11,5	
D	41,29,8	7.17	7.18	21,2	14,1			
D	43.10,0	7.32	7.34	21,4	13,9		11,4	
D	45.25,0	7.58	7.59	21,5	13,9			
	22 novembre 1912 (mattina) 9 α Canis Majoris (Sirio) Gr. — 1,6 C.S.S.							
D	6.29. 0,3	331.39.56	151.39.56	15,0	21,2			4,2
D	31.51,0	38.83	38.36	15.8	20.0			
D	33.59.2	37.49	37.51	16,0	19,8	711,3	13,2	
D	36.46,0	37.13	37.17	16,9	19,1			4,1
D	38.31,8	37. 0	37. 4	17,0	19,0			
S	6.46. 3,4	208.23.25	28.23.23	15,4	20,4			
S	48.24,7	22.30	22.34	15,4	20.4			4,0
S	50.37,5	21.26	21.29	15,4	20,4	711,4	13,1	
S	52.54,8	20. 4	20. 8	16,1	19.7			
S	54.53,6	18.38	18.34	16,2	19,6			3,9
	22 novembre 1912 (mattina) 10 α Canis Minoris (Procione) Gr. 0,5 C.S.S.							
S	7.23.35,7	230.22.56	50.23. 0	16.3	19,4			3,5
S	26. 1,4	24.22	24.24	16.3	19.4			3,4
S	27.57.6	25.11	25.15	16,3	19,4	711,4		
S	30. 6,9	25.51	25.56	16,3	19.4		13,0	3,3
S	32.20,0	26.11	26.12	16,3	19,4			
D	7.38.26,0	309.36.13	129.36.11	18,9	16,8			3,2
D	42.37.6	38.33	38.30	18,0	17,8			
D	44.38.7	40. 7	40. 5	18.9	16.9			
D	47. 0.5	42.17	42.19	18.0	17,8	711,3	12,9	3,1
D	49. 7.7	44.36	44.35	16.9	18,9			
	3 dicembre 1912 (sera) 15 κ Cassiopejae Gr. 4,2 C. S. N.							
S	0.26. 0	252.35.59	72.36. 1	16,0	19.0	716,1	12,0	5,1
D	29.56	287.25.45	107.25.44	18,9	16,2		12,1	

Δt	t	R	z	ζ—z	ζ
α=23h35m45s,6		δ=+77°9′2″,4		Z=180°0′48″,6	
m s	m s	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
+1.44,0	— 9.34,8	0.34,8	32. 7.25,4	—0.53,3	32. 6.32,1
+1.44,0	— 6.36,9	34,8	6.58,9	—0.25,4	33,5
+1.43,9	— 5. 6,7	34,8	6.49,7	—0.15,2	34,5
+1.43,9	— 3.37,4	34,8	6.41,7	—0. 7,6	34,1
+1.43,9	— 2. 5,7	34,8	6.35,9	—0. 2,5	33,4
+1.43,9	+ 3.37,0	0.34,8	32. 7. 0,2	—0. 7,6	32. 6.52,6
+1.43,9	+ 5.46,3	34,8	7. 9,5	—0.19,3	50,2
+1.43,9	+ 7.28,1	34,8	7.21,5	—0.32,4	49,1
+1.43,8	+ 9. 8,2	34,8	7.38,0	—0.48,4	49,6
+1.43,8	+11.23,2	34,8	8. 3,7	—1.15,2	48,5
α=6h41m19s,2		δ=—16°35′29″,9		Z=180°0′38″,0	
+1.36,9	—10.42,0	1.42,1	61.40.44,6	—2.52,9	61.37.51,7
+1.36,9	— 7.51,3	42,0	39.28,0	—1.33,2	54,8
+1.36,9	— 5.43,1	42,0	38.44,5	—0.49,4	55,1
+1.36,9	— 2.56,3	41,9	38.13,4	—0.13,0	60,4
+1.36,9	— 1.10,5	41,9	38. 0,9	—0. 2,1	58,8
+1.36,8	+ 6.21,0	1.42,0	61.38.43,5	—1. 0,9	61.37.42,6
+1.36,8	+ 8.42,3	42,1	39.35,6	—1.54,5	41,1
+1.36,8	+10.55,1	42,2	40.40,2	—3. 0,1	40,1
+1.36,8	+13.12,4	42,3	42. 5,3	—4.23,4	41,9
+1.36,8	+15.11,2	42,4	43.35,9	—5.48,2	47,7
α=7h34m45s,1		δ=+5°27′6″,4		Z=180°0′38″,0	
+1.36,6	— 9.32,8	0.45,9	39.38.18,1	—3.17,4	39.35. 0,7
+1.36,6	— 7. 7,1	45,9	36.53,1	—1.49,8	3,3
+1.36,6	— 5.10,9	45,8	36. 3,1	—0.58,2	4,9
+1.36,5	— 3. 1,7	45,8	35.22,5	—0.19,9	2,6
+1.36,5	— 0.48,6	45,8	35. 4,6	—0. 1,4	3,2
+1.36,5	+ 5.17,4	0.45,9	39.36.25,1	—1. 0,6	39.35.24,5
+1.36,5	+ 9.29,0	45,9	38.39,9	—3.14,8	25,1
+1.36,4	+11.30,0	46,0	40.19,0	—4.46,3	32,7
+1.36,4	+13.51,8	46,0	42.26,5	—6.55,9	30,6
+1.36,4	+15.59,0	46,1	44.38,6	—9.12,6	26,0
α=0h28m2s		δ=+62°27′22″,1		Z=180°0′43″,7	
+0.12	— 1.50	0.17,4	17.24.53,6	—0. 7,2	17.24.46,4
+0.12	+ 2. 6	17,4	25.25,0	—0. 9,4	25.15,6

c	h	Microscopii C	Microscopii D	Livella i	Livella e	B_r	T_b	T_e
	22 novembre 1912 (matt.)		**32 α Leonis (Regolo)**		**Gr. 1,3**		**C. S. S.**	
	h m s	° ′ ″	° ′ ″	p	p	mm	°	°
D	9.52.55,8	302.42.25	122.42.27	19,7	16,1	711,5 → 711,6	12,9	3,6
D	55. 4,2	41. 0	40.59	19,0	16,8			
D	56.49,4	40. 7	40. 4	18,0	17,8			3,7
D	58.45.0	39.26	39.21	19.0	16,8			
D	10. 1.58,0	38.58	38.54	17,3	18,3			
S	10. 8.27,0	237.20.57	57.20.58	16,9	18,9	711,6 → 711,7	13,0	
S	10.46,0	19.35	19.33	17,1	18,7			
S	13.22,0	17.20	17.19	17.2	18,6			3,8
S	14.59,7	15.47	15.47	16,3	19,5			
S	16.58,0	13.28	13.31	16,2	19,6			
	3 dicembre 1912 (sera)		**27 γ Cassiopejae**		**Gr. 2,2**		**C. S. N.**	
D	0.50.17	285.13.21	105.13.23	16.2	19.0	716,2	12,2	5,4
S	53.31	254.48.10	74.48.12	17,0	18,0			
	3 dicembre 1912 (sera)		**46 ξ Andromedae**		**Gr. 5.0**		**C. S. N.**	
D	1.16.59	270. 3. 4	90. 3.11	18,5	16,8	716,4	12,4	5,2
	3 dicembre 1912 (sera)		**45 ε Cassiopejae**		**Gr. 3,4**		**C. S. N.**	
D	1.45.38	288.13. 2	108.13. 6	18,0	17,0	716,5	12,7	4,9
S	49.36	251.48.39	71.48.41	19,2	15,8			
	4 dicembre 1912 (sera)		**3 α Lyrae (Vega)**		**Gr. 0,1**		**C. S. S.**	
D	18.32. 0	276.21.28	96.21.32	19,6	14,2	716,0	11,0	6,4
S	36.16	263.39.55	83.40. 0	19,0	15,0			
	4 dicembre 1912 (sera)		**50 α Cygni (Deneb)**		**Gr. 1.3**		**C. S. S.**	
S	20.38.25	269.56.37	89.56.43	16,0	19,0	716,0	11,0	4,4
	4 dicembre 1912 (sera)		**25 σ Andromedae**		**Gr. 4,5**		**C. S. S.**	
D	0.12.12	278.44.42	98.44.47	21,2	14,8	717,7 717,7	12,4	3,6
S	16.44	261.15.56	81.15.59	19,0	17,0	717,8 717,7		3,5
	4 dicembre 1912 (sera)		**37 μ Andromedae**		**Gr. 3,9**		**C. S. S.**	
D	0.50.25	277. 1.32	97. 1.36	17,7	18,5	717,9	12,5	2,9
S	54.39	262.59.24	82.59.26	20,6	15,8			2,8

Δt	t	R	z	ζ−z	ζ
$\alpha = 10^h3^m43^s,9$		$\delta = +12°23'41'',4$		$Z = 180°0'38'',0$	
m s	m s	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″
+1.35,6	— 9.12,5	0.35,6	32.42.32,6	—3.32,8	32.38.59,8
+1.35,6	— 7. 4,1	35,5	41. 2,5	—2. 5,4	57,1
+1.35,6	— 5.18,9	35,5	40. 3,5	—1.10,9	52,6
+1.35,5	— 3.23,4	35,5	39.26,5	—0.28,9	57,6
+1.35,5	— 0.10,4	35,5	38.51,0	—0. 0,1	50,9
+1.35,5	+ 6.18,6	0.35,5	32.40.11,0	—1.40,0	32.38.31,0
+1.35,5	+ 8.37,6	35,5	41.35,5	—3. 6,8	28,7
+1.35,5	+11.13,6	35,6	43.50,6	—5.16,2	34,4
+1.35,4	+12.51,2	35,6	45.18,6	—6.54,3	24,3
+1.35,4	+14.49,5	35,7	47.35,7	—9.10,8	24,9
$\alpha = 0^h51^m27^s$		$\delta = +60°15'0'',7$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0.12	— 0.58	0.15,1	15.12.46,4	—0. 2,5	15.12.43,9
+0.12	+ 2.16	15,1	12.45,3	—0.13,5	12.31,8
$\alpha = 1^h17^m13^s$		$\delta = +45°4'36'',3$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0.12	— 0. 2	0. 0,0	0. 2.28,1	—0. 1,6	0. 2.26,5
$\alpha = 1^h48^m8^s$		$\delta = +63°14'47'',3$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0.11	— 2.19	0.18,3	18.12.41,1	—0.10,7	18.12.30,4
+0.11	+ 1.39	18,3	12.30,5	—0. 5,4	12.25,1
$\alpha = 18^h33^m58^s$		$\delta = +38°42'6'',0$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0. 5	— 1.53	0. 6,2	6.21. 6,0	— 0.34,8	6.20.31,2
+0. 5	+ 2.23	6,2	21. 2,4	— 0.55,6	20. 6,8
$\alpha = 20^h38^m26^s$		$\delta = +44°58'13'',5$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0. 4	+ 0. 3	0. 0,1	0. 3.56,3	— 0. 2,1	0. 3.54,2
$\alpha = 0^h13^m46^s$		$\delta = +36°18'21'',4$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0. 3	— 1.31	0. 8,6	8.44.25,4	— 0.16,9	8.44. 8,5
+0. 3	+ 3. 1	8,6	44.59,8	— 1. 6,9	43.52,9
$\alpha = 0^h51^m55^s$		$\delta = +38°1'51'',5$		$Z = 180°0'43'',7$	
+0. 3	— 1.27	0. 6,9	7. 0.55,2	— 0.18,8	7. 0.36,4
+0. 3	+ 2.47	6,9	1.37,6	— 1. 9,3	0.28,3

c	h	Microscopii C	Microscopii D	Livella i	Livella e	B_r	T_b	T_r
	4 dicembre 1912 (sera) 43 β Andromedae Gr. 2,4 C.S.S.							
	h m s	° ′ ″	° ′ ″	p	p	mm	°	°
S	1. 3.14	260. 7.47	80. 7.51	15,4	20.6	717,9	12,6	2,7
D	7.40	279.53.58	99.54. 2	20,1	15.9	718,0		
	4 dicembre 1912 (sera) 46 ε Andromedae Gr. 5,0 C.S.N.							
S	1.17.10	269.58.36	89.58.36	16,2	19,8	718,0	12,6	2,6
	4 dicembre 1912 (sera) 37 δ Cassiopejae Gr. 2,8 C.S.N.							
S	1.19.19	255.15.56	75.16. 0	15,3	20,8	718,0	12,6	2,6
D	22.54	284.45.51	104.45.51	19,2	16,9		12,7	
	4 dicembre 1912 (sera) φ Persei (54 Andromedae) Gr. 4,2 C.S.N.							
S	1.37.43	264.47.47	84.47.50	14,2	22,0	718,1	12,7	2,6
D	42. 3	275.16. 0	95.16. 4	20,0	16,2			2,5
	4 dicembre 1912 (sera) 2 α Trianguli Gr. 3,6 C.S.S.							
S	1.46.20	254. 7.41	74. 7.42	16,2	20,0	718,1	12,8	2,5
D	49.31	285.53.39	105.53.38	17,0	19.0			
	4 dicembre (sera) 57 γ Andromedae Gr. 2,2 C.S.S.							
D	1.57. 8	273. 8.49	93. 8.47	17,0	19,2	718,1	12,8	2,5
S	2. 2. 0	266.49.40	86.49.47	19,2	17,0	718,2		
	30 dic. 1912 (sera) 18 α Cassiopejae (Schedir) Gr. 2,5 C.S.N.							
S	0.37.26,6	258.58.23	78.58.32	12,7	22,1	718,6	13,3	6,6
D	40.32,6	281. 1.34	101. 1.42	21,3	13,3			
	30 dicembre 1912 (sera) 24 η Cassiopejae Gr. 3,6 C.S.N.							
D	0.45.35,0	282.19. 4	102.19.12	22,0	12,8	718,6	13,3	6,6
S	48.34,7	257.40.46	77.40.53	13,3	21,2			
	30 dicembre 1912 (sera) υ Persei (51 Andromedae) Gr. 3,8 C.S.N.							
S	1.33.50,0	266.49.31	86.49.34	13,2	21,4	718,8	13,4	6,6
D	36.45,7	273. 9.17	93. 9.20	21,2	13,2			
	31 dic. 1912 (sera) 21 α Andromedae (Alpheratz) Gr. 2,1 C.S.S.							
S	0. 5.41,9	253.34.21	73.34.22	15,2	20,3	720,2	11,8	4,1
D	9.32,8	286.25.32	106.25.38	22,5	13,3			
	31 dicembre 1912 (sera) 31 δ Andromedae Gr. 3,5 C.S.S.							
S	0.35.39,2	255.20.33	75.20.34	14,2	21,6	720,3	12,0	3,4
D	38.35,0	284.38.45	104.38.45	22,0	13,8			

Δt	t	R	z	$\zeta - z$	ζ
$\alpha = 1^h 4^m 51^s$		$\delta = +35^\circ 9' 45'',8$		$Z = 180^\circ 0' 43'',7$	
m s	m s	' "	° ' "	' "	° ' "
+0. 3	— 1.34	0. 9,8	9.52.51,5	— 0.16,2	9.52.35,3
+0. 3	+ 2.52	9,8	53.36,6	— 0.54,3	52.42,3
$\alpha = 1^h 17^m 13^s$		$\delta = +45^\circ 4' 36'',4$		$Z = 180^\circ 0' 43'',7$	
+0. 3	0. 0	0. 0,0	0. 1.58,7	0. 0,0	0. 1.58,7
$\alpha = 1^h 20^m 7^s$		$\delta = +59^\circ 47' 16'',7$		$Z = 180^\circ 0' 43'',7$	
+0. 3	— 0.45	0.14,8	14.44.46,7	— 0. 1,5	14.44.45,2
+0. 3	+ 2.50	14,8	45.27,9	— 0.22,0	45. 5,9
$\alpha = 1^h 38^m 12^s$		$\delta = +50^\circ 15' 17'',6$		$Z = 180^\circ 0' 43'',7$	
+0. 3	— 0.26	0. 5,1	5.12.40,8	—0. 1,8	5.12.39,0
+0. 3	+ 3.54	5,2	15.33,0	—2.27,8	13. 5,2
$\alpha = 1^h 48^m 7^s$		$\delta = +29^\circ 9' 30'',3$		$Z = 180^\circ 0' 43'',7$	
+0. 3	— 1.44	0.16,0	15.53. 8,7	—0.13,3	15.52.55,4
+0. 3	+ 1.27	16,0	53. 5,8	—0. 9,3	52.56,5
$\alpha = 1^h 58^m 34^s$		$\delta = +41^\circ 54' 59'',0$		$Z = 180^\circ 0' 43'',7$	
+0. 3	—1.23	0. 3,1	3. 8. 1,9	—0.36,2	3. 7.25,7
+0. 3	+3.29	3,1	11. 8,8	—3.47,6	7.21,2
$\alpha = 0^h 35^m 32^s,8$		$\delta = +56^\circ 3' 54'',0$		$Z = 180^\circ 0' 10'',8$	
—3.14,3	—1.20,5	0.10,8	11. 1.30,6	—0. 7,3	11. 1.23,3
—3.14,3	+1.45,5	10,8	1.58,0	—0.12,5	1.45,5
$\alpha = 0^h 43^m 48^s,8$		$\delta = +57^\circ 21' 36'',1$		$Z = 180^\circ 0' 10'',8$	
—3.14,3	—1.28,1	0.12,1	12.19.32,3	—0. 7,6	12.19.24,7
—3.14,3	+1.31,6	12,1	19.13,6	—0. 8,2	19. 5,4
$\alpha = 1^h 32^m 38^s,5$		$\delta = +48^\circ 11' 32'',5$		$Z = 180^\circ 0' 10'',8$	
—3.14,6	—2. 3,1	0. 3,1	3.10.20,9	—1.10,6	3. 9.10,3
—3.14,6	+0.52,6	3,1	9.30,8	—0.12,9	9.17,9
$\alpha = 0^h 3^m 52^s,6$		$\delta = +28^\circ 36' 44'',3$		$Z = 180^\circ 0' 10'',8$	
—3.21,8	—1.32,5	0.16,5	16.25.53,0	—0.10,2	16.25.42,8
—3.21,8	+2.18,4	16,5	26. 3,7	—0.22,9	25.40,8
$\alpha = 0^h 34^m 39^s,9$		$\delta = +30^\circ 23' 15'',3$		$Z = 180^\circ 0' 10'',8$	
—3.21,9	—2.22,6	0.14,7	14.39.33,5	—0.26,7	14.39. 6,8
—3.21,9	+0.33,2	14,7	39. 9,4	—0. 1,5	39. 7,9

Calcolo delle ζ definitive e della latitudine φ.

Allo scopo di compensare gli errori esistenti nelle ζ ottenute a causa dell'imperfetta conoscenza dello zenit strumentale, combino per ciascuna delle stelle del 1° gruppo il 1° col 10° valore, il 2° col 9°, il 3° coll'8°, il 4° col 7°, il 5° col 6°; anche per le stelle del 2° gruppo combino i due valori di ζ fra loro, salvo che per 50 α Cygni e 46 ξ Andromedae, in cui (a causa del diverso valore di δ nelle due osservazioni) occorre combinare le latitudini trovate e non gli ζ. Nello specchio che segue sopprimo sempre sul valore di φ la quantità $+ 45°2'$ che è comune a tutti i 100 valori. La media col suo error medio è segnata dopo ogni serie di valori.

ζ	φ	ζ	φ	ζ	φ
58 α **Orionis**		1 κ **Cephei**		1 (**Hevelius**) **Draconis**	
° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″
37.38.33,6	18,0	32.24.42,1	26,1	53.14.57,9	22,9
38.39,3	23,7	24.42,5	25,7	15. 2,4	18,4
38.40,7	25,1	24.41,6	26,6	15. 1,2	19,6
38.34,8	19,2	24.44,4	23,8	15. 1,3	19,5
38.31,8	16,2	24.47,1	21,1	15. 0,6	20,2
$\varphi = 20'',4 \pm 1'',70$		$\varphi = 24'',7 \pm 1'',01$		$\varphi = 20'',1 \pm 0'',75$	
29 (**Hev.**) **Camelop.**		39 (**Hevelius**) **Cephei**		87 α **Tauri**	
50.16. 1,4	20,5	41.47.21,5	20,8	28.42. 1,1	17,7
16. 1,3	20,6	47.18,8	23,5	42. 2,8	19,4
16. 0,4	21,5	47.21,6	20,7	42. 6,0	22,6
16. 1,1	20,8	47.20,0	22,3	42. 5,6	22,2
16. 0,9	21,0	47.20,1	22,2	42. 5,8	22,4
$\varphi = 20'',9 \pm 0'',18$		$\varphi = 21'',9 \pm 0'',52$		$\varphi = 20'',9 \pm 0'',98$	
24 γ **Orionis**		1 α **Ursae Minoris**		1 α **Ursae Minoris**	
38.45.54.5	26,3	43.48. 7,4	20,3	43.48. 8,6	19,4
45.53,1	24,9	48. 7,5	20,2	48. 6,6	21,4
45.50,7	22,5	48. 3,8	23,9	48. 8,2	19,8
45.49,8	21,6	48. 7,6	20,1	48. 6,9	21,1
45.49,2	21,0	48. 5,7	22,0	48. 7,0	21,0
$\varphi = 23'',3 \pm 1'',01$		$\varphi = 21'',3 \pm 0'',74$		$\varphi = 20'',5 \pm 0'',40$	

ζ	φ	ζ	φ	ζ	φ
53 α Aquilae		**76 Draconis**		**19 β Orionis**	
° ′ ″	″	° ′ ″	″	° ′ ″	″
36.24. 5,9	20,5	37.10.23,0	23,0	53.20. 9,6	19,9
24. 5,6	20,2	10.29,1	16,9	20.13,2	23,5
24. 9,5	24,1	10.25,4	20,6	20.13,1	23,4
24.10,2	24,8	10.26,0	20,0	20.11,3	21,6
24. 3,7	18,3	10.25,7	20,3	20.12,7	23,0
$\varphi = 21'',6 \pm 1'',24$		$\varphi = 20'',2 \pm 0'',97$		$\varphi = 22'',3 \pm 0'',69$	
35 γ Cephei		**9 α Canis Majoris**		**10 α Canis Minoris**	
32. 6.40,3	22,1	61.37.49,7	19,8	39.35.13,4	19,8
6.41,6	20,8	37.48,4	18,5	35.16,9	23,3
6.41,8	20,6	37.47,6	17,7	35.18,8	25,2
6.42,1	20,3	37.50,7	20,8	35.13,8	20,2
6.43,0	19,4	37.50,7	20,8	35.13,9	20,3
$\varphi = 20'',6 \pm 0'',44$		$\varphi = 19'',5 \pm 0'',62$		$\varphi = 21'',8 \pm 1'',06$	
32 α Leonis					
32.38.42,3	23,7				
38.40,7	22,1				
38.43,5	24,9				
38.43,1	24,5				
38.41,0	22,4				
$\varphi = 23'',5 \pm 0'',56$					

50 α **Cygni** . . . { I osserv. $\varphi = 29'',3$; II „ $\varphi = 7,7$; media $\varphi = 18,5$

46 ξ **Andromedae** { I osserv. $\varphi = 9,8$; II „ $\varphi = 37,7$; media $\varphi = 23,7$

✳	ζ	φ	✳	ζ	φ
I gruppo (ζ tra 0° e 5°)			II gruppo (ζ tra 6° e 11°)		
		″		° ′ ″	″
46 ξ **Androm.**		23,7	3 α **Lyrae**	6.20.19,0	25,0
50 α **Cygni**	° ′ ″	18,5	37 μ **Androm.**	7. 0.32,3	23,8
57 γ **Androm.**	3. 7.23,4	22,4	26 σ **Androm.**	8.44. 0,7	22,1
υ **Persei**	3. 9.14,1	18,4	43 β **Androm.**	9.52.38,8	24,6
φ **Persei**	5.12.52,1	25,5	18 α **Cassiop.**	11. 1.34,4	19,6
$\varphi = 21'',7 \pm 1'',42$			$\varphi = 23'',0 \pm 0'',99$		
III gruppo (ζ tra 12° e 15°)			IV gruppo (ζ tra 16° e 25°)		
24 η **Cassiop.**	12.19.15,1	21,0	2 α **Trianguli**	15.52.56,0	26,3
11 β **Cassiop.**	13.38. 9,7	17,1	21 α **Androm.**	16.25.41,8	26,1
31 δ **Androm.**	14.39. 7,4	22,7	15 κ **Cassiop.**	17.25. 1,0	21,1
37 δ **Cassiop.**	14.44.55,6	21,1	45 ε **Cassiop.**	18.12.27,7	19,6
27 γ **Cassiop.**	15.12.37,9	22,8	16 α **Bootis**	25.24.21,9	24,1
$\varphi = 20'',9 \pm 1'',03$			$\varphi = 23'',4 \pm 1'',34$		

Pel calcolo del valore definitivo ho naturalmente assunto come peso da assegnare a ciascuno dei 20 valori precedenti, il reciproco del quadrato dell'errore medio spettante a ciascun gruppo. Quindi definitivamente la latitudine risultante col relativo errore medio è

$$\varphi = +\,45^\circ 2' 21'',1 \pm 0'',22 \quad \text{oppure} \pm 0'',15 \text{ (errore probabile)}$$

(Catalogo di Newcomb; costanti della conferenza di Parigi del 1896).

R. Osservatorio di Pino Torinese, 22 maggio 1913.

Relazione sulla Memoria del Dott. Cesare Staurenghi, intitolata: " *Fonticulus bregmaticus lateralis* „ *e* " *fissura bregmatica lateralis* „ *in alcune specie di Mammiferi e di Uccelli;* " *fonticulus lambdoidalis lateralis* „ *e* " *fissura lambdoidalis lateralis* „ *degli Equidae* (*).

Come uno di noi ha già avuto l'onore di riferire alla Classe nell'atto della presentazione, la Memoria lasciata manoscritta dal Dott. Cesare Staurenghi, morto a Monza il 6 novembre ultimo, ci fa conoscere il modo di formazione di alcune fontanelle e di alcune fessure nella calotta cranica di diverse specie di mammiferi e di uccelli. L'A. si giovò per i suoi studi di cranii fetali che aveva trovato qua e là sparsi per i Musei; ma la maggior parte della considerevole quantità di materiale studiato preparò egli stesso con la cura più scrupolosa, costituendo in tal modo una raccolta più unica che rara, la quale al presente è in possesso del Museo zoologico di Milano. Trattasi di 129 scheletri cefalici di *Equus caballus* dalla nona settimana di sviluppo fino alla nascita, di altri cranii di feti di *Equus asinus*, di *Equus mulus*, di *Bos taurus*, di *Ovis aries* fra i mammiferi, di neonati di *Athene noctua* e di parecchie altre specie di uccelli.

(*) Letta nell'adunanza dell'11 maggio.

I fatti anatomici, che l'A. minutamente descrive e di cui con numerose figure facilita l'intelligenza, sono complessivamente i seguenti:

I. Per gli *Equidae*. — Sul principio il *tegmen cranii* è occupato sul mezzo dalla grande fontanella frontoparietosovra-occipitale; più tardi questa, per il reciproco avvicinarsi di un tratto dei margini sagittali delle due ossa parietali, è decomposta in una fontanella orale o *fontanella bregmatica* ed in una fontanella aborale o *fontanella lambdoidea*. In causa della conformazione ad arco concavo del margine bregmatico di ciascun osso frontale, la fontanella bregmatica nel suo distretto interfrontale assume nelle prime fasi di sviluppo la forma di una ellisse; avanzando lo sviluppo quella forma cambia, poichè su ciascun lato si manifesta una insenatura angolare causata da che ciascun margine bregmatico si decompone in due porzioni quasi rettilinee, incontrantisi fra di loro prima ad angolo ottuso, poi ad angolo retto. Successivamente la forma della fontanella cambia un'altra volta: infatti il processo di ossificazione nella porzione orale di ciascun margine bregmatico delle ossa frontali è più attivo che altrove: deriva da ciò che quella porzione di margine incomincia a farsi convessa e, più tardi, in forma di lamina (*lamina frontale parietale*) invade a poco a poco lo spazio fontanellare avanzando verso l'osso parietale. Così il seno laterale della fontanella bregmatica si riduce in ampiezza e si fa sempre più indipendente del resto della fontanella; in una parola esso diventa la *fontanella bregmatica laterale*. Procedendo ulteriormente lo sviluppo, questa si chiude passando per uno stadio di fessura più o meno rettilinea, la *fessura bregmatica laterale*.

II. Per altri mammiferi. — Anche nel *Bos taurus* e nel-l'*Ovis aries* l'A. può dimostrare la fontanella bregmatica laterale come parte della fontanella bregmatica primitiva; ma verificò che quella si chiude diversamente che nel cavallo. Essa non passa per uno stadio fissurale; dapprima si separa dalla fontanella bregmatica mediana, diventando una fontanella intrafrontale, poi si oblitera in causa di un processo di ossificazione che procede dai suoi margini verso il suo centro. Fatti consimili rilevò in altri ordini di mammiferi.

III. Per gli uccelli. — Circa alla classe degli uccelli l'A.

accertò l'esistenza temporanea della fontanella bregmatica laterale, della lamina frontale parietale e della fessura bregmatica laterale in *Athene noctua*, *Elaphes scops*, *Strix flammea, Syrnium aluco*.

IV. — Lo Staurenghi rilevò anche che negli *Equidae*, con una certa frequenza, deriva dalla fontanella lambdoidea un'altra fontanella, la *fontanella lambdoidea laterale*. Questa si può chiudere talvolta coll'intervento di un ossicino fontanellare, altra volta o per ossificazione centripeta o per l'affrontamento diretto dei suoi margini e perciò passando dapprima per uno stadio di fessura, la *fessura lambdoidea laterale*.

Delle fontanelle studiate dall'A. e del loro modo di formarsi e di scomparire non si aveva dapprima alcuna idea; le fessure precedenti la loro chiusura erano invece da alcuni anatomici già state notate, ma siccome questi non ne conoscevano l'origine, così erroneamente le interpretarono come residui di suture, il che li condusse ad ammettere senz'altro l'esistenza di centri di ossificazione multipli sia nell'osso frontale, sia nell'osso parietale. Perciò lo Staurenghi nella sua memoria non si limita solo a riferire su nuovi ed importanti fatti dell'osteocraniogenesi, ma pone in guardia sui gravi errori in cui altri per mancanza di osservazioni esatte sono caduti.

In conclusione noi raccomandiamo caldamente alla Classe di volere accogliere lo scritto dello Staurenghi fra le *Memorie* accademiche.

L. Camerano,
R. Fusari, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza dell'8 Giugno 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. RODOLFO RENIER
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Pizzi, Brondi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli, del Direttore di Classe Manno e dei Soci Carle, Chironi, Ruffini, Sforza ed Einaudi.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 18 maggio 1913.

Il Presidente annunzia con parola commossa la morte del Socio Graf, avvenuta il 30 maggio scorso. Dà conto brevemente dell'accompagnamento funebre e della cerimonia che ebbe luogo nell'Università, in cui il vice-presidente Camerano prese la parola a nome dell'Accademia. Enumera le condoglianze giunte dai Corpi scientifici, da Biblioteche, da singoli personaggi. Manda infine alla memoria del compianto collega un mesto saluto.

Il Socio De Sanctis propone che la commemorazione del defunto sia affidata al Socio Renier. Il Socio Renier ringrazia, ma, osservando che egli ha già assunto l'incarico di commemorare solennemente il Graf nella R. Università, prega di incaricare altro collega e suggerisce che sia designato il Socio Stampini. Rileva anche l'importanza che avrebbe la pubblicazione nei nostri *Atti* di una compiuta bibliografia degli scritti del Graf e si offre di collaborare col collega Stampini a tale pubblicazione.

La proposta di affidare al Socio STAMPINI la commemorazione di ARTURO GRAF e quella di pubblicare una bibliografia degli scritti del compianto Collega vengono accolte dall'unanime consenso dei presenti.

Il Segretario presenta la riproduzione in facsimile del Codice Evangelico *k* della biblioteca nazionale universitaria di Torino (Torino, Casa editrice Molfese, 1913). La riproduzione di questo preziosissimo manoscritto della versione latina preierominiana dei Vangeli, salvato dall'incendio della biblioteca e dal Marré poi mirabilmente restaurato, è la seconda di quelle edite sotto gli auspici della nostra Accademia delle Scienze, e, a cura di una Commissione nominata dall'Accademia stessa, è fornita di un'ampia prefazione che informa delle questioni paleografiche concernenti il Codice e dei sussidi bibliografici necessari al suo studio.

La Classe delibera che, i Soci CIPOLLA, SAVIO e DE SANCTIS e il Prof. FEDELE della R. Università, che ebbero parte nel preparare o curare la pubblicazione, vengano ringraziati a nome dell'Accademia.

Il Socio BRONDI presenta per l'inserzione negli *Atti*, a nome del Socio EINAUDI, assente, una Nota del Dr. GINO BORGATTA, intitolata: *Contributo critico alla teoria finanziaria*.

Pure per gli *Atti* il Socio DE SANCTIS offre i seguenti lavori (*):

GIUSEPPE CAMMELLI, *Per le fonti dei vv. 139-263 del Pseudo Scimno*;

LUIGI PARETI, *Pentatlo, Dorieo ed Eracle nella Sicilia occidentale*;

EMILIO POZZI, *Studi sulla guerra civile Sillana*.

Avverte che l'ultimo è lavoro postumo del giovane e valente studioso così prematuramente rapito alla scienza che coltivava con tanto amore; e dichiara di assumere perciò egli stesso la responsabilità della correzione delle prove di stampa.

(*) Saranno inseriti in un successivo fascicolo.

LETTURE

Contributo critico alla teoria finanziaria.

Nota del Dr. GINO BORGATTA.

SOMMARIO. — § 1. Oggetto della nota: eterogenei elementi che costituiscono la " scienza delle finanze „. Concetto scientifico di *legge*: applicazione dell'economia e finanza. — § 2. L'elemento *descrittivo* negli scritti finanziari. — § 3. L'elemento *precettivo*. Mancanza di carattere scientifico per l'erroneità delle leggi o dei dati economici da cui le deduzioni finanziarie son tratte. — § 4. per il tipo *precettivo* puro delle proposizione e teorie, costituenti imperativi categorici o deduzioni da premesse indeterminate ed insufficienti. Esempi tratti da varie moderne dottrine finanziarie: loro caratteri generali. — § 5. Gli elementi *scientifici* delle teorie finanziarie: i " problemi economici „ (dinamici) deducibili dall'ipotesi dell'economia pura (privata) e loro difficoltà. — § 6. Breve esame delle applicazioni in tali problemi delle nuove teorie economiche: Edgeworth, Pantaleoni, Barone, ecc. Introduzione dell'Einaudi delle concezioni fisheriane sul reddito: teoria del reddito *consumato* dell'Einaudi: caratteri e problemi scientifici di questa trattazione: altri autori (Prato, Cabiati) che accolgono le definizioni fisheriane nei problemi finanziari. Altre trattazioni di problemi economici. — § 7. Accenno al problema generale dei *fatti finanziari*.

§ 1. — La scienza delle finanze non presenta tuttora, malgrado il più ricco contributo di indagini rigorose che gli studiosi le han dato negli ultimi tempi, una formulazione organica, un'impostazione univoca, una ricerca sistematica delle *leggi* o uniformità con cui si manifestano i fenomeni, quali troviamo nell'economia e nella statistica. La " scienza „ non può che essere una ricerca delle ipotetiche interpolate che si trovino collegare in più approssimativo modo i fatti empirici; onde le *leggi* tanto dei fatti fisico-naturali quanto dei fatti sociali non sono in realtà che *ipotesi* rigorose, che tentiamo valutare fino a qual punto vicine alle uniformità oggettive a noi ignote paragonando le

deduzioni rigorose di quelle coi fenomeni empiricamente accertati (1). L'economia pura costituisce appunto da N. W. Senior al Pareto una continua ricerca ed elaborazione della legge-ipotesi fondamentale da cui dedurre le proprietà e leggi dell'attività economica pura, che nel fenomeno concreto non può che trovarsi più o meno combinata con altre attività cioè col manifestarsi di altre " leggi „ degli atti umani. L'ipotesi come risulta oggi, dopo le successive correzioni (2) nella concezione

(1) Inutile avvertire che le ipotesi rigorose possono porsi indipendentemente dalla preoccupazione di verificarne la corrispondenza al fenomeno empirico, badando solo al rigore logico delle deduzioni (scienze matematiche). Il carattere essenzialmente *relativo* della *legge* scientifica non appare, nella moderna concezione di questa, solo nella specifica relatività a certe precise condizioni del verificarsi del fenomeno, ma, per opera di una serie d'indagini che s'iniziano nel campo dell'astronomia e col Miukouwski, col Poincaré, col Duhem, col Mach, coll'Einstein sovratutto, investirono una sempre maggiore porzione delle scienze fisico-naturali, anche nella relatività alle particolari condizioni in cui avviene l'accertamento induttivo dei fatti e la verificazione in essi delle leggi ipotetizzate: onde i concetti di movimento, di tempo, di spazio, ecc., considerati comunemente come assoluti, diventano relativi anche ai sistemi di condizioni dello sperimentatore od osservatore. Questo concetto scientifico è già apparso anche nel campo dell'economia pura nei lavori del Cournot, dell'Amoroso, ecc.

(2) Nel Senior si dà primo impreciso tentativo di formulazione dell'ipotesi, nel concetto della deducibilità dei fenomeni economici da una proprietà o norma costante delle azioni umane relative ad un certo ordine di rapporti (" l'uomo desidera la maggior ricchezza col minimo sacrificio possibile „), per quanto egli abbia posto tra le proposizioni generali da cui le leggi economiche (pure) si potrebbero dedurre anche concetti relativi ai fatti *sociologici*, in cui vien meno la possibilità di trattare gli atti come *logici* (es., limiti della popolazione) ed a fatti del tutto estrinseci all'uomo (legge della produttività fisica crescente dei capitali; legge dei rendimenti decrescenti della terra). Nella scuola edonista (Jevons, Gossen, Menger, Edgeworth, Pantaleoni, ecc.) l'ipotesi si precisa in questi termini: deduzione delle leggi economiche dal carattere costantemente logico (soggettivamente) degli atti diretti a soddisfare i bisogni individuali (egoistici) col minor possibile sacrificio. Onde ne venivano esclusi gli atti diretti a soddisfare bisogni non egoistici o non risolventisi in *utilità* (fisiologica) dell'individuo: non si teneva conto della necessità fondamentale di supporre che le azioni economiche risultassero logiche non solo nella deduzione soggettiva, ma anche nei *risultati oggettivi* (s'intende approssimativamente, e pel fenomeno *medio*): altrimenti se questi sono *indipendenti* dai fini soggettivi e ne discordano, è segno che i punti di partenza soggettivi, mentre dagli individui si presup-

dell'equilibrio generale, può così riassumersi: Un gruppo di azioni individuali (le economiche) si considerano caratterizzate dalla proprietà d'essere logicamente indirizzate a soddisfare il massimo dei bisogni soggettivi compatibile colle condizioni oggettive, in modo che scopi soggettivi e risultati oggettivi di esse approssimativamente concordino.

Altri lineamenti essenziali della scienza economica allo stato attuale sono: la considerazione delle generali dipendenze mutue da cui appaiono legate le quantità economiche e la distinzione rigorosa tra i problemi della *statica* ed i problemi della *dinamica* economica, osservando che il primo procedimento della scienza fu la ricerca delle condizioni della statica, che sarebbero raggiunte ove: 1) le azioni umane concrete (relative ai rapporti economici) avessero individualmente e sempre, in modo rigoroso, i caratteri accennati; 2) non variassero affatto i bisogni soggettivi e gli ostacoli che essi incontrano al loro soddisfacimento. La scienza delle finanze presenta una simile condizione? A noi pare che gli elementi che generalmente costituiscono gli scritti finanziari siano piuttosto *eterogenei*, non solo perchè presentano caratteri *scientifici*, in rapporto al concetto di " legge „ come è sopra accennato, assai diversi, per una serie di proposizioni essendo destituiti di natura scientifica (secondo la fatta definizione), ma anche perchè comprendono, senza ben distinguere, la trattazione, sia pur approssimativamente rigorosa, di problemi trattabili in base alla pura ipotesi economica sovraccennata e che quindi in realtà non sono che problemi speciali dell'equilibrio economico (§ 5-6) colla trattazione di problemi, specie i generali, costituiti dalla ricerca delle leggi o uniformità dei *fatti finanziari*, leggi che alla più superficiale osservazione evidentemente diversificano dalle prime e, come qui tenteremo accennare, hanno carattere essenzialmente *sociologico*.

---

pongono corrispondere approssimativamente ai dati oggettivi, non vi corrispondono affatto, neppure nei limiti indicati: infine, vi si presupponeva la misurabilità dei piaceri e costi, molle dell'attività economica, mentre tali entità allo stato attuale della scienza non sono affatto ancora misurabili in termini quantitativi; e si trascurava di completare inizialmente l'ipotesi economica colla proprietà più fondamentale del fenomeno economico rilevata dall'osservazione diretta: la generale interdipendenza delle quantità e dei prezzi che si determinano negli aggregati economici.

Cercheremo adunque di prospettare brevemente, tenendo particolare conto della più recente letteratura scientifica in proposito, quali sono i principali di questi non omogenei elementi che materiano le opere di scienza delle finanze e le più importanti conclusioni cui sono giunti, tentando successivamente indicare quelli che a noi paiono i problemi fondamentali di questa scienza.

§ 2. — Un elemento che ha tuttora, a nostro modestissimo parere, un posto forse eccessivo nell'attuale scienza delle finanze è quello puramente *descrittivo* dei sistemi finanziari concreti, nel senso s'intende della semplice riproduzione o storia degli istituti presentati dal fenomeno concreto. Naturalmente l'osservazione è fatta puramente dal punto di vista scientifico e non da altri (1); non solo, ma non vuol affatto negare l'utilità altissima della pura *descrizione* anche per l'indagine scientifica delle leggi dei fenomeni. La descrizione dei fatti empirici è il primo stadio dell'induzione, assolutamente indispensabile per la ricerca delle leggi ove si tratti di fenomeni soggetti all'osservazione: ma non costituisce evidentemente formulazione delle loro *leggi*. Se l'economia si fosse limitata sempre a descrivere i fatti che avvengono nei vari mercati, i sistemi monetari, le banche, le borse, le imprese concrete, l'infinità degli episodi empirici, in cui s'estrinseca e combina la " forza economica ", non si sarebbero mai costrutti sistemi di economia pura nè formulate le ipotesi che dànno oramai a questa scienza contenuto propriamente scientifico. La descrizione più accurata possibile del giro del sole, della luna, dei movimenti in genere degli astri, delle loro dimensioni, ecc., non ci darebbe neppur lontanamente quanto ci dà la

---

(1) È chiaro che se uno studio finanziario è diretto ad individui che domani dovranno essenzialmente servirsene nella pratica, come professionisti, impiegati, uomini politici e legislatori, sarebbe assurdo pretendere ch'esso s'indugi faticosamente a cercare i lineamenti scientifici di un certo gruppo di conoscenze: e non potrà naturalmente avere quella forma più opportuna a' suoi scopi ch'è la *descrizione*, la comparazione, la trattazione leguleia dei problemi pratici connessi, degli istituti concreti della " finanza ": l'importante è ch'esso non pretenda con ciò d'averci dato le *leggi* dei fatti che *descrive:* certo ogni proposizione ha da giudicarsi relativamente al suo scopo esplicito.

legge di gravitazione di Newton. A parte, ripeto, gli eventuali fini pratico-didattici, il largo posto fatto all'elemento puramente descrittivo degli istituti finanziari (che anzi spessissimo costituiscono e dànno essi stessi la trama fondamentale su cui i lavori, specie generali, di scienza delle finanze distribuiscono le considerazioni teoriche ed i problemi *economici* che vi ineriscono) è un indice indubbio delle più arretrate condizioni scientifiche in cui questa scienza si trova di fronte all'economia pura, non avendo, in parte notevole, tuttora superati i periodi iniziali della diretta raccolta del materiale empirico.

§ 3. — Una serie di elementi invece del tutto privi di carattere scientifico (1) è costituita da tutte le proposizioni contenenti suggerimenti, ricette, metodi, considerazioni essenzialmente *pratiche*, cioè essenzialmente *precettive*. Al proposito è opportuna una distinzione: spesso le proposizioni degli studi finanziari possono apparire in *forma* precettiva, mentre in sostanza questa non è che un modo, poco opportuno del resto, di porre i relativi problemi rigorosamente trattabili, ed il ragionamento può ridursi a forma *ipotetica* e quindi scientificamente formulato (se non risolto). Per es., negli studi dell'Edgeworth (2) e Carver il cosidetto " *principio del minimo sacrificio* „ del Mill è pure posto come in quest'A., ma la tesi precettiva (*si deve far sì per quanto è possibile che i sacrifici richiesti dallo Stato pesino con quel metodo che cagiona il minimo sacrificio collettivo*) (3) non è in realtà il pernio del ragionamento, è piuttosto la formulazione della condizione (" dato si voglia procurare il minimo sacrificio di

(1) Una volta tanto, la frase " *proposizione scientifica* „ nel nostro discorso significa una proposizione esprimente: o) deduzioni rigorose da premesse rigorosamente formulate in modo che la logica comune o la matematica possano giudicarne l'esattezza; o) leggi di fatti empirici trovate corrispondenti ai medesimi collo sperimento o colla pura osservazione.

(2) Vedi specialm. *The pure Theory of Taxation* (" Economic Journal „, 1907) ed anche i *Memoranda chiefly relating to Classification and Incidence of Imp. a. local Rates.*

(3) Esattamente la formula di S. Mill è " qualunque siano i sacrifici che lo Stato chiede ai contribuenti, si deve far sì che per quanto è possibile questi sacrifici pesino ugualmente su tutti, col qual metodo si cagiona il minimo sacrificio collettivo „. *Principi di economia politica* (" Bibl. dell'Econ. „; Lib. V, II, § 2).

utilità soggettiva ad un aggregato economico con un certo assorbimento di redditi da parte dello Stato „) da cui quello parte. Sotto questo aspetto quindi tali proposizioni rientrano in quelli che si possono considerare e chiamare i problemi *economici* della finanza (§ 5). Ma anche sotto questo aspetto la trattazione di problemi *pratici* — basata sul calcolo degli effetti di un certo provvedimento o sistema finanziario su di un certo aggregato economico e quindi sulla conoscenza: *a*) delle leggi (dinamiche) seguite dall'aggregato economico; *b*) dei *dati* di fatto o punti di partenza che l'aggregato presenta nel momento in cui si suppone intervenire l'alterazione costituita dal provvedimento finanziario — anche sotto tale aspetto, diciamo, può rientrare facilmente nell'empirismo o nella ricetta quando le leggi economiche ed i dati di fatto da cui si parte sono più o meno diversi dagli oggettivi: tutte le nostre conoscenze, è vero, non sono che nozioni inesatte della realtà oggettiva e quindi sempre le applicazioni pratiche delle nozioni scientifiche presentano un certo empirismo ed erroneità; ma come le conoscenze possono essere più o meno approssimate ai fatti o addirittura lontane da essi e imaginarie, così le applicazioni possono averne un grado d'empirismo diverso (1). E l'estensione dell'empirismo nei precetti finanziari può facilmente valutarsi pensando alle condizioni scientifiche delle teorie economiche generali o speciali da cui le conclusioni finanziarie

---

(1) Forse l'usuale distinzione tra *scienza* ed *arte* non rende esattamente le differenze sostanziali cui s'accenna nel testo. Per es. l'*arte medica* dei medici moderni è in realtà scienza perchè i suoi precetti spesso possono tradursi in forma condizionale e ipotetica, in cui le premesse rigorose sono costituite da conoscenze scientifiche sul funzionamento degli organi, effetti di sostanze chimiche o procedimenti sul corpo umano, ecc. L'arte medica degli empirici medioevali che deduceva i precetti da relazioni e nozioni imaginarie (s'immerga il corpo di un indemoniato nell'acqua bollente per uccidere gli spiriti maligni che sono in esso) malgrado l'analoga *forma* precettiva aveva carattere affatto diverso. Effettivamente più che di “ arte „ e “ scienza „ si dovrebbe parlare di proposizioni *scientifiche* (nel senso indicato) e proposizioni *non scientifiche*; e, nelle prime, di vari gradi di approssimazione alla realtà oggettiva (scienza *pura* e *applicata*), quando la scienza passa dalla trattazione delle più rigorose ipotesi generali, alla trattazione più approssimata e meno rigorosa dei casi e problemi concreti o per lo meno più vicini al fenomeno concreto, com'è appunto pei problemi finanziari teorici.

furono generalmente dedotte. Non prefiggendoci di fare una critica delle teorie economiche, tralasciamo gli infiniti esempi offertici dagli scritti finanziari del passato e del presente, di conclusioni e precetti più o meno evidentemente erronei perchè dedotti da leggi economiche non corrispondenti alle oggettive. La teoria generale dell'equilibrio e la difficoltà di costruire una dinamica rigorosa son venute gettando una luce sempre maggiore sulle difficoltà di trattare rigorosamente i problemi *economici* della finanza, i quali sono evidentemente dei problemi dinamici e presuppongono più o meno la conoscenza delle leggi *dinamiche* degli aggregati economici (§ 5). Per citare esempi su cui tutti gli economisti attuali concordano basterà ricordare i sistemi doganali conseguenza logica delle errate teorie economiche mercantiliste (1), l'imposta unica sulla proprietà terriera conseguenza delle errate teorie economiche fisiocratiche (2), le imposte uniche sulle " rendite „ fondiarie conseguenza delle errate teorie economiche della *rendita* (3), ecc. Ma, ripeto, l'economia

---

(1) Tali sistemi partivano da nozioni generali (economiche) perfettamente fantastiche, specie: 1) che la ricchezza di un paese s'identificasse con la quantità di moneta buona in esso esistente; 2) che i dazi proibitivi dell'entrata e, qualche volta, dell'esportazione fossero mezzi efficaci a far aumentare la quantità di moneta nel paese. Imprecisione di termini e di nozioni a parte, è chiaro che chi si fosse proposto il problema di aumentare la ricchezza del paese ed avesse dedotto rigorosamente da tali nozioni, sarebbe giunto *coeteris paribus* a risultati opposti ai propostisi.

(2) Locke (*Ragionamenti sopra la moneta, l'interesse del denaro, le finanze e il commercio* (Firenze, 1751), I, 136 e seg.) parte dal presupposto generale che tutti i tributi in qualsiasi forma pagati, vanno in ultima analisi a cadere sui beni immobiliari: ed i fisiocrati in genere (per es. Mirabeau: *Théorie de l'impôt*) dal presupposto che *prodotto netto* fosse esclusivamente quello dei beni agricoli, in modo che l'imposta più vantaggiosa e giusta è quella fondiaria: essi ammettevano, in sostanza, i fenomeni di *flow* (Fisher) solo pei " capitali „ terrieri, affermando che tutte le spese pubbliche dovevano essere pagate assorbendo i flussi di servizî (privati) dei soli capitali fondiari; eppoichè tutti i beni, anche i " mobiliari „ ed i " personali „, si presentano come flussi di servizî, si vede di leggieri che razza di *giustizia* distributiva poteva dedursi dalle teorie fisiocratiche.

(3) Citeremo, per non fare torti, H. George, che partendo (in *Progrès et Pauvreté*, Paris, 1887) dal concetto che il progresso della civiltà, ricchezza, tecnica produttiva, aumento dei capitali mobiliari e popolazione, fanno corrispondentemente aumentare la " rendita „ della terra, la cui dinamica do-

scientifica va ogni giorno dimostrando sempre più l'erroneità delle leggi economiche costruite, senza tener conto delle relazioni generali di mutua dipendenza che collegano nelle loro variazioni le quantità economiche e quindi delle applicazioni finanziarie che di esse si son fatte e si fanno. Qui mi limiterò a citare un gruppo di notevoli errori chiarito dall'applicazione finanziaria delle nuove teorie economiche: quello relativo alla tassazione del reddito complessivo e quindi del reddito *risparmiato* ed agli effetti delle corrispondenti imposte sulla produzione di risparmio e sul saggio dell'interesse. Partendo appunto dalle indagini del Fisher sui fenomeni di capitale-*stock* e reddito-*flow* e dalle condizioni generali in cui appaiono determinarsi i fenomeni di risparmio ed i saggi d'interesse, alcuni scienziati italiani, sovratutto l'Einaudi e, più tardi, il Prato e, per problemi particolari, il Cabiati, hanno dimostrato come la tassazione dei redditi risparmiati sia in realtà tassazione doppia o plurima degli *stessi* redditi ed hanno aperta la via ad una più rigorosa ricerca degli effetti delle imposte sul flusso totale dei redditi individuali e particolarmente sui saggi correnti d'interesse, tenendo conto appunto della coordinazione di questi alle altre quantità economiche (1).

---

mina così i prezzi dei prodotti, l'interesse, i salari reali, ecc., ne deduce come economicamente più opportuna l'imposta pressochè unica sulle rendite fondiarie. Ed anche in simile caso, ove si pensi essere i fenomeni di rendita, cioè le variazioni di prezzi dei servizî in stadî successivi d'equilibrio, coordinatamente a tali alterazioni degli equilibri precedenti, perfettamente analoghi per *tutte le altre specie* di servizî (di capitali mobiliari e personali), senza naturalmente contare le variazioni *negative* che subiscono i prezzi dei servizî delle terre, e senza accennare alle funzioni che collegano le variazioni di questi prezzi coi saggi d'interesse, colla popolazione, ecc., si scorge facilmente a quali risultati infinitamente diversi da quelli considerati dal George deve condurre un sistema concreto simile a quello da lui propugnato.

(1) Un'esposizione sintetica di queste indagini dell'Einaudi e sua scuola in rapporto ai problemi economici citati, si farà al § 6, rilevando qui come il non avvertire le doppie tassazioni inerenti alle imposizioni dei redditi risparmiati derivi effettivamente dalla concezione inesatta della " *produttività* „ dei capitali: se i capitali (e quindi anche le porzioni di redditi risparmiate e trasformate in nuovi capitali) si concepiscono *produrre* (in senso economico) *ex novo* dei valori economici, è naturale che si ritenga che queste *nuove* quantità economiche possono contribuire per sè, indipendentemente dal *capitale* che le crea: ma se si pensa che capitale e redditi non sono che il modo d'essere degli *stessi* beni, i secondi *risolvendo* sem-

§ 4. — Passiamo quindi alle teorie finanziarie che hanno propriamente il vero tipo *precettivo* e che sono purtroppo tuttora diffusissime nella " scienza delle finanze „. Le proposizioni cui accenniamo non sono riducibili a forma ipotetica o condizionale: appaiono come *imperativi categorici*, la cui origine è in realtà in sentimenti o interessi di individui o gruppi da cui lo scrittore consciamente o inconsapevolmente parte. Il largo posto fatto dagli scritti finanziari a questo genere di proposizioni, deriva appunto dalle interferenze tra fenomeni finanziari e sentimenti o interessi politici e sociali di gruppi, classi e teorie, ed anche dall'elemento giuridico che, col " diritto finanziario „, vi si connette, nel campo del diritto prevalendo in modo assai generale questo tipo logico di teorie, mentre è facile vedere come nell'economia pura e nella statistica esse siano oramai pressochè eliminate. In linea generale, mancano di carattere scientifico perchè: I) o deducono conseguenze definite (certi sistemi o metodi finanziari) da premesse indeterminate, lasciate all'arbitraria definizione soggettiva; II) o affermano le conseguenze di un rapporto logico (imperativo) di cui non è data la premessa (*si deve* mettere una certa imposta progressiva; *si deve* seguire un certo criterio di giustizia, ecc.), mentre in realtà derivano da certi sentimenti politici, morali, giuridici, ecc. degli scrittori, ai quali sentimenti è collegata una *certa definizione* di ciò che s'intende per " giusto „, " razionale „, " uguale „, ecc. Ma la scienza, per definizione, esclude tutte le proposizioni ed i sistemi che non esprimono rapporti logici tra nozioni definite e rigorose (sian queste i dati di fatto, o le uniformità accertate, o condizioni

---

plicemente *nel tempo* i servizî-valore capitalizzati, con un certo saggio di sottovalutazione, nel capitale-stock, risulta evidente che tassando la porzione del capitale-stock costituita dal reddito risparmiato e tassando i servizî-valore in cui esso si risolve, si distende successivamente, si tassa due volte lo stesso reddito. Una curiosa contraddizione troviamo al riguardo nei *Principles* del Pierson, che dopo aver accolto nel I vol. la teoria dell'interesse del Böhm-Bawerk, nega nel IV (*The revenue of the State*, London, 1912, pagg. 570-2) che la tassazione del reddito risparmiato (capitalizzato) e quella dei redditi successivi di questo capitale, costituiscano doppie o plurime tassazioni, perchè altro è l'imposta sul " reddito „, altra l'imposta sul " capitale „; ma se egli stesso aveva implicitamente riconosciuto che capitale e redditi (cioè l'interesse, che ne è una forma) non sono che diversi modi d'essere o di considerarsi degli *stessi* beni!

astratte ma sufficientemente definite) o fatti oggettivi. Dai primi ai più recenti scritti finanziari l'intervento di queste proposizioni è, più o meno largo, ma si può dir continuo: qualche esempio basterà. Già il Guicciardini esponendo gli argomenti pro e contro un'imposta progressiva, la *decima scalata*, formula gli imperativi categorici e le proposizioni precettive che comunemente s'incontrano negli scritti finanziari: i concetti generici di " eguaglianza „ e " giustizia „ appaiono già servire alle più diverse ed opposte deduzioni finanziarie (1).

---

(1) *Opere inedite* (Firenze, 1867), vol. X: due discorsi su " La decima scalata in Firenze „: un acuto rilievo critico ne ha fatto G. Ricca Salerno: *Storia delle dottrine finanziarie in Italia*, 36 e s. Gli avversari dell'imposta sostengono ch'è " ingiusta e dannosa, perchè i tributi devono essere eguali e uniformi e non possono senza gravissimi inconvenienti alterare le condizioni economiche de' cittadini „. I fautori affermano che " quell'imposizione deve chiamarsi uguale, uniforme che grava tanto il povero quanto il ricco: l'eguaglianza di un tributo non consiste in ciò che ognuno paghi la stessa quota, ma nel far sì che il pagamento riesca tanto grave all'uno quanto all'altro „. Inoltre " questa maniera (progressiva) d'imposizione è da riputarsi utile all'universale e tanto più utile... avvegnachè giova assai a moderare gli averi privati, a togliere o mitigare la grande disparità delle fortune e a diminuire il soverchio ammasso delle ricchezze, da cui derivano conseguenze assai tristi sulla economia „. E il buon Guicciardini risponde " l'eguaglianza delle imposte deve intendersi nel senso che ciascuno paghi in proporzione dell'intiera sua entrata .. L'imposta perchè sia veramente eguale e uniforme dee prelevare dalle ricchezze d'ognuno una quota proporzionale, lasciando intatte le relazioni ordinarie tra cittadini „. Su tal tono la storia potrebbe proseguire all'infinito ed infatti è proseguita fino al sec. XX. I Medici hanno subito dopo dimostrato la verità delle *ragioni* dei sostenitori dell'imposta servendosene per decimare i ricchi papaveri che facevan loro ombra: " è notissimo quante nobiltà, quante ricchezze furon distrutte da Cosimo e poi colle gravezze... „ (Guicciardini: *Opere* cit., II, 41-3). Lasciamo da parte le proposizioni relative all'*uguaglianza* del gravame psicologico delle imposte, che tutt'oggi dopo oltre 4 secoli la scienza non conosce che assai grossolanamente; o quelle relative alle *tristi conseguenze* della disuguaglianza delle fortune sull'economia, ecc. I sofismi per noi qui più interessanti sono questi: si deducono conseguenze pretese *logiche* dalla nozione *uguaglianza*, indefinita, anzi interpretata in modo perfettamente contrario dai due partiti, i quali non s'accorgono della perfetta arbitrarietà della nozione da cui partono. Perchè essi si preoccupano tanto di riferire all'idea d'uguaglianza o giustizia tali diversi contenuti e deduzioni? Evidentemente perchè l'idea d'uguaglianza genericamente risponde ad un *sentimento* generale sia loro sia dei gruppi cui si dirigevano, sentimento che bada forse meno al contenuto *specifico* che

Nei regalisti del rinascimento e dello Stato assoluto la " vera uguaglianza „ diventa il " diritto del principe „ o alcunchè di simile (1), mentre nel sec. XIX prevalgono assolutamente i

---

alla definizione generica delle tesi sostenute. Proprio come la diplomazia ed i politicanti attuali fautori di misure militariste, i quali quasi sempre le giustificano dicendo ch'esse sono destinate a *conservare*, a *procurare*, ecc. la " Pace „. La pace veramente c'entra spesso come i cavoli a merenda, ma i politicanti sanno bene che quest'idea sentimentale ha tuttora malgrado tutto un grande fascino per le collettività contemporanee e vi fanno un omaggio tanto illogico quanto ipocrita. L'altro sofisma è questo: ammessa anche definita la vera uguaglianza, perchè noi dobbiamo realizzarla nei sistemi concreti? I ragionamenti succitati presuppongono evidentemente questo come una *verità*, un *assioma* indiscutibile ed elementare; ma in effetto non c'è logico al mondo che possa darci una simile dimostrazione. Gli scrittori non osano neppure pensare di sostenere tesi come queste: " si deve realizzare il sistema d'imposta *più ingiusto*, più *disuguale*, più *ricco di privilegi* possibile „: pure questa tesi ha, scientificamente, lo stesso valore della precedente. Perchè dunque essa è generalissimamente scartata? evidentemente solo per l'esistenza, negli scrittori e negli aggregati sociali in cui vivono, di un sentimento di giustizia e di uguaglianza che il secondo genere di tesi urterebbe direttamente. Questo è il *fatto* e non altro: la *giustizia* di un provvedimento finanziario non può dunque mai essere una verità *oggettiva* o logica, come lo sono la legge di caduta dei gravi, le geometrie non euclidee, molte leggi dell'economia pura: ma una verità *soggettiva* per il sentimento di un gruppo più o meno largo degli individui degli aggregati sociali.

(1) C. Mancini (*De juribus principatum*, Roma, 1596) dimostra il diritto de' principi d'imporre tributi, *coll'autorità* d'Aristotile e de' santi padri: nuove imposte possono ordinarsi quando v'è giusta causa: poichè l'imperio delle leggi, la quiete dei popoli, il bene comune si fondano su questo diritto che spetta ai principi: è utile generale che il principe sia forte: è precetto della legge divina ch'ei riceva tributi e sussidi dai soggetti. A. Caputo (*De regimine Rei publicae*, Napoli, 1621): il diritto d'imporre gravezze o collette è illimitato nei regni stabiliti mediante conquista, ma ha certi limiti in quelli fondati per elezione o con atto costituzionale (cit., 304). T. Hobbes (*Elementa philosophica de Cive* (1642), Amsterdam, 1760): riconosce al sovrano diritto illimitato d'imporre tributi, ma dice " legge naturale „ l'uguaglianza dei doveri tra cittadini, quindi l'equivalenza tra i beneficî che ricevono dal principe e gli oneri che ne sopportano: " *aequalitas* autem hoc loco intelligitur non pecuniae sed oneris, hoc est aequalitas rationis inter onera et beneficia „ (cit., 303-4). G. Bornitz dice " Princeps *omnia* possidet, haud tamen possidet dominio sed imperio „. I gruppi politicanti delle democrazie moderne quando nazionalizzano industrie private, produzioni già avviate, quando distribuiscono le terre libere (Australia, Argentina, posse-

sistemi o le teorie ispirate alla " giustizia ", alla " migliore distribuzione " della ricchezza ed altre formule esprimenti i sentimenti umanitari prevalenti. Alcuni argomenti largamente trattati negli scritti finanziari sono spesso considerati essenzialmente da tale punto di vista: ad es., i cosidetti " principî della ripartizione delle imposte " presentano un lato affatto soggettivo. A. Smith scrive: " ognuno deve contribuire ai carichi pubblici per quanto è possibile in proporzione delle proprie facoltà ": P. Rossi, N. W. Senior, v. Hock, G. B. Say, gli economisti della *benefit theory* ricercano la " base razionale ", deducono il *dovere* del pagamento dei tributi, nei servigi che si ricevono dallo Stato in modo che prestazioni e controprestazioni corrispondano approssimativamente. Stuart Mill pone il celebre principio del minimo sacrificio su cui s'imperniarono molte teorie del genere e logomachie pure numerose (1). Le teorie sull'*im-*

---

dimenti coloniali d'Africa, ecc.) spesso a gruppi sovvenzionati che poi li sosterranno, non portano in fondo, col " diritto dello Stato " ch'esso ha e ripiglia quando crede, una ragione diversa.

(1) Affermandosi che si deve stabilire un sacrificio *uguale* o viceversa uno *proporzionale*; una certa o una cert'altra progressione nell'imposta; che si debbono, o anche non, esentare i redditi più bassi fino ad un certo o ad un cert'altro punto, ecc. M. Pescatore dice: " per serbare una vera e costante proporzione colla facoltà di contribuire, sarebbe mestieri nel concetto di una giustizia assoluta adottare nella ripartizione delle imposte una proporzione progressivamente crescente col crescere degli averi di ciascun individuo; però la proporzione uniforme, benchè non consentanea all'esatta giustizia, si debba accettare come regola per la necessità di sostituire una norma legale agli apprezzamenti arbitrari; infine, in certe eccezioni conviene ritornare dalla mera legalità alla ragione della giustizia assoluta " (*La logica delle imposte*, 1867, p. 17 s.). Se si chiedesse che cos'è e vuole la giustizia assoluta, si finirebbe per rispondere che è quella che vuole appunto quel certo sistema, o un giro logico che può ad alcunchè di simile ridursi. La scienza non potrà mai *dimostrare* che cos'è la giustizia, l'onestà, l'uguaglianza vera, ecc.: la definizione è puramente nelle valutazioni *subiettive* dei concetti stessi; eppercìò si capisce come implicitamente partendo da *una certa idea* di ciò che è giusto si debba nelle deduzioni riscontrare i giri viziosi di questo tipo: " giustizia è ciò che esige, il principio da cui emanano quelle certe norme, provvedimenti, sistemi pratici (che si dicono giusti) "; viceversa, " quelle norme, ecc., *devono porsi perchè* corrispondono a giustizia, ecc. ". In genere quindi chi usa di simili concetti imprecisi e indefiniti, quando è stretto dalla necessità di definizione o dimostrazione oggettiva non può che riuscire o ad una pura eguaglianza di concetti, com'è quella accennata, o a contraddirsi colle deduzioni.

posta successoria presentano altre numerose tesi precettive: " l'imposta successoria — o certe imposte successorie, ecc. — deriva, ha la sua ragion d'essere, deve porsi, è spiegata, ecc., *pel diritto dello Stato ad esser coerede* o successore in mancanza di certi parenti " (Bentham, Wagner, Umpfenbach, Scheel); opp. " pel fatto che, essendo il lavoro personale il mezzo d'acquisto più legittimo di proprietà, lo Stato ha il diritto e dovere d'imporre particolare prestazione a chi acquista ricchezze senza sforzi produttivi " (Baron). Il diritto dello Stato che *determina* (relazione causale *oggettiva*) l'imposta successoria è un'entità proprio metafisica come l'investimento divino dei regalisti medioevali o la giustizia assoluta dei fautori dell'imposta progressiva. Altri interessanti esempi ci fornisce la teoria della tassazione degli *unearned increments* (Wagner, Hobson, ecc.) dedotta dal " principio di tassare maggiormente i redditi dei capitali non personali e più moderatamente quelli dei puri capitali personali " (specie se operai): a parte la mancanza d'un criterio oggettivo per decidere qual è il reddito *guadagnato o non*, l'arbitrarietà del ragionamento è insita evidentemente nell'affermazione di dover imporre in modo speciale certi redditi in base al modo del loro prodursi (1). Senza oltre indugiarci e pur rile-

(1) Gli elementi relativi a questo problema sono lucidamente esposti da B. Griziotti in *Le imposte sugli incrementi di valore nei capitali e sulle rendite dei redditi* (interessi, salari e profitti) (Caserta, 1912). L'A. (cit., §§ 20 e 21) giustamente dice che non è oggetto della ricerca scientifica scegliere sui *principî* o norme da cui si desume quel modo d'imposizione; ma crede che lo svolgersi delle imposizioni su certuni dei fenomeni di rendita derivi da una coscienza etica che andrebbe prevalente nella moderna politica finanziaria e sociale, per cui si tende a distinguere la natura dei vari proventi economici, colpendo ecc. (" allo studioso degli ordinamenti tributari... riesce interessante conoscerne l'intima forza etica in armonia coi principî, che regolano tutto quanto il sistema tributario esaminato nel suo divenire. Le ragioni, per cui si può sostenere una diversificazione del tributo rispetto alle rendite, si possono trovare nelle stesse norme etiche fondamentali, che ispirano la legislazione tributaria de' più progrediti paesi europei ": cit., 61). Il G. dunque afferma che le *cause* del fenomeno stanno in un *certo* modo d'essere dei *sentimenti etici* oggi prevalenti. In genere i sentimenti morali degli aggregati contemporanei, si può ammettere entrino tra le condizioni che determinano la crescente adozione da parte dei gruppi governanti di certe imposte sulle *rendite*; ma le *cause* non sono affatto solo o principalmente in ciò. Certo nei richiami dei gruppi politici che sostengono tali

vando come anche taluni fra i più colti e profondi maestri di scienza delle finanze accolgano ragionamenti di questo tipo, come il Seligman (1), concluderemo rilevando la generale manchevo-

---

imposizioni si invocano i sentimenti e principî di giustizia, e simili: in realtà queste forme programmatiche sono il *mezzo* adoperato da certi gruppi politici per giungere al potere e rimanervi appoggiandosi e sollecitando appunto i sentimenti di altri gruppi il cui voto, appoggio, ecc. deve aiutarli a salire. Ma che sia la *coscienza* generale di *giustizia* che determina queste imposizioni non si può proprio ammettere, se si bada che le imposizioni tendono a colpire *alcuni* gruppi di rendite (nel senso generale bene definito dal Griziotti stesso) e niente affatto gli altri: può essere un sentimento di giustizia a consentire ciò? Viceversa è certissimo che se veramente si presentasse la possibilità di *imporre*, con certi tassi, *tutti* i fenomeni di rendita che avvengono in un aggregato, molti dei gruppi politici che oggi sostengono le tassazioni contro gli *unearned increments* di *qualche* limitata categoria di capitali immobiliari, si guarderebbero bene dall'aderirvi e sostenerla. In Germania ed in Italia le tasse sulle aree fabbricabili sono state votate non solo da deputati della finanza mobiliare ed industriale, ne' cui redditi i fenomeni di rendita hanno larghissimo posto, ma da proprietari terrieri sostenitori della politica agraria protezionista, che domani sono prontissimi a votare nuove protezioni o premî alle produzioni agricole, fonte per loro di *rendite* più o meno cospicue. In Inghilterra in questi giorni si sono avute esplicite accuse, non negate, ai più caldi fautori delle imposizioni sulle *rendite* dei capitali fondiari, tra cui lo stesso Lloyd George, di lautissimi guadagni in base ad incrementi di valore di azioni da essi possedute: il Lloyd George ha negato, e certo con ragione, di aver egli con atti di governo, determinato quegli incrementi di valore, ma non ha affatto negato di posseder le azioni e di averne goduto le *rendite* e neppure ha detto di esser pronto a proporre un progetto di tassazione delle rendite positive dei *valori mobiliari*. Ora, tutto ciò, ch'è lineamento generalissimo del fenomeno concreto, come può accordarsi coi principî etici di giustizia eguale per tutti? La " coscienza etica moderna „ serve quando l'hanno gli elettori, non quando debbono obbedirvi, con rigore logico, gli eletti.

(1) Specie ne *L'impôt progressif en théorie et en pratique* (Paris, 1909): vi sostiene l'imposta progressiva in base al concetto della *capacità* individuale. Nell'introd. de *L'impôt sur la Revenu* (Paris, 1913) dice: " Au milieu du conflit des intérêts divergents et de l'effort que tente chaque classe sociale pour rejeter le fardeau de l'impôt sur une autre classe, nous discernons le progrès lent et laborieux de l'idée de justice dans l'impôt et l'effort fait par la société considérée dans son ensemble, pour réaliser cette justice „. Il concetto è ripreso e svolto negli *Essays in Taxation* (London, 1913), specie Ch. IX e X, e s'impernia sulla tesi del crescente prevalere nei sistemi finanziari concreti dell'idea e del principio di giustizia, cioè di una certa giustizia.

lezza scientifica di tutti questi sistemi insita nella mancanza o nella insufficiente determinazione delle premesse affidate a nozioni e termini imprecisi e definibili in modi diversissimi secondo i sentimenti o i punti di vista particolari, come sono i concetti di " diritto ", " giustizia ", " razionalità ", " eguaglianza " e così via. È inoltre da notarsi che spesso tali tesi soggettive sono il riassunto o la formulazione di sentimenti generali più o meno diffusi negli aggregati ad esse contemporanei: il che spiega in parte l'apparente connessione che spesso v'è tra queste affermazioni ed i fenomeni finanziari oggettivi e loro cause. I sistemi finanziari sono sostenuti, reclamati (o combattuti) dai gruppi politici (magari indipendentemente dall'*effettivo* modo di realizzarsi e dalle conseguenze dei sistemi stessi) in base ed appoggiandosi a quelle idee generali di giustizia, diritto, opportunità, che, mentre soddisfano i sentimenti di gruppi dell'aggregato, concordano colle *cause* espresse dagli scrittori, dimodochè queste possono apparire corrispondere a quelle oggettive. Spiego meglio. Uno scrittore sostiene l'imposta progressiva, con un certo tasso, ecc., perchè risponde al minimo sacrificio della collettività ed è conforme alla giustizia ed alla ragione, cioè a quella giustizia e ragione (a quei *sentimenti* di giustizia) che vogliono appunto l'imposta progressiva, l'esenzione dei redditi minimi e così via. Vi sono nell'aggregato vari gruppi cui quest'imposizione sembra l'ideale della giustizia, del loro diritto, della felicità generale. Vi sono dei gruppi *politici* che, in piccola parte, per avere sentimenti uguali, ma sovratutto per giovarsene appoggiandovisi per salire o mantenervisi, sostengono il programma dell'imposta progressiva e l'attuano. In concreto l'imposta progressiva non riesce affatto una logica applicazione dell'ideale di giustizia, perchè colpisce alcuni e non altri, cade con saggi effettivi disparati, spesso altissimi redditi mobiliari vi sfuggono, e così via: il giuoco dei politicanti può magari aver esplicitamente previsto queste contraddizioni coi principî generali sostenuti come la ragion d'essere del provvedimento concreto. In ogni caso il *perchè* del determinarsi nel fenomeno concreto delle tassazioni progressive non sarebbe solo nei sentimenti generali che vi s'accordano, ma anche nei rapporti, movimenti, calcoli, ecc. delle classi politiche, nelle leggi più generali cui questi movimenti degli aggregati politici sono soggetti e così via: ma ad una

osservazione superficiale quei sentimenti di giustizia, invocati dai politicanti, genericamente sentiti dai gruppi più vasti su cui quelli si appoggiano, registrati dagli scrittori di cose finanziarie, possono apparire la *causa* di questo fenomeno finanziario.

§ 5. — Passiamo ora agli elementi propriamente scientifici che secondo noi materiano la " scienza delle finanze „: di questi, quelli più noti e generalmente elaborati con maggior ampiezza e rigore son quelli che si possono chiamare i *problemi economici della finanza*. Questi problemi non riguardano ancora le uniformità seguite dai fenomeni finanziari in sè stessi: per avvertirli e trattarli non è indispensabile conoscere la natura e le leggi dell'attività sociale per cui una parte della ricchezza privata viene assorbita, attraverso gli " enti pubblici „, da gruppi dell'aggregato che l'impiegano *in parte* in servizî ofelimi ed utili agli individui che hanno fatto la prestazione tributaria. Il fatto. il provvedimento, l'ipotesi, i sistemi finanziari in questo genere di problemi costituiscono essenzialmente il *punto di partenza*, *i gruppi di condizioni*, cui si riferisce una certa serie di calcoli economici (puri): in altri termini, i problemi *economici* della finanza derivano da ciò che i fatti finanziari costituiscono (in concreto) o si possono presumere (astrattamente) costituire un dato interessante ed interferente direttamente l'equilibrio economico: la vendita (o compera) di beni demaniali, l'assunzione di monopoli pubblici con certe condizioni, un'imposta o serie d'imposte, un dazio doganale, ecc., possono essere analizzati esclusivamente nelle serie di azioni *economiche* (pure) che derivano dal loro intervenire o possono calcolarsi supponendoli introdotti in un certo equilibrio economico. Come caratteri essenziali di questi problemi rileveremo quindi: *a*) essi sono deducibili e risolvibili, in base all'*ipotesi economica* pura (§ 1) potendone avere la soluzione (naturalmente più o meno approssimativa secondo il grado delle nostre conoscenze) considerando le sole azioni economiche logiche che ne derivino; *b*) essi sono pressochè esclusivamente *problemi dinamici*, costituendo i fatti finanziari (verificatisi o ipotetizzati) variazioni introdotte nelle condizioni di un certo equilibrio (1); *c*) presuppongono oltre le conoscenze

(1) Il BARONE ne' suoi acuti *Studi di economia finanziaria* (" Giornale d. Econ. „, 1912) dice: " nella sua più grande generalità lo studio della trasla-

delle uniformità dei fenomeni economici impliciti in *a*) e *b*) la conoscenza *dei dati di fatto* di quel particolare equilibrio concreto in cui intervengono o si suppongono intervenire tali variazioni. Il carattere *a*) presuppone la conoscenza dell'ipotesi e deduzioni più generali dell'economia pura e lo sviluppo ed elaborazione che nell'ultimo trentennio di studi questa ha avuto contribuiscono largamente a consentire un più rigoroso trattamento di tali problemi. In quanto problemi *dinamici* essi presuppongono una conoscenza più o meno rigorosa delle leggi, sia pur parziali, della dinamica economica: ma l'economia sintetica mentre ha già formulate le condizioni più generali della *statica* economica, non ha nel campo delle variazioni concomitanti dell'aggregato fatto che tentativi iniziali (1). Dato questo i problemi dinamici derivanti dai fenomeni finanziari non potranno trattarsi che in modo meno rigoroso di quello raggiunto pei

---

zione di un tributo è un problema di dinamica economica..... È quello delle variazioni di tutte le quantità economiche dell'equilibrio (prezzi, consumi, risparmio, composizione dei coefficienti di produzione, ecc.) per effetto di un'imposta „.

(1) Ricorderemo anzitutto l'appendice (“ Le equazioni dell'equilibrio dinamico „) dell'art. del Pareto: *Le nuove teorie economiche* (“ Giorn. degli Econ. „, sett. 1901), le due *Note* (alla R. Accademia dei Lincei; Roma, 1912): *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica* del prof. L. Amoroso; e l'articolo del Pantaleoni: *Di alcuni fenomeni di dinamica economica* (“ Giorn. degli Economisti „, sett. 1909). La dinamica economica non ha ancora superato il problema metodologico della scelta fra questi due modi di trattazione dei problemi dinamici: I) si considerano *discontinue* le variazioni dell'aggregato: il fenomeno dinamico è considerato in equilibri (statici) *successivi*, per cui variate le condizioni determinanti il precedente stato d'equilibrio, è variata la configurazione dell'equilibrio stesso, con un intervallo sufficiente a che l'aggregato abbia raggiunto il nuovo equilibrio: ipotesi meno vicina ai fatti ma forse più comoda, come ha pure mostrato il Barone, nel trattamento di problemi dinamici; II) si considerano *continue* (o quasi-continue) le variazioni dell'aggregato economico: da quest'ipotesi dell'infinitesimalità del tempo della variazione ne viene la possibilità di applicare alla dinamica economica il principio di d'Alembert, deducendo dalle equazioni dell'equilibrio statico le equazioni della dinamica, aggiungendo alle componenti delle forze applicate, le componenti delle forze d'inerzia del sistema economico, dato, come ha osservato giustamente l'Amoroso, che in economia esista alcunchè di simile alle *forze d'inerzia* della meccanica e le componenti risultino *calcolate*, e non solo indicate da funzioni-indice come nella più recente economia paretiana.

problemi dell'equilibrio generale statico, sovratutto basandosi su uniformità dinamiche parziali e con carattere maggiormente empirico. Il che non toglie che le nozioni recate dalle nuove teorie economiche e leggi dell'equilibrio statico non siano largamente utilizzabili anche per un più rigoroso trattamento, in genere, dei problemi (speciali) finanziari: la formulazione delle più generali condizioni in cui appaiono determinarsi i prezzi, i saggi d'interesse, i profitti, le " rendite ", le quantità scambiate, consumate, risparmiate, e relazioni che tra esse intercedono, consente di meglio stabilire e svolgere i ragionamenti relativi ai rapporti tra i fatti finanziari ed i gruppi dei prezzi o quantità economiche, quali appunto la ricerca degli *effetti* di un certo sistema d'imposte sulla configurazione generale delle ofelimità (sono note le proprietà *generali* delle ofelimità dirette), sui *profitti* (equilibrio generale con caso di monopolio) sui salari-stipendi, sulle " rendite " (si parte dalla teoria *dinamica* delle rendite); effetti delle imposte di fabbricazione, dei dazi doganali: traslazioni dei tributi in genere, e così via.

§ 6. — L'applicazione delle più rigorose cognizioni dell'economia pura nello studio dei problemi economici della finanza è larga e visibile nei più recenti studi finanziari. A volo d'uccello ricorderò i brillanti tentativi del Carver ed Edgeworth d'impostare il problema della distribuzione del carico tributario col minimo sacrificio di ofelimità, basandosi sulla conoscenza approssimativa della *forma* generica delle curve d'ofelimità dei redditi individuali, per quanto il problema presupponga evidentemente anche la *comparabilità* delle curve individuali, che è, allo stato attuale della scienza, impossibile. Applicazione di nozioni economiche rigorose troviamo negli studi finanziari del Wicksell, del Seligman (*The Shifting and Incidence of Taxation*, New York, 1910) e Pantaleoni (*Teorica della traslazione dei tributi*, Roma, 1882) sui fenomeni di traslazione, incidenza percussione dei tributi, che investono talora le relazioni generali dell'aggregato e presentano l'influenza delle teorie edonistiche che in parte ispirano gli A. Il Pantaleoni ha pure nell'acuto art. *L'identità della pressione teorica di qualunque imposta a parità di ammontare e la sua semiotica* (" Giorn. d. Econ. ", marzo 1910) applicato e dedotto nuovi concetti finanziari, pure analizzati dal Gobbi, dall'interdipendenza delle ofelimità dei gruppi di beni (di consumo diretto o risparmio)

in cui il reddito si trasforma. I recenti *Studî di economia finanziaria* del Barone che in molti punti accolgono le teorie dell'Einaudi (concezione generale del fenomeno finanziario) Pantaleoni e Seligman (traslazione delle imposte) in molti punti, oltrechè schematizzare in eleganti dimostrazioni geometriche problemi economico-finanziari già trattati, pongono i medesimi dal punto di vista delle nozioni dell'equilibrio generale, come nel tentativo di calcolare i più generali effetti di alcune principali forme d'imposta in base alle curve di distribuzione ed alla composizione dei redditi privati (risultanti dall'indagine statistico-empirica). L'Einaudi ha trattato con grande acume e rigore molti problemi economici della finanza, specie negli *Studi sugli effetti delle imposte*, in parecchi articoli staccati e nei tre volumi delle sue recenti *Lezioni di scienza delle finanze* (Torino, 1913) per altro aspetto interessantissime. Ma l'applicazione veramente fondamentale che, secondo noi, l'Einaudi ha fatto delle concezioni delle nuove teorie economiche ai problemi finanziari, in forma sì organica ed efficace certamente primo sulla letteratura internazionale, è l'introduzione nei problemi finanziari delle indagini fisheriane sul reddito concepito come il *flusso* dei servizi dei beni che nel loro aspetto statico appaiono come *stock* di servizi e valore, capitalizzanti i servizi stessi (ofelimità, o valore monetario) in base ad un saggio di sottovalutazione che si determina in funzione di tutte le altre quantità dell'aggregato economico (1). Quest'introduzione basata su una limpida appros-

(1) Vedi la oramai illustre Memoria alla R. Accademia delle Scienze di Torino (estate 1912) *Intorno al concetto di reddito imponibile e di un sistema d'imposte sul reddito consumato* ed il II volume delle sue *Lezioni* (pagg. 265-316). È essenziale notare la differenza delle indagini del Fisher sui concetti di capitale-*stock* e reddito-*flow* dalle innumerevoli definizioni *formali* che di essi si son fatte e si fanno. Dal punto di vista scientifico le pure definizioni non sono che *cartellini* arbitrariamente posti su certi gruppi di fatti o rapporti oggettivi o ipotetici: se altro carattere non avessero le proposizioni fisheriane, non grande contributo potrebbero dare. In realtà esse costituiscono una limpida rappresentazione appunto di quei rapporti e fatti *oggettivi* degli aggregati economici su cui si moltiplicano i ricami delle discussioni sul concetto di reddito: prospettando come gli individui dell'aggregato, in base alle condizioni generali di esso, considerino i beni economici, rispetto all'elemento (alla serie di *ostacoli*) *tempo* o come *stock* (aspetto statico, prospettivo delle ofelimità o dei valori loro) dei ser-

simazione ai fenomeni oggettivi, relativi al determinarsi ed ai rapporti dei beni *nel tempo* nell'equilibrio, non solo consente di lasciar da parte le inutili logomachie su concetti arbitrari di " reddito " e " capitale " così diffuse anche nella finanza, ma ha condotto l'Einaudi ad alcuni teoremi generali sugli effetti

---

vizi o come *flussi*, realizzazioni nel tempo dei servizi attesi dai beni (aspetto dinamico) e come in questo modo di considerarli applichino un saggio di capitalizzazione (spesso detto d'interesse) che evidentemente si determina contemporaneamente agli altri dati dell'equilibrio. Per questo ci sembra che le critiche che furon rivolte alle definizioni fisheriane del capitale e reddito non abbiano affatto avvertito questa loro essenza: una infinità di scrittori si è turbata nel veder attribuita la parola *reddito* a *tutto* il flusso di servizi che in un certo periodo un individuo ha disponibile, senza la sacramentale condizione che " non si intacchi ", " sia rispettata ", ecc., la *fonte produttiva* o il *patrimonio iniziale* o simili. Che questa condizione e quindi definizione possa riuscir utile trattando dei problemi pratici finanziari è possibilissimo, ma che per la scienza il *reddito* sia precisamente questo e non altro è evidentemente del tutto arbitrario: a seconda degli scopi pratici noi possiamo, nel flusso dei servizi disponibili degli individui, comporre quei raggruppamenti che più riusciranno opportuni *a certi scopi*, ma dovremo sempre riconoscere questa opportunità affatto *relativa*. Rileverò ancora che le definizioni del Fisher non sono per nulla in contraddizione coi concetti espressi sul *capitale* dal Pareto (*Manuale*, II, §§ 17-33) in cui il P. chiama *capitali* i beni di *lento* consumo; b. di consumo gli altri: sono semplicemente due *aspetti diversi* da cui si considerano i beni, per quanto sian usate le *stesse* parole (capitale). Infine osserviamo che l'accogliere queste definizioni dei rapporti dei beni-servizi nel tempo non significa accogliere la teoria del Fisher della determinazione del saggio di capitalizzazione o interesse svolta in *The rate of interest* (New-York, 1907); rimandiamo per ciò il lettore alle appendici matematiche dei capitoli VII ed VIII, ove è visibile l'insufficienza delle equazioni schematizzate dal F. a determinare le variabili rappresentate dal saggio d'interesse; senza diffonderci, basta osservare che nel gruppo II di equazioni ($f = F(y' + x', y'' + x'' \ldots)$ cioè $f_1' = F_1'(y_1' + x_1'$, ecc.) il Fisher ha trascurato gli stessi concetti espressi nel ch. VI, § 10 e seg., ammettendo determinabili gli f senza tener conto di quelli che egli chiama assai genericamente gli elementi, caratteri *psicologici* influenti sui saggi soggettivi; e che pei gruppi degli y il Fisher esprime le condizioni determinanti le scelte negli *effective ranges of choice*, ma non i limiti *quantitativi* di ogni *range*, che appunto sono determinati da altre equazioni dell'equilibrio omesse dal F. Queste, ed altre trascuriamo, obiezioni sono essenziali per un sistema che pure si impernia sulla contemporanea determinazione del saggio e di un largo gruppo di quantità economiche; ma non toccano affatto la descrizione sintetica dei fenomeni di *stock* e *flow*.

delle imposte di alto valore scientifico ed interessanti anche la teoria economica: particolarmente alla dimostrazione delle doppie o multiple tassazioni insite nell'imposizione di tutto il reddito *guadagnato* anzichè del solo reddito *consumato*, dalla quale è aperto il calcolo ad un più largo e rigoroso calcolo degli effetti dei varî sistemi d'imposte sulla configurazione generale dei gusti (privati) individuali e quindi sulle quantità consumate immediatamente e risparmiate e sul saggio corrente d'interesse. L'opera dell'Einaudi va rilevata appunto per questo suo carattere *analitico*, oltrechè per le nozioni di fatto nuove cui conduce: in un argomento in cui i metodi sentimentali e precettivi sono così diffusi, come appunto quello delle imposte dirette e indirette e della distribuzione del carico tributario sui redditi guadagnati o sui consumi, l'E. pone scientificamente il problema definendo rigorosamente la *condizione* dell'uguaglianza proporzionale che pone come ipotesi (cit. Cap. II) arbitraria bensì, ma sufficientemente definita al fine di confrontarvi le deduzioni o proposizioni che vi si riferiscano (1). Inoltre l'E. (vedi cit. Cap. IX) considera

---

(1) L'esenzione del reddito *risparmiato* o viceversa la tassazione del *consumato* non sono quindi in questo sistema degli imperativi categorici derivati dal sentimento implicito in chi scrive o in chi è previsto ascoltare: l'essenza delle indagini non è diretta a dimostrare che *si deve* esentare il risparmio, ma che se del reddito totale *guadagnato* (secondo la definizione del cap. I) si impongono anche le frazioni risparmiate e reinvestite in trasformazioni produttive, una o più volte, nuovamente tassandole nei redditi cui questi investimenti dan luogo, si tassa il *flow* primitivo prima nel momento del guadagno (entrata) che l'individuo ne fa, poi nella forma di tutti i servizî successivi in cui si risolvono i capitali o *stock* nei quali il risparmio stesso s'era trasformato. Naturalmente i politicanti che manipolano i sistemi finanziari concreti possono infischiarsi di queste verità, e tassare anche dieci volte gli *stessi* redditi se loro fa comodo: ma la scienza dirà inesorabilmente ch'essi in barba a tutti i principî di giustizia e uguaglianza che son soliti strombazzare, colpiscono altrettante volte lo stesso *flusso* di servizi di alcuni capitali e non quelli di molti altri. Una netta impostazione del problema degli effetti delle imposte sul saggio dell'interesse l'E. fa nella densa nota delle pagg. 287-89, considerando il saggio d'interesse un dato dell'equilibrio generale ed ipotetizzando i possibili effetti dalle possibili conseguenze, nelle variazioni dell'aggregato stesso, delle imposte (cioè di quel certo loro aumento). Un punto di capitale importanza qui ci preme mettere in rilievo: simile problema non può porsi in modo scientifico *indipendentemente* dalle destinazioni che la ricchezza assorbita attraverso gli enti pubblici avrà; il

anche implicitamente l'aspetto *sociologico* del fenomeno (concreto) rilevando le tendenze che nei procedimenti finanziari specie moderni si svolgono verso la tassazione dei soli redditi *consumati*, sia pure per l'influenza indiretta delle relazioni *economiche* collegate a tale metodo. Coll'Einaudi, hanno applicato ai problemi economici della finanza le indagini fisheriane il Prato (1) approfondendo, dopo una brillante rassegna critica delle teorie sul reddito, il problema dell'imposizione dei redditi *consumati*. anche dal punto di vista delle sue *concrete* difficoltà; ed un acuto economista matematico, il Cabiati, in alcuni problemi speciali (1). In fine, oltre la cit. monografia di B. Griziotti sulle imposte sulle " rendite „ in cui l'A. parte esattamente dalla definizione generale e dinamica della " rendita „ data dalle teorie dell'equilibrio, ricorderò vari problemi economici della finanza considerata con genialità ed esattezza nei migliori più recenti trattati ita-

---

saggio d'interesse è un dato dell'equilibrio più direttamente connesso alle condizioni quantitative dei redditi *nel tempo* ed alle richieste (bisogni) dei beni *nel tempo*. Ora, se si prescinde dagli effetti che l'impiego dei proventi delle imposte considerate avrà sull'equilibrio, e quindi su questi gruppi di quantità e condizioni (quantità dei flotti dei redditi nel tempo: bisogni dei redditi nel tempo), l'effetto di un aumento delle imposte non può considerarsi che un *rialzo* del saggio corrente d'interesse (diminuiscono i redditi *più vicini* disponibili, fermi o aumentanti i bisogni di essi): conclusione senza alcun valore, il fenomeno essendo indissolubilmente costituito dall'*assorbimento e dall'impiego* di una certa ricchezza privata (attuale) attraverso il fen. finanziario: quale alterazione dell'aggregato e quindi delle proporzioni tra redditi nel tempo e bisogni dei redditi nel tempo produce tale fenomeno nel suo complesso? ecco il problema la cui soluzione può dirci le conseguenze di un certo aumento delle imposte sul saggio d'interesse. Ma la soluzione di questo problema non è necessaria a calcolare grossolanamente gli effetti dei sistemi di imposizione dei redditi totali (guadagnati) nella produzione di risparmio, in confronto dei sistemi di tassazione di redditi *consumati*. Certo anche questi ultimi determinano, per es. immediatamente dopo un aumento, una riduzione delle porzioni *risparmiate*, diminuendo il flusso totale dei servizi disponibili; ma è evidente che la riduzione deve essere proporzionalmente maggiore in un sistema di tassazione del reddito totale, in esso crescendo, *coeteris paribus*, la convenienza del consumo immediato dei servizi disponibili.

(1) G. Prato: *Di alcune recenti teorie sul Capitale e sul Reddito e delle loro conseguenze tributarie* (" Riforma sociale „, nov. 1912); A. Cabiati: *La funzione economica del sopraprezzo e del premio e la sua tassazione* (" Riforma Sociale „, marzo-aprile 1909).

liani, come quelli del Graziani, del Flora, del Tangorra, ecc., particolarmente rilevando nelle *Istituzioni di scienza delle finanze* (Torino, 1912) del Graziani la ricchezza delle discussioni teoriche sui problemi economici generali; nel *Manuale di scienza delle finanze* (Livorno, 1912) la elegante chiarezza delle trattazioni di molti problemi speciali dell'economia finanziaria; ed in parecchi scritti parziali del Tangorra, destinati ad un ampio *Trattato di scienza della finanza*, l'originale ed acuta connessione analizzatavi dall'A. tra l'aspetto od elemento *giuridico* e il lato *economico* di molti problemi e fenomeni finanziari.

§ 7. — Gli elementi testè analizzati di natura scientifica non appaiono costituire una scienza le cui nozioni non siano deduzione e sviluppo delle premesse proprie dell'economia scientifica. I fatti finanziari però, oltrechè come dati o condizioni di problemi economici speciali, appaiono come un gruppo di fenomeni con particolari caratteri, obbedienti a *leggi* diverse da quelle del fenomeno economico puro, leggi quindi presumibilmente determinabili in via scientifica. Quali sono le leggi con cui appaiono determinarsi i fenomeni finanziari? Questo è, ci sembra, il problema generale *proprio* di una " scienza finanziaria ". Quali principali teorie furon dirette a risolverlo e come esso possa da un punto di vista rigoroso porsi è quanto resta a vedere.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

M
O
N
G
r
A
B
C
D
P'
μ
1
G.r
λ
P
G
P''
μ

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Giugno 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Mattirolo, Fusari e Segre Segretario. — Scusano l'assenza i Soci: Salvadori, Parona e Grassi.

È letto ed approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente ricorda la grande perdita fatta dall'Accademia colla morte del Socio Graf. Interprete dei Colleghi di questa Classe, si associa al lutto dell'altra Classe per la scomparsa di un uomo che all'alto valore di letterato e di maestro univa una esemplare integrità e dignità di carattere e di vita. Il Socio D'Ovidio, unendosi a queste espressioni di cordoglio e di elogi, ricorda come la sua amicizia col Graf risalisse fino al tempo in cui questi, intorno al 1865, risiedeva in Napoli, e, giovane qual era, dava già promessa di una luminosa ascensione.

Il Socio Guidi offre in omaggio due suoi opuscoli: 1° *Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro*; 2° *Sulla attendibilità di certi calcoli statici.*

Vengono presentate per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

I. Guareschi, *Ricerche intorno ai bromuri*, Nota V;

E. Savarro, *Sulla solubilità dell'acido salicilico e di alcune altre sostanze*, dal Socio Guareschi;

G. Lincio, *Dell'autunite di Lurisia*, dal Socio Segre per incarico del Socio Parona;

A. Campetti, *Sui calori specifici di alcune miscele liquide binarie*, dal Socio Naccari;

G. Charrier e G. Pellegrini, *Saponificazione di eteri di ossiazocomposti*, dal Socio Fileti.

Infine il Socio Naccari, anche a nome del Socio Grassi, legge la Relazione sulla Memoria dei Professori Campetti e Del Grosso, presentata nell'ultima seduta. D'accordo con questa Relazione si delibera, all'unanimità, la stampa di quella Memoria.

LETTURE

Ricerche intorno ai bromuri.

Nota V del Socio ICILIO GUARESCHI

Nella nota IV precedente (1) ho esposto alcune mie ricerche intorno all'azione del calore, all'azione del jodo e dell'acido cromico sui bromuri metallici della forma MeBr e Me^2Br^2. Nella nota attuale espongo delle ricerche analoghe sui bromuri della forma $MeBr^3$ e specialmente mi occupo delle varie condizioni nelle quali questi bromuri possono lasciare eliminare tutta o parte della loro acqua di cristallizzazione.

Al termine delle mie ricerche tratterò la questione dello stato dell'acqua cosidetta di cristallizzazione. Io sono di avviso che l'acqua, liquido molto anormale e le cui molecole allo stato liquido debbono essere polimerizzate, non sia un composto completamente saturo e che l'ossigeno vi possa funzionare come tetravalente, e talora anche esavalente come lo solfo in molti composti. L'acqua è sotto molti riguardi ancora un enigma; è un liquido, ad esempio, che bolle a 100° mentre è costituito da due gas i quali bollono: l'uno a —252°.6 (l'idrogeno) e l'altro a —182°.5 (l'ossigeno).

L'acqua, il perossido d'idrogeno, l'ossigeno dell'atmosfera e l'ozono, in grandi masse sempre in contatto fra loro, e sotto l'influenza continua dell'elettricità naturale, debbono dar luogo a reazioni che non sono ben conosciute ancora. Sul modo col quale l'acqua sta combinata nei vari composti, i chimici non sono d'accordo. I dati che si hanno sulle varie condizioni (temperatura, pressione, tempo, ecc.) nelle quali si elimina l'acqua

(1) I. Guareschi, *Ricerche intorno ai bromuri*, Nota IV, in " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", adunanza 13 aprile 1913, vol. XLVIII, pag. 735.

di cristallizzazione sono spesso assai discordanti secondo i diversi autori.

Io ho intrapreso a questo scopo una serie di ricerche metodiche sull'acqua di cristallizzazione di molti sali, specialmente bromuri (1). Da uno stesso sale con più molecole di acqua di cristallizzazione si può eliminare gradatamente l'acqua molecola a molecola dando luogo ad idrati di mano in mano più stabili e talora diversamente colorati, se si parte da un sale colorato. Ma talvolta si eliminano due, quattro, sei molecole d'acqua contemporaneamente ad una stessa temperatura (2).

---

(1) Delle differenze notevoli nel modo di eliminarsi dell'acqua di cristallizzazione io avevo osservato anche nei miei composti cianpiridinici che nel 1896 ottenni per l'azione degli eteri chetonici sull'etere cianacetico in presenza di ammoniaca. Ad esempio, il *sale di bario* $(C^9H^9N^2O^2)^2Ba + 2H^2O$ della *cianmetilglutaconetilimide* perde l'acqua solamente a 160°-165° ma alterandosi, mentre il *sale di bario* $(C^7H^5NO^2)^2Ba + 6^1/_2 H^2O$ della *cianmetilglutaconimide* perde tutta l'acqua stando nel vuoto oppure per lungo tempo sul cloruro di calcio o disseccato a 100°-110°. Così potrei citare molti esempi di *sali di rame* la cui perdita di acqua ha luogo anche con cambiamento di colore.

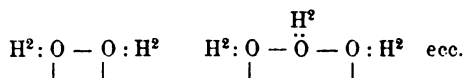
(2) Se l'acqua è in fondo, come si ammette da alcuni, un miscuglio di acqua liquida e di ghiaccio (plurimolecolare), allora perchè non si possono ammettere degli aggregati di $2H^2O$, $3H^2O$, $4H^2O$ che si fissano a una mol. di un sale?

Rosenstiehl, ad esempio, ammette $(H^2O)^n$ essendo n un multiplo di 3.

L'acqua secondo me è un corpo non saturo che ha in parte le proprietà dell'ozono e degli acidi; è un catalizzatore universale. Sia:

$$\begin{matrix} H \\ H \end{matrix} > O <$$

Allora si possono ammettere dei gruppi:

$$H^2:O - O:H^2 \qquad H^2:O - \overset{H^2}{\ddot{O}} - O:H^2 \quad \text{ecc.}$$

e talora anche solamente:

$$H^2:O<$$

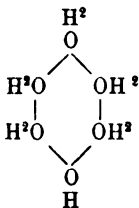
e così può spiegarsi come si eliminano H^2O, $2H^2O$, $3H^2O$, ecc., oppure successivamente H^2O, H^2O, H^2O, ecc.

Questi gruppi: $H^2O<$ (*idrolo*) $\left(H^2O<\right)^2$ (*diidrolo*), $\left(H^2O<\right)^3$ (*triidrolo*), ecc., starebbero riuniti in modo analogo a quanto ammise il compianto Hugo Erdmann per 6 mol. d'acqua in forma di anello benzenico:

Si hanno poi talora dei risultati molto diversi secondo che si scalda gradatamente un sale a 30°, 40°, 50°, 60°... 120°-200° oppure se lo si scalda sino dapprincipio subito a 100°-120°. In moltissimi casi durante l'eliminazione dell'acqua alla temperatura di fusione del sale nella propria acqua di cristallizzazione, si elimina una parte dell'acido se questo è volatile.

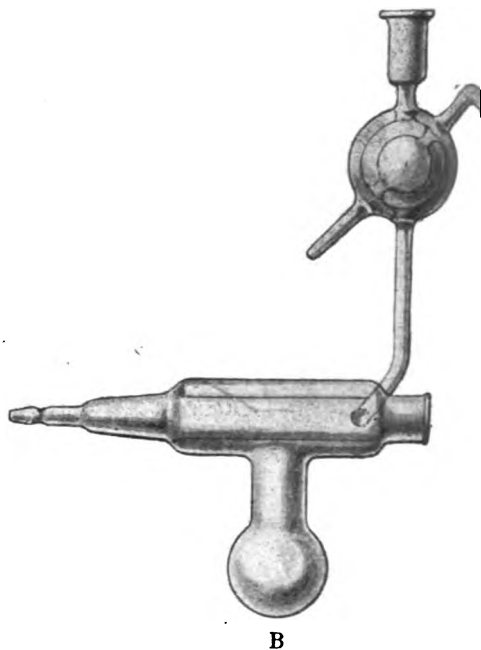
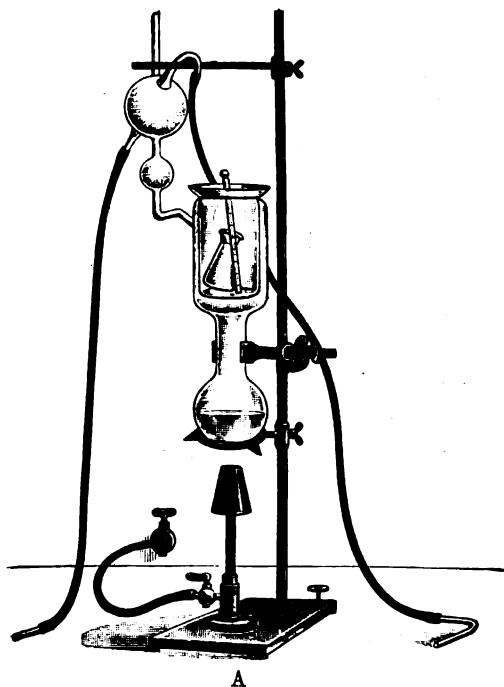
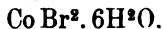
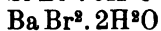
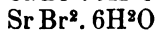
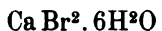
Tutte queste esperienze furono fatte usando termostati assai bene regolati e delle piccole stufe di vetro nelle quali si ha la temperatura costante mediante ebollizione di determinati liquidi: quali *metilale* a 41°-42, il *cloroformio* 61°, l'*essano* 68°, il *cloruro d'etilene* 81°, l'*eptano* 97°-98°, l'*acetone* 55°-56° ecc. Queste mie stufe che permettono di osservare bene i cambiamenti subiti dalla sostanza sono rappresentate dalle figure A e B.

Sono in fondo modificazioni dell'antica stufa di V. Meyer. Ma ho riconosciuto essere molto più utile, come altri hanno già osservato, scaldare le sostanze in cui si vuole determinare l'acqua in una corrente di un gas secco: aria, anidride carbonica, azoto, ecc., secondo i casi; in tal modo si elimina l'acqua più facilmente che non nei termostati o nelle stufe ordinarie (1).

```
        H²
        O
       / \
   H²O     OH²
    |       |
   H²O     OH²
       \ /
        O
        H
```

Ho letto con piacere la nota: *Sur l'état dissimulé dans les hydrates* del sig. De Forcrand nei " C. R. ", 1913, t. 156, pag. 1506, nella quale sono esposte idee nuove e vecchie sullo stato dell'acqua negli idrati. Egli ammette che certi idrati possano contenere dell'acqua condensata a gradi differenti; anch'io sarei di questo avviso, ma il fatto che da un idrato con più molecole d'acqua come il bromuro di cobalto ed altri bromuri abbandonano l'acqua molecola per molecola, e ciò anche a temperatura relativamente bassa, rende questa ipotesi dubbia.

(1) Io ho trovato una antica osservazione di Is. Pierre (*Recherches sur quelques sels doubles formés par les oxydes du groupe magnésien*, " A. Ch. " (3), 1846, t. XVI, pag. 250), la quale dimostra che in una corrente di aria secca si può eliminare da un sale, a temperatura relativamente bassa, anche quell'acqua che coi metodi ordinari non si elimina che a temperatura alta. Il solfato di rame scaldato a 114° per 17 ore in corrente d'aria secca diventa

In questa nota tratterò solamente dei quattro bromuri seguenti:

$CaBr^2 . 6H^2O$
$SrBr^2 . 6H^2O$
$BaBr^2 . 2H^2O$
$CoBr^2 . 6H^2O$.

A e B; nella stufa A di vetro, per temperature alte si sostituisce il refrigerante con un semplice tubo di vetro munito di bolle; così pure nella stufa B che serve per riscaldare a temperatura costante le sostanze entro navicelle e in corrente di gas secco.

Tutti questi bromuri, quando sono *anidri*, sviluppano del bromo per l'azione diretta del calore. Fatti bollire nella loro acqua di cristallizzazione sviluppano dell'acido bromidrico.

Coll'acido cromico sviluppano colla più grande facilità del bromo.

---

perfettamente anidro, mentre generalmente si crede che non sia anidro se non a 204°, o a 240° e più. Non ho visto citata questa osservazione in nessuno dei grandi Trattati di chimica inorganica. Anche Millon ha fatto alcune osservazioni interessanti.

I.

Bromuro di calcio $CaBr^2.6H^2O$.

Il bromuro di calcio *anidro* $CaBr^2$ fonde a 485° secondo Ramsay e Eumorfopoulos (1), a 710° (2) o a 760° secondo altri (3).

Scaldato al punto di fusione, e anche prima, sviluppa molto bromo, e più presto e più abbondantemente che non i bromuri alcalini. Questo sale anidro è molto igroscopico. Già Berthemot aveva notato che il bromuro di calcio fonde per forte riscaldamento sviluppando del bromo; così pure Löwig. Invece scaldato con acqua e jodo dà pochissimo jodo. Coll'acido cromico dà colla più grande facilità del bromo.

Bromuro di calcio cristallizzato $CaBr^2.6H^2O$. — Non si conosceva nessun idrato con minore quantità di acqua di cristallizzazione; io ne ho ottenuti diversi.

Il sale che io ho analizzato era in bei cristalli incolori che fondevano a circa 35° (4). Quando si riscalda perde l'acqua di cristallizzazione e se si scalda rapidamente nella sua acqua di cristallizzazione perde insieme all'acqua anche dell'acido bromidrico. Per determinare l'acqua di cristallizzazione è bene scaldarlo sin dapprincipio molto moderatamente.

Gr. 0.6636 di sale $CaBr^2.6H^2O$ lasciati alla temperatura di 12°-13°, sull'acido solforico ed alla pressione di 40 mm., perdettero dopo 11 giorni 0.1693 cioè 25.5 %; per la perdita di 4 $^1/_2$ H^2O si calcola 26.3 %. Continuando a scaldare il sale, ma a 99° in istufa di vetro a vapor d'acqua, dopo 15 ore perdettero ancora 0.0337 cioè in totale 30.5 %, mentre per $5H^2O$ si calcola 29.2. A 112° non diminuì più di peso; a 150° in stufa ad aria per 7 ore si eliminarono ancora, sino a peso costante, 0.0142 cioè in totale 32.73 % e per 5 $^1/_2$ H^2O si calcola 32.1 %.

(1) "Phil. Mag. „ (5), 41, pag. 360 e "Jahresb. „, 1896, pag. 329.
(2) CARNELLEY, "Jahresb. „, 1876, pag. 31.
(3) RUFF e PLATO, "Berichte „, 1903, pag. 2363.
(4) Secondo Lubarski ("J. russ. phys. Chem. „, 1896-97, pag. 460) questo sale fonde a 38°.2.

Continuando a scaldare a 160°, sino a peso costante, perdettero 0.0172 cioè in totale 35.32 % mentre per $6H^2O$ si calcola 35.06 %.

Dunque sull'acido solforico, alla pressione di 40 mm. e alla temperatura di 12°-13° perde $4\,^1/_2\,H^2O$ e dà l'*idrato* $CaBr^2.1\,^1/_2H^2O$; questo scaldato a 100° perde $^1/_2\,H^2O$ e dà l'*idrato* $CaBr^2.H^2O$, il quale a 150° in stufa ad aria fornisce $CaBr^2.^1/_2\,H^2O$ ed infine a 160° dà il sale anidro $CaBr^2$ (1).

Le due ultime mezze molecole di acqua si eliminano sopra 150°, in queste condizioni.

In altre esperienze fatte in condizioni diverse cioè a temperatura gradatamente crescente in termostato o in stufe a vapori di sostanze bollenti a temperature costanti, si ebbero i risultati seguenti: Gr. 0.8719 di composto $CaBr^2.6H^2O$ perdettero:

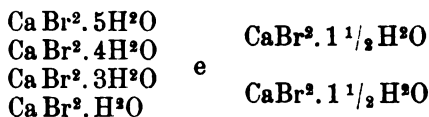
	perduta %	calc. per	H^2O eliminata
a 50° gr. 0.0484	5.5	5.84	H^2O
a 60° gr. 0.1018	11.69	11.68	$2H^2O$
a 70°-90° gr. 0.1550	17.7	17.53	$3H^2O$
a 112° gr. 0.2525	28.96	29.2	$5H^2O$

(Le perdite alle varie temperature sono intese come perdita totale).

Dunque in queste condizioni e nelle precedenti, possono esistere, oltre all'idrato normale, anche gli *idrati*:

$CaBr^2.5H^2O$
$CaBr^2.4H^2O$
$CaBr^2.3H^2O$
$CaBr^2.H^2O$

e

$CaBr^2.1\,^1/_2\,H^2O$
$CaBr^2.1\,^1/_2\,H^2O$

Gr. 0.6938 di bromuro di calcio cristallizzato $CaBr^2.6H^2O$ scaldati a 41° in stufa a vapore di metilale, in navicella, e lenta corrente d'aria secca, dopo 11 ore perdettero (sino a peso costante) 0.0863 cioè 12.4 %, mentre per $2H^2O$ si calcola 11.68 %.

---

(1) La questione della eliminazione di *mezze molecole* d'acqua sarà discussa in altra occasione.

II.

Bromuro di stronzio $SrBr^2.6H^2O$.

Il bromuro di stronzio anidro $SrBr^2$ per riscaldamento diretto al suo punto di fusione sviluppa del bromo.

A proposito del bromuro di stronzio il Berthemot scriveva (1):

" Exposé au feu dans un tube de verre ce bromure se fonde " sans se décomposer ".

Anche nei migliori Trattati e Dizionari di Chimica si trova affermato che questo bromuro " scaldato fonde, poi si disidrata " dando una massa bianca fusibile al rosso senza decomposizione ".

Invece, come quasi tutti gli altri bromuri, si decompone.

Scaldato rapidamente con del jodo emana pure del bromo, anche prima del suo punto di fusione.

Bromuro di stronzio $SrBr^2.6H^2O$. — Il bromuro di stronzio adoperato era in bei cristalli incolori. Quasi nulla si conosce intorno all'acqua di cristallizzazione di questo composto, già esaminato da Lœwig e da Rammelsberg.

Gr. 0.6985 del sale nel vuoto a 40 mm. dell'acido solforico ed alla temperatura di 11°-12°, perdettero dopo 5 giorni 0.1763. Cioè:

	trovata	calc. per $5H^2O$ da $SrBr^2.6H^2O$
H^2O °/₀	25.2	25.3

In un'altra determinazione, forse a qualche grado più basso di temperatura, perdette l'acqua in maggior tempo: si trovò pure 25.51 °/₀ cioè $5H^2O$ eliminate.

Il bromuro contenente $1H^2O$ e che pesava 0.5222 lasciato all'aria a temperatura ordinaria di 13°-14° dopo 6 giorni riassorbì gr. 0.1760 di acqua cioè 33.73 °/₀, mentre pel riassorbimento di $5H^2O$ si calcola 33.9 °/₀.

Gr. 0.6650 di $SrBr^2.6H^2O$ lasciati sull'acido solforico alla pressione di 40 mm. e a temperatura di 21°-22° per 22 ore per-

(1) " A. Ch. " (3), t. 44, pag. 395.

dettero 0.1686 cioè 25.35 % mentre si calcola 25.3 % per l'eliminazione di $5H^2O$. Come si scorge, l'influenza della temperatura è grandissima; nel primo caso sono occorsi 5 giorni, un'altra volta molti giorni, quando la temperatura era di 11°-12°, mentre a 20°-22° bastarono 22 ore.

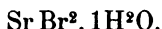
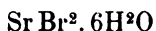
Gr. 0.5992 del sale $SrBr^2.6H^2O$ scaldati in termostato a 50° per 36 ore (sino a peso costante, come sempre) perdettero 0.1527 cioè 25.47 % corrispondenti appunto a $5H^2O$. Scaldati a 60°-70° e anche 112° non perdettero più di peso.

Dunque l'*idrato* $SrBr^2.6H^2O$ perde facilmente $5H^2O$ per dare l'idrato più stabile $SrBr^2.H^2O$. E si potrebbe quindi rappresentare con $[SrBr^2.H^2O].5H^2O$.

Questo sale $SrBr^2.6H^2O$ diventa anidro a 125°-127° ed invero gr. 0.7030 scaldati prima per circa 8 ore a 99° (vapor d'acqua) perdettero 0.1284 cioè 18.26 %, poi dopo 10 ore a 125°-127° (vapori d'alcool amilico) perdettero ancora 0,0804, in totale 0.2088 cioè 29.7 %. Per $SrBr^2.6H^2O$ si calcola 30.3 %.

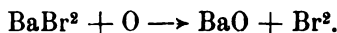
Se però si scacciano prima le cinque molecole d'acqua più labili, allora la sesta molecola si elimina più difficilmente ed invero gr. 0.4612 del sale che sull'acido solforico a 40 mm. e temperatura di 23° aveva perduto $5H^2O$, scaldati a 99° non perdettero di peso, scaldati per 4 ore a 127°-129° non perdettero nulla, solamente quando furono scaldati per circa 3 ore a 157°-158° (vapore di cumene) perdettero l'ultima molecola d'acqua: 0.0308 cioè 6.67 % corrispondenti a $SrBr^2.1H^2O$ pel quale si calcola $H^2O = 6.6$ %.

Dal bromuro di stronzio si hanno dunque due idrati:

$$SrBr^2.6H^2O$$
$$SrBr^2.1H^2O.$$

III.

Bromuro di bario $BaBr^2.2H^2O$.

Il bromuro di bario *anidro*, ben secco, scaldato direttamente a temperatura alta, fonde, manda vapori di bromo ed il residuo coll'acqua manifesta reazione alcalina. In queste condizioni probabilmente si forma dell'ossido di bario coll'ossigeno dell'aria:

$$BaBr^2 + O \longrightarrow BaO + Br^2.$$

Ma da altre esperienze fatte fuori del contatto dell'aria parrebbe che si formi o una traccia di Ba metallico od un sottobromuro Ba^2Br^2.

Il bromuro di bario cristallizzato quando si scalda direttamente insieme all'acqua sviluppa dei vapori di acido bromidrico e poi vapori di bromo e lascia un residuo alcalino.

Il bromuro di bario cristallizzato $BaBr^2.2H^2O$, lasciato per 4 giorni a temperatura di 11°-12°, alla pressione di 40 mm. e in presenza di acido solforico sino a perdita costante di peso, perde *una* sola molecola di acqua:

Gr. 0.6013 perdettero 0.0325.

Cioè

	trovata	calc. per $1H^2O$ da $BaBr^2.2H^2O$
H^2O %	5.4	5.4

Anche stando sul cloruro di calcio perde solamente una molecola d'acqua: gr. 0.7703 in disseccatore a cloruro di calcio e alla temperatura di 23° dopo 5 giorni perdettero 0.0430 cioè 5.5 %.

Il sale con $1H^2O$ scaldato a 100°, anche dopo 9 ore non perde di peso; a 125° dopo 12 ore perde la seconda molecola d'acqua: 0.0326 ancora, cioè in totale:

	trovata	calcolata per $2H^2O$
H^2O %	10.8	10.8

Dunque perde con molta facilità una molecola d'acqua mentre l'altra non si elimina che a 125° (1).

Questo sale *anidro* lasciato all'aria a temperatura ordinaria riassorbe tutta l'acqua:

(1) Queste mie osservazioni corrispondono a quelle già fatte dal Muller-Erzbach (" Berichte ", XXX, p. 177) sul cloruro di bario $BaCl^2.2H^2O$, dal quale l'eliminazione delle due molecole d'acqua ha luogo con velocità ineguali; Lescœur infatti (" Bull. Soc. Chim. " (2), XLVIII, pag. 29) ottenne a 60°-65° l'idrato $BaCl^2.H^2O$. Un caso bellissimo di eliminazione dell'acqua con velocità molto diversa per le diverse molecole d'acqua fu osservato sul *ferrocianuro di potassio* $Fe(CN)^6K^4.3H^2O$, sino dal 1901 nel mio laboratorio, come dirò a suo tempo.

Gr. 0.5362 di sale *anidro* dopo 6 giorni riassorbì 0.0648 di acqua. Cioè:

	assorbita	calcolata per $2H^2O$
H^2O %	12.08	12.1

Gr. 1.2137 del sale $BaBr^2.2H^2O$ dopo 22 ore in termostato a 50° perdettero 0.0667 cioè 5.5 %, per $1H^2O$ si calcola 5.4 %. Scaldati poi gradatamente a 60°-70°-80° e 112° non perdettero che pochi milligrammi e a 124° (in vapore di ligroino) dopo 10 a 18 ore perdettero ancora 0.0664 cioè in totale 0.1331 vale a dire 10.9 % mentre per $2H^2O$ si calcola 10.8; a 150° e 180° non perde più di peso.

Il bromuro con $2H^2O$ scaldato a 30° in termostato non perdette di peso dopo 47 ore; a 40° perde quasi una molecola d'acqua.

Del bromuro di bario esistono dunque due idrati $BaBr^2.2H^2O$ e $BaBr^2.H^2O$. Una molecola si elimina a 40°-50° oppure sull'acido solforico alla temperatura di 12°-13° e pressione di 40 mm. od anche solamente sul cloruro di calcio a 23°.

IV.

Bromuro di cobalto $CoBr^2.6H^2O$.

Bromuro $CoBr^2$. — Il bromuro di cobalto *anidro*, per l'azione del calore si decompone e sviluppa molto vapore di bromo.

Il sale in cristalli rossi $CoBr^2 + 6H^2O$ fonde a 48°-49° in liquido turchino intenso; continuando l'azione del calore sviluppa acqua e vapori di acido bromidrico e lascia un residuo verde del sale anidro che ulteriormente scaldato produce molti vapori di bromo. Anche il sale verde ottenuto per eliminazione dell'acqua a temperatura ordinaria si decompone facilmente per l'azione del calore.

A proposito del bromuro di cobalto il Berthemot scriveva: " Chauffé fortement dans un tube, il se liquéfie au rouge-blanc " et n'épreuve qu'une légère décomposition „. Quest'osservazione era dunque inesatta.

Il bromuro di cobalto anidro pare che sublimi (inalterato ?) quando si scalda il cobalto nel vapore di bromo in una atmo-

sfera di acido bromidrico e azoto e forma allora delle tavole cristalline splendenti, verdi, assai igroscopiche (1).

È assai igroscopico anche il sale verde che si ha per disidratazione del sale rosso con $6H^2O$. Questo sale verde attira l'acqua dal sale cristallizzato rosso e dopo lungo tempo si stabilisce un vero equilibrio. Si può osservare mettendo del sale verde in un vasetto a tappo smerigliato che con largo tubo di vetro (pure saldato) comunica con un altro vasetto simile; uno contiene un peso determinato di $CoBr^2.6H^2O$ e l'altro un peso molecolare corrispondente del bromuro verde anidro. I due vasi comunicanti chiudevano perfettamente a smeriglio e furono lasciati per lungo tempo così chiusi entro campana. Dopo molti giorni il sale verde cominciò a diventare azzurrognolo mentre il sale rosso cominciava a diventare violaceo. L'uno diminuiva di peso e l'altro aumentava. Forse in questo modo si formerà il sale con $3H^2O$.

In diversi modi io ho ottenuto il sale anidro *verde*, come dirò più avanti.

Bromuro di cobalto anidro e acetofenone. — Quando si mette in contatto il bromuro di cobalto anidro, verde, in polvere fina, con dell'acetofenone anidro, bollente a 202°, una parte del bromuro si scioglie con bel colore azzurro ma la maggior parte rimane insolubile nell'eccesso di acetofenone e a poco a poco si trasforma in massa compatta dura di colore azzurro. Il miscuglio fu fatto in tubo chiuso alla lampada per evitare l'assorbimento di ogni traccia di acqua. La massa azzurra aderisce al vetro tenacemente ed il liquido azzurro dopo viva agitazione anch'esso intorbida dando una polvere azzurra.

Questa polvere e massa azzurra, raccolta e lavata bene con acetofenone, fu rapidamente compressa e poi tenuta sull'acido solforico. È una polvere che manda odore di acetofenone anche moltissimi giorni dopo essere stata sull'acido solforico. Coll'acqua si decompone dando soluzione rossa di bromuro di cobalto e acetofenone libero. Scaldato sopra 100° perde a poco a poco l'acetofenone e lascia un residuo verde di bro-

(1) Th. H. W. Richards e G. P. Baxter, " Proc. Am. Ac. Arts and Sc. ", t. 33, p. 7 e " Ch. ", N. 77 e in Dammer, *Handb. anorg. Chem.*, 1902, p. 811.

muro di cobalto anidro. Probabilmente è un vero composto definito ed infatti un campione che era stato poco tempo in un disseccatore ad acido solforico conteneva 39.2 % di acetofenone mentre per $\begin{matrix}CH_3\\C^6H^5\end{matrix}\rangle CO.CoBr^2$ si calcola acetofenone 35.4 %; ed invece un campione che era rimasto più di un mese nel medesimo disseccatore e non aveva quasi più, o lieve, l'odore di acetofenone conteneva 35.5 % di acetofenone.

Il bromuro di cobalto anidro, verde, è solubilissimo:

nell'alcol assoluto con colore bleu intenso;

nell'alcol a 90 % con color rosa;

nell'*acetone* con color azzurro intenso;

nell'*alcol metilico* con color rosa;

nell'*acido formico* a poco a poco con color azzurro violaceo;

nel *cloroformio* perfettamente secco si scioglie con colore azzurro, ma in gran parte rimane insolubile con colore verde;

nel *metiletilchetone* con color azzurro intenso come nell'acetone;

nella *formalina* si scioglie con color roseo, ma prima dà una massa azzurra dura;

nell'*aldeide benzoica* si scioglie in parte con colore azzurro ma il resto a poco a poco si fa polvere azzurra;

nell'*allilacetone* si scioglie in gran parte con colore azzurro e la polvere pure rimane azzurra;

nella *formamide* si scioglie a caldo ed anche a freddo, con colore azzurro intenso; rimane azzurro anche facendo bollire.

Questo bromuro anidro si combina con molte basi, glicoli ecc., come risulta dalle ricerche di Franzen, Grün e Boedecker ed altri.

Non era mio scopo di studiare i numerosi composti che il bromuro di cobalto verde forma coi chetoni, colle aldeidi ecc.

Bromuro di cobalto $CoBr^2.6H^2O$ **normale**. — Questo è il sale normale quale cristallizza a temperatura ordinaria.

Il bromuro di cobalto adoperato era purissimo, in bei prismi rossi, che ricristallizzano bene (1).

---

(1) Un campione di bromuro di cobalto cristallizzato commerciale, di una delle migliori fabbriche di prodotti chimici, era in croste cristalline, di color rosso un poco diverso da quello degli altri campioni; fondeva an-

Relativamente all'acqua di cristallizzazione fu specialmente studiato da Noël Hartley (1). Cristallizza in prismi di colore rosso porpora, efflorescenti all'aria secca e deliquescenti all'aria umida. Secondo Hartley questo sale scaldato a 100° fonde, diventa bleu, perde $4H^2O$ e lascia un residuo cristallino opaco, di color azzurro violetto contenente $CoBr^2.2H^2O$. Tutta l'acqua secondo Hartley si elimina a 130° e rimane il bromuro anidro che è una polvere amorfa di un bel color verde. La disidratazione completa secondo Hartley ha luogo, benchè molto lentamente, anche stando in disseccatore con acido solforico.

Io ho esaminato di nuovo questo sale, ho confermato solo in parte le ricerche di Hartley ed ho notato alcuni fatti che mi sembrano nuovi. Io ho ottenuti gli idrati con $5H^2O$, $4H^2O$, $2H^2O$ e $1H^2O$.

Scaldato fonde a 48°-49° in un liquido di color azzurro intenso, e per raffreddamento riprende il color rosso di prima. Però comincia a perder acqua. Quando si scalda a 110° perde tutta l'acqua e lascia un residuo di bromuro *anidro*, *verde*:

Gr. 1.2462 scaldati a 100°-110° per 25-28 ore perdettero 0.4140 di H^2O cioè:

	trovata	calcolata per $CoBr^2.6H^2O$
H^2O %	33.2	33.02

Il sale anidro è di un bel colore verde erba e lasciato all'aria, a temperatura di 12°-13° in ambiente asciutto riassorbe rapidamente $2H^2O$ e poi tutta l'acqua, riprendendo il colore di prima:

Gr. 0.8322 di sale *verde*, anidro, dopo 24 ore riassorbirono 0.0649 di acqua, dopo 22 ore ancora 0.0501, dopo sette ore 0.0057 e ancora dopo 42 ore 0.0024 cioè in totale 0.1231 cioè

---

ch'esso a 46°-47° in liquido bleu scuro; ma, cosa curiosa, a temperatura ordinaria emetteva dei vapori di bromo che si riconoscevano già all'odore lieve di bromo e meglio col mio reattivo. Non ho trovato la causa della presenza di bromo libero.

(1) " Chem. News ,, 1874, t. 29, pag. 161; " J. Chem. Soc. ,, 1874 (2), t. XII, pag. 501; " Bull. Soc. Chim. ,, (2), 1874, t. XXII, pag. 358; GMELIN-KRAUT-FRIEDHEIM, *Handb. anorg. Chem.*

14.1 % e per l'assorbimento di $2H^2O$ si calcola 14.8. Lasciato ancor più lungo tempo a sè ricuperò tutta l'acqua.

L'idrato normale con $6H^2O$ diventa completamente anidro stando sull'acido solforico nel vuoto a 40 mm., con rapidità molto diversa secondo la temperatura.

In una prima esperienza alla temperatura di 11°-12° ottenni i risultati seguenti: Gr. 1.2964 di sale con $6H^2O$ dopo 48 ore perdettero 0.2980 cioè 22.9 %; per eliminazione di $4H^2O$ si calcola 22.02 %. Dopo 210 ore la perdita totale fu di 0.348, vale a dire 27.7 % e per l'eliminazione di $5H^2O$ si calcola 27.5 %. Infine dopo altre 200 ore la perdita totale fu di 0.4220 cioè 32.55 % corrispondente a $6H^2O$ per le quali si calcola 33.02 %. Rimase il sale *anidro*, completamente *verde*.

Durante l'eliminazione dell'acqua in queste condizioni non si scorge il passaggio del colore del sale da rosso all'azzurro e poi verde, come invece si nota nel termostato; non si notano cioè dei punti di arresto.

Operando nello stesso modo, ma a temperatura di 23°, ottenni i risultati seguenti:

Gr. 0.7441 di sale con $6H^2O$ perdettero in 14 ore 0.1695, cioè 22,7 % corrispondenti a $4H^2O$; il sale rimanente di color roseo violaceo dopo 60 ore diventò completamente verde e perdette ancora 0.0814, cioè in totale 33.71 %. Si osservò ben netto il passaggio dal sale roseo violastro al verde intenso. Anche in questo caso l'influenza della temperatura è enorme.

Idrato $CoBr^2.5H^2O$. — Questo idrato si forma quando a lungo si tiene il bromuro normale con $6H^2O$ in termostato a 30°, sino a peso costante. Gr. 2.0910 del sale con $6H^2O$ in termostato a 30° per 15 giorni perdettero 0.1172, cioè 5.6 %, per la eliminazione di $1H^2O$ si calcola 5.5 %. Ha color roseo violetto (1).

---

(1) A questa temperatura bassa di 30° non si hanno sempre dei risultati costanti. In una esperienza, ad esempio, gr. 2.0910 di sale $CoBr^2.6H^2O$ in termostato a 30° per 156 ore perdettero 0.0573 cioè 2.56 % e per l'eliminazione di $\frac{1}{2}H^2O$, si calcola 2.74 %.

In un'altra esperienza lasciai in termostato gr. 0.9227 di sale $CoBr^2.6H^2O$ a 30° per 96 ore e perdettero gradatamente 0.0964, pari a 10.43 %, mentre per l'eliminazione di $2H^2O$ si calcola 11.0 %.

Gr. 1.0546 di questo sale con $CoBr^2 . 5H^2O$ scaldati in termostato a 40° per circa quattro giorni (92 ore) perdettero 0.1659, cioè 15.7 %, mentre per l'eliminazione di $3H^2O$ si calcola 17.4 %. Dunque ha perduto poco meno di $3H^2O$; ed ha lasciato il composto con $2H^2O$.

Anche in altre condizioni la prima molecola di acqua si elimina molto presto e lascia l'idrato con $5H^2O$. Scaldando gr. 1.1139 di bromuro cristallizzato, a 55° (vapore d'acetone) in corrente di aria secca, tutto fonde in liquido bleu e a poco a poco si risolidifica in massa cristallina rosea-violetta; dopo 1 ora perdettero 0.0580, cioè 5.4 %; esattamente $1H^2O$ per la quale si calcola 5.4 %. Continuando a scaldare a 68° (vapore di essano) perdettero ancora 0.0453, cioè 9.2 %, cioè quasi $2H^2O$; a 81° (vapore di etilene) e sempre in corrente di aria secca dopo 14 ore perdette più di $4H^2O$ ed infine a 92°-93° il sale diventò completamente verde, anidro, $CoBr^2$.

Idrato $CoBr^2 . 4H^2O$. — Questo idrato si ottiene dall'idrato normale a $6H^2O$ mantenuto a 30° in termostato.

Gr. 0.9227 di sale ordinario con $6H^2O$ lasciati per 26 ore a 30° in termostato perdettero 0.0488, cioè 5.28 (per $1H^2O =$ 5.5 %), e dopo altre 70 ore perdettero in totale 0.0964, cioè:

	trovata	calc. per la perdita di 2 mol.
H^2O %	10.55	11.00 %

Questo idrato ha colore violaceo e fonde in liquido azzurro a 70°-71°. Anche qui la seconda molecola si elimina molto più lentamente.

In un'altra esperienza 0.9564 a 40° in termostato dopo 11 giorni perdettero 0.1111 cioè 11.7 %.

Idrato $CoBr^2 . 2H^2O$. — È l'idrato più stabile, e si forma in diverse condizioni.

Il bromuro di cobalto rosso $CoBr^2 . 6H^2O$ stando circa un mese in un disseccatore ad acido solforico e alla temperatura di 13°-15° perde regolarmente $4H^2O$ e lascia un sale stabile $CoBr^2 . 2H^2O$ di color roseo-violaceo, il quale scaldato non fonde

ma perde acqua diventando prima di color azzurro chiaro, poi verde intenso.

Gr. 0.7032 di sale con $6H^2O$ perdettero 0.1574, cioè:

	trovata	calc. per $4H^2O$ da $CoBr^2 . 6H^2O$
H^2O %	22.3	22.03

Lasciato alcuni altri giorni sull'acido solforico non ha più perduto di peso. Dunque il sale con $2H^2O$ è stabile nell'aria disseccata con acido solforico.

Questo è l'idrato già ottenuto da Hartley.

Ma già a 40° in termostato il sale con $6H^2O$ perde $4H^2O$.

Gr. 1.7530 in termostato a 40° perdettero dopo circa 98 ore 0.3572, cioè 21.8 %. Dopo le prime 42 ore perdettero 0.2214, cioè 12.6 %, corrispondenti a poco più di $2H^2O$ (calcolato 11.8 %); però la perdita di peso continuò sino a perdere 21.8 %.

Gr. 0.6903 di bromuro di cobalto crist. scaldati per 6 ore e mezza in vapore di etere, cioè a 34°-35°, perdettero solamente 0.0050. Tenuti poi in termostato a 48° per circa 15 giorni (circa 10 ore al giorno) perdettero 0.1538, cioè:

	trovata	calc. per $4H^2O$ da $CoBr^2 . 6H^2O$
H^2O %	22.28	22.03

Ma l'*idrato stabile* $CoBr^2 . 2H^2O$ si forma anche stando lungo tempo in disseccatore a cloruro di calcio, come fu già osservato da altri, credo. La perdita di $4H^2O$ in questo caso ha luogo più o meno rapidamente secondo la temperatura; l'influenza della temperatura ambiente è, come è naturale prevedere, molto grande.

Ed invero ecco due esperienze fatte a temperature diverse. Tralascio per brevità i dati numerici delle numerose pesate e trascrivo solamente i risultati:

Temperatura ambiente 12°-13°:

	acqua eliminata	trovata	calcolata
7 Dic. 1912 al 7 Gen. 1913	H^2O	6.1 %	5.5
1° Febbraio 1913 . . .	$2H^2O$	11.4	11.01
27 " " . . .	$3H^2O$	15.9	16.5
26 Marzo 1913	$3\,^1/_2\,H^2O$	19.9	19.2
5 Maggio "	$4H^2O$	22.13	22.03

Temperatura ambiente 17°-20°:

Dopo 34 ore	H^2O	4.61	5.5
„ oltre 53 ore . . .	$2H^2O$	11.6	11.01
„ 48 ore	$3H^2O$	16.4	16.5
„ 26 „	$3\,{}^1/_2\,H^2O$	19.4	19.2
„ 42 „	$4H^2O$	22.6	22.02

In questo caso non si osserva nessun punto di arresto, l'acqua si elimina di continuo fino a raggiungere $4H^2O$ e rimane l'idrato $CoBr^2.2H^2O$ stabile. Dunque in queste condizioni in 9 giorni si eliminano $4H^2O$, essendo la temperatura di circa 20°, mentre per una temperatura di pochi gradi inferiore, 12°-13°, si richiese un tempo immensamente più lungo.

Il sale con $CoBr^2.2H^2O$ si ottiene assai presto scaldando il sale $CoBr^2.6H^2O$ a 41° in corrente d'aria secca.

Gr. 0.5329 di sale con $6H^2O$ (ancora un poco umido) scaldati per circa 5 ore a 41° (stufa con vapore di metilale) e in corrente di aria secca perdettero 0.1222, cioè 22.9 %, mentre per $4H^2O$ eliminate si calcola 22.03 %. Il bromuro rimasto a peso costante di color roseo violetto e contenente $CoBr^2.2H^2O$ fu scaldato a 61° (vapore di cloroformio) e a poco a poco diventò tutto azzurro e in un piccolo punto anche verde, e dopo circa 7 ore perdette 0.0365, cioè in totale 0.1612, vale a dire 30.25 %, e per eliminazione di $5\,{}^1/_2\,H^2O$ si calcola 30.27 %.

Questo nuovo idrato a peso costante fu scaldato per 3 ore a 68° (vapore di essano) e non perdette di peso, e invece dopo 2 a 3 ore a 81° (vapore di cloruro d'etilene) diventò completamente *verde* e la perdita totale fu di 33.7 %, per $6H^2O$ si calcola 33.02 %.

Dunque in lenta corrente di aria secca il sale $CoBr^2.6H^2O$ perde in breve tempo $4H^2O$, $5\,{}^1/_2\,H^2O$ e $6H^2O$ per dare i composti:

$CoBr^2.2H^2O$ a 41°
$CoBr^2.{}^1/_2H^2O$ a 61°
$CoBr^2$ a 81°.

Il bromuro di cobalto $CoBr^2.2H^2O$ preformato può diventare anidro anche alla temperatura di 61°; e lo dimostra l'esperienza seguente:

Gr. 0.4241 del sale $CoBr^2.2H^2O$ ottenuto per disseccazione sul cloruro di calcio furono scaldati per 18 ore a 61° (vapore

di cloroformio), in corrente d'aria secca. Diventò a poco a poco totalmente *verde* e la perdita di peso fu di 0.0584, cioè 13.77 %, mentre si calcola 14.1 %.

Lo stesso sale con $2H^2O$ scaldato non in corrente d'aria ma in istufa a vapore di benzene (78°-80°) diventa azzurro cioè contenente $1H^2O$, ma non si riesce ad averlo anidro, verde.

Idrato azzurro $CoBr^2.1H^2O$. — Il bromuro $CoBr^2.6H^2O$ tenuto a lungo a 48°-50° in termostato perde $4H^2O$; tenuto poi per 22 ore a 80° diventò azzurro e perdette una quinta molecola d'acqua, cosicchè 0.6903 perdettero in totale 0.1906 e cioè:

	trovata	calc. per eliminazione di $5H^2O$
H^2O %	27.6	27.5

Lo stesso sale bleu con $1H^2O$ ho ottenuto partendo dal sale $CoBr^2.2H^2O$ di color violetto: gr. 1.5960 tenuti in una mia stufa di vetro per 33 ore a 78°-80° (vapore di benzene) perdettero 0.1132:

	trovata	calc. per H^2O da $CoBr^2.2H^2O$
H^2O %	7.0	7.05

Il sale violetto roseo $CoBr^2.2H^2O$ che si ottiene lasciando il sale ordinario a $6H^2O$ sull'acido solforico a 40 mm. è pure molto stabile. Perde una molecola d'acqua assai lentamente: gr. 1.064 dopo molti giorni in istufa di vetro e vapore di benzene (78°-80°) o di alcol isopropilico, sino a peso costante, perdettero 0.0831, cioè 7.7 %, mentre si calcola 7.05 %.

Più presto e a temperatura più bassa si ottiene il monoidrato bleu scaldando a 61° in corrente d'aria il sale con $2H^2O$ ottenuto disseccando il sale primitivo sul cloruro di calcio. Mentre in termostato non diventò azzurro dopo 22 ore a 60°, ma bensì quando si scaldò 8 ore a 80°, in corrente di aria secca diventa azzurro, e in parte anche verde già a 61°. Dunque la disidratazione completa del sale può avvenire anche a 61°.

L'idrato azzurro con $1H^2O$ assorbe rapidissimamente l'acqua e ridiventa rosso; bisogna conservarlo in tubi chiusi, alla lampada, come gli altri idrati qui descritti.

L'idrato azzurro, gr. 0.4996, mantenuto per 18 ore in termostato a 90° divenne completamente verde, anidro; perdette 0.0363, cioè: H^2O trovata = 7.25 % e per $CoBr^2.1H^2O$ si calcola 7.5.

Dunque dal sale $CoBr^2.6H^2O$ o dall'altro $CoBr^2.2H^2O$ si può avere il composto azzurro $CoBr^2.1H^2O$ a temperatura molto bassa, a 61° o a 78°-80° secondo le condizioni; si può avere il sale anidro, verde, pure a 61°, oppure a 90° o a 110°, ecc., secondo le condizioni, ma sempre a temperatura molto più bassa di 130° che è quella indicata da Hartley.

Da quanto ho esposto si potrebbe dunque concludere che per ogni determinata temperatura vi hanno, durante l'eliminazione dell'acqua, dei veri punti d'arresto, ai quali corrispondono dei determinati stati di idratazione; in certe condizioni, come ad esempio sul cloruro di calcio, si elimina l'acqua di continuo sino a perdere $4H^2O$, ma in altre condizioni specialmente termometriche l'eliminazione si fa per molecola a molecola e talora l'acqua si elimina anche in rapporti frazionari di $^1/_2 H^2O$. Ma su quest'ultima osservazione raccoglierò nuovi fatti.

Dei sali con 2 e $3H^2O$, come ad esempio il cloruro ed il bromuro di bario (V. pag. 937) possono perdere in determinate condizioni *una* sola molecola d'acqua; ciò è contrario a quanto è stato affermato da Rosenstiehl (Bull. 1911, IX, pag. 175 e 328).

Rispetto al bromuro di cobalto si potrebbe dunque dire che ora si conoscono i seguenti *idrati*:

$CoBr^2.6H^2O$ o normale, prismi rossi fusibili 47°-48°
$CoBr^2.5\,^1/_2\,H^2O$ (?) roseo
$CoBr^2.5H^2O$ cristalli color rosso fior di pesca
$CoBr^2.4H^2O$ violetto roseo, fusibile 70°-71°
$CoBr^2.2H^2O$ roseo violetto
$CoBr^2.1H^2O$ azzurro
$CoBr^2.\,^1/_2\,H^2O$ (?)
$CoBr^2$ anidro, verde.

La disidratazione completa del sale può avvenire completamente a 61°, e non a 130° come credeva Hartley.

Non ho potuto trovare in nessuna condizione un punto di arresto nella eliminazione dell'acqua, in cui si formi l'idrato con $3H^2O$. Su altri bromuri riferirò in un altro lavoro.

In queste ed in altre ricerche fui coadiuvato con premura dall'assistente signorina Dott.[sa] Maria Cl. Bianchi. Nè voglio dimenticare che per la montatura e sorveglianza degli apparecchi mi fu di valido aiuto il tecnico Giacomo Chiarle.

Torino. R. Università. 10 Giugno 1913.

Sulla solubilità dell'acido salicilico e di alcune altre sostanze.

Nota della Dott. EGLIE SAVARRO.

(Con 1 Tavola).

La determinazione della solubilità di una sostanza presenta spesso delle difficoltà non lievi; sono queste difficoltà la causa prima delle incertezze che si hanno riguardo ai dati ottenuti nelle determinazioni: spesso si osserva infatti che per una stessa sostanza i varii autori dànno solubilità diverse. Numerosi metodi, svariati apparecchi furono proposti da coloro che si occuparono di questo studio, tutti intenti allo scopo di poter stabilire i dati sicuri e invariabili. Gay-Lussac (1) fu il primo che si occupò con intenti veramente scientifici di questo argomento e che rappresentò graficamente con curve la solubilità delle sostanze. In seguito molti hanno insegnato il modo di procedere per fare una esatta determinazione di solubilità: Lajoux (2) nel 1875 proponeva la sua *stufa per saturazione*; Victor Meyer (3) ideò l'apparecchio più generalmente usato; Étard (4) si occupò moltissimo della solubilità dei sali e insegnò un modo di procedere per farne la determinazione; Deszáthy (5) e Lineberger (6),

(1) " A. Ch. ", (2), Tome XI, pag. 296.

(2) " Journ. Pharm. Chim. ", 1875, 21-22, pag. 249.

(3) Selmi-Guareschi, *Enciclopedia chimica*. Supplemento e Complemento. vol. 3, 1881, p. 691.

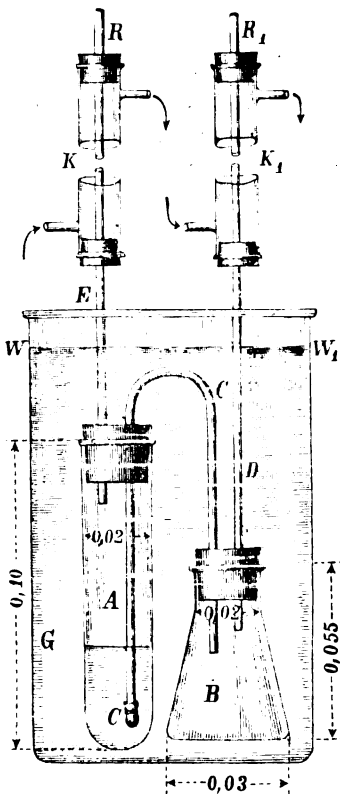
(4) " Comptes rendus ", 98, 1884, p. 993, 1276-1432 e " Conférences faites au Laboratoire de Friedel ", 1888-1889, p. 131. — Si noti che il procedimento di Étard conduce a errori gravi: ciò che fu dimostrato da Cohen e Kohnstamm e da Mylius e Funk (" Ann. de Wiedemann ", t. LXV, pag. 344). Si noti pure che furono anche dimostrate errate da Cohen e Büchner le affermazioni di Étard sulle linee di solubilità (" Acc. di Sc. d'Amsterdam ", 23 febbraio 1901 e " Revue gén. des sciences ", 15 aprile 1901).

(5) " Monatsh. f. Chem. ", t. XIV, pag. 245 e " Suppl. Ann. Encicl. Chim. ", 1893, pag. 464.

(6) " Amer. Chem. Journ. ", 1893, t. XV, pag. 230 e " Suppl. Ann. Encicl. Chim. ", id. id.

ciascuno dei quali propose un apparecchio; Carnelley e Tompson (1) studiarono la solubilità delle sostanze isomere; Pawlewski (2) ideò un apparecchio assai pratico e che dà buoni risultati; Conroy (3) pure propose un apparecchio quasi simile al precedente.

Coll'apparecchio di Pawlewski ho fatto un gran numero di determinazioni di solubilità, e specialmente ho determinato la solubilità dell'acido salicilico da 0° a 100° di 5 in 5 gradi e la solubilità di altre sostanze di cui parlerò in seguito.

L'apparecchio Pawlewski consta essenzialmente d'un tubo da saggio, contenente la sostanza e il solvente, collegato per mezzo di un tubo a *U* con un vasetto tarato; esso si immerge completamente in un bagno maria e si scalda fino alla temperatura voluta, che si mantiene poi costante per un'ora o più a seconda dei casi. La soluzione si può rimescolare facilmente col fare dal tubo da saggio una leggera aspirazione d'aria: quest'aria si fa passare, prima di entrare nell'apparecchio, per un tubo a cloruro di calcio, perchè arrivi nella soluzione ben secca. Finita l'operazione, facendo nel tubo da saggio una pressione, la soluzione satura filtra per la tela con cui è avvolto un estremo del tubo a *U* e si raccoglie nel boccettino tarato. Si stacca quest'ultimo, si asciuga, si pesa e la differenza indicherà il peso della soluzione satura; infine si dosa

(1) " Journal of the Chemical Society ", vol. LIII, 1888, pag. 782.

(2) " Berichte deutsch. Chem. Gesell. ", vol. 32, pag. 1040 e " Suppl. Ann. Encicl. Chim. ", 1899, pag. 465.

(3) " The Journal of the Society of Chemical Industry ", February 28, 1898, pag. 104.

la sostanza sciolta o per evaporazione del solvente e pesando il residuo, o colla titolazione.

I vantaggi che offre questo apparecchietto sopra altri apparecchi per determinazione di solubilità, consistono specialmente nell'essere semplice e di facile uso e sopratutto nel permettere di rimescolare e di filtrare la soluzione senza togliere l'apparecchio dal bagno e senza quindi alterare menomamente le condizioni in cui si fa l'operazione.

La solubilità dell'acido salicilico fu determinata da varii autori, ma i dati sono assai scordanti fra loro. Bourgoin (1), che determinò sperimentalmente la solubilità di quest'acido a varie temperature e che ne diede la curva della solubilità da 0° a 100° dà la seguente tabella:

Solubilità in grammi dell'acido salicilico in un litro d'acqua.

Temp.	Solub.	Differenze	
		Δ_1	Δ_2
0°	1.50	0.15	
5°	1.65	0.25	0.10
10°	1.90	0.35	0.10
15°	2.25	0.45	0.10
20°	2.70	0.55	0.10
25°	3.25	0.65	0.10
30°	3.90	0.75	0.10
35°	4.65	0.90	0.15
40°	5.55	1.10	0.20
45°	6.65	1.35	0.25
50°	8.00	1.80	0.45
55°	9.80	2.45	0.65
60°	12.25	3.30	0.85
65°	15.55	4.35	1.05
70°	19.90	5.60	1.25
75°	25.50		
80°	32.55		
85°	41.25		
90°	51.80		
95°	64.40		
100°	79.25		

(1) " Bulletin de la Société chimique de Paris ", XXXI, 1879, pag. 53.

Kolbe e Lautemann (1) ne determinarono la solubilità a 0° nell'acqua ed osservarono che 1 parte di acido si scioglie in 1087 di acqua.

Alexeyeff (2) invece trovò le seguenti solubilità, che differiscono da quelle di Bourgoin:

Temp.	Acido p. 1000
12°.5	1.6
60°	12.7
80°	24.4
100°	86.7

Walker e Wood (3) in uno studio sulla solubilità delle sostanze isomere, dànno la seguente solubilità °/₀ dell'acido salicilico da 10° a 70°:

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
0.129	0.184	0.264	0.377	0.540	0.820	1.320

Degno di osservazione è il fatto che moltiplicando per 1,5 ciascun numero che indica la solubilità a ciascuna temperatura data da questi autori si ha per risultato dei numeri che si avvicinano alla solubilità data da Bourgoin alle stesse temperature; per es.:

	10°	20°	30°
Walker e Wood	0.129	0.184	0.264
Walker e Wood $\times$ 1.5	0.193	0.276	0.346
Bourgoin	0.190	0.270	0.390

e così via.

Ne deriva che le due curve della solubilità disegnate da Walker e Wood e da Bourgoin sono pressochè parallele. Diversa da quella che trovarono Alexeyeff, Walker e Wood, e special-

(1) " A. ", 1860, vol. 115, pag. 194.
(2) " J. pr. Chem. " (2), Bd. 25, S. 520.
(3) " Journal of the Chemical Society ", t. LXXIII, 1898, pag. 618.

mente Bourgoin, è la solubilità da me sperimentalmente determinata.

L'acido salicilico che ha servito per le determinazioni di solubilità era un acido sintetico e anche ottenuto dal salicilato di metile, ricristallizzato prima delle esperienze e di cui si stabilì l'assoluta purezza.

L'apparecchio usato per le determinazioni fu, come dissi. quello di Pawlewski, che, come vedemmo, ovvia al maggior numero degli inconvenienti.

Diamo nelle pagine 6, 7 e 8 i risultati ottenuti dalle determinazioni fatte a ciascuna temperatura.

Faccio notare che alle temperature di 0°-5°-10° le determinazioni furono più numerose e presentarono maggiori difficoltà: essendo l'acido salicilico pochissimo solubile alle basse temperature, per ciascuna di queste determinazioni occorre prolungare di molto il contatto della sostanza col solvente; sarebbe pure bene poter disporre di un apparecchio capace di maggiori quantità di soluzione: con queste precauzioni si potrà meglio essere sicuri di ottenere soluzioni perfettamente sature.

Dalla temperatura di 15° in su si ottennero invece nelle varie esperienze, fatte a ciascuna temperatura, risultati sempre assai concordanti.

Ora osservando questi risultati si viene alla seguente conclusione: che la solubilità di quest'acido è sempre superiore a quella data da Walker e Wood; è inferiore invece a quella data da Bourgoin e da Alexeyeff; e la differenza fra la solubilità da me trovata e quella di Bourgoin, piccola alle basse temperature, va facendosi sempre maggiore, acquistando un massimo tra 75° e 95°: a 100° questa differenza si fa di nuovo minore; ne risulta che la curva segnata secondo i miei dati non è parallela a quella di Bourgoin come lo è quella di Walker e Wood.

Quanto alla solubilità data da Bourgoin è a notarsi ancora come essa varii regolarmente da 0° a 100°, e come la differenza fra i dati di ciascuna temperatura sia rappresentata sempre da un numero intero, che va regolarmente e proporzionalmente aumentando colla temperatura. Ora, una regolarità così perfetta, io non l'ho punto trovata; e pare anzi quasi impossibile averla in dati sperimentali.

Temperatura	Peso della soluzione in grammi	Cm³ di soluz. N/10 di NaOH	Sostanza sciolta	Acido salicilico in 1000 parti di soluz.	Media
0°	24,284	2,2 (1)	0,0307	1,26	1,24
0°	13,7142	1,2 (1)	0,0169	1,23	
5°	14,6886	1,4 (1)	0,0196	1,34	1,29
5°	17,0414	1,5 (1)	0,021	1,24	
10°	19,6896	1,8 (1)	0,0253	1,30	1,35
10°	18,957	1,6 (2)	0,02655	1,43	
15°	12,9102	1,7 (1)	0,0238	1,84	1,84
15°	20,2686	2,7	0,0372	1,84	
20°	17,0222	2,4	0,0331	1,94	2,00
20°	15,0012	2,2	0,0303	2,02	
25°	18,708	3,5	0,0483	2,58	2,48
25°	19,1596	3,4	0,0469	2,45	
30°	14,4318	3,1	0,0428	2,96	2,98
30°	8,5728	1,7	0,0234	2,73	
30°	8,5728	si precipitò con acqua di bromo	0,0273	3,10	
35°	17,4634	4,5	0,062	3,56	3,51
35°	4,443	1,1	0,0152	3,46	
40°	14,5788	4,3	0,0593	4,08	4,16
40°	14,784	4,7	0,0648	4,40	
45°	9,5154	3,36	0,0463	4,88	4,89
45°	14,9762	5,3	0,0731	4,90	
50°	13,0958	5,26	0,0828	6,36	6,38
50°	14,9892	6,9	0,0953	6,40	

(1) La soda ha il seguente titolo: 1 cc. = 0,00408.
(2) La soda ha il seguente titolo: 1 cc. = 0,00409.

Temperatura	Peso della soluzione in grammi	Cm³ di soluz. $\frac{N}{10}$ di NaOH	Sostanza sciolta	Acido salicilico in 1000 parti di soluz.	Media
55°	15,1338	8,16	0,1128	7,50	7,44
55°	15,3642	8,16	0,1128	7,39	
60°	16,7018	10,9	0,1504	9,08	9,00
60°	15,3196	9,8	0,1352	8,90	
65°	10,2898	7,9 (1)	0,1111	10,91	10,94
65°	14,0368	10,7 (1)	0,1507	10,85	
65°	11,5642	9,18	0,1266	11,06	
70°	12,1912	12,0	0,1656	13,77	13,70
70°	14,8401	14,5	0,2001	13,67	
75°	17,8792	21,5 (1)	0,3025	17,21	17,55
75°	13,5854	17,34	0,2390	17,90	
80°	13,0932	20,5	0,283	22,09	22,09
80°	10,1502	15,6 (1)	0,2194	22,09	
85°	12,1664	24,3	0,3349	28,30	27,92
85°	7,295	14,2	0,1956	27,55	
90°	11,6126	30,2 (1)	0,4250	37,99	37,35
90°	13,9519	35,8	0,4940	36,71	
95°	9,1494	30,6 (1)	0,4309	49,42	50,48
95°	9,8542	34,3 (1)	0,483	51,54	
100°	20,1214	100,3 (2)	1,4159	75,69	75,07
100°	12,163	59,7 (2)	0,8428	74,45	

(1) La soda ha il seguente titolo: 1 cc. = 0,00408.
(2) La soda ha il seguente titolo: 1 cc. = 0,004092.

Si può dunque riassumere la solubilità dell'acido salicilico nella tabella seguente:

Temperatura	Acido salicilico in 1000 gr. di soluzione	Temperatura	Acido salicilico in 1000 gr. di soluzione
0°	1,24 gr.	55°	7,44 gr.
5°	1,29 „	60°	9,00 „
10°	1,35 „	65°	10,94 „
15°	1,84 „	70°	13,70 „
20°	2,00 „	75°	17,55 „
25°	2,48 „	80°	22,09 „
30°	2,98 „	85°	27,92 „
35°	3,51 „	90°	37,35 „
40°	4,16 „	95°	50,48 „
45°	4,89 „	100°	75,07 „
50°	6,38 „		

Da cui si ricava la curva che trovasi nell'annessa tavola.

La ragione per cui esiste questa differenza fra la solubilità da me trovata e quella data da Bourgoin e da Walker e Wood, e per cui vi ha motivo di credere più esatta la solubilità da me determinata, sta principalmente nel metodo seguito per fare le determinazioni. Difatti Bourgoin, procedendo col vecchio metodo d'esperimentare cioè fare la soluzione in un palloncino alla temperatura voluta, e di filtrare a caldo, difficilmente avrebbe potuto, anche usando le più grandi precauzioni, evitare sia la soprasaturazione, sia l'evaporazione di parte del solvente, sia il cristallizzarsi di parte della sostanza sulle pareti del filtro. Walker e Wood usarono per le determinazioni l'apparecchio di Carnelly; e benchè con questo apparecchio la soluzione si saturi bene alla temperatura voluta, mantenuta costante da un termostato, pure, dovendosi per filtrare o decantare togliere la soluzione dall'ambiente in cui fu fatta, si può sempre incorrere nei due inconvenienti già citati, dell'evaporarsi cioè di qualche porzione del solvente o del cristallizzarsi di qualche porzione di sostanza sulle pareti su cui la soluzione deve passare. Coll'uso

dell'apparecchio di Pawlewski invece, questi errori, inevitabili cogli altri metodi di determinazioni, si evitano facilmente: la soluzione si filtra nel medesimo ambiente e quindi alla stessa temperatura a cui fu saturata.

Un'altra osservazione ho fatto sulla solubilità dell'acido salicilico; ed è che fra le temperature di 50° e 55° l'aumento nella solubilità, che a tutte le altre temperature va sempre crescendo, è minore che non fra 45° e 50°: quindi fra 50° e 55° la curva cambia di espressione. Numerose esperienze fatte e ripetute alle temperature di 45°, 50° e 55 confermarono questa affermazione.

Intorno alla solubilità nell'acqua degli acidi isomeri dell'acido salicilico: gli acidi meta- e para-ossibenzoico, ho ottenuti i seguenti dati:

	p. fus.	Solubilità °/₀₀	
		15°	50°
acido salicilico	155°-156°	1.84	6.38
„ metaossibenzoico	201°-202°	7.00	40.0
„ paraossibenzoico	214°-215°	4.4	29.8

Questi dati dimostrano che fra i tre acidi, il più solubile nell'acqua è il meta-ossibenzoico, il meno solubile è l'acido salicilico. A questa conclusione sono pure giunti Walker e Wood nel sopracitato lavoro sulla solubilità delle sostanze isomere. Questo modo di procedere di questi acidi isomeri riguardo alla solubilità è contrario alle leggi stabilite da Carnelly e Tompson sulla solubilità delle sostanze isomere, cioè:

1° per ogni serie di composti isomeri l'ordine delle solubilità è lo stesso dei punti di fusione: il composto più facilmente fusibile è il più solubile;

2° per ogni gruppo di acidi isomeri, non solo l'ordine della solubilità coincide con quelli dei punti di fusione, ma anche i sali di questi acidi si dispongono nello stesso ordine;

3° per una serie di composti isomeri l'ordine della solubilità è lo stesso, qualunque sia la natura del solvente.

Questi tre acidi isomeri: l'acido salicilico, il meta- e il para-ossibenzoico fanno ancora eccezione a queste leggi o regole per quello che riguarda la loro solubilità nell'alcool metilico, in

cui sono solubilissimi. In questo solvente la solubilità $^0/_{00}$ a 15° è la seguente:

acido salicilico	155°-156°	398.66
„ metaossibenzoico	201°-202°	535.80
„ paraossibenzoico	214°-215°	2362.23

cioè fra i tre acidi il più solubile è il para-ossibenzoico, che è anche quello che ha il più alto punto di fusione.

Per riassumere, della solubilità di questi acidi nell'acqua e nell'alcool metilico si può fare il seguente specchietto, rappresentando con le iniziali O, M e P i tre acidi ossibenzoici nell'ordine crescente di fusibilità e di solubilità.

	Solubilità	
Fusib.	Acqua	Alcool metilico
O	O	O
M	P	M
P	M	P

mentre per le leggi di Cornelly e Tompson dovrebbe essere

Fusib.	Solub.
O	P
M	M
P	O

Oltre alla solubilità degli acidi orto-, meta- e paraossibenzoico ho pure determinato la solubilità nell'alcool metilico di otto sostanze appartenenti al gruppo della piridina e che furono preparate e studiate dal Prof. Guareschi (1). Di esse sostanze quattro sono i prodotti di disidrogenazione rispettivamente delle altre quattro; non solo, ma la perdita dei due atomi di idrogeno produce la formazione di un legame interno nell'anello benzoico e la formazione quindi di un anello trimetilenico.

Ecco i risultati ottenuti:

(1) I. Guareschi, *Sintesi di composti piperidinici e trimetilenpirrolici*, " Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino ", 1900-1901, Serie II, T. L.

Sostanze	p. fus.	Solubilità °/₀ 15°	Solubilità °/₀ 50°	Sostanze	p. fus.	Solubilità °/₀ 15°	Solubilità °/₀ 50°
CH^3 CH^3 \ / C / \ CN.HC CH.CN | | OC CO \ / NC^2H^5 N etilββdimetil-αadicianglutarimide	110°,5-111°.5	10.5	65.75	H^3C CH^3 \ / C / \ CN.C——C.CN | | OC CO \ / NC^2H^5 N-etil3.3.dimetil1.2.diciantrimetilendicarbonimide	211°	0.333	0.41
CH^3 CH^3 \ / C / \ CN.HC CH.CN | | OC CO \ / $N.CH^3$ N-metilββdimetil-αadicianglutarimide	163°-165°.5	3.05	10.4	CH^3 CH^3 \ / C / \ CN.C——C.CN | | OC CO \ / NCH^3 N-metil3.3.dimetil1.2.diciantrimetilendicarbonimide	241°-241°.5	0.335	0.791
CH^3 C^2H^5 \ / C / \ CN HC CH.CN | | OC CO \ / NCH^3 N-metilββmetiletil αadicianglutarimide	192°.5	0.68	2.35	CH^3 C^2H^5 \ / C / \ CN.C——C.CN | | OC CO \ / NCH^3 N-metil3.3.metiletil 1.2.diciantrimetilendicarbonimide	160°-161°	1.37	5.45
CH^3 C^2H^5 \ / C / \ CN.HC CH.CN | | OC CO \ / NH ββmetiletilαadicianglutarimide	193°	8.41	10.9	CH^3 C^2H^5 \ / C / \ CN.C——C.CN | | OC CO \ / NH 3.3.metiletil1.2.diciandicarbonimide	sopra i 204°	4.33	11.43

Queste sostanze sono a due a due isomere e a due a due omologhe: in generale nella solubilità seguono l'ordine delle sostanze isomere secondo le leggi di Carnelley, cioè le sostanze che hanno il punto di fusione più basso sono le più solubili; però l'ultima della prima e della seconda serie fanno eccezione. Paragonando poi ciascuna sostanza col *prodotto di disidrogenazione* corrispondente, si nota che la solubilità segue la legge di Carnelly come per le sostanze isomere: è da osservarsi però che le due ultime sostanze seguono la regola alla temperatura di 15°, ma non alla temperatura di 50°.

Torino, Febbraio 1902 (1).
R. Università. Laboratorio di Chimica farm. e tossic.

---

(1) Questo lavoro fu eseguito nel 1901 nel mio laboratorio dalla sig.[na] Eglie Savarro in occasione della tesi di Laurea. Nell'inverno 1901 fece alcune altre esperienze e perciò porta la data del febbraio 1902.
I. Guareschi.

Dell'autunite di Lurisia.

Nota dell'Ing. Dott. GABRIELE LINCIO
Libero Docente di Mineralogia alla R. Università di Torino.

(Con una Tavola).

Debbo alla squisita cortesia della sig.[na] Pia Bassi, che frequentava le esercitazioni al nostro Istituto di Mineralogia, se potei studiare l'interessante materiale, nuovo per l'Italia, intorno a cui riferisce la presente Nota, e se riuscii ad avere le indicazioni necessarie per trovarlo in posto. Per questo pregiomi di renderle pubbliche grazie.

Avuto da principio una piccola quantità del materiale da determinare, potei bentosto dal colore tipico, color limone fino a solfureo, dall'aspetto e sfaldatura micacea, dalla forma quadratica di alcune tavolette e poi dal comportamento al cannello affermare che si trattava di autunite.

Recatomi poi, secondo le indicazioni avute, a Chiusa Pesio, il sig. De Caroli, segretario comunale, mi presentò al sig. geo-

metra Ernesto Genesio, che facendo de' rilievi a Lurisia, Frazione di Roccaforte, Prov. di Cuneo, dietro preghiera del sig. G. B. Percivalle, proprietario della cava Nivolano dove si trova l'autunite, s'era interessato affinchè di tale non comune minerale venisse fatta la determinazione. Tanto il sig. geom. Genesio, che il proprietario della cava, mi misero di buon grado a disposizione tutto il materiale che essi possedevano. Così ringrazio pure detti signori vivamente per l'opera gentile prestatami.

L'**analisi chimica** confermò le prime determinazioni. Usai estrema cura nella preparazione del materiale prendendo solo il relativamente migliore. Con tutto ciò non mi fu possibile di liberarlo totalmente da quella piccola patina che si trova dalla parte a contatto colla roccia.

L'analisi chimica mi diede il seguente risultato:

	Lurisia	Autun (*)	Teoria
P_2O_5	13,21	13,40	15,5
UO_3	60,57	60,84	62,7
CaO	5,64	5,31	6,1
H_2O a 100° . . . . = 14,85 H_2O da 100° al calor rosso = 5,10	19,95	20,33	15,7
Ganga	0,76		
	100,13	99,88	100,0

Con un grammo di sostanza feci prima la determinazione dell'acqua, poi quella del Ca precipitandolo con H_2SO_4 ed alcool ed infine col metodo di Rose (**) separai l'uranio dal fosforo fondendo con Na_2CO_3 e KCN.

L'autunite di Lurisia s'avvicina per la sua composizione chimica a quella di Autun, di cui riporto sopra un'analisi. Faccio notare come nelle analisi delle autuniti citate da Dana solo quella di Falkenstein con 16 % H_2O s'avvicina al valore assunto come teorico 15,7 %, mentre le altre di Cornwall, Autun, Madagascar, Lurisia, s'aggirano sui 19-20 %, solo Madagascar 22 %,

(*) E. S. Dana, *Mineralogy*, 1892, pag. 858, analisi N. 4.
(**) H. Rose, *Analyt. Chem.* von R. Finkener, II Bd., 1871, pag. 542.

di H_2O, ciò che fa naturalmente variare anche i valori percentuali per gli altri elementi.

Il minerale è cristallizzato in tavolette quadrate, talora libere, presentanti però in generale sulla base (che misura talora qualche mm. di lato) delle tavolette più piccole coorientate o raggruppate con la tavoletta più grande con lieve inclinazione a mo' di ventaglio chiuso.

Il minerale riempie i vani di piccole litoclasi in una roccia gneissiforme. Nei casi da me osservati esse non raggiungono che solo al massimo un 3 ovvero 4 mm. La cristallizzazione avvenne in generale cominciando dalle due pareti laterali, dalle salbande, e progredendo verso l'interno della litoclasi, dove le due colonie di cristalli o vengono a compenetrarsi intimamente ovvero lasciano qualche vano. Le laminette sono disposte col loro piano normale, o quasi, rispetto al piano delle pareti della litoclasi.

I cristalli liberi o sono un po' alterati superficialmente ovvero si presentano come arrotondati o con incavo nel mezzo della base con accenno a tramoggia, in altri casi si direbbe quasi che si tratti del fenomeno della *Häufung* o raggruppamenti ipoparalleli. Si trovano però anche laminette naturali o di sfaldatura discretamente piane ed appartenenti ad un unico individuo cristallino.

Le **osservazioni ottiche** vennero fatte su laminette della sfaldatura principale basale, che è quasi facile come nelle cloriti.

L'autunite per la sua grande sensibilità al calore venne sempre preparata in balsamo liquido freddo.

Sulle lamine di sfaldatura basale si osserva pure una buona sfaldatura parallela ai loro contorni rettangolari, sfaldatura che si rivela anche in finissime fessurette sparse per le lamine stesse. Essendo la birifrazione piuttosto debole, i toni dei colori di polarizzazione sono bassi. L'estinzione della luce avviene appunto parallelamente a dette direzioni di sfaldatura e di contorno.

In molte lamine si osserva estinzione incerta fino ad ondulosa. Tali casi però molte volte sono da ascrivere a deformazioni meccaniche ed a lievi spostamenti di foglio rispetto a foglio nel preparato sfaldato secondo la base.

Sulle lamine basali a luce convergente si osserva l'imagine assiale centrica con angolo degli assi ottici di media grandezza

ed il piano degli assi ottici coincide con una delle due direzioni di sfaldatura secondaria. Questa pare abbia un differente grado di facilità nelle due direzioni. Con ciò è evidente che la sfaldatura secondaria segue la direzione dei due pinacoidi frontale e laterale (100 e 010).

Talora sulle stesse lamine è nettamente visibile la traccia del prisma (110).

Riguardo al valore relativo delle due direzioni d'estinzione delle lamine basali, la direzione corrispondente alla normale ottica è direzione di maggior velocità della luce, mentre l'altra corrispondente alla traccia del piano degli assi ottici od alla mediana ottusa è direzione di minor velocità nella lamina, così che la direzione della mediana acuta viene ad essere direzione di massima velocità nel cristallo, provando il carattere ottico negativo del minerale. Lo stesso risultato si ottiene con la lamina di gesso sull'imagine assiale. Il blu caratteristico compare nei quadranti negativi.

Cercai di determinare se nelle lamine basali vi fosse pleocroismo, ma non ne constatai, anche per raggi inclinati sulla sezione basale.

Siccome l'angolo del prisma (110) con (100) è vicino a 45° (44° 38 $^{1}/_{3}$') e $\measuredangle$ (110 : $1\bar{1}0$) = 89° 17′ e la traccia del prisma non è troppo regolare e diritta, così col mio materiale non riuscii a determinare quale delle due possibilità di coincidenza degli assi cristallografici *a* e *b* con le due direzioni ottiche $\gamma\gamma$ e $\beta\beta$ corrisponda a verità.

Osservai molto frequentemente in lamine di sfaldatura secondo (001) una linea di sutura a ca. 45 gradi rispetto alle direzioni di sfaldatura secondarie pinacoidali (100 e 010). Si tratta di geminazione secondo (110). I due individui estinguono la luce molto davvicino l'uno all'altro. Con la lamina di gesso essi si distinguono nettamente l'uno dall'altro per il loro colore l'uno giallo e l'altro blu, stante il valore opposto delle direzioni di estinzione (di velocità) che si continuano, con solo poca inclinazione l'una rispetto all'altra, passando da un individuo all'altro.

Laminette basali scaldate a 100° per 1 $^{1}/_{2}$ ora si sfogliarono ed intorbidarono, rompendosi qua e là in tanti piccoli quadrati secondo le direzioni di sfaldatura.

Degna di nota è la fluorescenza bellissima a luce riflessa di color verde erba carico, mentre a luce trasmessa il colore è giallo verdiccio.

Si osservano frequentemente accrescimenti zonari orientati secondo (100) e (010) osservabili in lamine di sfaldatura basale in causa di sfumature lineari più scure, talora anche disposte a tramoggia.

Rinne, studiando l'autunite di Autun (*), vi riscontrò uno spettro di assorbimento analogo a quello della torbernite. Vi riscontrò pure un debole pleocroismo, di poco conto rispetto a quello della torbernite. Il pleocroismo io non lo potei osservare, come già dissi, nel nostro materiale di Lurisia.

Rinne ritiene l'autunite come rombica.

Negli altri caratteri l'autunite di Autun e di Lurisia si accordano abbastanza bene.

Per provare la **radioattività** dell'autunite di Lurisia presi come solito termine di confronto l'uraninite. Sapendo però come la massa dell'uraninite è raramente omogenea, pensai che anche il comportamento a riguardo della radioattività avrebbe variato con la discontinuità della sostanza. Levigato quindi un piano nella massa dell'uraninite e postolo a diretto contatto con la gelatina d'una lastra fotografica sensibile di celluloide, vi si riprodusse, secondo l'aspettativa, il disegno visibile anche ad occhio nudo sulla faccia levigata e corrispondente a filetti di sostanza color metallico chiaro sparsi nella massa picea dell'uraninite. Con tal metodo il comparire del disegno per sè ben marcato serve benissimo per poter determinare se la lastra sia normale, sovra o sotto-esposta. Per l'uraninite la lastra si mostrò normale con esposizione di 70 min., sottoesposta, ma già ben marcata, con 25 min. e sopraesposta con 3 ore.

Per un confronto grossolano presi poi dei granuli di autunite e di uraninite, e separati i primi dai secondi con lamina di piombo, li lasciai agire direttamente sulla lastra fotografica. Con esposizione di 70 min. l'autunite lasciò appena visibili tracce di radioattività, mentre l'uraninite ne lasciò ben distinte. Con

(*) F. Rinne, *Kalkuranit und seine Entwässerungsprodukte (Metakalkuranite)*, " Centralblatt für Min. ", etc., 1901, pag. 709.

esposizione di 4 ore invece anche l'autunite impressionò la lastra in modo già ben visibile.

Cercai allora di levigare un pezzo di un filoncello di autunite da una parte e di esporlo sulla lastra come l'uraninite. Con tale preparato dopo un'esposizione di 3 ore ebbi sulla lastra una impressione molto leggera, ma ben visibile e con 14 ore una ben nitida.

Per la riproduzione delle imagini della **tavola** trovai più conveniente l'uso di buone lastre poco sensibili, quali le Ilford-Special Lanterns.

Posi su una tale lastra contemporaneamente due campioncini di autunite dalla parte previamente levigata e così pure il campione sopradescritto di uraninite e li lasciai agire per 4 ore. Dopo tale esposizione l'imagine lasciata dall'autunite era visibile, ma molto leggera, quella dell'uraninite ben visibile, ma pure leggera.

Con altra lastra esposta per 18 ore ottenni il risultato visibile a fig. 2. Le impressioni lasciate dai due campioncini di autunite sono a sinistra, quella dell'uraninite a destra. Nell'imagine dell'uraninite si può notare come le vene del minerale di aspetto metallico non abbiano impressionato la lastra.

In fig. 1 abbiamo a sinistra l'impressione dell'autunite, a destra quella dell'uraninite, ambedue in granuli. Il tempo d'esposizione fu pure di 18 ore.

In fig. 3 abbiamo le impressioni della polvere a sinistra dell'autunite, a destra dell'UO_2 da essa estratto, ottenute contemporaneamente sulla stessa lastra. Dette polveri erano contenute in tubetti cilindrici di vetro con la base a diretto contatto con la stessa lastra fotografica. Quest'ultima nel resto della sua superficie era protetta da lamina di piombo. L'esposizione contemporanea e comune fu di 96 ore.

L'autunite di Lurisia si dimostra con ciò distintamente radioattiva, ma molto più debole dell'uraninite. Non stabilisco rapporto numerico in base ai risultati fotografici, perchè un tale metodo senza sussidio di speciali apparecchi è troppo poco esatto ed oggettivo.

La **roccia** nelle cui litoclasi si trova l'autunite è una massa finamente granulare, quarzosa, solcata da allineamenti di sericite di color leggermente giallo verdognolo.

Qualche grano più grosso di plagioclasio albitico con geminazione polisintetica, abbastanza fresco, si trova non di rado nelle sezioni. L'apatite è abbastanza abbondante.

Poi specialmente degni di nota sono grossi grani di quarzo e cristalli di ortosio, quest'ultimo d'aspetto arrotondato, corroso e caolinizzato, e presentantesi anche in grossi individui geminati secondo Karlsbad.

Attorno a vari cristalli di feldispato si vede un'intima formazione di sericite. Gli strati paralleli della sericite pare che girino attorno ai detti grani di feldispato più grossi come ad un ostacolo, dando luogo ad una forma pseudofluidale. Tra gli straterelli di sericite ed i noccioli si trova la massa quarzosa finamente granulare ed angolosa.

Osservando la roccia e le sue sezioni se ne riporta l'impressione che la formazione della sericite sia probabilmente avvenuta a costo del feldispato presente nel materiale che costituì la roccia.

Nella massa fondamentale finamente granulare non si riscontra più che il quarzo. I grossi grani di feldispato, che ancor si trovano, avrebbero per la loro mole originaria potuto sopravvivere all'attacco sminuente delle soluzioni, che fecero invece scomparire i più piccoli. Le biotiti presumibilmente presenti nel materiale originale, data la loro abbastanza facile alterabilità, potrebbero esse pure esser state trasformate in altro composto e rimosse.

Riguardo alla posizione della località Lurisia sulla carta geologica delle Alpi occidentali (1908) scala $^1/_{400.000}$ (l'unica moderna finora pubblicata), noi troviamo che nei dintorni vi confinano:

le besimauditi (ω) = porfidi e loro tufi più o meno laminati e metamorfosati, appartenenti al gruppo delle roccie massicce e loro tufi, tipi normali e metamorfici, esclusi gli ortogneis,

poi il tipo (24 ω) del permiano, tra altro, con masse di porfidi quarziferi e loro materiali tufacei, sovente laminati e sericitizzati (besimauditi pr. p.),

infine il tipo N. 23: quarziti, anageniti, arenarie quarzitiche, soventi felspatiche e micacee, passanti talora a micascisti e gneiss minuti; scisti quarzitici, sericitici, etc.

Con ciò la roccia da noi descritta parrebbe una roccia d'aggregazione, forse arcosica in forma di gneiss minuto.

Dato l'interesse che per sè presentava la roccia, ne diedi brevemente la descrizione, ma con questo non intendo porne senz'altro la *genesi* in relazione con quella del minerale autunite. Ammettendo la roccia come arcosica, si potrebbe bensì pensare ad un'origine comune tanto del materiale della medesima che di quello (forse uraninite) che diede poi origine alla autunite, potrebbero cioè avere ambedue origine comune da graniti o gneiss granitici.

È noto come l'uraninite, per quanto scarsa, è costituente accessorio di vari graniti.

Ad una analoga conclusione giungerebbe A. Lacroix studiando la giacitura di alcune autuniti: " J'ai été frappé, en étudiant " les gisements de la Troche et des Riaux en Saint-Symphorien- " de-Marmagne, de constater que, non seulement l'autunite remplit " les fissures du granite, imbibe celui-ci, mais encore s'observe " au milieu de veines argileuses, dans lesquelles elle est le " dernier minéral formé. Il n'est pas possible de considérer cette " autunite comme résultant d'une action pneumatolitique du " magma granitique, mais, de même qu'à Madagascar, il faut " la considérer comme résultant d'une décomposition récente, " l'origine de l'acide phosphorique devant seulement dans ce cas " être recherchée dans le granite lui-même, qui est riche en " apatite. Malheureusement, jusqu'ici il a été impossible de trouver " dans l'Autunois le minéral du granite qui a fourni l'urane... ". A. Lacroix, " Bull. de la Soc. Franç. de Min. „ 1911. Tome XXXIV (*Sur quelques minéraux de Madagascar*), pag. 63.

Nella giacitura odierna l'autunite si presenta in venette e filoncelli, come già dissi, che segnano litoclasi già apertesi nella roccia sia nel senso di stratificazione, che in direzioni inclinate rispetto allo stesso senso. Alla cava di Nivolano osservai appunto una divisibilità della roccia secondo la stratificazione e poi secondo due direzioni o quasi normali o non molto inclinate tra loro e sulla direzione di stratificazione. L'autunite riempie piccole litoclasi seguenti tali direzioni.

Anche ripetendo le osservazioni in posto non potei raccogliere dati sufficienti per provare che la suddetta probabile ipotesi regga nel caso dell'autunite di Lurisia.

Ad ogni modo a maggior schiarimento per quanto riguarda la giacitura e la genesi dell'autunite riferisco ancora brevemente quanto segue:

La roccia della cava di Nivolano è una parte costituente del contrafforte montuoso che scende a Lurisia. Gli strati della roccia sono inclinati di un 45°, ad occhio e croce, e seguono o s'avvicinano alla direzione segnata da una linea Frabosa, Prea, Cava Nivolano, Pra de Boni, Boves, località nelle cui vicinanze si trovano ed anche si cavano rocce quasi identiche a quelle di Nivolano.

Va poi specialmente notato che alla cava Nivolano solo nella posizione più bassa si trova l'autunite, la quale viene invece a mancar totalmente nelle posizioni superiori della cava ed alla sommità del contrafforte.

Il torrente Lurisia scendendo col contrafforte verso Lurisia lambe appunto le radici del pendio del Nivolano.

Orbene in tali condizioni parmi che non sia improbabile che la formazione dell'autunite sia dovuta all'azione di acque d'infiltrazione su qualche giacimento di minerale o su roccia contenente minerali uraniferi. Tali acque mineralizzate, che del resto possono aver una ben più lontana origine che dai pressi del Lurisia, avrebbero poi depositato l'autunite nelle piccole litoclasi della roccia del Nivolano.

Nei dintorni della posizione del Nivolano non è possibile far ricerche di sorta, perchè coperti da vegetazione e terriccio.

Istituto Mineralogico della R. Università di Torino,
14 giugno 1913.

Sui calori specifici di alcune miscele liquide binarie.

Nota di A. CAMPETTI.

1. — Le presenti ricerche sono dirette a portare qualche contributo alla conoscenza dei calori specifici delle miscele liquide binarie che sono state in epoca recente studiate specialmente dallo SCHULZE (1), sopratutto allo scopo di esaminare come la divergenza dei calori specifici di dette miscele da quelli che si possono calcolare mediante la regola di miscuglio, dipenda dallo stato molecolare nella mescolanza.

Il DOLEZALEK (2) aveva già studiato tali miscele binarie in riguardo alla loro tensione di vapore e mostrato che per le miscele nelle quali i due liquidi componenti non hanno molecole associate e non dànno luogo ad alcun composto chimico, la tensione di vapore, considerata come funzione della composizione della miscela, ha andamento rettilineo; invece nelle miscele in cui i due liquidi dànno luogo ad un nuovo composto, la tensione di vapore è minore di quella che si potrebbe ricavare dalla regola di miscuglio, mentre è superiore per quelle miscele in cui uno dei due componenti contiene molecole complesse (*miscele di associazione* secondo la denominazione di Dolezalek)

In correlazione con questo comportamento rispetto alla tensione di vapore lo Schulze ha trovato sperimentalmente che, per le miscele del primo tipo, il calore specifico, considerato come funzione della composizione della miscela, ha andamento rettilineo, che per quelle del secondo tipo (in cui cioè i due componenti dànno origine ad una combinazione chimica) il calore specifico della miscela è sempre superiore a quello calcolato mediante la regola di miscuglio, mentre è sempre minore nelle

(1) SCHULZE, " Ver. d. D. phys. Ges. ,, 1912. — " Zeit. für Elektrochemie ,, 1912. — " Phys. Zeit. ,, 1912.

(2) DOLEZALEK, " Zeit. f. phys. Chemie ,, 1908 e 1910.

miscele del terzo tipo. Tale comportamento fu verificato per le coppie benzolo-cloruro di etilene (primo tipo), etere-cloroformio, acetone-cloroformio (secondo tipo), benzolo-tetracloruro di carbonio (terzo tipo, perchè il tetracloruro di carbonio è un liquido a molecole associate). Anche per le miscele del secondo e terzo tipo è tuttavia possibile calcolare il calore specifico da quello dei componenti, purchè siano note le modificazioni chimiche o molecolari nella mescolanza.

2. — Nelle esperienze qui riferite si vollero esaminare miscele liquide binarie in vicinanza (e precisamente tanto al disopra, quanto al disotto) della temperatura di fusione di uno dei due componenti. Oltre a ricercare se per i calori specifici di queste miscele fosse applicabile la regola di miscuglio, si volle esaminare se la discontinuità o almeno la rapida variazione che si presenta per molte sostanze nel calore specifico passando dallo stato solido al liquido si riproducesse anche nelle miscele e se quindi si dovesse, anche nei casi in cui la regola di miscuglio è approssimativamente applicabile, considerare, per le miscele a temperatura inferiore a quella di fusione di uno dei componenti, come calore specifico di esso componente nel miscuglio quello allo stato solido o quello della sostanza stessa soprafusa alla medesima temperatura.

3. — Le miscele esaminate furono soluzioni di difenilamina, nitronaftalina, α-naftilamina e salolo in alcool assoluto; soluzioni molto adatte per queste esperienze, data la elevata solubilità di queste sostanze nell'alcool, specie in vicinanza della temperatura di fusione.

L'alcool a 99° venne distillato due volte sopra calce viva e sopra solfato di rame anidro e poteva quindi praticamente ritenersi come alcool assoluto; la difenilamina, la α-naftilamina e il salolo vennero cristallizzati due volte dall'alcool: la nitronaftalina dall'acido acetico e dall'alcool, presentando in queste condizioni le seguenti temperature di fusione ormai invariabili:

α-Naftilamina . .	48,21
Nitronaftalina . .	56,24
Difenilamina . .	52,93
Salolo	41,38.

Le miscele vennero preparate per pesata in boccie a smeriglio: quanto ai calori specifici, dovendo questi essere determinati a varie temperature, tutte superiori a quella dell'ambiente, si ricorse al metodo di riscaldamento mediante la corrente elettrica, usando come calorimetri due vasi di Dewar immersi in un bagno a temperatura prossima a quella a cui dovea determinarsi il calore specifico e inviando la corrente attraverso due spiraline di filo di platino di circa un metro di lunghezza e del diametro di 0,2 millimetri circa: di queste spirali la resistenza e il coefficiente di temperatura vennero accuratamente determinati (Resistenza della prima spirale Ohm 3,1365 a 15°,02, della seconda 3,1265 a 15°,02).

Il termometro, i fili di rame terminanti ai due capi di ciascuna spirale, l'agitatore rotativo pure di platino erano, per ciascun calorimetro, portati da un'unica sbarra di ottone, alla quale era pure fissata un'asticella di ottone munita di due dischi di mica con guarnitura di feltro distanti circa un centimetro e mezzo. Questi dischi, di diametro uguale a quello interno dei vasi di Dewar, servivano ad otturarli circa ad un centimetro al di sopra del livello del liquido nel vaso stesso, impedendo così l'evaporazione durante l'esperienza: una volta infatti che il piccolo spazio sovrastante al liquido nel calorimetro fosse saturo di vapore, l'evaporazione era praticamente annullata.

Dapprima si determinò l'equivalente in acqua di ciascun calorimetro, ponendo in ognuno di essi lo stesso peso di acqua (90 grammi) e inviando una corrente di intensità nota, usando per misurarla un milliamperometro di Hartmann e Braun posto in derivazione e accuratamente tarato nelle stesse condizioni mediante il voltametro a nitrato di argento. Quindi, per farsi un'idea della precisione delle misure, si determinò a 40°, 50°, 60° il calore specifico dell'anilina pura disseccata mediante potassa caustica e duplice distillazione, trovando risultati conformi a quelli del Bartoli (1) (cioè con differenze mai superiori al 2 %) del resto assai concordanti coi dati del Griffiths (2).

Qui, come in tutte le determinazioni successive dei calori

(1) Bartoli, " Nuovo Cimento ,, 1895.
(2) Griffiths, " Phil. Mag. ,, 1895.

specifici eseguite col metodo elettrico, si considera come calore specifico a 40°, 50°, 60°, ecc. il valore medio in un intervallo di temperature di due o tre gradi, per cui la temperatura media è 40°, 50°, 60° rispettivamente.

Dopo questa prova preliminare si determinò il calore specifico dell'alcool assoluto, ottenendosi come media di tre esperienze

t	c
40°	0,6393
58°	0,7024

valori assai prossimi a quelli calcolati da Regnault (1) per le stesse temperature (a 40°, $c = 0,6479$; a 58°, $c = 0,7002$): da questi dati si dedussero per interpolazione ed extrapolazione i calori specifici, di cui la conoscenza era necessaria, per tutte le temperature tra 40° o 60°.

Per quanto riguarda i calori specifici delle quattro sostanze già nominate (con cui si preparavano le soluzioni alcooliche) allo stato solido e allo stato liquido, mancano i dati relativi al salolo: per la difenilamina, la nitronaftalina e la α-naftilamina si hanno le determinazioni del Battelli (2): ma, data la differenza di temperatura di fusione tra le sostanze da me adoperate e quelle usate dal prof. Battelli (difenilamina temp. fusione 52,93 e 50,9 secondo Battelli; nitronaftalina temp. fusione 56,24 e 55,1 secondo Battelli; α-naftilamina 48,21 e 43,2 secondo Battelli) non si poteva approfittare dei dati di quelle esperienze e conveniva eseguire nuove determinazioni; per le sostanze fuse si ricorse al metodo della corrente elettrica, per le sostanze solide si determinarono col metodo delle mescolanze i calori specifici medii in diversi intervalli di temperatura, ricavandone poi i calori specifici occorrenti alle varie temperature.

4. — Riporteremo qui più distesamente i risultati per la difenilamina e le sue soluzioni in alcool, riferendo poi sommariamente quelli relativi alle altre miscele:

(1) Regnault, " Mémoires de l'Acad. ", 1862.
(2) Battelli, " Atti dell'Istituto Veneto ", 1884-85.

a) Difenilamina. — Per la difenilamina liquida si trovarono i calori specifici:

t	c
56.00	0,4427
55,98	0,4413
55,99	0,4429

quindi in media:

t	c
56°	0,4423.

Analogamente:

t	c
54°	0,4385.

Per lo stato solido si ebbe:

Calore specifico medio tra 24,4 e 43,3 = 0,3190
" " " " 23,4 e 51,5 = 0,3261

da cui si può ricavare:

$$c_t = \alpha + 2\beta t = 0,2523 + 2 \,.\, 0,000985 \,.\, t$$

ottenendosi così in particolare:

t	c
45°	0,3410
50°	0,3508
51°	0,3528
52°	0,3548.

Tutti questi valori sono notevolmente inferiori a quelli dati dal Battelli che ottenne circa 0,416 a 42°,5 e 0,470 a 56°: ma, come già si disse, la differenza è spiegabile, trattandosi di sostanza effettivamente diversa.

Per le soluzioni o miscele con alcool si ebbero i seguenti risultati:

1ª soluzione: 83,33 % di difenilamina
16,67 % di alcool

t	c osservato	c calcolato I	c calcolato II	d
50°,90	0,4987	0,4106	(0,4732)	0,0255
55°,97	0,5017	0,4846	—	0,0271

2ª soluzione: 57,53 % di difenilamina
42,47 % di alcool

t	c osservato	c calcolato
50°,7	0,5571	0,4896
53°,7	0,5849	—
56°,0	0,6002	0,5496.

Dai risultati riferiti appare intanto che i calori specifici effettivi sono sempre superiori a quelli calcolati secondo la regola di miscuglio: per fare questo calcolo si è supposto di usare il calore specifico della difenilamina liquida o solida a seconda della temperatura cui il calore specifico si riferisce: tuttavia per la soluzione più ricca di difenilamina la differenza d tra il calore specifico osservato e quello calcolato si mantiene pressochè costante, quando per la temperatura più bassa (50,9) si consideri come calore specifico della difenilamina quello della sostanza liquida (soprafusa) a quella temperatura ottenuto per extrapolazione: tale valore così calcolato pel calore specifico della miscela è segnato nella colonna II e racchiuso tra parentesi. Questo in sostanza corrisponde a dire che la variazione rapida o discontinuità nel calore specifico della difenilamina passando dallo stato solido al liquido non si riproduce nelle miscele.

b) Nitronaftalina. — Per il calore specifico allo stato liquido si ebbe:

t	c
58°,6	0,3650
61°,4	0,3778

onde si dedussero i seguenti valori:

t	c
58°	0,3623
59°	0,3668
60°	0,3714
61°	0,3760
62°	0,3804.

Per lo stato solido, dalla determinazione del calore specifico medio tra 25° e 45° e tra 25° e 55°, si ottiene:

t	c
50°	0,3480
51°	0,3499
52°	0,3518
53°	0,3536
54°	0,3554
55°	0,3572

valori che in complesso sono in sufficiente accordo coi dati del Battelli, corrispondentemente alla minor differenza nella temperatura di fusione per le qualità adoperate di sostanza: non appare che all'atto della fusione il calore specifico subisca notevole variazione.

Per le soluzioni si ebbero i resultati seguenti:

1ª soluzione: 58,64 % di nitronaftalina
41,36 % di alcool

t	c osservato	c calcolato
54°,2	0,5453	0,4941
56°,8	0,5480	—
61°,0	0,5644	0,5152

2ª soluzione: 38,25 % di nitronaftalina
61,75 % di alcool

t	c osservato	c calcolato
53°,7	0,6034	0,5603
56°,6	0,6093	—
58°,1	0,6153	0,5725

Anche in questo caso il calore specifico effettivo è sempre superiore a quello calcolato secondo la regola di miscuglio.

c) *α-naftilamina.* — Le determinazioni di calore specifico allo stato liquido dettero i risultati

t	*c*
51°,7	0,4736
54°,7	0,4774

da cui:

t	*c*
51°	0,4727
52°	0,4740
53°	0,4753
54°	0,4766

mentre per lo stato solido si ebbe:

t	*c*
45°	0,4200
46°	0,4253
47°	0,4298
48°	0,4342

presentandosi qui, come per il caso della difenilamina, una variazione rapida di calore specifico passando dallo stato solido al liquido.

Un comportamento del tutto analogo a quello delle soluzioni di difenilamina presentano le miscele di naftilamina con alcool, come risulta dai dati qui sotto riferiti, ove le lettere hanno il significato loro attribuito nelle tabelle relative alla difenilamina.

1ª soluzione: naftilamina 86,89 %
alcool 13,11 %.

t	*c* osservato	*c* calcolato		*d*
		I	II	
47°,8	0,5037	0,4639	(0,4966)	0,0071
49°,7	0,5045	—	(0,4976)	0,0069
52°,4	0,5092	0,5021	—	0,0071

2ª soluzione: 50,71 °/₀ di naftilamina
49,29 °/₀ di alcool

t	*c* osservato	*c* calcolato I	*c* calcolato II	*d*
46°,45	0,5989	0,5425	(0,5626)	0,0363
49°,00	0,6096	—	(0,5695)	0,0401
52°,02	0,6111	0,5763	—	0,0348.

d) Salolo. — Il calore specifico allo stato liquido venne determinato soltanto a 44°,1: ottenendo

t	*c*
44°,1	0,3908.

Per lo stato solido si determinò soltanto il calore specifico medio tra 23°,4 e 41° che può approssimativamente considerarsi come calore specifico a 32°,2, avendosi dunque:

t	*c*
32°,2	0,2902

per conseguenza per le miscele vennero calcolati i calori specifici solo per la temperatura di 44°,1.

Le soluzioni dettero i risultati seguenti:

1ª soluzione: 87,55 °/₀ di salolo
12,45 °/₀ di alcool

t	*c* osservato	*c* calcolato
40°,06	0,4418	—
44°,12	0,4516	0,4242

2ª soluzione: 52,13 °/₀ di salolo
47,87 °/₀ di alcool

t	*c*	*c*
40°,30	0,5540	—
44°,12	0,5572	0,5163

Anche in questo caso adunque la regola di miscuglio non è applicabile: anzi, anche per la miscela più ricca di salolo, la

differenza tra il calore specifico effettivo e quello calcolato secondo la predetta regola è assai notevole.

5. — Nelle esperienze sopra riferite sono stati determinati i calori specifici della difenilamina, della nitronaftalina, della α-naftilamina e del salolo, nonchè delle miscele con alcool assoluto, tanto al disotto quanto al disopra della temperatura di fusione della sostanza in questione.

Da esse si può concludere:

1° Le miscele di alcool con difenilamina, nitronaftalina, α-naftilamina e salolo hanno calori specifici superiori a quelli calcolabili secondo la regola di miscuglio ed apparterrebbero quindi alle miscele del 2° tipo di Schulze: è probabile tuttavia che la divergenza dalla regola sopracitata dipenda qui da variazioni nel numero di molecole associate per fatto della mescolanza; affinchè detta regola fosse applicabile sarebbe necessario conoscere le condizioni molecolari nella soluzione.

2° Anche per il caso della difenilamina e della α-naftilamina che presentano una variazione rapida di calore specifico passando dallo stato solido al liquido, tale comportamento non si presenta per le miscele studiate.

3° Nelle miscele esaminate a temperatura inferiore a quella di fusione di uno dei due componenti, per il calore specifico di questo componente nella miscela deve prendersi quello della sostanza liquida soprafusa e non quello del solido alla stessa temperatura: questo comportamento è in certo senso il reciproco di quello dell'acqua a cui, come acqua di cristallizzazione, spetta all'incirca il calore specifico del ghiaccio e non quello dell'acqua alla stessa temperatura (*).

Istituto Fisico della R. Università di Torino,
Giugno, 1913.

---

(1) Mi è grato rendere qui vive grazie al Ch.mo Prof. Fileti che mi favorì molte delle sostanze adoperate e mi fu cortese di numerose informazioni in proposito.

Saponificazione di eteri di ossiazocomposti.

Nota dei Dri G. CHARRIER e G. PELLEGRINI.

In lavori precedenti abbiamo avuto più volte occasione di notare la grande resistenza che gli eteri degli ossiazocomposti del tipo $C_{10}H_6 \langle {N=N-C_6H_4OR \atop OH}$ (in cui R rappresenta CH_3 o C_2H_5) presentano agli ordinàri agenti di saponificazione.

Mentre gli eteri della struttura $C_{10}H_6 \langle {N=N-C_6H_4OH \atop OR}$ contenenti l'alchile legato all'atomo di ossigeno dell'ossidrile naftolico vengono facilmente saponificati, per es., per semplice ebollizione di pochi minuti con acidi diluiti, gli eteri del primo tipo, contenenti cioè l'alchile sostituente l'atomo di idrogeno dell'ossidrile fenico, sono molto resistenti all'azione degli alcali e degli acidi anche concentrati; in un solo caso, quello degli o-derivati (o-anisil- e o-fenetilazoβnaftol) uno di noi (1) ha potuto ottenere saponificazione con formazione di o-ossifenilazoβnaftol, impiegando il pentacloruro di fosforo.

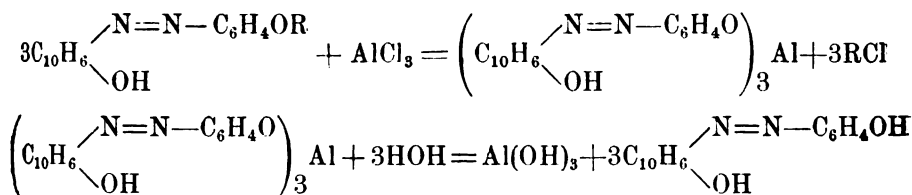
Abbiamo ora trovato che questi eteri vengono facilmente saponificati se si fa agire su di essi il cloruro di alluminio anidro, analogamente a quanto avviene per i semplici eteri fenolici.

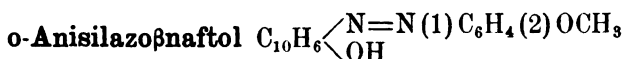
Si può ammettere che anche in questo caso si formi il sale di alluminio dell'ossiazocomposto, svolgendosi il cloruro dell'alchile contenuto nell'etere, e che questo sale di alluminio venga poi decomposto dall'acido cloridrico o dall'acqua nell'ossiazocomposto corrispondente.

(1) G. *41*, II, 717 (1911).

La reazione, che avviene, sarebbe dunque la seguente:

$$3C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-C_6H_4OR \\ \diagdown OH\end{matrix} + AlCl_3 = \left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-C_6H_4O \\ \diagdown OH\end{matrix}\right)_3 Al + 3RCl$$

$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-C_6H_4O \\ \diagdown OH\end{matrix}\right)_3 Al + 3HOH = Al(OH)_3 + 3C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-C_6H_4OH \\ \diagdown OH\end{matrix}$$

e potrebbe venir impiegata talora con vantaggio anche per la preparazione di alcuni ossiazocomposti, partendo dagli eteri corrispondenti più facilmente accessibili.

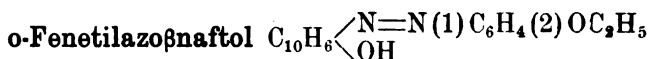
o-Anisilazoβnaftol $C_{10}H_6\langle\begin{matrix}N{=}N(1)C_6H_4(2)OCH_3 \\ OH\end{matrix}$

Se si scalda a bagnomaria dell'o-anisilazoβnaftol polverizzato finamente con quattro a cinque volte il suo peso di cloruro di alluminio anidro e si porta quindi per breve tempo la temperatura a 120-130° impiegando un bagno ad olio, si ha sviluppo di acido cloridrico e di cloruro di metile, e rimane nel pallone in cui si opera una massa compatta di color verde metallico, che trattata con acqua o con acido cloridrico fumante prende un colore rosso-cupo. Se si scalda questa sostanza rossa alla ebollizione con soluzione diluita di idrato sodico (10 %), essa si scioglie quasi completamente dando un liquido azzurro-violetto, che contiene disciolto il sale di sodio dell'o-ossifenilazoβnaftol, $C_{10}H_6\langle\begin{matrix}N{=}N(1)C_6H_4(2)OH \\ OH\end{matrix}$. Dalla soluzione alcalina per raffreddamento cristallizza il sale di sodio $C_{16}H_{11}N_2O_2Na.3H_2O$.

Con acido solforico diluito si ottiene facilmente dal sale di sodio l'o-ossifenilazoβnaftol, che cristallizzato dall'alcool fonde a 193°.

Gr. 0,1544 di sostanza diedero cc. 14,3 di azoto ($H_0 = 736,209$ $t = 15°$), ossia gr. 0,016311.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{12}N_2O_2$
Azoto	10,56	10,60

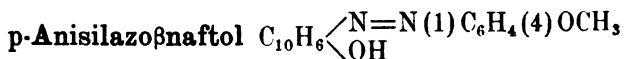
o-Fenetilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N=N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5 \\ \diagdown OH\end{matrix}$

Se si scalda verso 100° dell'o-fenetilazoβnaftol finamente polverizzato con circa quattro volte il suo peso di cloruro di alluminio, aumentando poi la temperatura del bagno gradatamente fin verso 120° e si fanno passare i vapori che si svolgono nella reazione attraverso un tubo ad U raffreddato in miscuglio frigorifero, si nota che in esso si condensa un liquido, che è costituito da cloruro di etile C_2H_5Cl, poichè bolle a pressione ordinaria verso 12°, brucia con fiamma verde caratteristica e dimostra inoltre tutte le proprietà di questo corpo.

Nel pallone in cui si fa la reazione rimane una massa di color violetto a riflesso metallico, che trattata con acqua diventa rossa e si scioglie nell'idrato sodico al 10 °/₀ con intensa colorazione azzurra: si filtra all'ebollizione, e il filtrato per raffreddamento lascia cristallizzare buona quantità del sale sodico $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N=N(1)C_6H_4(2)ONa \\ \diagdown OH\end{matrix}.3H_2O$: dalle acque madri si ottiene poi ancora una parte del prodotto. L'o-ossifenilazoβnaftol così ottenuto, messo in libertà con acido solforico diluito dal suo sale sodico, cristallizza dall'etere acetico in grandi tavole di color verde cantaride, fusibili a 193°.

Gr. 0,1352 di sostanza diedero cc. 12,4 di azoto ($H_0 = 735,103$ $t = 16°$), ossia gr. 0,014069.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{12}N_2O_2$
Azoto	10,40	10,60

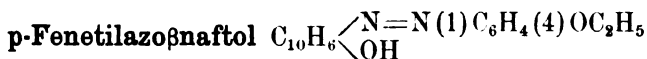
p-Anisilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N=N(1)C_6H_4(4)OCH_3 \\ \diagdown OH\end{matrix}$

Il p-anisilazoβnaftol scaldato con eccesso di cloruro di alluminio anidro nelle condizioni accennate a proposito degli ossiazocomposti precedenti si saponifica facilmente, formando cloruro di metile e p-ossifenilazoβnaftol, $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N=N(1)C_6H_4(4)OH \\ \diagdown OH\end{matrix}$,

che cristallizzato dall'alcool metilico, forma aghi di color verde cantaride, fusibili a 194°.

Gr. 0,1468 di sostanza diedero cc. 14,0 di azoto ($H_0 = 733,273$, $t = 24°$), ossia gr. 0,015302.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{12}N_2O_2$
Azoto	10,42	10,60

p-Fenetilazoβnaftol $C_{10}H_6 \begin{cases} N = N\,(1)\,C_6H_4\,(4)\,OC_2H_5 \\ OH \end{cases}$

Per azione del cloruro di alluminio anidro si ottiene da questo composto, assieme a cloruro di etile, che venne caratterizzato al punto di ebollizione 12° e alle altre proprietà (volatilità, infiammabilità, fiamma verde, ecc.), p-ossifenilazoβnaftol, che, cristallizzato dall'alcool metilico, fuse a 194°.

Torino, Istituto Chimico della R. Università,
Giugno 1913.

Relazione sulla Memoria dei proff. Campetti e Del Grosso *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili. Studio della fase gassosa.*

Tre anni or sono avemmo dalla Classe l'incarico di esaminare un primo studio dei professori Campetti e Del Grosso sull'equilibrio di coppie di sostanze parzialmente miscibili. Quello studio riguardava l'equilibrio allo stato liquido. La Classe, dopo aver approvato la relazione che noi le presentammo, ammise quello scritto nei volumi accademici.

La Memoria, di cui ora ci occupiamo, tratta invece dell'equilibrio nella fase aeriforme e propriamente ha lo scopo di determinare la composizione del vapore che nelle condizioni di equilibrio sta al di sopra d'una miscela di due dati liquidi ad una temperatura inferiore a quella, alla quale i due liquidi si mescolano in tutte le proporzioni.

Non tutte le coppie di sostanze, che furono studiate allo stato liquido, furono oggetto delle più recenti esperienze, e ciò perchè le proprietà di alcune sostanze usate nella prima serie, le rendevano poco adatte alle nuove ricerche. Per le tre coppie studiate in quest'ultime, dovendo adoperare del materiale diverso da quello già prima usato, gli autori rifecero l'esperienze relative alla fase liquida. Lo studio della composizione del vapore delle miscele fu fatto per due coppie determinando la densità. Per la coppia fenolo-isopentano, non potendo applicare quel metodo, gli autori seguirono quello della corrente gassosa, già usato dal Dolezalek e da altri. Le esperienze descritte in questa Memoria presentavano non piccole difficoltà, che furono abilmente superate dagli autori.

Poichè la Memoria stessa è un pregevole complemento della prima parte già pubblicata nel 1910 dalla nostra Accademia, noi ne proponiamo la lettura alla Classe e l'inserzione nei volumi accademici.

GUIDO GRASSI
A. NACCARI, *relatore.*

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSI UNITE

Adunanza del 22 Giugno 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, D'Ovidio, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Fusari e Balbiano. — È scusata l'assenza del Socio Camerano, Vice-Presidente dell'Accademia.

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche Carle, Renier, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 18 maggio 1913.

Invitato dal Presidente, il Socio Tesoriere dà lettura del conto consuntivo dell'esercizio 1912 e del bilancio preventivo per l'esercizio 1913. Dà pure il rendiconto dei fondi particolari per i premi Bressa, Gautieri, Pollini, Vallauri. Consuntivi e preventivi sono approvati con voto unanime.

Si procede alla elezione del Vice-Presidente dell'Accademia, essendo trascorso il primo triennio della nomina del Socio Camerano, e, salvo l'approvazione sovrana, il Socio Camerano è confermato in quella carica.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 22 Giugno 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Carle, Renier, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 8 giugno 1913.

Il Socio Stampini ringrazia dell'invito fattogli dalla Classe a tenere la commemorazione di Arturo Graf e dichiara di accettare.

Il Presidente presenta il volume *L'Esiglio di Sant'Agostino* (Torino, Fiandesio, 1912) e vari altri scritti del prof. L. M. Billia, dall'autore inviati in omaggio all'Accademia.

Il Socio Einaudi offre per l'inserzione negli *Atti* una Nota del Dr. Gino Borgatta, intitolata: *I problemi fondamentali della scienza finanziaria*.

Pure per gli *Atti* il Socio De Sanctis presenta un lavoro del Dr. Giuseppe Cammelli, *Le notizie del Pseudo Scimno sulla Sicilia e sulla Magna Grecia*, e uno del sig. Giulio Giannelli su *Gli aeditui e i camilli*.

LETTURE

I problemi fondamentali della scienza finanziaria.

Nota 2ª del Dr. GINO BORGATTA.

SOMMARIO. — § 1. I due gruppi di teorie dirette a formulare le leggi generali dei fatti finanziari: le teorie storiche e le edonistiche. Le teorie storiche della finanza negli scrittori germanici: elementi scientifici delle loro analisi. La corrispondenza dei fenomeni finanziari all'azione dei gruppi economicamente e politicamente dominanti in Achille Loria-Conigliani. — § 2. Queste teorie implicano la conoscenza delle leggi dei fenomeni politici e sociologici. Differenza metodologica fondamentale nello studio dei 2 gruppi di fenomeni (economici, politici): questi ultimi debbono studiarsi come le leggi degli " istinti „ animali. — § 3. La teoria edonista nata col Sax: sua essenza: elaborazione recata da scienziati italiani (Graziani, Mazzola, De Viti De Marco, ecc.). La ricostruzione di essa nelle recenti *Lezioni* dell'Einaudi. Elementi nuovi recati alla costruzione sistematica della teoria finanziaria. Caratteri scientifici. È seguita dal Barone. I concetti del Pantaleoni sui prezzi politici spostano concetti fondamentali della teoria. — § 4. Condizioni essenziali presupposte dall'ipotesi edonista: perfetto parallelismo con quelle dell'ipotesi economica. Non basta perchè corrisponda ai fatti che gli impieghi dei proventi pubblici risultino in parte *utili* alla collettività, indipendentemente da una serie di atti preordinati: la finanza non deve spiegare i prezzi che si determinano in economia per servizi *ofelimi* prodotti dall'ente pubblico; ma *perchè* li produce questo. — § 5. Breve critica della teoria: il fenomeno concreto non appare presentare, neppure come *tendenza*, le condizioni da essa presupposte. Gli impieghi dei pubblici proventi non sono *ofelimi* nel senso economico per una maggioranza più o meno grande di chi concorre a pagarli. — § 6. In questa manca sovratutto un'attività *logica* diretta (inizialmente) alla loro produzione in quella forma (pubblica). Non esiste in concreto alcunchè di corrispondente all'ipotesi della " forza „ cooperativa: la costituzione oligarchica degli aggregati è il prodotto di azioni essenzialmente non-logiche. I fenomeni finanziari vi sono strettamente connessi: corrispondono ad un lato dell'attività e delle condizioni in cui operano i gruppi politicamente e socialmente dominanti.

§ 1. — I *fatti* finanziari, cioè quei fenomeni che dànno luogo ad un movimento della ricchezza tra i gruppi sociali, caratterizzato dalla mancanza delle condizioni proprie dello scambio economico, seguono delle leggi generali, come ogni altro fatto sociale o fisico-naturale. Le diverse teorie dirette a definire queste leggi del fenomeno finanziario generale ci sembra

possano in gran parte ricondursi a due gruppi più caratteristici ed importanti: le teorie finanziarie *storiche* e le teorie finanziarie *edonistiche*. Con che si trascurano altre teorie minori, come i tentativi offerti dallo Smith e dai primi classici, che considerarono il fatto finanziario un fenomeno essenzialmente di *consumo* delle ricchezze prodotte dai privati secondo le leggi proprie dell'economia: ma, lasciando da parte i problemi *economici* della finanza talora da essi acutamente trattati e gli elementi descrittivi, i classici della 1ª metà del sec. XIX non appaiono essersi posto veramente il problema delle *leggi* seguìte dai fatti finanziari. Delle scuole *storiche*, occorre ricordare i principî metodologici generali, non essendone la trattazione dei fatti finanziari che una diretta applicazione. Ci riferiamo essenzialmente alle opere degli scrittori germanici del sec. XIX, come il Rau, W. Roscher (*System der Finanzwissenschaft*) in parte, del Vocke (*Die Grundzüge der Finanzwiss.*), Stein (*Lehrbuch der Finanzwiss.*) ed altri di varia importanza, particolarmente ricordando lo Schmoller (1) ed Adolfo Wagner (2). Carattere generale delle scuole storiche è la mancanza della nozione (o sua applicazione) di *legge* generale, nel senso indicato nel § 1 (nota 1ª): la ricerca degli elementi empirici e dei lineamenti e caratteri superficiali.

---

(1) G. Schmoller, *Lineamenti di economia nazionale generale* (" Bibliot. dell'Econ. ", serie V, vol. XI, pagg. 427-99): per quanto la trattazione dello Schmoller ci sembri scientificamente meno utile, nel senso da noi indicato, di quella del Wagner, rileviamo la particolare coordinazione che in essa hanno lo sviluppo e le variazioni delle economie pubbliche, statali e locali, alle condizioni degli aggregati economici (storici), osservando che lo S. talora pure accoglie i concetti delle scuole edoniste (cit. p. 490 e s.).

(2) Si ved. *Traité de la Science des Finances* (trad. franc.) vol. I e II e anche IV, § 4 e 5. " L'histoire fiscale et le droit positif d'un pays sont le produit des courants divers et croisés qui influent sur la formation concrète de l'imposition. L'idéal que la théorie générale des impôts cherche à déterminer apparaît, chez les peuples civilisés, plus ou moins clairement à la conscience populaire et au législateur..... En pratique, le droit fiscal d'une époque n'est jamais qu'un compromis entre l'idéal, lui-même variable, qu'entrevoit la conscience populaire en ses aspirations vers une imposition " juste ", c'est-à dire une imposition suffisante, adéquate et équitable — ce sont ces aspirations que la théorie générale des impôts cherche à déterminer, à apprécier et à exprimer d'une façon claire et scientifique (?) — et les obstacles extérieurs qu'offrent les conditions psychologiques, politiques, sociales, etc. " (cit., IV, 9-10). Qui s'intrecciano i criteri indicati nel § 4.

epperciò spesso eterogenei, del fenomeno concreto, e la loro *descrizione*, sostituiscono in genere la formulazione delle ipotesi generali presentate come approssimazioni rigorose alle uniformità oggettivamente seguite dai fatti. Tale carattere contraddistingue pure gran parte degli scritti finanziari accennati. Con che non si debbono affatto trascurare i poderosi, ricchi contributi da essi recati di materiali essenziali alle indagini scientifiche sui fatti finanziari: sotto questo aspetto gli autori considerati vantano meriti si può affermar superiori a quelli di ogni altra scuola finanziaria. Inoltre, e questo è secondo noi il lato meno noto degli elementi scientifici offerti dalle teorie finanziarie storiche, esse non ci offrono solo un'indagine storica dello sviluppo e delle trasformazioni degli istituti finanziari, ma il tentativo sistematico di presentare e connettere tale sviluppo in rapporto ai dati (storici) di altri gruppi di fenomeni sociologici, in alcuni A. (Rau, Wagner) essenzialmente politico-sociali, in altri (Schmoller) economici. Queste concomitanze osservate dalla scuola storica, per quanto di natura essenzialmente empirica, contengono elementi e criteri a nostro parere di fondamentale importanza nello studio delle uniformità dei fenomeni finanziari. Mettendo in diretto rapporto i fatti finanziari con le condizioni degli aggregati politici, colle forme generali assunte dai sentimenti giuridici, morali, politici, religiosi anche, con certi caratteri degli equilibri economici *concreti* in cui i fenomeni finanziari si verificano, essa ha spostato il fenomeno finanziario da quella considerazione essenzialmente *economica* che le interferenze continue col fenomeno economico proprio hanno fatto prevalere in altre scuole finanziarie. Anche se non ha formulato le leggi generali dell'equilibrio sociologico, anche se non ha definito nettamente quei rapporti tra i fatti finanziari ed i movimenti, strutture, proprietà degli aggregati politici che ha in più modi intravveduto, la scuola storica ha posto alla scienza il problema di queste relazioni. Le leggi generali del fenomeno finanziario si possono porre, come quelle economiche, non solo indipendentemente dalle leggi dei fatti *sociologici*, ma supponendo nelle azioni umane che vi dànno luogo proprietà generali in parte *opposte* a quelle che caratterizzano gli atti umani costituenti i fenomeni sociologici? Le teorie storiche non hanno risposto categoricamente a questo problema perchè non

se lo sono posto, ma mentre la scuola edonista, come vedremo, lo ha risolto in senso nettamente affermativo, quella storica ha accumulato elementi ed aperta la via ad indagini che rispondono negativamente al quesito. Questo appare in modo assai più visibile e sistematico nelle opere di Achille Loria, sovratutto nelle *Basi economiche della costituzione sociale* (vedasi l'ultima edizione, Torino, 1913, pagg. 348-405, cap. III). Il Loria, tra l'altro, fa pure acute critiche alle teorie finanziarie sui " principî distributivi " delle imposte, rilevandovi caratteri metafisici da noi in modo generale accennati (in nota I, § 4) (ved. *Le Basi* cit. 394-403), ed altre critiche ai principî fondamentali delle teorie *edonistiche* che esamineremo, particolarmente al Sax. Dal punto di vista costruttivo, è noto che nelle teorie del Loria il fenomeno è prospettato in questa forma: le condizioni generali degli aggregati economici concreti, particolarmente dei rapporti tra la terra e la popolazione, determinano le forme delle costituzioni e strutture politiche e sociali degli aggregati e corrispondentemente, dalla struttura politica conseguono le forme ed i modi dei sistemi finanziari. La brevità della nota non ci consente più largamente esaminare le tesi specifiche con cui queste nozioni generali sono svolte e che del resto sono oramai state largamente sotto più aspetti esaminate e discusse: gli elementi che essenzialmente vi riguardano il nostro problema si possono riassumere in questi concetti: 1° gruppi economicamente e gruppi politicamente dominanti negli aggregati sociali sostanzialmente si identificano; 2° i metodi, sistemi e fenomeni finanziari (concreti s'intende) in modo generale corrispondono all'azione, agli interessi, alle condizioni di dominio e di pressione economica e politica dei gruppi economicamente e politicamente dominanti. Il Loria esclude in modo specifico che queste corrispondenze costituiscano delle alterazioni e deviazioni essenzialmente temporanee e, nell'epoca moderna, eccezionali, come sarebbero gli *atti antieconomici* per gli individui operanti nel fenomeno economico concreto (come sostengono le scuole edoniste) dappoichè tali " alterazioni " appaiono come il carattere più generale e proprio dei fenomeni finanziari della storia d'ogni tempo (cit. 400-1 e seg.). Anche il Conigliani (*Le leggi scientifiche della finanza*, sp. c. III) ha acutamente posto in rilievo la natura *politica* del processo per cui attraverso i sistemi tributari

porzioni dei redditi prodotti dagli individui con azioni economiche passano all'ente pubblico il quale agirebbe in parte come un *homo œconomicus* nel trasformare queste ricchezze: attribuendo quindi carattere essenzialmente *politico* alle forme d'assorbimento della ricchezza privata, *economico* a quelle delle trasformazioni successive di essa in mano allo Stato.

§ 2. — In linea generale e prescindendo dalle tesi specifiche sostenute nei sistemi ricordati, è da osservarsi che il trattamento dei fenomeni finanziari rispondente a questo gruppo di concezioni presuppone una conoscenza di caratteri e delle leggi seguite dai fenomeni politici e, più generalmente, dal fenomeno sociologico: è appunto in ciò la loro implicita risposta negativa al problema prima accennato. La ipotesi economica parte infatti dal carattere essenziale delle azioni economiche di presentare una approssimativa corrispondenza tra i fini soggettivi ed i risultati economici oggettivi: la scienza economica può avvicinarsi progressivamente al fenomeno concreto tenendo conto dei dati di fatto offerti dalle finalità (soggettive, dirette) degli individui in quanto sa che, pel fenomeno *medio*, esse non divergono sostanzialmente dalle oggettive.

Pei fenomeni sociologici in genere e pei politici in ispecie, questa condizione, in modo generalissimo, non è ammissibile. Le finalità che si pongono gli individui concreti nella loro attività religiosa, politica, morale, giuridica anche, nella generalità dei casi poco o nulla hanno a che fare coi risultati *effettivi*, concreti di questa: e, ugualmente, le cause soggettivamente attribuite a queste serie di atti che costituiscono fenomeni sociologici, sono quasi sempre *differenti* dalle cause che in realtà li determinano. La conseguenza metodologica essenziale di questo fatto viene ad essere la necessità di studiare le forze sociologiche (politiche, morali, religiose, ecc.) e le leggi da esse seguite, in modo analogo agli *istinti* animali, nel senso che la scienza dovrà studiare *cause*, *effetti*, *leggi* di questi atti non solo indipendentemente ma contro (cioè liberandosi dalla falsa via su cui esse pongono l'indagine dello studioso che è pure uomo soggetto a tali forze) le cause e gli scopi che risultano dalle motivazioni e dichiarazioni (soggettive) degli individui concreti. Per chiarire un poco quest'accenno fugace schematizzeremo alcuni esempi relativi a diversi gruppi di fatti sociali.

a) *Economici.*

fini soggettivi: gli individui desiderano pane, vino, ecc., che non trovano disponibili a piacere: vendono i loro servizî personali per procurarsi il mezzo di avere certe quantità di quei beni, ecc.

risultati oggettivi: gli individui vendono effettivamente i loro servizi, ne ricavano un certo prezzo, con cui acquistano certe quantità di beni oggetto del loro desiderio, soddisfacendolo in una data misura.

cause soggettive: desiderio di certi beni in certe quantità, necessità di superare i costi del loro acquisto: possibilità di vendere i servizi personali ricavandone beni che consentono di soddisfare quei bisogni.

cause oggettive: ofelimità di quei beni, costi da superare per le condizioni in cui gli individui si trovano, valore dei servizi personali venduti, ecc.

b) *Religiosi.*

fini soggettivi: Gli individui compiono atti di culto perchè così piace alla divinità, perchè questo è il mezzo di procurarsi la sua benevolenza, i premi che riserba ai mortali, ecc.

risultati oggettivi: non constano alla scienza sperimentale le entità affermate dagli individui e quindi l'oggettività dei risultati propostisi. Ne risulta un'attività *religiosa*, una certa *forma* di questo sentimento, una *gerarchia* religiosa, ecc. che sociologicamente possono riuscire, a seconda delle condizioni generali, degli individui che vi salgono, loro qualità, ecc. della forma in cui s'estrinseca, dei rapporti colle altre attività sociologiche, utili o dannose.

cause soggettive: volontà della divinità, raggiungimento del perdono, della protezione, dei premi di essa, ecc. (naturalmente desiderati in maggiore o minore misura dagli individui stessi).

cause oggettive: esistenza negli aggregati sociali di un fondamentale sentimento " religioso " che può essere caratterizzato in una certa società dalla fede in una divinità che avrebbe certe esigenze interpretate per lo più in correlazione ai sentimenti *morali* della società stessa, donde l'opportunità di una data gerarchia, riti, ecc.

c) *Morali.*

fini soggettivi: gl'individui compiono o approvano certe azioni e relazioni coi loro simili, ne evitano e biasimano certe altre, perchè le prime sono giuste, conformi alla morale, alla ragione, alle leggi di natura, ecc.

risultati oggettivi: il compiersi di atti (considerati " morali ") da un certo numero di individui, l'evitarsi di quelli " immorali " ha per l'aggregato sociale una serie di effetti oggettivi, sia relativi alla coesistenza degli individui e loro relazioni, all'utilità totale goduta dalla collettività, alle condizioni politiche, eco-

nomiche, ecc. di essa, che anche qui possono essere utili o dannosi secondo la *forma* assunta dai sentimenti morali e da tutte le altre contemporanee condizioni dell'aggregato (non è possibile stabilirlo *genericamente ed a priori*).

cause soggettive: ossequio ai principì e dettami della vera morale; dovere di evitare le azioni immorali, ecc.

cause oggettive: esistenza, in grado maggiore o minore, di sentimenti o forze " morali " negli individui (o in parti notevoli di essi) della collettività, forze che assumono contenuto particolare in corrispondenza delle cognizioni intellettuali, dei sentimenti religiosi, dello stato politico ed economico: onde gli individui sono spinti a certe serie di azioni e sentono ripulsione per altre.

d) *Politici.*

fini soggettivi: molti individui di una collettività votano per certi candidati che costituiranno o parteciperanno indirettamente al governo, per esercitare la sovranità popolare, il loro diritto, render possibile il rispetto degli interessi della generalità, la vera democrazia, la giustizia, la libertà, l'uguaglianza generale.

risultati oggettivi: attraverso le forme democratiche l'aggregato è costantemente dominato da ristrette classi politiche che vi salgono giovandosi in parte di quelle linee e sentimenti generali in nome dei quali si sforzano di vincere contro altre che, salendo o già al potere, pure si appoggiano a tali sentimenti o ad altri elementi. Tale struttura aristocratica della società politica però riesce spesso *utile* all'aggregato che vi dà inconsapevolmente luogo, date le condizioni di competenza, istruzione, attività, ecc. dei governati, le qualità dei governanti, lo stato che interverrebbe ove tale dominio di *élites* non si verificasse e si concretizzasse una vera amministrazione cooperativa.

cause soggettive: esercizio dei diritti di sovranità popolare, raggiungimento degli ideali di partito, di un regime di libertà, di giustizia tributaria, di uguaglianza politica, ecc.

cause oggettive: diversissime. Differente distribuzione di certe qualità negli individui dell'aggregato (intelligenza, volontà, cognizioni, ambizioni, forza fisica, oratoria, ecc.), impossibilità di una vera amministrazione cooperativa, esistenza di *ideali* politici, di sentimenti nella collettività utilizzati dai gruppi che tentano salire al potere o vi sono giunti, ecc.

Inutile osservare che queste proposizioni sono puramente *indicative* nel senso che le 2e colonne non esprimono leggi rigorose, ma solo grossolanamente le differenze coi concetti della 1a. Concludendo, la conseguenza di questi caratteri diversi delle azioni sociali degli individui appare grandissima nello studio delle leggi dei fatti finanziari: se questi costituiscono gruppi di fenomeni analoghi ad *a*) sarà possibile seguire un metodo parallelo a quello dell'economia pura; ma se essi presentano invece i caratteri dei fenomeni successivi (*b*-*d*) e le loro leggi si connettono direttamente a quelle dei fenomeni politici o sociologici in genere, dovranno evidentemente studiarsi come questi ultimi e tenendo conto essenziale delle loro leggi. Il che consentirebbe di spiegare anche come nel fenomeno finanziario vi sia la produzione di *utilità* (in senso oggettivo) per le masse contribuenti senza che tale produzione risulti da una serie di atti logici diretti a tale scopo, come pei servizî procurati e goduti mediante l'attività economica (privata). Infatti caratteristica essenziale dei fenomeni (*b*-*d*) è appunto di presentare soluzioni (o tendenze dell'aggregato alla soluzione) di problemi di massimo di utilità collettiva attraverso l'azione di sentimenti, cioè atti inconsapevoli del risultato raggiunto.

§ 3. — Diverge invece fondamentalmente da tali presupposti la teoria finanziaria che diremo *edonistica*, oggi prevalente nella finanza teoretica. L'aggettivo vuol indicare che tali dottrine sono un riflesso ed una vasta elaborazione nel campo dei fatti finanziari dei principî e concetti delle teorie *economiche* cosidette edonistiche. Questa teoria, pur tenendo conto di vari acuti accenni negli scritti anteriori del Pantaleoni, ha il suo inizio sistematico nella celebre opera di E. Sax: *Grundlegung der theorischen Staatswissenschaft* (Wien, 1887), seguìto poi non solo da elaborazioni, ma sviluppi e contributi originali e profondi, specialmente da parte di studiosi italiani, cui accenneremo. Nella sua essenza, la teoria imposta la ricerca delle leggi generali dei fenomeni finanziari partendo da un'ipotesi perfettamente parallela a quella economica: come gli individui hanno bisogni *privati* che tendono a soddisfare secondo l'intensità, la configurazione loro, con una serie di atti logici diretti a superare col minimo sacrificio i costi necessari, così essi hanno dei bisogni *collettivi*, *pubblici*, " indivisibili ", che pure tendono a soddisfare

attraverso l'opera degli enti pubblici, col minimo sacrificio e secondo l'ordine e l'intensità che presentano assieme ai bisogni privati, superando i costi col pagamento dei tributi. Nel Sax la formulazione è più strettamente analoga all'ipotesi economica pura: una serie di atti logici come gli economici sarebbe (nell'assoluta generalità dei fenomeni finanziari) diretta, partendo dai bisogni " collettivi ", a produrre i servizî pubblici che li soddisfano, colla semplice caratteristica del concorso od opera dei pubblici funzionari. Un rilievo elementare ha subito fatto recar correzioni all'ipotesi: la natura indiretta del supposto processo di scambio ed equilibrio tra bisogni pubblici e loro costi, che appare stabilirsi solo attraverso l'azione dei gruppi politici, i quali in concreto hanno alterato ed alterano, sia pur temporaneamente, tale processo, determinando condizioni di favore nell'assunzione dei costi o godimento di servizi pubblici a certi gruppi o classi, a detrimento delle maggioranze. Condizioni perturbatrici rilevate — pur accogliendo sostanzialmente la concezione generale edonista — sovratutto da studiosi italiani come il Ricca-Salerno (*Scienza delle Finanze*, Firenze, 1890, § 15 e s.; § 28 e s.; *Nuove dottrine sistematiche della scienza delle finanze,* " Giorn. d. E. ", 1887, 4°) ed Augusto Graziani (*Istituzioni di scienza delle finanze*, Lib. I, c. IV). Più accuratamente furono analizzati i caratteri dei servizî " pubblici " (Stein, Mazzola, Montemartini, Pantaleoni, De Viti De Marco) traendo però dall'analisi conferma, con opportune correzioni, alla teoria generale dell'equilibrio tra bisogni e costi pubblici. Il Mazzola arricchisce, elaborandola, la teoria, con vari importanti concetti, come quelli del *consolidamento* dei bisogni collettivi, e della *complementarità* dei servizi o beni in tale via prodotti (rispetto ai beni economici privati) (*I dati scientifici della finanza pubblica*, Roma, 1890). Il De Viti De Marco (*Il carattere teorico dell'economia finanziaria*, Roma, 1888) precisando nei " beni pubblici " proprii, quelli che *più economicamente* sono producibili mediante la produzione collettiva, ha prospettato l'ipotesi edonistica nel concetto del *perfetto stato cooperativo*, che sarebbe nella scienza finanziaria parallelo a quello ch'è nell'economica l'*homo œconomicus* ed a cui tenderebbero avvicinarsi gli aggregati moderni: lo Stato appare, ipoteticamente, quasi un individuo economico i cui bisogni, piaceri e sacrifici sono costituiti dalle somme dei

godimenti e dei costi dei singoli individui che godono e pagano i beni pubblici. Più recentemente l'Einaudi nelle sue *Lezioni di scienza delle finanze* (Torino, 1913, vol. 3°) ha in sostanza accolto la concezione edonista quale risulta da questa ricca elaborazione, dandovi forma, contributi e correzioni tali da costituire una delle più organiche e rigorose costruzioni della teoria finanziaria edonistica finora tentatesi. Nella quale la semplicità della forma adatta all'immediato fine didattico nulla toglie alla sobria precisione e densità della trattazione, in cui l'elemento *descrittivo* ed empirico è (pei 2 primi vol. trattanti il problema generale) eliminato, e la vigorosa considerazione dei problemi fondamentali non inceppata da stanchevoli discussioni bibliografiche o simili. L'E. incomincia contrapponendo le varie forme dei *prezzi* finanziari ai prezzi *privati* pagati, in economia, sul mercato: v'è un lento passaggio — nei beni forniti dagli enti pubblici — da prezzi (quasi-privati) stabiliti con le leggi con cui si stabiliscono i prezzi sul mercato economico per beni che soddisfano (prevalentemente) bisogni individuali perfettamente divisibili e, incidentalmente, bisogni indivisibili, a prezzi (pubblici) stabiliti con leggi diverse da quelle del mercato economico per beni soddisfacenti sia bisogni in parte divisibili e in parte indivisibili (in misura diversa) che solo bisogni indivisibili. Fenomeno essenzialmente finanziario è quello costituito dalla soddisfazione dei *bisogni pubblici* (indivisibili, consolidati) mediante l'imposta. Dopo una critica esauriente alle teorie principali sul principio distributivo dell'imposta, l'Einaudi imposta l'ipotesi finanziaria edonista prima supponendo una *domanda* di servizi pubblici come di quelli privati: in tale ipotesi l'uomo si suppone perfetto edonista economico e finanziario: i suoi atti sono ugualmente rigorosamente logici sia per la soddisfazione dei bisogni privati che dei pubblici; successivamente, introduce il fatto della *delegazione* dell'apprestamento dei mezzi per la somministrazione dei beni pubblici e di quest'ultima. I gruppi delegati in concreto deviano dai limiti ipotetizzati alla loro azione, ma l'aggregato tende reagire con una serie di forme e mezzi a queste deviazioni, quali il brontolìo e le proteste dei contribuenti, la frode fiscale, le emigrazioni dei capitali, al cui riguardo l'E. approfondisce lo studio degli " stati-cuscinetto „ con funzione finanziaria analoga a quella politicamente rappresentata

dai piccoli Stati intermedi, come la Svizzera, Belgio, ecc.; cambiamenti legali di governi, infine rivolte e rivoluzioni quando più profonda è la deviazione dei delegati. L'ultima parte del 2° volume è costituita dallo sviluppo ed applicazione ai generali problemi finanziari delle determinazioni del reddito imponibile, dei concetti fisheriani di reddito, già accennati (nota 1ª, § 6). Trascurando il rilievo di molti altri punti interessanti, ricorderemo che questa costruzione è stata accolta da E. Barone ne' suoi acuti *Studi di economia finanziaria*, nei quali con ricchi contributi di dimostrazioni geometriche e trattamento di problemi economici, il Barone ha particolarmente seguito l'Einaudi nella concezione generale del fenomeno finanziario (1), nella classificazione dei gruppi di prezzi cui questo dà luogo (il B. applica la nomenclatura di prezzi economici, quasi economici e politici) nella critica alle dottrine della distribuzione del carico tributario, e, in modo più generale, nella teoria dell'imposta e determinazione dei redditi, accogliendo le geniali innovazioni basate sulla distinzione dei redditi guadagnati e consumati e loro proprietà in rapporto all'imposta. In fine, il Pantaleoni che in molti studi ha pure contributo alla elaborazione della teoria finanziaria edonista, ha nel recente art. *Intorno alle proprietà di un sistema di prezzi politici* (" Giorn. d. Econ. ", 1911) introdotto concetti che aprono la via a un diverso trattamento del fenomeno. Il P. definisce *prezzo politico* quelli pei quali non vale la legge d'indifferenza di Jevons: " quando la stessa merce si compra e vende a prezzi diversi secondo che il compratore o venditore abbiano o no certi requisiti politici sociali etici religiosi ", ecc. Correlativamente alla definizione, le *tasse* sarebbero prezzi economici mentre l'*imposta* è " il genere meno avvertito eppure più uni-

---

(1) Il B. (*Studi* cit., I, 314-5) prospetta infatti il fenomeno generale in questo modo. I privati non fanno domanda dei beni pubblici. La dimensione da darsi ad essi è stabilita da una maggioranza (reale o finzione legale che sia) che decide direttamente o per delegazione. Ciò dà luogo ad una pressione tributaria che, ripartita con certi criteri, grava più o meno sui singoli a misura che si dà una sempre crescente estensione ai pubblici servizi. Quando la maggioranza preme troppo sul singolo individuo si manifestano le reazioni, il cui effetto è appunto di ricondurre la pressione tributaria in limiti tollerabili.

versale di prezzo politico „. A ben guardare, in questo modo la concezione edonista si sposta dalla nozione dell'equilibrio finanziario parallelo (in via teorica paragonabile) all'economico: di *economico* rimane il nome: *prezzo*; ma le proprietà del sistema appaiono collegate ad altre forze e proprietà assai diverse da quelle delle azioni economiche. Se il regolamento, il determinarsi, i movimenti, ecc., dei " prezzi politici „ si verificano in correlazione a qualità (e, presumibilmente, nel fenomeno *collettivo*, alle *leggi*, proprietà dei corrispondenti sentimenti o forze generali) e ragioni politiche, sociali, religiose, etiche, ecc. è da questi e dalle loro leggi che essenzialmente si dovrà procedere nello studio delle leggi del fenomeno finanziario. L'elemento *economico* che s'intreccia continuamente e strettamente al fenomeno finanziario determina una preoccupazione generale di dare carattere *economico*, tener conto dell'aspetto economico, conservare la nomenclatura propria dell'economia anche là ove il fenomeno (finanziario) appare sostanzialmente con altri caratteri (1).

---

(1) Un'osservazione generale può farsi riguardo alla definizione economica delle *tasse* del Pantaleoni, come, in genere, ai prezzi privati (o economici) e quasi privati dell'Einaudi, Barone e di tutti gli A. che sostanzialmente applicano più o meno generalmente questi criteri. In tutti questi gruppi di fatti finanziari (vendite dei servizi di beni patrimoniali di enti pubblici, o dei " capitali „ stessi: vendite di servizi divisibili con parziale " soddisfazione di bisogni pubblici „ ma in base alle leggi del mercato economico = *prezzi quasi-privati* dell'Einaudi) si ha un lato (intervento della " forza „ economica pura) economico e un lato diremo *finanziario*: *economico* è evidentemente il determinarsi di prezzi dei servizi o dei capitali per quanto messi in commercio da enti pubblici, in condizioni di monopolio (poste, telegrafi) o non (prodotti agricoli di beni patrimoniali): ma sotto questo aspetto non abbiamo che semplici problemi economici pratici, deducibili come s'è visto (nota 1ª, § 5) dall'ipotesi economica pura e dalla conoscenza dei *dati* di fatto degli aggregati economici concreti. Il fenomeno però non è tutto qui: l'elemento finanziario è dato dal fatto che è l'*ente pubblico* che possiede questi beni, detiene quei rami di produzione e vende quei servizi, sia pure, in tale vendita, lasciando agire le leggi dell'economia privata. Il possesso di beni *patrimoniali* e loro utilizzazione per parte dei " bisogni „ dell'organismo politico è un fenomeno perfettamente finanziario come lo stabilimento di pure imposte da parte degli Stati moderni, per sopperire alla " giustizia „, eserciti, ecc.: la spiegazione del primo gruppo di fatti appartiene alle leggi del fenomeno finanziario, come vi appartiene il secondo. Il problema finanziario non è in proposito: come si determinano i prezzi

§ 4. — Coll'elaborazione avuta nelle opere generali ora ricordate, come quella dell'Einaudi, la teoria edonista ha assunto una forma limpida ed organica, con carattere prettamente scientifico anche sotto l'aspetto del metodo procedente per quelle successive approssimazioni che, nei fenomeni sociali caratterizzati dall'estrema complessità delle *forze* intervenienti, sole consentono la progressiva conquista di più rigorose cognizioni delle leggi dei fatti. La teoria s'impernia evidentemente su di un presupposto, il quale è del tutto legittimo come *ipotesi*, ma in quanto formulazione di una legge corrispondente più o meno rigorosamente all'uniformità oggettiva deve dimostrarsi corrispondere ad alcunchè di effettivamente esistente nel fenomeno empirico. Il presupposto è, come s'è visto, questo. Le azioni individuali che dànno luogo al fenomeno finanziario si considerano *parallele* alle azioni economiche; sono quindi, come queste, *logicamente* dirette a soddisfare dei bisogni costosi, per la via della minor resistenza, per quanto elementi diversi in concreto alterino temporaneamente il raggiungimento *oggettivo* di questi fini soggettivi, come del resto nel fenomeno economico le azioni individuali presupposte dalla scienza logiche soggettivamente ed oggettivamente, si presentano, almeno nei fatti individuali, con una certa discordanza, per l'intervento degli altri elementi, tra gli scopi degli individui concreti e le risultanze economiche raggiunte. Quindi, a parte gli elementi alteratori, la teoria edonista suppone: I) esistenza di *bisogni* (pubblici) e quindi di beni (pubblici) che, per quanto caratterizzati da certe qualità (indivisibilità, consolidamento), sono *ofelimi*, come i privati: la loro ofelimità costituirebbe come nel fenomeno economico la *spinta* all'attività finanziaria; II) esistenza, nel calcolo *individuale*, non solo della ofelimità dei beni pubblici, ma della nozione e cognizione dei costi da superare e della via *tecnica* per cui è possibile assunzione del *costo minimo* (produzione per mezzo degli enti pubblici, pagamento mediante imposte); III) carattere *logico* degli atti individuali posti in essere per soddisfare i bisogni pubblici

---

di quei servizi venduti dallo Stato, ma " perchè, per quali cause, condizioni, con quali tendenze, gli enti pubblici, o meglio i gruppi governanti si procurano i redditi necessari in quella *forma* (beni patrimoniali: demanio) piuttosto che in altre (per es., imposte per servizi indivisibili e consolidati) „

col minimo sacrificio, il quale carattere è quello che spinge gli individui a reagire nelle accennate forme contro la mancanza di corrispondenza tra i fini finanziari *soggettivi* ed i risultati del fatto finanziario *concreto*, determinati dall'azione dei delegati intermedi, appunto come la proprietà logica delle azioni *economiche* (private) spinge gli individui a *correggere* costantemente la propria attività per far corrispondere i risultati concreti di essa al criterio economico che nella determinazione soggettiva la domina.

Questi tre elementi sono indissolubilmente connessi nella ipotesi: *e sono implicitamente supposti in tutti gl'individui dell'aggregato che sono toccati e partecipano al fenomeno finanziario* (1). Quest'ultimo punto è essenziale contenendo il nocciolo del problema e delle proprietà ora definite; in quanto è chiaro che se gl'individui che partecipano al fenomeno finanziario in concreto non presentano, contemporaneamente, ofelimità pei beni " pubblici ", nozione dei costi che presentano e dell'economicità della produzione mediante gli enti pubblici, ecc., ed una serie di atti tendenzialmente diretti al soddisfacimento in questa forma, la ipotesi della scuola edonistica non corrisponde ad alcunchè di oggettivamente esistente, per lo meno per un certo numero degli individui, i quali pure al fenomeno finanziario direttamente partecipano, e pei quali quindi esso dovrà spiegarsi con ipotesi diversa. Qui dunque non discutiamo la legittimità dell'ipotesi, in via teorica, che è sempre lecita nella scienza, quando sia suffi-

---

(1) Ciò non significa che *tutti* materialmente gl'individui di un aggregato debbano presentare questi elementi, come non lo si suppone neppure nell'economia pura. Lo Zorli colla sua teoria delle *aziende* ha assai bene dilucidato questo punto. Gli individui che partecipano al fenomeno *economico* non sono *tutti* gli individui che esistono in una società; ma solo una parte, nella quale essenzialmente quindi si suppone l'esistenza e l'azione della " forza " economica: per es. gli schiavi nelle economie antiche, i bimbi in ogni tempo, ecc., non partecipano al fenomeno economico, se non in quanto costituiscono dei *bisogni* o *gusti* nel calcolo degli individui che effettivamente partecipano al mercato: i bisogni degli esseri perfettamente *passivi* (dal punto di vista della produzione di beni economici) nella famiglia, sono, per il mercato economico, *bisogni* degli esseri economicamente attivi, poco importa se bisogni altruisti. E lo stesso sarebbe pel fenomeno finanziario. Le osservazioni critiche che seguono nel testo sono quindi dirette anche a questa delimitazione maggiore dei supposti perfetti uomini finanziari.

cientemente definita; cerchiamo solo s'essa può spiegare i fatti *empirici* (finanziari) in quanto nelle azioni e determinazioni individuali esistano, sia pure generalmente combinate con altri elementi e forze, le condizioni generali sopra schematizzate e presupposte dalla teoria edonista. Nel fenomeno *economico* concreto la " forza " economica è pure generalmente *combinata* con altre, ma la scienza può avvertire e dimostrare l'esistenza nella attività umana di condizioni ed elementi corrispondenti all'ipotesi economica pura (1). Vi sono zone del fenomeno finanziario in cui le ipotesi della teoria edonista appaiono corrispondere in modo prevalente e definibile alle forze e condizioni che determinano i fatti finanziari concreti? Rispondendo a questa domanda, la teoria finanziaria non deve cadere in un equivoco, già accennato, e d'importanza grandissima. Per la verità della ipotesi della scuola edonista non basterebbe affatto che gl'impieghi dei proventi *pubblici* da parte dei gruppi politici governanti che li amministrano, ridondassero generalmente in *utilità* per la maggioranza governata.

(1) Crediamo che molti dubbi non sianvi su questo punto. L'esistenza, o modo di essere di una proprietà, forza, legge, ecc., ipoteticamente formulata, in un fenomeno concreto risultante di *varie* forze, può avvertirsi (più precisamente può avvertirsi la esistenza di alcunchè di corrispondente alla ipotesi, cioè ad una nozione *soggettiva*) o accertando il suo verificarsi in modo approssimativamente *esclusivo* in una zona, per quanto ristretta, del fenomeno empirico, o calcolando il suo intervento combinato con *altre* forze, nel fatto empirico, separandone l'effetto, in modo più o meno preciso, da quelli delle altre " forze " definite o anche non. Vi sono zone di atti economici (concreti) in cui l'azione della " forza " economica è pressochè esclusiva: per es., se noi chiediamo a qualsiasi individuo che non sia pazzo od incosciente di scegliere tra quantità di una merce identica perfettamente (presentanti uguali curve d'ofelimità) di cui l'una abbia un prezzo di 1, l'altra di 10, l'altra di 100, ecc., ognuno certo sceglie quella a prezzo = 1 : la forza economica vi si manifesta; invece l'imprenditore pratico che stabilisce un'industria per trarre un certo interesse sui capitali investitivi ed il massimo profitto, *individualmente* sbaglia in una certa misura, è costretto a tentare, aggiustare, correggere, cambiare composizione dei coefficienti di produzione, prezzi, ecc.: la " forza " economica vi si combina con altri elementi: parziale ignoranza delle esatte condizioni dell'aggregato da parte dell'imprenditore concreto, influenza che nella sua azione economica hanno i sentimenti, dandogli *ottimismo* o *pessimismo* eccessivo, ecc. Ma la *proprietà economica* in questa serie di tentativi non può egualmente negarsi o escludersi.

I concetti accennati al § 2 ne dicono il perchè. Tanto nella sociologia come nei fenomeni della vita animale non umana sono frequentissime le soluzioni, sia pure *virtuali*, di problemi di massimo di utilità mediante serie di azioni niente affatto logicamente indirizzate dagli individui a quello specifico scopo. In certe condizioni degli aggregati la struttura aristocratica dei gruppi politici, anche in " regimi „ democratici, può benissimo rappresentare la disposizione, l'amministrazione collettiva, ecc., più *utile* per la collettività, date le condizioni di quell'aggregato, che neppure lontanamente ha la nozione di questo processo. I sentimenti religiosi possono riuscire utilissimi, per tutt'altra via che per quella creduta dagl'individui che vi sono soggetti, ad una collettività politico-sociale; la fede degli eserciti romani, almeno nei periodi precedenti l'impero, nella verità delle profezie degli àuguri prevedenti la loro vittoria; l'elemento (*fanatismo, fatalismo,* ecc.) religioso nei caratteri ed azioni militari dei soldati giapponesi, ottomani, ecc., hanno costituito elemento riconosciuto talora essenziale nell'esito vittorioso della loro azione. E gli esempi si potrebbero moltiplicare. Ma queste indiscutibili utilità godute dalla collettività appaiono risultato di atti, sotto certo aspetto, con caratteri opposti a quelli definiti nell'ipotesi edonistica: gli atti derivano da cause del tutto diverse dalle motivazioni soggettive di chi li pone in essere: le utilità sono raggiunte in generale *senza* che gl'individui se ne fossero prefisso lo scopo. *A priori*, ciò può essere anche perfettamente per le utilità eventualmente godute dalla collettività attraverso i fenomeni finanziari; e non basta il fatto che gl'individui risentono un utile economico dall'esistenza degli eserciti, di magistrati, di impiegati, ecc., per poter affermare che questo utile è raggiunto per una serie di atti logicamente posti in essere a tale scopo da tutti coloro che lo godono. D'altra parte è pure da evitarsi l'equivoco di confondere il fenomeno *economico*, che può intrecciarsi al finanziario, coll'elemento veramente *finanziario*. Rilevando, per es., che molti servizi " pubblici „ soddisfano dei *bisogni economici* tali indiscutibilmente in quanto ove non fossero prodotti (e là dove non sono prodotti) dall'ente pubblico, sorgerebbero *domande* (economiche) e se ne determinerebbe la produzione in via economica privata. Questo non reca alcun lume alla conoscenza delle leggi del fenomeno finan-

ziario: indica semplicemente che i gruppi politici producono (fanno produrre) coi proventi pubblici *anche* servizi *ofelimi* (nel senso economico) ad un numero maggiore o minore dei cittadini. Il problema *finanziario* a questo riguardo è: perchè, per e con quali leggi i gruppi politici, gli enti pubblici producono anche (in una certa forma, misura) servizi *ofelimi* alla collettività?

§ 5. — Ciò chiarito, la teoria edonista non ci sembra abbia dimostrato o indicato zone dei fenomeni finanziari concreti in cui le condizioni della sua ipotesi appaiono in modo sostanzialmente indipendente, o per lo meno determinabili nettamente separandoli dagli altri elementi o forze influenti nella realtà empirica: non si conoscono fenomeni finanziari in cui gli atti degl'individui che vi dànno luogo appaiano corrispondere rigorosamente alle condizioni I-III del § 4, come è possibile approssimativamente nei fenomeni economici: in cui cioè fatti e rapporti finanziari, istituti, ecc., risultino da un'attività logicamente diretta, dagli *individui che vi dànno luogo*, a *quei* risultati. Nel fenomeno concreto non è solo una manifestazione costantemente *combinata* con altre forze dell'ipotesi edonista che noi troviamo: ma la *mancanza* delle condizioni iniziali supposte dalla teoria. Gli individui (contribuenti, gruppi governanti) che al fenomeno finanziario partecipano non presentano sotto alcun aspetto, neppure come *tendenza*, le condizioni indicate. I) Perchè i bisogni *pubblici* potessero costituire una spinta *parallela* all'economica, sarebbe evidentemente indispensabile che si presentassero al ragionamento individuale, come l'*ofelimità* dei beni economici, in modo che l'individuo, come esplicitamente è affermato dal Sax e dagli studiosi che su questo punto lo seguono, presentasse nella configurazione generale de' suoi bisogni, bisogni " privati „ e " pubblici „, solo distinti dall'intensità della spinta alla soddisfazione e cioè dalle curve dell'ofelimità.

Per vari gruppi dei servizi resi dagli enti pubblici l'*ofelimità*, nel senso economico, dei servizi stessi esiste indubbiamente: ma per molti altri non si può veramente parlare di *ofelimità*: sia che gl'individui della collettività ne *godano* (utilità oggettiva), sia ne sopportino i costi senza goderne affatto, il bene o servizio " pubblico „ non esiste nel calcolo individuale come spinta ad un'azione di carattere economico, non ha posto nella configurazione dei bisogni soggettivi, non è insomma valu-

tato nè come bene indipendente, nè strumentale, nè complementare. E sono precisamente quelli considerati come i bisogni *pubblici* per eccellenza (spese di mantenimento del gruppo governante, militari, giudiziarie, ecc.) che per la grande generalità degl'individui che concorrono a pagarne il costo non presentano ofelimità in senso economico; e quando anche esista una vaga nozione di una certa *utilità* che questi impieghi di ricchezza producono alla collettività stessa, questa idea affatto generica non può assolutamente considerarsi avere sull'azione logica dei singoli individui conseguenze definite come le hanno le condizioni note sotto il nome di curve di utilità soggettiva o di ofelimità dei beni (economici).

§ 6. — II) e III) La mancanza del carattere di ofelimità per una larghissima zona dei cosidetti bisogni pubblici (si noti che potrebbe benissimo esservi ofelimità anche nei casi di soddisfazione *coattiva*: la soddisfazione, diremo così, imposta non quadrerebbe col bisogno soggettivo, se non *in parte*) non è la deficienza maggiore dell'ipotesi edonista. Se pure si riscontra valutazione soggettiva dell'utilità dei servizi " pubblici ", manca nel fenomeno oggettivo nel modo più generale quella valutazione pure soggettiva dei costi, del mezzo *tecnico* più economico di produzione (per mezzo dell'ente pubblico) e l'azione desunta più o meno esattamente da questi elementi di calcolo, che sono la struttura fondamentale del fenomeno economico (privato). Un grande numero d'individui ha il *bisogno* dell'assicurazione-vita, incendi, ecc.: è limitatissimo il numero degl'individui che ha bisogno o che calcola più economico che questo servizio sia reso attraverso un monopolio pubblico. Un certo numero d'individui, assai limitato del resto, ha il *bisogno* di un aumento della forza militare, della politica imperialista coloniale, ecc.: pochi, tra essi, hanno una vaga nozione di ciò che può costare; quasi nessuno si sogna di considerare che il mezzo " più economico " per soddisfare quel bisogno è mettere un'imposta progressiva su certi redditi. In ogni fatto finanziario si constata come carattere generalissimo o la mancanza dell'ofelimità degl'impieghi in cui l'assorbita ricchezza privata è trasformata, o la mancanza della valutazione approssimativa dei costi corrispondenti ai bisogni, la nozione e la decisione di scegliere *quella* forma di produzione di certi servizi (o la mancanza di ambedue questi

gruppi di condizioni) e sovratutto la mancanza della forma *delegativa* o qualche cosa che corrisponda in concreto alla ipotesi *cooperativa* che è il nocciolo della teoria edonistica. Questo è, a nostro modestissimo parere, il punto in cui l'ipotesi edonista più discorda dal fenomeno oggettivo: il supporre determinabili le leggi del fenomeno finanziario *indipendentemente* dalle leggi del fenomeno politico e, in genere, sociologico. Sotto tale aspetto la teoria edonista risente non solo profondamente della preoccupazione dell'elemento, aspetto, ecc., *economico* presentato dai fatti finanziari; ma, come è particolarmente visibile nell'opera del De Viti De Marco, delle dottrine neocontrattualiste sullo Stato moderno, riflesso delle teorie e sentimenti liberali e democratici. Per l'ammissibilità della ipotesi edonista occorrerebbe evidentemente che nei fenomeni degli aggregati politici esistesse una *tendenza*, sia pure alterata da altre forze, elementi, ecc., ed in via essenzialmente temporanea, ad una perfetta organizzazione, amministrazione politica perfettamente cooperativa, in cui l'azione dei delegati all'amministrazione generale non fosse che la esecuzione esatta della *volontà* degl'individui dell'aggregato che loro hanno dato il mandato. Se questo non è, la teoria edonista non può corrispondere, proprio nel suo concetto centrale del *tendenziale* equilibrio (per una serie di atti logici dei singoli individui cointeressati) tra bisogni pubblici e loro costi, ad alcun gruppo delle condizioni contenute nel fenomeno oggettivo. Naturalmente non è ancora questione di risolvere il problema (formulare le leggi), ma di porlo. La scienza politica e la sociologia rispondono negativamente. Gli aggregati politici presentano costantemente, attraverso *forme* diverse, autocratiche, oligarchiche, democratiche, monarchiche, repubblicane, ecc., il dominio di gruppi governanti sulle grandi maggioranze; le condizioni che determinano la *forma* del fenomeno nei vari aggregati sono connesse a gran parte, per non dire a tutte le condizioni determinanti i fenomeni sociologici: differente distribuzione tra gl'individui dell'aggregato delle qualità intellettive, psicologiche, volitive, ecc.; condizioni dell'equilibrio economico *concreto*, forma dei sentimenti religiosi, morali, politici, ecc.: carattere dei gruppi che possiedono in più alta misura certe qualità, loro concorrenza o meno per giungere al governo della collettività

o mantenervisi, e così via (1). Essenziale carattere del fenomeno è il suo verificarsi affatto indipendentemente dalla volontà preordinata degl'individui amministrati ed anche, sotto moltissimi aspetti, governanti: non esiste nei singoli una *volontà* ed una serie di atti per delegare il governo in forma cooperativa, la quale poi venga sopraffatta dalla forza, volontà, privilegio di piccoli gruppi: il fenomeno avviene per tutt'altre condizioni e forze, che agiscono all'insaputa di coloro che vi partecipano;

(1) La brevità della nota ci vieta di fare qui quella documentazione che sarebbe necessaria e che rimandiamo, col resto, ad un più ampio saggio sull'argomento: ma gli esempi sono infiniti. Le rivoluzioni sono sempre opera di una minoranza, non solo; ma mai il gravame economico-finanziario vi ha una preponderante importanza, anche se costituisce il *pretesto* principale. Sarebbe assurdo concepire la rivoluzione dell'89 come la conseguenza dei gravami e delle ingiustizie fiscali dell'*ancien régime*, staccandola dal movimento sentimentale preparatosi per tutto il sec. XVIII e dalle specifiche condizioni dei gruppi politici esclusi dal potere e ad esso tendenti, come ha pure recentemente chiarito la dott. M. Kolabinska (*La circulation des élites en France*, Lausanne, 1912) dimostrando come nella seconda metà del sec. XVIII si sia verificato in Francia un arresto della circolazione dei gruppi ed elementi atti al dominio, che accumulatisi nelle zone escluse dal potere hanno profondamente influito sui caratteri del movimento dell'89. La recente storia finanziaria d'Italia è piena di questi esempi. La tassa sul macinato ha dato luogo a vivacissime lotte per la sua abolizione: era la *maggioranza* dei contribuenti che *non poteva più* sopportarla perchè giunta a un grado eccessivo? Neppur per sogno: era un buon argomento e pretesto dei gruppetti delle " sinistre " per scavalcare la Destra dominante; tant'è vero che la *maggioranza* (non politica) ha senza alcuna protesta subito da quegli stessi gruppi un gravame assai più duro ed economicamente più molesto e dannoso: il dazio sul grano. Nel 1898 le rivolte si proclamano in parte ispirate dalla gravosità del dazio stesso: era dinuovo la " collettività " che *reagiva* contro la deviazione finanziaria dei gruppi delegati? Il movimento non era che un limitato fenomeno politico, conseguenza dello stato d'irritazione conseguente in certi gruppi agli scandali bancari, alla guerra d'Affrica, alle repressioni antisocialiste, della propaganda socialista, ecc. Pochissimi anni dopo un gruppo di liberisti che ha iniziato una vivace campagna contro di esso non ha trovato alcuna eco nella maggioranza che lo gode; i *bisogni* di questa si erano dunque così profondamente cambiati? Pochissimi anni fa in Francia la ferma triennale appariva come un peso insopportabile: oggi l'ondata nazionalista e imperialista la fa ritornare senz'altre proteste che quelle di *una parte* dei socialisti; ma la immensa maggioranza di coloro che pagano questo tributo non ci ha avuto moltissimo a vedere nè nell'uno nè nell'altro provvedimento.

le reazioni contro l'opera di certi gruppi dominanti sotto forma di cambiamenti di governi, di forme di governi, rivolte, rivoluzioni, ecc., non sono mai la conseguenza dell'alterarsi della forma *cooperativa* dell'aggregato politico per opera di minoranze privilegiarie e dirette a ritornarvi, ma il prodotto delle lotte e dei movimenti tra i gruppi al potere o che vi cercano salire e del loro appoggiarsi, a tale scopo, a sentimenti generali della collettività in cui agiscono (1). Il fenomeno finanziario nel suo

---

(1) In moltissimi scrittori di cose politiche e storici, anche del passato, si trovano accenni di esempi della struttura essenzialmente oligarchica degli aggregati politico-sociali. Taine, Bryce, De Tocqueville hanno avuto sovratutto il merito di documentare che le *forme* politiche democratiche non inducono un sostanziale cambiamento nella essenza aristocratica dei rapporti tra governanti e governati. Gaetano Mosca ha in modo organico e sistematico formulata la teoria delle minoranze dominanti (classi politiche) e dei loro movimenti, ponendola in relazione ai regimi parlamentari moderni ed al suffragio popolare. Ostrogorski, con una poderosa opera induttiva, ha fatto la *fisiologia* del fenomeno, osservando nelle democrazie anglo-americane come la legge generale, che, del resto, egli non si proponeva affatto di ricercare o di dimostrare, si attui, attraverso le oligarchie dei partiti politici e delle stesse minoranze che in questi si formano, quando sono definiti e vasti. Il Michels ha brillantemente completato questo lato dimostrando il carattere oligarchico generalissimo anche nelle stesse organizzazioni dei partiti democratici ed operai, anzi, si può dir, socialisti e nelle organizzazioni di classe. Gli elementi che caratterizzano le gerarchie dei gruppi sociali, loro proprietà, loro movimenti furono pure analizzati con importanti contributi dal Novicow, dall'Ammon, dal De Lapouge. Vilfredo Pareto ha connesso con mirabile sintesi gli elementi del fenomeno *politico*, quelli demografici, antropologici, ecc. alla teoria generale dell'equilibrio sociologico, ponendo in relazione la forma dei sentimenti generali che dominano gli aggregati ai fenomeni e movimenti dei gruppi delle *élites*, come meglio apparirà nel suo prossimo " Trattato di sociologia ". Non possiamo qui che indicare il lineamento più generale di questa uniformità, la cui importanza nello studio teorico dei fenomeni finanziari non ci sembra sia sempre stata sufficientemente avvertita. Il fenomeno si manifesta anche ne' più ristretti gruppi associati, anche se costituiti in forma e con intenti strettamente cooperativi: nelle gilde medioevali, nei comuni o piccole repubbliche del periodo dell' " autonomia ", nei partiti politici, nelle associazioni di classe, nelle amministrazioni comunali contemporanee, nelle stesse società commerciali, ove la complessività degli elementi e degli interessi dell'azienda, il numero degli associati, ecc., consentano l'emergere dominatore di pochi elementi sulle maggioranze. Il fenomeno corrisponde ad una *legge* generale, per quanto tuttora non rigorosamente formulata:

più generale aspetto non può scindersi da questa uniformità degli aggregati sociali: nel considerarlo, la scienza deve affatto prescindere dalle nozioni di " Stato ", di " enti pubblici " ed altre entità che — legittime ed utili come finzioni giuridiche in molti problemi — non esistono quando consideriamo gli uomini e loro rapporti coi beni economici, come non esistono le società commerciali in quanto personalità economiche soggetti di redditi, di *final incomes* (Fisher), di costi (1). Eliminata la nozione di Stato, di ente intermedio, il fenomeno finanziario ci appare un fenomeno generale di circolazione di ricchezza tra i gruppi governanti e governati degli aggregati sociali, il risultato di una serie di pressioni e reazioni, le cui leggi si riallacciano evidentemente a quelle dei fenomeni politici e sociologici, ed hanno contenuto ben diverso dalle leggi economiche. Certo le condizioni concrete degli aggregati *economici*, la quantità assoluta e media di ricchezza, ossia dei redditi, loro distribuzione, stato della tecnica, proporzione delle varie forme di " capitali " nella composizione della ricchezza complessiva, hanno una grande importanza nei fenomeni dell'equilibrio finanziario; ma puramente come condizioni che concorrono a determinare una certa *forma* dell'equilibrio stesso, dei modi di assorbimento dei redditi privati, della quantità di ricchezza privata assorbita, del modo di *impiego* di questa da parte dei gruppi governanti, e non in quanto le leggi di quello siano parallele, quasi un completamento di quelle dell'equilibrio economico. Il meccanismo degli aggregati politici implica un impiego e quindi la disponibilità di una certa quantità di ricchezza: questo impiego e questa disponibilità appunto corrispondono alle condi-

---

questa uniformità risultante dai fatti nega una *forza*, *tendenza*, ecc., *cooperativa* di cui non s'hanno traccie nei fenomeni concreti, sovratutto come forza manifestantesi con serie di atti logici volti dagli individui (cioè anche dall'immensa maggioranza di essi) ad una delega, costituzione, amministrazione.

(1) La nozione di Stato (o altro ente pubblico minore) devia l'osservazione della realtà del fenomeno pei fatti finanziari come per quelli politici e sociologici. Parlare di Stato o Governo *autocratico*, *democratico*, *monarchico*, ecc. induce idee del tutto inesatte dei rapporti, condizioni, movimenti dei gruppi che stanno effettivamente sotto questi nomi spesso generici.

zioni ed alle leggi con cui i fenomeni politici e sociologici si svolgono. La teoria finanziaria deve essenzialmente esprimerci le uniformità generali con cui il fenomeno costante di un certo assorbimento di ricchezza della collettività, in forme diverse, con caratteri diversi in corrispondenza alle condizioni economiche e politiche dei diversi aggregati, ai sentimenti che vi predominano, ecc., avviene per parte dei gruppi politici, i quali a lor volta in altre forme la investono e trasformano, che in parte si risolvono in utilità oggettive godute da coloro cui la ricchezza fu sottratta e che pure corrispondono a certe condizioni degli elementi politici, dei sentimenti esistenti, dei caratteri delle maggioranze e delle minoranze.

Dorieo, Pentatlo ed Eracle nella Sicilia occidentale.

Nota di LUIGI PARETI (*).

I.

Erodoto si trattiene abbastanza a lungo su quanto riguarda Dorieo (V, 39-48). Ci narra che l'Agiade Anassandride avendo sposata una propria nipote, che parve sterile, fu dagli efori obbligato a prendere anche una seconda moglie, da cui ebbe Cleomene. Ma subito dopo la prima moglie gli diede alla luce Dorieo, e più tardi Leonida e Cleombroto, detti da alcuni gemelli. Dorieo sperava di succedere ugualmente al padre Anassandride, ma gli Spartani, *χρεώμενοι τῷ νόμῳ,* elessero Cleomene. Dorieo non potendo tollerare quella scelta e non volendo obbedire a Cleomene, senza consultare l'oracolo delfico *αἰτήσας λεὼν Σπαρτιήτας ἦγε ἐς ἀποικίην* verso la Libia, guidato da Terei, e fondò presso il Cinipe una città; ma cacciatone da Macei Libi e da Cartaginesi *τρίτῳ ἔτει* tornò nel Peloponneso.

Colà Anticare Eleonio *συνεβούλευσε ἐκ τῶν Λαΐου χρησμῶν Ἡράκλειαν τὴν ἐν Σικελίῃ κτίζειν, φὰς τὴν Ἔρυκος χώρην πᾶσαν εἶναι Ἡρακλειδέων αὐτοῦ Ἡρακλέος κτησαμένου.* Dorieo recatosi a Delfi chiese: *εἰ αἱρέει ἐπ' ἣν στέλλεται χώρην· ἡ δὲ Πυθίη οἱ χρᾷ αἱρήσειν.* Allora ripreso *τὸν στόλον τὸν καὶ ἐς Λιβύην ἦγε,* si diresse verso l'Italia. In quei tempi, secondo il

(*) Presentata nell'adunanza dell'8 giugno 1913.

racconto dei Sibariti, essi col loro re Telys volevano *στρατεύεσθαι* contro i Crotoniati, i quali chiesero aiuto a Dorieo, che si impadronì di Sibari. Le conferme addotte dai Sibariti per il loro racconto erano: che Dorieo, alleato dei Crotoniati, aveva dedicato ad Atena Cratia *τέμενός τε καὶ νηὸν ἐόντα παρὰ τὸν ξηρὸν Κρᾶθιν* (1), ma specialmente il fatto che Dorieo *παρὰ τὰ μεμαντευμένα ποιέων διεφθάρη· εἰ γὰρ δὴ μὴ παρέπρηξε μηδέν, ἐπ' ὃ δὲ ἐστάλη ἐποίεε, εἷλε ἂν τὴν Ἐρυκίνην χώρην καὶ ἑλὼν κατέσχε, οὐδ' ἂν αὐτός τε καὶ ἡ στρατιὴ διεφθάρη.* Invece i Crotoniati sostenevano di non aver avuto altri stranieri alleati contro i Sibariti oltre Callia vate eleo, che fuggiva il tiranno Telys, e ciò era secondo essi provato dall'aver fatto dono di molte ricchezze a Callia ed ai suoi eredi, mentre nulla donarono a Dorieo ed ai suoi discendenti (2).

Insieme con Dorieo navigarono verso la Sicilia altri Spartiati: Tessalo, Parebate, Celea, Eurileone, *οἳ ἐπείτε ἀπίκοντο παντὶ στόλῳ ἐς τὴν Σικελίην, ἀπέθανον μάχῃ ἑσσωθέντες ὑπό τε Φοινίκων καὶ Ἐγεσταίων.* Si salvò [degli Spartiati] il solo Eurileone, che raccolti i superstiti *ἔσχε Μινώην τὴν Σελινουσίων ἀποικίην,* e liberò i Selinuntini del monarca Pitagora, sostituendosi poi a lui, solo per breve tempo, perchè ucciso dai Selinuntini ribellatisi.

Tra i compagni di Dorieo morti nella lotta contro Fenici ed Elimi, era anche il bellissimo olimpionica crotoniate Filippo, figlio di Butacida. Costui, essendo fidanzato alla figlia di Telys, *ἔφυγε ἐκ Κρότωνος, ψευσθεὶς δὲ τοῦ γάμου οἴχετο πλέων ἐς*

---

(1) Il Niese " Hermes „ 42, p. 424 n. 2 scrive: " Dies kann ja blosse Mut- " massung sein. Nur dann würde es ein sicheres Beweis sein, wenn etwa " der Tempel sich durch eine Aufschrift als Werk des Dorieus zu erkennen " gäbe, was nicht wahrscheinlich ist „. Ciò è molto discutibile. Non si può escludere ad es. che Dorieo, o qualcuno dei suoi compagni, tra cui era anche il crotoniate Filippo, recandosi in Sicilia e facendo una delle tante tappe necessarie a Crotone, dedicasse qualche offerta nel tempio di Atena. E bastava qualcosa di simile perchè nascessero le deduzioni riferite da Erodoto.

(2) L'aspetto di questo argomento è assai meno convincente del primo dei Sibariti. Come poteva conservarsi ricordo di doni a Dorieo, anche se fossero stati fatti, quando Dorieo non s'era trattenuto a Crotone, ma s'era spinto in Sicilia trovandovi la morte?

Κυρήνην, ἐκ ταύτης δὲ ὁρμώμενος seguì Dorieo con una propria trireme. Per la sua bellezza gli Egestani elevarono una eroo sulla sua tomba e *θυσίῃσι αὐτὸν ἱλάσκονται.*

Erodoto termina il suo racconto dicendo: *Δωριεὺς μέν νυν τρόπῳ τοιούτῳ ἐτελεύτησε· εἰ δὲ ἠνέσχετο βασιλευόμενος ὑπὸ Κλεομένεος καὶ κατέμενε ἐν Σπάρτῃ, ἐβασίλευε ἂν Λακεδαίμονος· οὐ γάρ τινα πολλὸν χρόνον ἦρξε ὁ Κλεομένης, ἀλλ' ἀπέθανε ἄπαις, θυγατέρα μούνην λιπών, τῇ οὔνομα ἦν Γοργώ.*

Prima di riferire gli altri racconti paralleli a quello di Erodoto, bisogna intendersi sulla cronologia secondo quest'ultimo. Non si può negare che Erodoto non fa nettamente risultare i distacchi temporali tra i varî avvenimenti. Il lettore potrebbe da lui dedurre che la partenza di Dorieo segue di poco la morte di Anassandride, e precede di poco la morte di Cleomene. Ora ciò non è possibile, perchè per Erodoto stesso Cleomene ha regnato oltre trent'anni (1). Secondo [Plutarco] (*Apophth. Lac.* p. 223 D, *Cleom.* 7) Cleomene era già re quando vennero i Samî a Sparta per aiuto contro Policrate, dunque intorno al 524; secondo Erodoto (VIII, 108) quando i Plateesi prima di darsi agli Ateniesi, cercarono di darsi agli Spartani, ossia prima del 519, nel quale anno avvenne l'alleanza attico-plateese, come apprendiamo da Tucidide (III, 68, 5). E un aneddoto di [Plutarco] (ibid. p. 224 A, *Cleom.* 16) ponendo Cleomene in relazione con Meandro profugo da Samo per la conquista persiana, ci trasporta al 519 circa — 514 av. Cr. (2). Dunque se stiamo a queste notizie Cleomene era sul trono già da parecchi anni prima del 511/10 in cui cacciò i Pisistratidi da Atene (Erod. V, 64-65).

Eppure per Erodoto la spedizione di Dorieo non pare incominciata molto prima del 511/0. Ciò si deve dedurre da quanto dice sull'aiuto ai Crotoniati contro Sibari. Diodoro (X, 23) afferma che Sibari fu distrutta 58 anni prima dall'arconte Lisicrate (453/2): dunque nel 511/10 o nel 510/9 (3). Sia che avessero ragione i

(1) Cfr. Beloch, *Gr. Gesch.* I², 2 p. 173 sgg.

(2) Beloch, *Gr. Gesch.* I², 1 p. 378 n. 2.

(3) Per [Scimno] v. 360, Sibari prima della distruzione esistette per 210 anni. Per Eusebio, Crotone e Sibari furono fondate nel 708 o nel 709 (*Epit. Sir.*). Ciò non vale per porre in dubbio la data diodorea della distru-

Sibariti affermando d'esser stati vinti da Dorieo alleato dei Crotoniati, sia quest'ultimi, negandolo, pare chiaro che per Erodoto era presupposta la contemporaneità della venuta di Dorieo in Occidente e della caduta di Sibari, e che quindi per lui le imprese di Dorieo in Libia erano anteriori, e quelle in Sicilia posteriori al 511/510. Dal racconto di Erodoto non risulta dunque abbastanza chiaramente che la partenza di Dorieo era, proprio secondo la sua cronologia, avvenuta parecchi anni dopo la morte di Anassandride, ossia, al più presto nel 515 all'incirca (1).

Anche meno compare nel racconto erodoteo la distanza temporale tra la partenza di Dorieo da Sparta e la morte di Cleomene, che vien detta di poco posteriore. Eppure la partenza era del 515 circa, mentre Cleomene morì, come ci racconta lo storico stesso (VI, 85 sgg.), subito prima che scoppiasse la guerra tra Atene ed Egina, ossia subito prima del 488, o in quell'anno stesso (2). Ora se si osserva che la notizia sul tempo che separò la morte di Cleomene, è data dôpo quella della morte di Dorieo (V, 48), e che da quanto si dice troppo succintamente sulle lotte in Sicilia, non deriva in modo assoluto che per Erodoto Dorieo morisse poco dopo toccata l'isola: si può dubitare che lo storico parlando del poco tempo in cui regnò Cleomene avesse in mente più di quello trascorso tra la partenza di Dorieo da Sparta e la morte di Cleomene, quello tra la morte violenta di Dorieo in Sicilia e la morte di Cleomene. In altri termini non è escluso ch'egli volesse dire: " se Dorieo avesse tollerato di

---

zione. I 210 anni di [Scimno] non sono altro che 6 generazioni di 35 anni, e dovevano portare la fonte di [Scimno] non a far scendere per la caduta sotto il 510, ma a far risalire per la fondazione al 721/0. E se Eusebio parlava per la fondazione solo del 709/8, ciò significa ch'egli computava 6 generazioni non di 35 ma di 33 anni. Vedi su di ciò Beloch, *Gr. Gesch.* I², 2 pag. 219-220. D'altronde non è escluso, che da principio si parlasse per Sibari del 721/0, e per Crotone del 709/8, e che poi siasi assegnato anche a Sibari il 709/8 per un parallelismo artificiale, simile a quelli per Roma e Cartagine, per Gela e Faselide e così via. Vedi invece Niese, " Hermes „ 1907, p. 426 e n. 1.

(1) La colonia al Cinipe cade *τρίτῳ ἔτει* dalla fondazione, e la posteriore permanenza nel Peloponneso dev'esser stata breve, se Dorieo partì per l'Occidente conducendo *τὸν στόλον τὸν καὶ ἐς Λιβύην ἦγε.*

(2) Per la data: Erodoto V, 89; e Köhler, " Rh. Mus. „ 46 (1891) 1 sgg.; Beloch, *Gr. Gesch.*[1] I, 363 n. 1.

" vivere a Sparta sotto il regno del fratello, e non avesse in-
" contrato la morte combattendo in Sicilia, sarebbe diventato
" re di Sparta; poichè Cleomene morì senza eredi non molto
" dopo di Dorieo, e quest'ultimo poteva benissimo campare più
" di Cleomene, se non si metteva nei pericoli ". Se ciò reggesse, dovremmo dedurre che forse per Erodoto, Dorieo morì non molti anni prima del 488, e in tal caso, anche senza ch'egli ce lo dica, dovremmo ammettere un periodo notevole per la permanenza di Dorieo in Sicilia.

Questo più o meno si potrebbe concludere sulla cronologia erodotea, ove si tenesse fermo il sincronismo, anche approssimativo, tra la caduta di Sibari e la spedizione di Dorieo in Occidente. Nè mancherebbero concordanze storiche (1). Così ad esempio, pare logico che i Greci si spingessero fino al Cinipe (ossia presso la moderna Tripoli) solo quando le coste della Cirenaica erano già tutte occupate fino ad Euhesperidae: orbene questa città era già fondata almeno da alcuni anni o decenni prima del 510 circa, quando ci compare durante la spedizione di Dario contro Barca (Erodoto IV, 204) (2).

Alcuni moderni hanno però tentato di dimostrare che la spedizione di Dorieo non è affatto del 510 circa, ma almeno di un decennio posteriore.

Così il Niese (3) fa notare che la versione dei Crotoniati, negante l'aiuto di Dorieo, presuppone la Sibarita che l'affermava, ma che quest'ultima è di valore assai dubbio: " denn zunächst
" stehen sich Behauptung und Ableugnung gleichberechtigt ge-
" genüber, und wir können nicht zu Gunsten der einen oder
" der andern Seite entscheiden, wenn nicht ausreichende Beweise
" vorliegen " (4). Certo gli argomenti che ai tempi di Erodoto venivano addotti dagli uni e dagli altri erano deboli, ma quelli

---

(1) Diod. V, 9 parla della spedizione di Pentatlo come dell'Olimp. 50ª (580-576) Assai probabilmente in Timeo o nella sua fonte si consideravano trascorse due generazioni tra i tentativi di Pentatlo e di Dorieo, ossia 70 anni: così torniamo per Dorieo al 510 circa. Vedi oltre.

(2) Per la cronologia: Beloch, *Gr. Gesch.* I², 2, 213.

(3) " Hermes " 42 (1907) p. 423 sgg.; *Real-Enc.* di Pauly-Wissowa, V, 1558 sgg. art. Dorieus.

(4) Dubbi sono già espressi ad es. dal Meltzer, *Gesch. d. Karth.* I p. 200; Busolt, *Gr. Gesch.* II² 769 n. 3. Dubitante è anche Meyer, *G. d. Alt.* II, 808.

dei Crotoniati erano anche più deboli dei Sibariti (1); e ad ogni modo di qui non risulta ancora che la tradizione più antica, ossia la sibarita, sorgesse senz'altro come speculazione, più che come ricordo di avvenimenti anteriori di poco più di mezzo secolo (2). Ed anche ammesso che la più antica versione sibarita fosse abbastanza tendenziosa, per non riconoscere il merito della vittoria ai Crotoniati, com'era tendenziosa la più recente dei Crotoniati per attribuirsi tutto quel merito, resta sempre assai più difficile a spiegare, come i Sibariti traessero in campo Dorieo, se Dorieo non aveva nessuna relazione con quella guerra, che non intendere perchè i Crotoniati volessero far credere di aver vinto da sè (3). Ma, quel che più importa, tutto ciò non significa molto per la cronologia.

Se infatti Dorieo non avesse per nulla partecipato alla guerra, il modo più naturale per spiegare come i Sibariti lo traessero in campo, consisterebbe appunto nella approssimativa contemporaneità della guerra colla sua spedizione, che avrebbe permesso, al solito, di sostituire all'originario nesso sincronistico casuale, un posteriore nesso causale. Se Dorieo fosse venuto in Occidente solo un decennio dopo la caduta di Sibari, come non se ne accorse Erodoto? e più ancora, come non si accorsero prima di lui i Crotoniati che in ciò consisteva l'argomento capitale contro le pretese dei Sibariti? (4).

Ma per il Niese, Erodoto stesso ci darebbe, senza accorgersene, la prova che Sibari era già caduta da tempo, quando Dorieo si diresse verso l'Occidente (5). Per il Niese infatti Fi-

---

(1) Cfr. le prime note dello studio. Non bisogna dimenticare che Dorieo, aveva tra i suoi compagni il crotoniate Filippo. Ciò rende tanto più probabile che si interessasse delle lotte dei Crotoniati. Cfr. Busolt, II[2] 769 n. 3.

(2) Accettano la notizia dell'aiuto di Dorieo tra gli altri: Duncker, *Gesch. d. Alt.* VI[3-5] p. 560; Grote, *Hist. of Greece* IV, 340; Holm, *St. della Sic.* I p. 377; Freeman, *Hist. of Sicily* II, 91.

(3) Freeman II, 91.

(4) Che la spedizione di Dorieo avvenisse intorno al 510 è ammesso da molti, ad es. da Freeman II, 83 sgg.; Holm I, 376 n. 5; Beloch, *Gr. Gesch.* I[1], 389 (vedi però I, 1[2] p. 384 n. 1 in cui accede alla tesi del Niese); De Sanctis, *St. d. Rom.* I, 339; Busolt II[2], 756 sgg.; Pais, *St. d. Sic.*, I, p. 140, 303. Il Ciaceri, *Culti e miti* p. 48 parla del 580 c., scambiando la cronologia di Dorieo con quella di Pentatlo. Cfr. ancora Tümpel, art. *Eryx* in Pauly-Wissowa VII, 604.

(5) "Hermes" 1907 p. 424 sgg., seguito da V. Costanzi, "Riv. Fil." 39 (1911) p. 359.

lippo Crotoniate sarà andato in esilio da Crotone " erst nachdem " der Ausbruch der Feindschaft zwischen den beiden Städten " [= Sibari e Crotone] erfolgte „, e se egli fu in seguito *ψευσθεὶς τοῦ γάμου* colla figlia di Telys, e andò a Cirene, ciò presuppone: " die Niederlage der Sybariten und den Fall und Untergang " ihrer Stadt und ihres Königs „ (1). Dunque Filippo cacciato da Crotone riparò a Sibari, e caduta Sibari andò a Cirene: " von hier hat er sich, wie Herodot sagt, an Dorieus ange- " schlossen, und zwar muss er sich schon an der libyschen " Gründung am Kinyps beteiligt haben; denn wir lesen bei " Herodot V, 43, dass Dorieus die Expedition, die er nach " Afrika geführt hatte, auch nach Sicilien führte „. Quindi Sibari era già distrutta, quando Dorieo si dirigeva verso il Cinipe, per fondarvi la colonia triennale, e per conseguenza la spedizione verso la Sicilia è posteriore al 507, tanto più (2) che " la " data della caduta di Sibari non può in alcun modo servire di " limite alla cronologia della spedizione di Dorieo. Filippo cro- " toniate poteva trovarsi anche da parecchi anni a Cirene prima " che Dorieo vi giungesse „.

Questo ragionamento a me pare molto acuto, ma poco convincente, poggiando su parecchi presupposti indimostrati. Per l'esilio di Filippo da Crotone, Erodoto non ci dice che fosse dovuto alle sue relazioni con Telys, ossia non ci trasporta necessariamente dopo il sorgere delle ostilità tra Crotoniati e Sibariti; ma se anche ciò fosse per avventura, non scenderemmo ancora senz'altro per l'esilio al 510, perchè non sappiamo per nulla quanti anni prima del 510 scoppiasse quella guerra, al cui inizio poteva venir esiliato Filippo. E se, procedendo, ammettessimo col Niese come possibile e anzi probabile che l'esule si recasse a Sibari, e di là, *ψευσθεὶς τοῦ γάμου*, riparasse a Cirene, siamo ancora ben lungi dal dimostrare ch'egli mosse verso Cirene dopo la caduta di Sibari, cogliendo Erodoto in grande contraddizione. Filippo potè essere *ψευσθεὶς τοῦ γάμου* assai prima che Telys perdesse il regno. Esule, e quindi povero, e croto-

---

(1) Così intese già il Pais, *St. d. Sic.* I, 301, che tuttavia parla della spedizione di Dorieo come del 510 circa, senza avvedersi della contraddizione; proprio come, secondo il Niese, avrebbe fatto Erodoto.

(2) Costanzi, mem. cit., p. 359, n. 1.

niate, poteva riuscir poco accetto a Telys in lotta coi Crotoniati; anche se prima era il fidanzato della figlia di Telys, quando era ancora ricco e potente e quando Crotone viveva in buon accordo con Sibari. Infine manca ogni prova che Filippo si unisse con Dorieo più durante l'andata verso il Cinipe (1) che al ritorno dopo più di due anni; anzi, a rigore, da Erodoto non risulta in modo sicuro che l'unione sia avvenuta in Africa più che nel Peloponneso, al momento di salpare per l'Occidente (2).

Per far discendere la cronologia di Dorieo il Niese avanza un'altra osservazione degna di esame (3). " Wir wissen ", dice egli: " dass in den lakedämonischen Königsfamilien eine strenge " Erbfolge im Mannesstamme nach der Erstgeburt galt. Wenn " ein König starb, ohne einen Sohn zu hinterlassen, so folgte " sein ältester Bruder oder, wenn er nicht mehr lebte, der älteste Sohn desselben. Der jüngere Bruder des Verstorbenen " trat erst ein, wenn der ältere keinen Sohn hinterlassen hatte ". Ciò non è esatto, perchè per dir così si devono trascurare parecchie notizie antiche da cui risulta, che per norma succedeva il più anziano, e dopo di lui il suo primogenito, sempre che si trattasse di *porfirogeniti, o almeno di figli di re.* Erodoto (VII, 3), a proposito delle lotte di successione tra i figli di Dario, riferisce i consigli dell'esule re spartano Damarato a Serse, primo figlio porfirogenito, in danno di Artaserse, vero primogenito, ma non porfirogenito: *ἐπεί γε καὶ ἐν Σπάρτῃ ἔφη ὁ Δημάρητος ὑποτιθέμενος, οὕτω νομίζεσθαι, ἢν οἱ μὲν προγεγονότες ἔωσι πρὶν ἢ τὸν πατέρα σφέων βασιλεῦσαι, ὁ δὲ βασιλεύοντι ὀψίγονος ἐπιγένηται, τοῦ ἐπιγενομένου τὴν ἔκδεξιν τῆς βασιληίης γίνεσθαι.* Nè vi è alcun motivo di respingere questa notizia erodotea, confermata per la parte per noi sostanziale da altre fonti, donde risulta che titolo di preferenza nella successione

---

(1) Ciò fu sostenuto prima che dal Niese dal Freeman, op. cit. II, 88. La notizia di Erodoto che Dorieo condusse in Occidente *τὸν στόλον τὸν καὶ ἐς Λιβύην ἦγε*, stando al buon senso, non può valere che come notizia generica. D'altronde Filippo aveva una trireme propria (Erod. V, 47).

(2) Si vedano le osservazioni del Meltzer, *Gesch. d. Karth.* I, p. 199 sull'interesse che si poteva avere dai Greci della Cirenaica per il possesso della Sicilia occidentale da parte degli Elleni.

(3) " Hermes " 1907, 451 sgg. Cfr. Costanzi, m. cit., 353 n. 1.

era di esser figlio di chi avesse regnato. Ciò vien detto chiaramente da Senofonte (1), e da Nepote (2). Pausania (III, 6, 2) ci informa che Cleomene — il quale regnò dal 370/69 al 309/08 — ebbe due figli: il primo fu Acrotato che premorì al padre e generò Areo; il secondo Cleonimo. Quando Cleomene morì vennero a contesa per la successione Cleonimo ed Areo, ed i geronti *δικάζουσιν... Ἀρεῖ τῷ Ἀκροτάτου καὶ οὐχὶ Κλεωνύμῳ πατρῴαν εἶναι τὴν τιμήν*. Qualunque fossero i motivi per cui i geronti presero tale decisione, par naturale ammettere, che Cleonimo aspirante al trono adducesse appunto in favor suo, che il proprio padre Cleomene era stato re, mentre Acrotato padre di Areo era morto senza aver mai regnato (3).

Ciò premesso, ritorniamo alla tesi del Niese. Egli ricorda che per Erodoto (IX, 10. 53. 55) Dorieo lasciò un figlio di nome Eurianatte, che troviamo nel 479 alla battaglia di Platea. Ora se Dorieo era il secondogenito di Anassandride: " wie erklärt " es sich nun, dass dieser (Euryanax) dem Kleomenes nicht auf " dem Thron nachfolgte, wenn sein Vater dessen ältester Bruder " war? dass Leonidas und später dessen Sohn Pleistarchos " Könige wurden? dass auch für Pleistarchos nicht Euryanax " Vormund ward, sondern Pausanias der Sohn des Kleom- " brotos? „.

E il Niese conclude (4) che Dorieo non era il più vecchio, ma il più giovane fratello di Cleomene, e che la tradizione l'ha invecchiato " um die Tragik seines Unterganges zu steigern „. Dopo le nostre premesse tutto questo edificio viene a cadere. È chiaro che Leonida doveva aver la precedenza su Eurianatte, essendo il primo, e non essendo il secondo, figlio di re. Altrettanto si dica di Plistarco, il quale doveva anche essere porfi-

---

(1) *Ellen.* III, 3, 2: *ἀλλ' ὁ νόμος, ὦ Ἀγησίλαε, οὐκ ἀδελφὸν ἀλλ' υἱὸν βασιλέως βασιλεύειν κελεύει· εἰ δὲ υἱὸς ὢν μὴ τυγχάνοι, ὁ ἀδελφός κα ὣς βασιλεύοι.*

(2) *Agesil*, 1: " Primum ratio habebatur, qui maximus natu esset *ex liberis eius, qui regnans decessisset*: sin is virilem sexum non reliquisset, tum deligebatur, qui proximus esset propinquitate „.

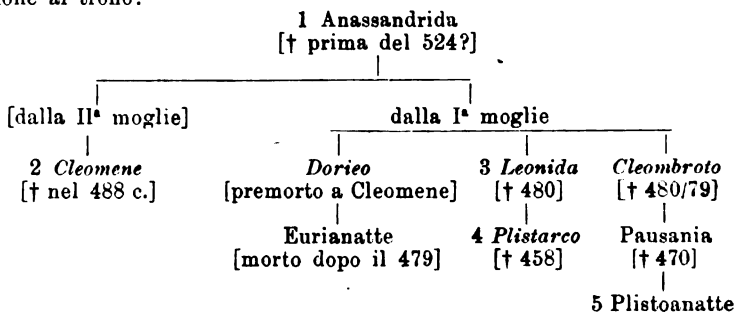
(3) Per le cause della scelta dei geronti si veda Niccolini, " Riv. di st. ant. „ VII (1903) p. 366.

(4) " Hermes „ 1907 p. 451-452.

rogenito, ossia nato dopo il 488 circa (1). Per la tutela di Plistarco si ricorse, sempre per lo stesso motivo, a Cleombroto figlio di re; e quando venne a morte Cleombroto, si preferì a Eurianatte Pausania, e, probabilmente, per motivi politici, e anche perchè, se entrambi non erano figli di re, il padre di Pausania aveva avuta la carica semiregia di *πρόδικος* (2). In conclusione: vi è certo nel racconto erodoteo tendenza a rendere drammatica la vita di Dorieo (3), ma non è affatto provato che vi sia falsata per questo scopo tutta la genealogia; Erodoto ha perfettamente ragione a dirci che Dorieo sarebbe stato il successore naturale di Cleomene, se non gli fosse premorto.

Il Niese (4), per convalidare la sua tesi, fa notare che la spedizione di Dorieo fu una vera colonizzazione di Stato, al pari di quella di Eraclea Trachinia descritta da Tucidide. Ciò naturalmente non serve per l'ipotesi che Dorieo non fosse un malcontento per motivi di successione, come ci dice Erodoto, perchè anche le colonie di Stato sono spesso come una valvola di sicurezza per allontanare individui, o gruppi e classi di individui la cui presenza in patria si ritiene pericolosa. Nè stupisca che Dorieo fosse mandato in colonia forse un decennio dopo la morte del padre. Non sempre può ritenersi opportuno, o si ha l'occa-

(1) Infatti Plistarco nel 470 alla morte di Pausania era ancora sotto tutela (Tucid., I, 132, 1), e assunse il regno da solo poco prima che, nel 458, gli succedesse Plistoanatte (Paus. III, 4, 9). Cfr. Beloch, *Gr. Gesch.* I^2, 2, p. 175.

(2) Per maggior chiarezza si osservi la seguente tabella in cui sono segnati in corsivo i porfirogeniti, ed i numeri indicano l'ordine di successione al trono:

(3) Ciò è chiaro ad es. per quanto vien detto, falsamente, sulla inettitudine di Cleomene, di fronte all'eccellenza di Dorieo.

(4) "Hermes", 1907 p. 452.

sione di tentare l'allontanamento immediato dei pericolosi. Si ricordi per analogia che Cleomene morì nel 309/8 all'incirca, e Cleonimo, malcontento al pari di Dorieo per la successione, solo sei anni dopo, intorno al 303 (1) fu mandato in spedizione in Italia dal governo spartano, che sperava di liberarsene.

Resta da discutere un'ultima argomentazione (2). Nel famoso discorso che Erodoto (VII, 158) pone in bocca di Gelone, come risposta agli ambasciatori ateniesi e lacedemoni, che nella primavera 480 erano andati a Siracusa per chiedergli aiuto contro i Persiani, il tiranno (3) dice: *αὐτοὶ δὲ ἐμεῦ πρότερον δεηθέντος βαρβαρικοῦ στρατοῦ συνεπάψασθαι, ὅτε μοι πρὸς Καρχηδονίους νεῖκος συνῆπτο, ἐπισκήπτοντός τε τὸν Δωριέος τοῦ Ἀναξανδρίδεω πρὸς Ἐγεσταίων φόνον ἐκπρήξασθαι, ὑποτείνοντός τε τὰ ἐμπόρια συνελευθεροῦν ἀπ' ὧν ὑμῖν μεγάλαι ὠφελίαι τε καὶ ἐπαυρέσιες γεγόνασι, οὔτε ἐμεῦ εἵνεκα ἤλθετε βοηθήσοντες οὔτε τὸν Δωριέος φόνον ἐκπρηξόμενοι, τό τε κατ' ὑμέας τάδε ἅπαντα ὑπὸ βαρβάροισι νέμεται... κ.τ.λ.*

Com'è ben noto, questo passo diede luogo a varie interpretazioni: chi vi vide una prova che la battaglia di Imera era già combattuta prima del 480, chi ne dedusse una guerra di Gelone contro i Fenici, anteriore alla campagna di Imera, quando Gelone era già tiranno, o anche quand'era ancora ipparco di Ippocrate. E poichè Gelone era già tiranno, secondo la *vulgata* nel 491, gli uni parlarono di una guerra contro Fenici ed Elimi, di Gelone, tiranno, dopo il 491; gli altri di una guerra di Gelone, ipparco, anteriore al 491. Senza entrare ora nel problema del verò significato delle parole di Erodoto (4), a me par chiaro che le allusioni non possono in nessun modo riferirsi al periodo in cui Gelone non era ancora tiranno; e poichè si può dimostrare ch'egli assunse la tirannide a Gela non nel 491, ma

---

(1) Cfr. *Ricerche sulla pot. maritt. degli Spartani etc.* " Mem. Accad. Sc. di Torino „ Serie II vol. LIX (1909) p. 148 n. 8.

(2) Niese, " Hermes „ 42 p. 453-4; Costanzi, l. c., p. 359-360.

(3) Il Pais, *St. d. Sic.*, I p. 298 n. 1 e 302 parla a due riprese, per una svista, di Jerone invece che di Gelone.

(4) Me ne occupo altrove in uno studio su *La battaglia di Imera ed i suoi precedenti*, di prossima pubblicazione.

nel 485 (1), pare da concludere che la vendetta di Dorieo cui allude Gelone in Erodoto è avvenuta in ogni modo negli anni 485-480. E allora si presenta l'obbiezione del Niese e del Costanzi, anche più forte di quella ch'essi, accettando il 491 per l'inizio della tirannide di Gelone, abbiano formulato: se Gelone nel periodo 485-480 poteva pensare di vendicar Dorieo, o almeno se egli adduceva quel motivo ideale, ciò significa che la spedizione di Dorieo fu assai più vicina al 485-480 di quel che dica Erodoto. Ma anche senza ricordare che in Erodoto noi non abbiamo per nulla le vere parole di Gelone; che l'idea della vendetta di Dorieo può essere aggiunta in epoca assai posteriore al 480 e quindi non apparire fededegna (2); che si potrebbero trovar facilmente altri esempi storici di vendette ideali, a parecchi decennî di distanza dagli avvenimenti; a me par troppo chiaro che al più l'allusione ci spinge a far discendere verso il 485-480, non la spedizione di Dorieo; ma la sua sconfitta finale e la sua morte. In altri termini, dall'esame degli argomenti addotti contro la cronologia tradizionale della spedizione di Dorieo, mi pare non risulti in nessun modo dimostrato ch'essa non avvenne intorno al 510, sibbene che ne esca più probabile l'ipotesi che abbiamo già avanzata, essersi trattenuto Dorieo in Sicilia secondo Erodoto, assai più di quello che si potrebbe dedurre da una prima lettura delle sue parole (3). Sopra si era dubitato ch'egli morisse non molto prima del 488 circa, ora, in modo analogo, non molto prima del 485-480.

Ma questa notevole permanenza di Dorieo in Sicilia, che sospettiamo dalle notizie di Erodoto, trova conferme, o difficoltà, nelle altre fonti? Incominciamo da Diodoro, ossia dall'estratto di Timeo in Diodoro. Qui si presenta una questione di metodo. Scrive il Costanzi (4): " in tesi generale, la testimonianza di " Erodoto merita la preferenza, perchè intorno alla storia della " Sicilia sembra aver disposto di notizie pervenute da buona " fonte, e l'autorità di Diodoro in tanto può esser valida, in

(1) Cfr.: *Per la cronologia siciliana del principio del V secolo* in *Entaphia* in memoria di E. Pozzi, Torino, Bocca, 1913 pag. 17 sgg.

(2) Vedi già Busolt II² p. 791 n.; Costanzi, m. cit., p. 360.

(3) Ciò ammetteva anche il Costanzi, *Quaest. Chronol.*² p. 14, prima di lasciarsi convincere dalle teorie del Niese. Cfr. mem. cit. p. 358 n. 1.

(4) Mem. cit. pag. 355.

" quanto vale ad integrare la narrazione erodotea, non può pre-
" tendere di correggerla „. Ma perchè in Timeo, siciliano, valentesi di notizie di origine siciliana, derivate anche da fonti vetuste al pari di Erodoto, come Antioco, non possiamo trovare talora informazioni migliori delle erodotee? Ad ogni modo nel caso nostro non credo che si tratti di scegliere tra Erodoto e Timeo, perchè, se non erro, Timeo non contraddice, ma integra e conferma, sia quello che Erodoto dice chiaramente, sia quello che in Erodoto abbiamo creduto di veder sottinteso. Diodoro (IV, 23) riferisce da Timeo, che cita (22, 6), il racconto delle imprese di Eracle in Sicilia, e tra l'altro la sua lotta con Erice, figlio di Afrodite e dell'antico re della regione, Buta. Erice, se fosse vinto, avrebbe perduto il dominio di quel paese, e se invece fosse vinto Eracle perdeva i buoi e l'immortalità. Erice *ἐλείφθη, καὶ τὴν χώραν ἀπέβαλεν*. Eracle lasciò il territorio in possesso degli indigeni *μέχρι ἄν τις τῶν ἐκγόνων αὐτοῦ παραγενόμενος ἀπαιτήσῃ· ὅπερ καὶ συνέβη γενέσθαι*. Molte generazioni dopo, il lacedemone Dorieo direttosi in Sicilia, *καὶ τὴν χώραν ἀπολαβὼν ἔκτισε πόλιν Ἡράκλειαν. ταχὺ δ' αὐτῆς αὐξομένης, οἱ Καρχηδόνιοι φθονήσαντες ἅμα καὶ φοβηθέντες μήποτε πλέον ἰσχύσασα τῆς Καρχηδόνος ἀφέληται τῶν Φοινίκων τὴν ἡγεμονίαν, στρατεύσαντες ἐπ' αὐτὴν μεγάλαις δυνάμεσι καὶ κατὰ κράτος ἑλόντες κατέσκαψαν. ἀλλὰ περὶ μὲν τούτων τὰ κατὰ μέρος ἐν τοῖς οἰκείοις χρόνοις ἀναγράψομεν* (1). Qui, a parer nostro, abbiamo la piena conferma di quanto Erodoto lascia solo supporre: la lotta tra Dorieo ed i Fenici (e gli Elimi) fu lunga, la sua morte seguì parecchio tempo dopo il suo arrivo. Giunto in Sicilia non fu sopraffatto immediatamente, ma fondò una colonia ch'ebbe tempo di prosperare prima di venir distrutta dai Cartaginesi (2). Per il Costanzi (3) tra Timeo e Erodoto

(1) Il silenzio sugli Elimi è con ogni probabilità dovuto alla brevità del riassunto di Diodoro. Ne avrebbe parlato a suo luogo. Per lo stesso motivo tace della fine dei compagni di Dorieo, e del rifugio ad Eraclea Minoa.

(2) La prima impresa dei nuovi coloni, per poco che abbiano resistito, doveva naturalmente essere quella di iniziare la costruzione delle proprie case: di una città. E questa città, è troppo naturale si dicesse Eraclea. Se anche non lo dicessero le fonti, lo dovremmo dedurre dall' epiteto dato a Minoa, dai superstiti della spedizione, e dal nome dell'altra colonia spartana: Eraclea Trachinia.

(3) Mem. cit. p. 355-358.

vi sarebbe una discrepanza inconciliabile, intorno alla persona dell'ecista di Eraclea, che secondo Erodoto sarebbe Eurileonte, secondo Timeo, Dorieo stesso. Egli crede che per Erodoto sia esistita una sola Eraclea, promessa dall'oracolo di Laio e dalla Pizia, non presso l'Erice dove in realtà Dorieo dovette lottare (1), ma a Minoa dove riparò Eurileonte. Invece Timeo avrebbe accettato una versione, che, deducendo dal nome di Eraclea portato da Minoa, la faceva fondare da Dorieo stesso: ma non essendo a Timeo ignoto il disastro di Dorieo, e attribuendo a lui la fondazione di Eraclea Minoa, si sarebbe trovato nella necessità di farla distruggere dai Cartaginesi (2). Io non credo che siamo spinti ad una critica così radicale per il racconto di Timeo. È vero che per Erodoto l'Eraclea dell'oracolo è Minoa? Si dice che questo storico non parla di un'Eraclea fondata da Dorieo, che l'oracolo di Laio, il quale non poteva concepirsi menzognero, prometteva *Ἡράκλειαν τὴν ἐν Σικελίῃ κτίζειν* (3), e che quindi per la mente di Erodoto la città indicata dagli oracoli doveva essere Minoa, denominata anche Eraclea dai superstiti della spedizione di Dorieo (4). Ma si può obbiettare che in tal caso non si spiega come Erodoto non affermi nè qui, nè altrove, che Minoa prese il nome di Eraclea, limitandosi a dire: *ἔσχε* (Eurileonte) *Μινώην τὴν Σελινουσίων ἀποικίην*; e che non si spiega come allora potesse considerarsi avverato l'oracolo che prometteva, pare, la *fondazione* di una

(1) Che per Erodoto Dorieo lottasse presso l'Erice, risulta non solo dall'aver Eracle conquistata *τὴν Ἔρυκος χώραν πᾶσαν* (V, 43, 1), ma da quel che vien detto oltre (45, 1): *εἷλε ἂν τὴν Ἐρυκίνην χώρην*; dall'esser caduti *ὑπό τε Φοινίκων καὶ Ἐγεσταίων* (46, 1); dal culto prestato ad Egesta per Filippo di Butacida (47, 2).

(2) Noi non abbiamo testimonianza di una distruzione di Minoa, tanto meno per opera dei Cartaginesi. Per Diodoro invece i Cartaginesi *κατέσκαψαν* l'Eraclea di Dorieo. — Per la notizia di una vittoria Agrigentina su Minoa, data dalla " Cronaca del tempio Lindio „ recentemente pubblicata dal Blinkenberg vedi il saggio citato sulla battaglia di Imera.

(3) La correzione dello Stein *Ἡρακλείην ⟨γῆν⟩ τὴν ἐν Σικελίῃ κτίζειν* è arbitraria. Fu accettata da Busolt II² 759 n. 1.

(4) Che Erodoto taccia sull'Eraclea di Dorieo non può significar molto, come in genere gli argomenti *ex silentio*. Per Erodoto le azioni di Dorieo non costituiscono che un *excursus*, in cui non si preoccupava punto di dire tutto quello che si poteva dire.

città di nome Eraclea. Nè bisogna dimenticare uno degli argomenti dei Sibariti riferito da Erodoto stesso: *τοῦτο δὲ αὐτοῦ Δωριέος τὸν θάνατον μαρτύριον μέγιστον ποιεῦνται* [che Dorieo prese Sibari essendo alleato dei Crotoniati], *ὅτι παρὰ τὰ μεμαντευμένα ποιέων διεφθάρη· εἰ γὰρ δὴ μὴ παρέπρηξε μηδέν, ἐπ' ὃ δὲ ἐστάλη ἐποίεε, εἷλε ἂν τὴν Ἐρυκίνην χώρην καὶ ἑλὼν κατέσχε, οὐδ' ἂν αὐτός τε καὶ ἡ στρατιὴ διεφθάρη.* Qui non solo si dice esplicitamente che il territorio cui alludeva l'oracolo era presso l'Erice e non a Minoa, ma si fa anche una distinzione sottile tra il prendere, ed il tenere un paese. Si ammette dunque che Dorieo può aver presa la regione, senza saperla conservare; che, in altri termini, egli può aver fondata Eraclea, senza poterla ritenere, non altrimenti che per la colonia presso il Cinipe (1). Nè con ciò si ammette punto che gli oracoli avessero mentito, il che sarebbe strano essendo essi, come diremo in seguito, *ex eventu*. Osserva il Costanzi (p. 357): " in un *vaticinium post eventum* si può escogitare un responso ambiguo per " giustificare il fallimento delle aspettative, ma non una men" zogna da parte della divinità profetica ". Ma nel caso nostro siamo di fronte a un responso ambiguo, o menzognero? Anticare seguendo gli oracoli di Laio consigliò a Dorieo *Ἡράκλειαν τὴν ἐν Σικελίῃ κτίζειν*; Dorieo recatosi a Delfi chiese *εἰ αἱρέει ἐπ' ἣν στέλλεται χώρην· ἡ δὲ Πυθίη οἱ χρᾷ αἱρήσειν*; i Sibariti ammettevano che per colpa di Dorieo, egli non aveva ottenuto di *tenere*, dopo di averla presa, quella terra: par lecito dedurne che l'oracolo si considerava appunto ambiguo, in quanto non prometteva a Dorieo di *tenere* quella terra di cui si fosse impadronito. Siamo con ciò sempre alla stessa conclusione: che

(1) Il Freeman II, 480 pensa che Diodoro abbia confuso, e che quel che dice di Eraclea vada inteso di Eraclea Minoa. Ciò è ben poco probabile: non abbiamo nessuna prova che Minoa fosse distrutta dai Cartaginesi, nè ci par facile immaginarlo, quando ad est di Minoa vi era la greca Selinunte, che in quei tempi non fu punto *soggetta* ai Fenici. Si veda il saggio cit. sulla battaglia di Imera. Nè si riesce ad intendere, come si possa adattare a Minoa quel che dice di Eraclea Diodoro: *ταχὺ δ' αὐτῆς αὐξομένης, οἱ Καρχηδόνιοι φθονήσαντες ἅμα καὶ φοβηθέντες μήποτε πλέον ἰσχύσασα τῆς Καρχηδόνος ἀφέληται τῶν Φοινίκων τὴν ἡγεμονίαν.* Ciò non si può dire che di una città posta nel bel mezzo delle colonie fenicie, come sarebbe una città presso l'Erice, non certo per Minoa in piena zona greca.

Dorieo prese il territorio (cfr. il responso della Pizia), fondò Eraclea (cfr. l'oracolo di Laio) (1), ma non potè mantenersi in quella città, come non s'era mantenuto nella colonia libica (2). Torniamo dunque alla distinzione temporale, che abbiamo stabilita in Erodoto, tra l'arrivo di Dorieo in Sicilia e la sua morte, e vediamo nello stesso tempo che non v'è in Timeo nessuna contraddizione palese con Erodoto, ma la notizia necessaria per completare il racconto erodoteo: cioè quella sulla fondazione di una città per opera di Dorieo presso l'Erice, corrispondente all'Eraclea dell'oracolo, città che Dorieo non potè tenere, perdendo la vita nel tempo stesso che la sua colonia veniva distrutta.

Giustino (XIX, 1, 8 sgg.), parlando delle imprese sfortunate dei Fenici, continua: *hostibus quoque crevere animi, veluti cum duce* [Asdrubale, morto per le ferite toccate in Sardegna] *vires Poenorum cecidissent. itaque Siciliae populis propter adsiduas Carthaginiensium iniurias ad* † (3) *Leonidae fratrem regis Spartanorum concurrentibus grave bellum natum, in quo et diu et varia victoria proeliatum est. dum haec aguntur legati a Dareo Persarum rege Carthaginem venerunt adferentes edictum, etc.* Non cambiando le parole del testo, pare chiaro che Giustino alluda ad una guerra, *condotta in Sicilia*, da un fratello di Leonida (4),

(1) Dove poteva sorgere l'Eraclea di Dorieo? Con ogni probabilità presso il mare, come lo erano, in genere, le colonie greche: quindi o verso Trapani, come crede il Freeman II, 94, o più a nord nel golfo tra M. S. Giuliano e C. Galera.

(2) Già molti storici sostennero l'esistenza di due Eraclee: quella di Dorieo, distrutta, e Minoa Eraclea; la quale ultima ebbe il suo nome appunto in ricordo della prima. Come ipotesi diedero la cosa il Brunet de Presle, *Rech. sur les établ. des Grecs en Sicile*, p. 116; il Grote, etc. La duplicità fu invece senz'altro data come certa da Meltzer, o. c., I, p. 200 e 492-3; Pais, *St. della Sic.*, I, 302, n. 2; Busolt, *Gr. Gesch.*, II², p. 757 sg.; Meyer, *Gesch. d. Alt.*, II, p. 808; Ziegler, art. *Herakleia*, n. 28 in Pauly-Wissowa, VIII, 436 sg.

(3) Parecchi moderni enumerati dal Meltzer, I, p. 492 n. 59 leggono *ad Leonidam fratrem*, ma non ne risulta nulla di sensato. È meglio lasciar le parole come sono. È possibile che in origine si dicesse *ad* ⟨*Dorieum*⟩ *Leonidae fratrem*, etc., e che il *Dorieum* sia stato espunto, credendolo entrato erroneamente nel testo per influsso dei due *Dareo* e *Dareus* che seguono.

(4) Che qui si alluda a una richiesta di aiuto rimasta senza risultato, non mi par possibile. L'invito al fratello di Leonida è dato come causa e

mentre era ancor vivo Dario (ossia prima del 486), guerra che durò parecchio tempo con varia fortuna. Poichè questo fratello di Leonida non può essere che Dorieo, siamo ancora alle sue lotte coi Cartaginesi di cui dicono Erodoto e Diodoro, e così troviamo una conferma di quanto deducemmo indirettamente dal primo, e dice esplicitamente il secondo, di un lungo soggiorno di Dorieo in Sicilia, prima della sconfitta finale (1).

Un'ultima notizia troviamo in Pausania (III, 16, 4-5), che non è escluso dipenda, come per la spedizione di Pentatlo (X, 11, 3), indirettamente da Antioco da Siracusa, oltre che da Erodoto (2). Parlando della via di Sparta, *ἐπὶ τὰς πύλας ἀπὸ τοῦ Χιτῶνος* dice che: *Χίλωνός ἐστιν ἡρῷον τοῦ σοφοῦ νομιζομένου καὶ Ἀθηνοδώρου* (?) (3) *τῶν δμοῦ Δωριεῖ τῷ Ἀναξανδρίδου*

---

principio della guerra. Naturalmente non c'è da dedurre dall'epiteto di re dato a Leonida, che la guerra sia avvenuta dopo l'elezione di Leonida, ossia dopo il 488. Giustino ha aggiunto quell'epiteto senza badare alla cronologia.

(1) Certo le notizie di Giustino da sole non basterebbero, per fondarvi un'ipotesi. Si cfr. 4, 2, 6 " imperium Siciliae etiam Carthaginienses temptavere, *diuque varia victoria cum tyrannis dimicatum*. ad postremum amisso Amilcare imperatore... ,, confronto stabilito dal Meltzer, I 493. Ma non sono convinto che in sostanza i fatti non siano veri, anche se v'è ripetizione formale. Di ciò nel saggio sulla battaglia di Imera. È degno di esser notato il riscontro tra questa richiesta di aiuto a Dorieo da parte dei Sicelioti, e quella dei Selinuntini a Pentatlo contro gli stessi nemici di Dorieo: Fenici ed Elimi. Di ciò in seguito. — Non mi pare molto sicura in favore della nostra tesi l'osservazione del Pais, *St. d. Sic.* I 302 n. 2 che nel nome di Phorbantia per una delle Egadi di fronte ad Erice. che sarebbe da connettere con l'eroe Forbante, trova una riprova che i Dori riuscirono per qualche tempo a fissarsi sulle coste presso Lilibeo. Panormo è nome greco senza che i Greci vi abbiano mai avuto dominio. Casi simili vedi raccolti in " Atene e Roma ,, XVI, pag. 19-20.

(2) L'influsso di Erodoto si sente più spiccato negli altri luoghi in cui Pausania dice di Dorieo. Così in III, 3, 9-4, 1 che parla della nascita dei figli di Anassandride e della successione. Per quest'ultimo avvenimento si dice: *ἐπεὶ δὲ ἀπέθανεν Ἀναξανδρίδης, Λακεδαιμόνιοι Δωριέα καὶ γνώμην Κλεομένους καὶ τὰ ἐς πόλεμον ἀμείνονα εἶναι νομίζοντες τὸν μὲν ἀπώσαντο ἄκοντες, Κλεομένει δὲ διδόασιν ἐκ τῶν νόμων πρεσβεῖα τὴν ἀρχήν. Δωριεὺς μὲν δὴ — οὐ γὰρ ἠνείχετο ὑπακούειν Κλεομένει μένων ἐν Λακεδαίμονι — ἐς ἀποικίαν στέλλεται.* Cfr. anche III, 4, 7.

(3) Il testo, corrotto, legge: *ἀθηναίων ρω*. Il Pais, *St. d. Sic.* I 324 n. 1 supplirebbe [*Καλλίου καὶ Ἀντικάρου*] *τῶν δμοῦ Δωριεῖ σταλέντων ἐς Σικελίαν.* Ma lasciando le ragioni paleografiche, nè Callia nè Anticare, anda-

σταλέντων ἐς Σικελίαν· ἐστάλησαν δὲ τὴν Ἐρυκίνην χώραν νομίζοντες τῶν ἀπογόνων τῶν Ἡρακλέους εἶναι καὶ οὐ βαρβάρων τῶν ἐχόντων. E dopo d'aver narrata, in modo simile a Timeo in Diodoro, la lotta tra Eracle ed Erice (1) continua: *τὸ δὲ εὐμενὲς ἐκ τῶν θεῶν οὐ κατὰ ταὐτὰ Ἡρακλεῖ καὶ ὕστερον Δωριεῖ τῷ Ἀναξανδρίδου παρεγένετο, ἀλλὰ Ἡρακλῆς μὲν ἀποκτίννυσιν Ἔρυκα, Δωριέα δὲ αὐτόν τε καὶ τῆς στρατιᾶς διέφθειραν τὸ πολὺ Ἐγεσταῖοι* (2). Di notevole in questo racconto, oltre forse il nome non conosciuto per altra fonte dello Spartiate compagno di Dorieo, troviamo ancora la notizia che la terra per cui lottò Dorieo era nel territorio ericino, e che il suo tentativo di impadronirsi dell'eredità di Eracle fallì. Siamo dunque d'accordo colle conclusioni precedenti.

II.

Ma il passo di Pausania, colla sua antitesi finale tra la sorte di Eracle e quella di Dorieo, ci porta a riproporci il problema, già risolto variamente dai moderni, se la lotta di Eracle ed Erice sia un riflesso mitico, della lotta storica di Dorieo contro gli Elimi, alleati dei Fenici (3).

---

rono, per quanto ci dicono le fonti, in Sicilia. Difficilmente può trattarsi di un eroo di Ateniesi compagni di Dorieo. La soluzione più probabile è che si tratti di uno spartiate, non nominato da Erodoto. Nel testo riproduco l'emendazione del Madvig. Che questo nome non sia dato da Erodoto non mi pare argomento sufficente per ammettere col Niese, " Hermes „ cit. p. 423 n. 1 che in Pausania vi fosse errore sulla persona cui era dedicato l'eroo.

(1) *Ἡρακλέα γὰρ ἔχει λόγος παλαῖσαι πρὸς Ἔρυκα ἐπὶ τοῖσδε εἰρημένοις, ἢν μὲν Ἡρακλῆς νικήσῃ, γῆν τὴν Ἔρυκος Ἡρακλέους εἶναι, κρατηθέντος δὲ τῇ πάλῃ βοῦς τὰς Γηρυόνου — ταύτας γὰρ τότε ἤλαυνεν Ἡρακλῆς, διανηξαμένας δὲ ἐπὶ Σικελίαν κατὰ τὸν ἔλαιον τὸν κυφὸν ἀνευρήσων ἐπιδιέβη — τὰς οὖν βοῦς ἔδει κρατηθέντος Ἡρακλέους τὸν Ἔρυκα ἄγοντα οἴχεσθαι.*

(2) Il silenzio sui Fenici non significa per Pausania, più che quello sugli Elimi per Diodoro. Sono dimenticanze dovute alla brevità dell'accenno. D'altronde per il confronto con Eracle importavano solo gli Elimi.

(3) Pare creda ad un riflesso della spedizione di Dorieo il Ciaceri, op. cit., p. 48, 276. I più ammettono con Erodoto che il racconto delle lotte

È ben noto che la divinità solare, venerata in origine massimamente in Beozia, che dai Greci ebbe nome di Eracle, era, appunto perchè divinità solare, raffigurata in lotta coi demoni delle tenebre, e dell'inferno: così si parlava anche delle sue lotte con Gerione " il Ruggente „ al di là del mare, dove il sole declina, nel paese rosso di Eritia. Col tempo, Eracle scese da dio ad eroe, e le sue lotte vennero localizzate sulla terra. L'Eritia fu allora collocata a Tartesso perchè l'Iberia costituiva il paese più occidentale conosciuto, dove il sole declina. E allora sorse un'infinità di leggende sulle imprese di Eracle nel ritorno dall'Iberia in Grecia, attraverso i paesi dell'Occidente. D'altra parte il culto di Eracle, che dal centro beotico, s'era diffuso nella Eubea, nell'Attica, nell'Argolide, e poi nelle altre regioni doriche, fu importato nell'Italia meridionale e specificamente nella Sicilia dai coloni calcidesi prima, e poi dai dori, e si installò nelle colonie greche, e poi si diffuse anche tra gl'indigeni, identificandosi talora con divinità non elleniche. Ciò contribuì allo svolgersi delle leggende sulle imprese di Eracle, in quanto i luoghi in cui si venerava Eracle vennero a considerarsi come tanti punti di passaggio dell'eroe durante il suo viaggio. Non è qui il luogo di ripetere le testimonianze antiche che attestano una diffusione arcaica del culto di Eracle in Sicilia (1), nè tutte quelle che ci ricordano una mitica localizzazione del passaggio dell'eroe nell'isola. Noi ci limitiamo ai seguenti tre argomenti: quale relazione esiste tra la lotta storica di Dorieo nella Sicilia occidentale e quella tra Eracle ed Erice? quale fu lo spunto per il racconto di quest'ultimo duello? e quando si diffuse la leggenda?

Che esista un intimo legame tra le imprese di Eracle, e quelle di Dorieo, riconoscevano già gli antichi, dando le gesta

---

di Erice ed Eracle sia anteriore alla spedizione di Dorieo: COSTANZI, mem. cit., p. 355 sgg.; TÜMPEL, *R.-Enc.* di PAULY-WISSOWA, V, 2, col. 604 sg., art. *Eryx*; MANCUSO, *La lirica classica greca in Sicilia e nella Magna Grecia*, Pisa, 1912, p. 64-65; PAIS, *St. d. Sic.*, I, 140; HOLM, I, 377; FREEMAN, I, 211. 544; FRIEDLÄNDER, *Herakles*, p. 22 sg. (" Phil. Unters. „ XIX, 1907) etc.

(1) Vedile enumerate ad es. dal CIACERI, nel libro citato; libro utile più come raccolta di materiale, che come ricostruzione metodicamente riuscita dello sviluppo dei culti siciliani.

del primo, come il presupposto necessario di quelle del secondo. Se Erodoto dice semplicemente *τὴν Ἔρυκος χώρην πᾶσαν εἶναι Ἡρακλειδέων*; Timeo in Diodoro avendo parlato della concessione per parte di Eracle agli indigeni del possesso del territorio, *μέχρι ἄν τις τῶν ἐκγόνων αὐτοῦ παραγενόμενος ἀπαιτήσῃ*, continua: *ὅπερ καὶ συνέβη γενέσθαι* e parla di Dorieo; e anche Pausania stabilisce un diretto confronto tra Eracle e Dorieo. — Per nessuno degli altri eraclidi che tentarono, prima e dopo di Dorieo, di prendere la terra ericina, Pentatlo e Pirro, le fonti stabiliscono così stretto rapporto con Eracle. — Nè è dubbio che ci sono maggiori contatti delle imprese di Eracle con quelle di Dorieo, che con quelle di Pentatlo, sì da doversi ammettere *a priori* come probabile che per il mito di Eracle influisse Dorieo, piuttosto che Pentatlo.

Dorieo è eraclide di discendenza ben più illustre di Pentatlo; agisce come Eracle presso l'Erice, mentre Pentatlo lotta presso il Lilibeo; della spedizione di Dorieo conservasi traccia nel nome di Minoa che richiama l'eroe coll'appellativo di Eraclea, mentre tutti i compagni di Pentatlo superstiti evacuarono dall'isola. E se fosse dimostrabile che la tesi del riflettersi le azioni di Dorieo nel mito di Eracle, non incontra difficoltà, essa sarebbe indubbiamente preferibile a tutti gli altri tentativi di ricercare lo spunto di quella leggenda. Poichè ad es. è poco convincente ricorrere alla somiglianza dei nomi di Erice ed Eracle (1), dovendosi in tal caso rinunciare ad intendere il motivo del duello tra i due eroi. Nè ci spiegheremmo quel motivo ricorrendo alla ipotesi di un semplice culto sull'Erice per Eracle, o per una divinità identificata con Eracle (2).

---

(1) Pais, *St. d. Sic.*, I p. 302.

(2) Il Ciaceri, op. cit., p. 41 e 48-50, identifica Filippo di Butacida con Buta padre di Erice; e pone Buta in relazione con Buphonas e Bytaia, due degli eroi sicani vinti da Eracle secondo Diodoro (IV, 23, 5). Filippo di Butacida rispecchierebbe l'influsso dorico, Buta l'operosità degli Ateniesi sostenitori degli Egestani, essendovi ad Atene la famiglia dei Butadai (Apollod., III, 15, 1) e il culto di Bute. Per il Ciaceri (p. 43) " è facile comprendere come Filippo, l'uomo bellissimo, figlio di Butacide, diventasse a poco a poco presso i Segestani l'eroe Buta, che da Afrodite, la dea della bellezza, aveva poi il figlio Erice ". I Segestani avrebbero sostituito l'ateniese Bute a Filippo di Butacida, facendone il padre del proprio eroe, e

Ma si potrebbero far valere due argomenti contro la derivazione dai fatti di Dorieo dei miti di Eracle ed Erice, dei quali uno di indole cronologica. Stesicoro nella *Gerioneide* raccoglieva i miti riguardanti le imprese di Eracle nell'Italia ed in Sicilia, e poteva quindi parlare della lotta con Erice. Timeo (in Diodoro) che in ultima analisi, per narrare le azioni di Eracle nell'isola può seguire la falsariga di Stesicoro, ricorda il duello con Erice; e questo duello ha in tutte le sue redazioni un certo colorito poetico. Ma poichè Stesicoro sarebbe vissuto, secondo la vulgata, parte nel VII e parte nel secolo VI (1), ciò significherebbe che si parlava di Erice ed Eracle prima della spedizione di Dorieo, e che per conseguenza in Erodoto si avrebbe notizia genuina, quando si presuppone conosciuta l'impresa di Eracle prima che Dorieo si muovesse.

---

signore di quelle terre che essi contrastavano ai Selinuntini. Infine i nomi di Buta e di Butacide parlanti di buoi, farebbero pensare che, forse in Stesicoro, Eracle lottasse non per il possesso della terra, ma per la restituzione dei buoi rapiti. — Contro questa tesi molto complessa, e sottile, e non chiarissima, si vedano le obbiezioni del Costanzi, mem. cit., p. 355 n. 1. Incominciamo dal notare: che nulla prova l'esistenza di quella prima versione della lotta di Eracle ed Erice; che poco si intende come a Filippo di Butacida si sostituisca Bute, quando il nome stesso di Butacida presuppone anteriore quello di Bute. Gli argomenti addotti per l'identificazione di Filippo e Buta sono poco probanti; al più si può dedurne che per i Segestani Buta dalla bellissima Afrodite avrà avuto schiatta bellissima, come bellissimo era Filippo, ma non che fosse diventato mirabile egli stesso. L'influsso ateniese è ad ogni modo da escludere, per ragioni cronologiche. Io intenderei a questo modo: tra i compagni di Dorieo v'era il crotoniate Filippo figlio di Butacida, ossia di una famiglia che si faceva risalire allo stesso eroe greco Bute che troviamo ad Atene. Nella mitologia elima, il padre dell'eroe Erice, veniva chiamato Buta, e dice Diodoro esplicitamente (IV, 83) ch'era divinità indigena, e per nulla importata. Divinità questa venerata con nome quasi identico presso i Sicani, come uno degli eroi Sicani vinti da Eracle (Diod., IV, 23, 5). Che i Segestani elevassero un eroo ad un nemico come Filippo di Butacida non è molto facile ad ammettere; assai più probabile è che la fonte di Erodoto identificasse erroneamente Filippo di Butacida, discendente da Bute, con qualche eroe indigeno che veniva considerato discendente da Buta, identificato col greco Bute. Confusioni di questo genere in Erodoto non sono da escludere. Cfr. VII, 167, 2 dove si parla di culto per Amilcare là dove si trattava di culto per Melqart.

(1) Tale è anche la tesi del Mancuso, op. cit. p. 163 sgg.

Ma recentemente il Wilamowitz (1) ha, a parer mio, fatta una giusta distinzione tra uno Stesicoro locrese della metà del VI secolo, ed uno Stesicoro di Imera, primo poeta imerese di tal nome, che dal Marmo Pario ci è dato come vivente nel 485/84. E sino a che non siasi dimostrato che la *Gerioneide* non è, come invece par naturale (2), del secondo, non si è dimostrato che il racconto stesicoreo del duello di Eracle ed Erice — sempre che nella *Gerioneide* se ne parlasse davvero (3) — sia anteriore alla spedizione di Dorieo, più che sorto precisamente sotto il diretto influsso degli avvenimenti (4).

Nè maggior consistenza ha il secondo argomento, per negare che la lotta di Eracle sia modellata su quella di Dorieo: " la proiezione in tempi preistorici di avvenimenti storici e " recenti si distingue per una perfetta rispondenza ed analogia, " che qui manca del tutto, e Pausania (III 16) stesso ha visto " l'antitesi tra la sorte di Herakles e quella di Dorieo. La co- " struzione avrebbe avuto il suo fondamento nella mendacità " dell'oracolo..... " (5). A me pare che quando un poeta greco, attingendo ispirazione dalle lotte di Dorieo per occupare la regione dell'Erice, immaginava una mitica lotta di Eracle contro Erice, non poteva naturalmente far sconfiggere Eracle, anche se sapeva sconfitto Dorieo: il suo racconto doveva apparire anzi come una testimonianza del buon diritto dei Greci assalitori. Ma poi, se davvero ne parlava Stesicoro d'Imera, e quindi con ogni probabilità prima del 485/4, ossia prima di abbandonare la patria (6), e se è vero che Dorieo resistette per parecchio tempo nell'isola, chi potrà escludere che il poeta scrivesse

---

(1) *Sappho und Simonides*, Berlin 1913, pagg. 233-242. Di ciò mi occupo nel saggio cit. sulla battaglia di Imera.

(2) Cfr. Wilamowitz, op. cit. p. 241.

(3) Non si dimentichi che non si tratta che di un'ipotesi. Vedi invece Friedländer, op. cit. p. 22 sgg.

(4) Il Costanzi, mem. cit. p. 358 scrive: " la compenetrazione del mito " di Erice col patrimonio più antico di leggende elleniche è mostrato dal " fatto che Ψῶφις, l'eroina eponima della città Ψῶφις in Arcadia, è data " come figlia di Eryx ". (Paus., VIII 24, 2) Ma si può provare che se ne parlasse prima del V secolo?

(5) Costanzi, mem. cit. p. 357.

(6) Cfr. *Marmo Pario* Ep. 50, 485/84.

quando Dorieo non era ancora decisamente sconfitto, e che i suoi versi fossero opera di uno di quei Sicelioti, cui allude Giustino, che in Dorieo speravano di aver il debellatore di Fenici ed Elimi?

E quando più tardi si parlò di Dorieo, già conoscendo il poetico racconto di Eracle ed Erice, tale racconto divenne il presupposto per le imprese dello Spartiate. E allora sorsero *ex eventu* le notizie riferite da Erodoto sull'oracolo e sul responso, che a bella posta compaiono in forma ambigua, per giustificare la mala ventura di Dorieo, in pieno contrasto colla vittoria di Eracle.

III.

Se ciò regge dobbiamo ragionevolmente attenderci *a priori*, che quando in seguito si descrisse l'impresa di quegli altri greci che con Pentatlo, prima di Dorieo, avevano tentato di fondare una colonia nell'estremo occidentale dell'isola, si attingessero, per rimpolpare le poche notizie genuine che si potevano conservare di quell'impresa fallita, particolari dal racconto ormai completo sulle imprese di Dorieo, anche se nella realtà, proprio all'opposto, l'impresa di Pentatlo aveva contribuito alla decisione di Dorieo (1).

Chi legga i due racconti incidentali della spedizione di Pentatlo conservati da Pausania (X, 11, 3-4), che risale, probabilmente di seconda mano, ad Antioco, che cita; e di Diodoro (V, 9) il quale riassume da Timeo, può fare alcune osservazioni di qualche importanza. Certo in origine le notizie che si avevano su Pentatlo presentavano notevoli divergenze da quelle su Dorieo, dovute alla reale indipendenza delle loro imprese. Diversi erano i nomi degli ecisti e dei loro compagni, diversa la provenienza dei coloni, diversa la cronologia. Alcuni punti di contatto, che appaiono già nel racconto arcaico di Antioco, sono puramente casuali, e d'altronde non mancano per ognuno di essi notevoli discrepanze. Così tanto Pentatlo quanto Dorieo agiscono

(1) Non mi occupo qui della colonizzazione di Lipara, ma solo del tentativo in Sicilia.

nell'estremo occidentale dell'isola, ma la città che Pentatlo cerca di fondare è, sembra (1), presso il Lilibeo, e quella di Dorieo più al nord, presso l'Erice. Come Dorieo è vinto da Fenici ed Egestani secondo Erodoto (V, 46), così Pentatlo secondo Antioco è sopraffatto da Fenici ed Elimi; ma la corrispondenza non è esatta, perchè i Fenici siciliani del 580 circa, non sono la stessa cosa di quelli del 510 (2), e gli Egestani non sono che una parte degli Elimi. Così pure tanto i coloni di Pentatlo quanto quelli di Dorieo riparano altrove, ma gli uni vanno a Lipara, gli altri a Minoa.

È vero che da Pausania non abbiamo garanzia di sapere tutto quel che diceva Antioco, e che a Pausania si deve attribuire l'errore del Pachino, ma è anche vero che dove Pausania può esser confrontato con Tucidide (III, 88), derivante anch'egli, quasi certamente, da Antioco, si vede che in genere il riassunto di cui disponeva era abbastanza fedele. Ad ogni modo un confronto dell'estratto di Antioco con quello di Timeo, prova innanzi tutto che in Timeo v'erano gravi divergenze (3). Così poichè Pausania scrive: *οἱ δὲ Λιπαραῖοι οὗτοι Κνιδίων μὲν ἦσαν ἄποικοι, τῆς δὲ ἀποικίας* [dunque di Lipara] *ἡγεμόνα γενέσθαι φασὶν ἄνδρα Κνίδιον· ὄνομα δὲ εἶναί οἱ Πένταθλον, Ἀντίοχος ..... φησί,* e dopo non parla di morte di Pentatlo in Sicilia, par chiaro che Antioco faceva andar Pentatlo fino a Lipara (4). Invece Timeo in Diodoro lo dà esplicitamente morto in Sicilia: *πεισθέντες δὲ* (i coloni) *τοῖς Σελινουντίοις συμμαχεῖν* (contro gli Egestani) *πολλοὺς ἀπέβαλον κατὰ τὴν μάχην, ἐν οἷς ἦν καὶ αὐτὸς ὁ Πένταθλος.* Antioco parlava di Pentatlo

(1) Della città parla Antioco, ma per errore di Pausania si dice *ἐπὶ Παχύνῳ*, lettura inammissibile. Del Lilibeo parla Timeo in Diodoro. Pausania o la sua fonte ha confuso l'uno dei vertici della Sicilia con un altro. Forse nell'estratto di Antioco di cui disponeva Pausania, si parlava del vertice più meridionale della Sicilia, senza darne il nome, sostituito per congettura erronea dal periegeta (cfr. Meltzer, I, 485). È noto che per molti antichi Lilibeo era il capo più meridionale dell'isola.

(2) Nel 580 c. si tratta ancora di colonie fenicie indipendenti, nel 510 di suddite di Cartagine. Ciò rileva giustamente il Freeman, I p. 444 n. 1.

(3) Credo ben poco convincente la dimostrazione del Meltzer, I p. 484 n. 53. Cfr. Geffcken, *Tim. Geogr.* p. 64.

(4) Vedi contra Meltzer, loc. cit.

fondante una città in Sicilia, e non risulta che altrettanto dicesse Timeo. Così pure è quasi certo che Timeo dava particolari nuovi. Antioco in Pausania parla solo di Cnidi come compagni del Cnidio Pentatlo, e anche Tucidide dice dei Liparesi *Κνιδίων ἄποικοι*: invece Timeo diceva di *Κνίδιοί τινες καὶ Ῥόδιοι* (1). E si badi che ancora Eforo doveva parlare dei soli Cnidi, come risulta da [Scimno] 262-3, e da Strabone VI p. 275. Chi osservi tutto questo, e veda che dal solo estratto di Timeo risultano i punti di contatto più strani tra le due spedizioni, può pensare che il racconto breve e genuino di Antioco per le imprese di Pentatlo, sia stato rimpolpato con particolari inventati e ispirati ad un voluto parallelismo con Dorieo, dagli storici siciliani posteriori, e specialmente dal retore Timeo (2). E questi particolari aggiunti possono essere, a parer mio, parecchi.

Intanto se Timeo, contraddicendo ad Antioco, faceva morire Pentatlo in Sicilia, è per parallelismo con Dorieo morto nella lotta in Sicilia. E come Eurileone guida i superstiti della spedizione di Dorieo conducendoli a Minoa, così Gorgo, Testore ed Epiterside conducono i compagni di Dorieo nel rifugio di Lipara. Noi non sappiamo quale data fosse in Antioco per la colonizzazione di Lipara: Eusebio (II, 88 Schoene) parla del 627/6, mentre per Diodoro, Pentatlo venne in Sicilia nell'olimp. 50ª (580-576), e i suoi compagni si fermarono in seguito a Lipari, ancora abitata dagli indigeni discendenti di Eolo. Che le fonti divergano sulla cronologia della colonia greca di Lipari non stupisce (3), ma par chiaro che la fonte di Diodoro per fissare

(1) Il Pais, *St. d. Sic.* I, 299 parla ancora di abitanti di Coo, deducendolo ad es. dal nome di Gorgo, uno dei tre ecisti di Lipara per Timeo. L'argomento pare insufficente perchè è nome diffuso tra tutti i Dori.

(2) Anche per le notizie relative a Pirro ed Eracle, conservate da Diod., XXII, 10, 3 e Plut., *Pirro* 22, la fonte è probabilmente Timeo. Si ricordi come da Gius. Fl., *c. Apione* I, 3 risulti che Timeo si atteggiava a correttore del racconto di Antioco e Filisto.

(3) Cfr. le divergenze sulla cronologia di Nasso, di Megara, di Selinunte, di Sibari (v. sopra) e così via. Che si parli in Eusebio del 627/6 per Lipara, è dovuto a parallelismo con Selinunte ed Imera, le due colonie più lontane verso occidente. Anche per questo non credo accettabile la tesi del Pais, *St. d. Sic.* 1, 299 di una doppia colonizzazione greca a Lipara, contro il dato esplicito di Timeo sugli indigeni, trovati dai compagni di Pentatlo.

al 580 l'arrivo di Pentatlo partiva dal 510, tradizionale per Dorieo, risalendo a due generazioni prima (35 × 2). E il nuovo particolare che Pentatlo: *ἦν ἀναφέρων τὸ γένος εἰς Ἱππότην τὸν ἀφ' Ἡρακλέους γεγονότα,* non sarà attinto dall'essere eraclide Dorieo? Anche Pentatlo si diresse verso le terre che si dicevano conquistate un tempo da Eracle!

Nè è fuor di luogo, quando troviamo in Timeo, invece delle lotte contro Elimi e Fenici, taciuti o posti in sottordine i Fenici, sostituiti agli Elimi specificamente i Segestani, tratti in campo i Selinuntini, e vediamo che Pentatlo tiene le parti di Selinunte contro Egesta; pensare che si tratti di altri particolari presi in prestito dai casi di Dorieo, che lottò appunto coi Segestani, che, come risulterebbe da Giustino, fu a capo di una vera federazione siceliota, e che agì probabilmente d'accordo con Selinunte (1). Infine anche la notizia, di per sè non inammissibile, dei Cnidî e Rodiesi che *δυσαρεστήσαντες τῇ βαρύτητι τῶν κατὰ τὴν Ἀσίαν βασιλέων ἔγνωσαν ἀποικίαν ἐκπέμπειν,* risente forse, nella formulazione, un tantino dello sdegno di Dorieo, che abbandona Sparta per il peso del dominio del re suo fratello (2).

(1) Relazioni coi Selinuntini sono attestate: e dall'occupazione di Minoa per parte dei superstiti, e dall'invito ad Eurileonte per abbattere Pitagora.

(2) Non risulta in modo chiaro, dalle notizie vaghe di Diodoro, quali fossero questi re che davano noia ai Cnidî e Rodiesi. Cfr. Pais, *St. d. Sic.* 1, 298 n. 1; Freeman, I, 589.

Per le fonti dello Pseudo Scimno. I vv. 139-263.

Nota di GIUSEPPE CAMMELLI (*).

§ 1.

Scopo di questi studi è la ricerca della fonte del poemetto geografico dello Pseudo Scimno. Non credo sia lavoro buttato via; finora si è ritenuto comunemente, in virtù d'una intesa muta fra gli studiosi, che questa fonte sia diversa secondo i vari luoghi; ma siccome uno studio accurato su tale argomento non è mai stato fatto, l'opinione è incerta e il dubbio legittimo. Certo, l'Autore che Scimno nomina più spesso nella sua *περιήγησις* è Eforo; ma accanto a lui troviamo pure, assai frequentemente i nomi di Erodoto, di Eratostene, di Dionisio e di altri. Sopratutto notevole è il passo dove sono noverate le fonti, che comprende i versi 109-127:

Ἤδη δ' ἐπ' ἀρχὴν εἶμι τῆς συντάξεως
110 *τοὺς συγγραφεῖς ἐκθέμενος, οἷς δὴ χρώμενος*
τὸν ἱστορικὸν εἰς πίστιν ἀναπέμπω λόγον·
τῷ τὴν γεωγραφίαν γὰρ ἐπιμελέστατα
γεγραφότι, τοῖς τε κλίμασι καὶ τοῖς χρήμασιν,
Ἐρατοσθένει μάλιστα συμπεπεισμένος,
115 *Ἐφόρῳ τε καὶ τῷ τὰς κτίσεις εἰρηκότι*
ἐν πέντε βίβλοις Χαλκιδεῖ Διονυσίῳ
Δημητρίῳ τε Καλλατιανῷ συγγραφεῖ
καὶ τῷ Σικελῷ Κλέωνι καὶ Τιμοσθένει.

Seguono dei versi corrotti nei quali non si può leggere che il nome di Callistene nel 124

125 . . . . *ενίων δὲ καὶ*
Τίμαιον, ἄνδρα Σικελὸν ἐκ Ταυρομενίου
ἐκ τῶν ὑφ' Ἡροδότου τε συντεταγμένων·

(*) Presentata nell'adunanza dell'8 giugno 1913.

Eccoli dunque qui in ordine: Eratostene, Eforo, Dionisio di Calcide, Demetrio Callaziano, Cleone, Timostene, Callistene, Timeo, Erodoto. — È peccato che il testo sia corrotto e che per ben 7 versi non si possa leggere nulla o quasi nulla; vorremo forse credere che fra questi nomi perduti non si trovassero almeno quelli di Teopompo e di Ecateo di Teo? (1). — Ma se la lista non è completa, ce n'è già a sufficienza per poter concludere che [Scimno] cita nomi che ha già trovati citati, autori che egli non ha certo importunato colle sue ricerche (2): troppo magro è questo sterile sunterello della geografia di tutto il mondo allora conosciuto, troppo scarse e stantie le notizie che vi si ritrovano per ammettere che l'autore si sia presa la pena non dico di investigare lui stesso, ma anche semplicemente di fare opera di raccoglitore, considerando sopratutto che le fonti citate sono in genere storiche. Noi dunque rifiutiamo fede a quello che dice nei vv. 128 sgg.

ἃ δ' αὐτὸς ἰδίᾳ φιλοπόνως ἐξητακώς
αὐτοπτικὴν πίστιν τε προσενηνεγμένος κτλ.,

come non crediamo nemmeno che le sue fonti siano così numerose (3).

---

(1) Essi del resto sono ricordati anche nel corso del poemetto: cfr. vv. 370, 869. Di Ecateo il testo di [Scimno] dice *οτιειο*. Il Buttmann lesse falsamente *οὑρετριεύς*, il Röper congetturò *ὁ Τήιος*. Cfr. Susemihl I, 310 n. 9 e 10; Christ-Schmidt, *Gr. Lit.*[5] II 172. 472 sgg.; Jacoby s v. *Hekataios* 2 in Pauly-Wissowa, *R.-Enc.* VII, 2666 sg. Di lui ci occuperemo a proposito del v. 869-70. Quanto agli altri che pure ricorderò in seguito, sono: Apollodoro (16 sgg.), Eratostene (114, 412), Eforo (115, 471, 546, 842, 870, 880), Dionisio Calcid. (116), Demetrio di Call. (117, 720, 796), Cleone Siculo (110), Timostene (118), Callistene (124), Timeo (126, 214, 412), Erodoto (127, 565, 928).

(2) A dar prova di ciò basti il fatto che talora nomina contemporaneamente due fonti di cui assai probabilmente una è stata desunta dall'altra; v. p. es. i vv. 412 (Timeo e Eratostene); talvolta ancora troviamo dei gruppi di citazioni che sembrano attinti senz'altro dalla fonte: ad es. v. 869-870 (Ecateo e Eforo) 879-80 (Demetrio e Eforo). Al v. 928 giunge perfino a correggere la narrazione di Erodoto, ossia a ripetere, io credo, le critiche di uno scrittore contro Erodoto.

(3) Già il Niese "Hermes" 1909 p. 166 pensa ch'egli attingesse ad una fonte le notizie bibliografiche di cui fa sfoggio. Ma si tratta di sapere quale sia questa fonte, che non pare quella indicata dal Niese: il *περὶ γῆς* di Apollodoro.

Questa è la ragione per cui credo che valga la pena di fare questa ricerca: " *quale è la fonte che [Scimno] ha saccheggiato, o per meglio dire, ha messo in versi?* ". E qual'era il contenuto di questa fonte? In qual modo aveva raccolto il materiale? Conseguenze più che per Ps. Scimno importanti alla ricostruzione d'una delle opere geografiche perdute dei tempi ellenistici. Infatti, avendo [Scimno] scritto sul finire del II secolo av. Cr. (1), e non citando autori posteriori al III secolo (2) [tace ad es. di Polibio] pare logico supporre *a priori* che la fonte ch'egli forse verificava fosse del III secolo [Avremo occasione in seguito di esaminare l'asserzione del KNAACK s. v. *Eratosthenes* in PAULY-WISSOWA VI, 374 di una dipendenza da Artemidoro ed Apollodoro].

L'analisi minuta ed attenta del poemetto preso parte per parte, verso per verso, ci condurrà, speriamo, a raggiungere il nostro scopo meglio che ogni altro metodo di studio. Alla fine di ogni singola parte, cercheremo di riassumere i risultati della nostra analisi; e riassumeremo di poi questi diversi resultati per estrarre, se sarà possibile, dal loro confronto uno definitivo che risponda alla domanda che ci siamo fatti (3). Non è questa

---

(1) Cfr. PARETI, *Quando fu composta la periegesi del Pseudo Scimno?* in *Saggi di storia antica... offerti a G. Beloch*, Roma, 1910 pag. 133 sgg.

(2) Ciò fu già fatto notare dall'UNGER " Philol. ", XLI (1882) p. 613..., e dal SUSEMIHL *Gesch. d. Gr. Litt. in der Alexandrinerzeit* I p. 679 n. 205. APOLLODORO non è dato che come modello per la forma poetica: v. 19 sgg. Sulla indipendenza di [SCIMNO] dal περὶ γῆς di APOLLODORO ci tratterremo nelle conclusioni delle nostre ricerche. Per ora si veda PARETI, *Intorno al περὶ γῆς di Apollodoro*, " Atti della R. Accad. delle scienze di Torino " XLV (1910). Per la cronologia di DEMETRIO DI CALLATIS vedi SUSEMIHL o. c., I, p. 681; e PAULY-WISSOWA, *R. Enc.*, IV, 2807 s. v. *Demetrios* n. 77.

(3) Saranno sopratutto interessanti i confronti che avremo occasione di fare con Strabone; vedremo infatti come mentre nella maggior parte dei casi le notizie sono simili, alcune ve ne sono che presentano differenze assai gravi. Ora se Strabone e [Scimno] derivassero l'uno e l'altro direttamente da una stessa fonte, come spiegarsi tali casi? La soluzione è unica: come è oggi universalmente riconosciuta la dipendenza di Strabone da Eforo attraverso Artemidoro, così, attraverso un altro scrittore, è forse per lo Ps. Scimno: e sarà messo in chiaro dalle nostre ricerche. Quanto poi alle relazioni che intercedono fra [SCIMNO] e STRABONE, ci occuperemo in altra parte del nostro lavoro, e avremo allora occasione di esaminare le ipotesi emesse dai moderni a tal proposito.

dunque che una piccola parte del nostro studio, che cominciamo dal verso 139 (*Εὐρώπη*) col quale ha principio la periegesi. Debbo fin d'ora avvertire che spesso avremo occasione di ricordare gli studî da altri fatti su argomenti affini, quali p. e. l'Holm, *Storia della Sicilia* e il Pais, *Storia d'Italia*: noi però, pur rimandando il lettore ai singoli luoghi opportuni, non li nomineremo che di passaggio, sembrandoci che sarebbe un deviare dall'argomento il fermarsi su questioni particolari che non sono oggetto diretto della nostra ricerca.

§ 2.

139-140 *Τὸ τῆς θαλάττης τῆς Ἀτλαντικῆς στόμα*
σταδίων μὲν εἶναί φασιν ἑκατὸν εἴκοσιν

Sulla bocca del Mare Atlantico anche Strabone (II p. 122 C.) dà la medesima notizia. Turranio Gracile in Plinio *n. h.* III 3 e Agatemero II 14 dicono che la sua " longitudo „ è di 120 stadî; e la diffusione della notizia è prova probabile che deve risalire a qualcuno degli scrittori più noti. Anche in [Scimno] si deve certo intendere, come ben videro i commentatori, che egli parla della " longitudo „ e non della " latitudo „, che sarebbe assurdo.

145-6 *Νῆσοι δὲ τούτων ἑκατέρωθεν κείμεναι*
διέχουσ' ἀπ' ἀλλήλων τριάκοντα σχεδόν
σταδίους· καλοῦνται δ' ὑπό τινων Ἡρακλέους
στῆλαι

Le isole poste dall'una e dall'altra parte delle colonne di Ercole distano fra di loro 30 stadî; diversamente Strabone, che II p. 122 C dice che le colonne di Ercole nel punto più angusto sono di circa 70 stadî. L'unico termine di confronto è Avieno (Euctemone) *Or. mar.* 343: " ...nuncupari has Herculis ait Columnas; stadia triginta refert has distinere „. — Continua il nostro dicendo che sono da alcuni chiamate " colonne d'Ercole „. Strabone fa l'enumerazione dei vari luoghi dove si credeva dover porre le famose colonne: secondo alcuni, fra cui ricorda Dicearco, Eratostene e Polibio, son presso il mare (III 170); altri le pongono a Cadice, altri ai due promontori che chiudono dall'una

parte e dall'altra il mare di Calpe, altri ancora presso l'isola d'Onoba sacra ad Ercole. Vi sono anche taluni che designano con tal nome le due piccole isole di Calpe e di Abilica ed altri invece gli scogli di Plancte e di Simplegade e vi è pure chi crede che siano esse le colonne bronzee che sono nel tempio di Ercole in Cadice. Strabone infine tiene che possano così dirsi o le isole o i monti che separano l'Africa dalla Spagna; dove, egli pensa, saranno sorte colonne vere e proprie che avevano avuto tal nome e che andarono poi col tempo demolite. Sembra che il Nostro non si fermi in particolare su alcuna di queste opinioni dei singoli autori, limitandosi semplicemente a dire che le colonne di Ercole erano poste sulle isole, che di fronte le une alle altre e separate da 30 stadî di mare dividevano la costa africana dall'iberica. Si allontana così evidentemente da quelli che le ponevano a Cadice. Lascia vedere però al lettore che la questione non gli è del tutto ignota, perchè non dà la cosa come sicura, ma dice solamente che " alcuni le chiamano colonne d'Ercole ". Forse questo semplicismo di [Scimno] può trovare un raffronto ancora una volta con Strabone; abbiamo visto infatti come anch'egli dopo aver esposta la questione nei suoi particolari la risolve in termini assai generali, il che significa che ambedue hanno dinanzi una fonte che discute sui fatti. Quanto alle isole cui allude [Scimno] (evidentemente quelle situate a minore distanza), sarebbero la Perigile e quella di Giunone, la prima sulla costa africana, l'altra sull'iberica.

146-9 . . *Μιᾶς τούτων δὲ Μασσαλιωτική*
πόλις ἐστὶν ἐγγύς, Μαινάκη καλουμένη·
αὕτη πρὸς Εὐρώπην δὲ τῶν Ἑλληνίδων
πόλεων ἁπασῶν ἐσχάτην ἔχει θέσιν.

Vicino ad una di queste isole è Menace. Il passo è somigliantissimo a quello di STRABONE III p. 156. Dice infatti lo ps. Scimno che essa è la più lontana delle città greche in Europa, ad Occidente, e Strabone " l'ultima delle città Focesi verso Occidente ". Cfr. ancora AVIENO 426 sgg. Solo non si spiega come il nostro possa dire che Menace è presso le colonne di Ercole, mentre da Strabone, l. c., risulta che Menace era ad est di Malaga. — Ammettendo ciò bisognerebbe trasportare le colonne

ad est di Malaga e non avrebbero ragione di portar più questo nome, che si adatta bene invece allo stretto. Ma assai a proposito osserva il Müller che se pure egli s'è espresso male, tale non era però affatto la sua opinione; e una prova l'abbiamo nel v. 150 dove parla del promontorio di Calpe: è evidente che le colonne di Ercole erano poste da lui prima di questo; non credo ci sia altro modo di spiegare questo passo se non attribuendolo col Müller alla negligenza dello scrittore, aggiunta, a parer mio, al valersi di una fonte mediata o immediata che camminava in senso opposto. Così dopo aver parlato delle colonne d'Ercole, [Scimno] sarebbe caduto in errore e avrebbe seguito l'ordine della sua fonte, per riprendersi solo arrivato a Malaga. È opportuno a questo proposito notare che una fonte di questo genere, che cioè faceva lo stesso periplo in senso opposto, pare fosse Eratostene e che nello stesso senso procedeva un'opera in gran parte dipendente dalle stesse fonti, di [Scimno] ossia il *περὶ γῆς* di Apollodoro (1). È degno di nota che il nostro periegeta dà come esistente, e come città greca, Menace. Ciò ci riporta ad un tempo molto più antico di quello di [Scimno] (2). Si osservi che la fonte di Strabone conosceva come non più esistente Menace. Se Strabone derivasse da Eforo, [Scimno] difficilmente risalirebbe a quest'ultimo scrittore.

152-6 *εἶτ' ἐχομένη 'στὶ νῆσος ἡ καλουμένη*
Ἐρύθεια, μεγέθει μὲν βραχεῖα παντελῶς,
βοῶν δ' ἀγέλας ἔχουσα καὶ βοσκημάτων
προσεμφερεῖς ταύροις τε τοῖς Αἰγυπτίοις
καὶ τοῖς κατὰ τὴν Ἤπειρον ἔτι Θεσπρωτίοις·

È evidente la derivazione dal framm. 40 di Eforo (Plinio IV 120). " Dal lato donde si scopre la Spagna è un'isola che Eforo e Filisto chiamano Erythia, Timeo e Sileno Afrodisia... Vi abitava Gerione al quale Ercole rubò gli armenti ". Da queste poche parole che ci rimangono si vede come Eforo facendo al-

(1) Cfr. Pareti, *Intorno al περὶ γῆς etc.*; per l'ordine della periegesi di Apollodoro ibid. p. 315-316. Ci occuperemo anche noi, ad uno ad uno, dei punti di contatto tra [Scimno] e Apollodoro.

(2) Cfr. Meltzer, *Gesch. d. Karth.* I p. 481 sg.

lusione alla rapina di Eracle, e continuando forse in seguito col suo discorso, parlava dell'abbondanza dei greggi. — Per la rapina vedi anche ECATEO fr. 349; è importante anche mettere in rilievo la differenza che Plinio ci attesta fra la tradizione di Eforo e quella di Timeo e altri. — STRABONE pure ha parole somiglianti a quelle del Nostro: allude ai bovi di Gerione, e torna a parlare della ricchezza dei pascoli in due luoghi: III 169; VI 269. — I versi 155-6 non hanno importanza per noi.

157-8 *προσεσπερίους δ' Αἰθίοπας οἰκητὰς ἔχειν*
λέγουσιν αὐτὴν γενομένης ἀποικίας.

Si ha ragione di credere che tale notizia venga da EFORO il cui fr. (= 38 M.) riguardante le peregrinazioni degli Etiopi Esperî è in STRABONE I p. 33: *λέγεσθαι γάρ φησιν (Ἔφορος) ὑπὸ τῶν Ταρτησσίων Αἰθίοπας τὴν Λιβύην ἐπελθόντας μέχρι δύσεως τοὺς μὲν αὐτοῦ μεῖναι, τοὺς δὲ καὶ τῆς παραλίας κατασχεῖν πολλήν.*

159 *Ταύτης σύνεγγυς δ' ἐστὶ... πόλις*
λαβοῦσα Τυρίων ἐμπόρων ἀποικίαν
Γάδειρ' ὅπου μέγιστα γίνεσθαι λόγος
κήτη...

La notizia si ritrova identica in STRABONE III p. 169 sg.: esso dice che i Tirii furono comandati da un oracolo di fondare una città alle colonne d'Ercole; prima approdarono al mare presso Calpe, contro la volontà del dio; poi con una seconda spedizione vennero ad un' isola di fronte ad Onoba, sempre contro l'oracolo, e finalmente colà dove fondarono Gades. Quanto ai cetacei di cui è ricco il mare in quel luogo, puoi confrontare un altro passo di STRABONE III p. 145 dove parla in particolar modo della Turdetania " quel mare abbonda d'ogni specie di ostriche e di conchiglie specialmente sulla costa della Turdetania, a causa del grande flusso e riflusso, e così pure di pesci d'ogni altro genere: origi, balene, fisiteri, ecc. „. Secondo ST. BIZ. *Γάδειρα*: *Ἐρατοσθένης δὲ ἡ Γάδειρος φησὶ θηλκῶς.* Notizie in proposito erano già in Timeo (cfr. *Θαυμάσια ἀκούσμ.* 136 e GEFFCKEN

Timaios' Geogr. 157, 5). Quella di Strabone si ritrova in Polibio XXXIV 8, 1 (1).

162-4 ...*Μετὰ ταύτην δ' ἔστιν ἡμερῶν δυοῖν*
τελέσαντι πλοῦν ἐμπόριον εὐτυχέστατον
ἡ λεγομένη Ταρτησσὸς ἐπιφανὴς πόλις.

Noto prima di tutto che Ps. Scimno e Eforo (fr. 39) dicono Tartesso " città ". Per la designazione di Tartesso come emporio cfr. Erodoto IV, 152 sul viaggio dei Sami (2). Per le notizie sulla città di Tartesso, si veda ancora Stef. Biz. *Ταρτησσός*; Suida *Ταρτησσός* = *Scol.* Arist. *Ran.* 478; Unger (" Phil. " Suppl. IV, 216-217), e Müllenhoff (I, p. 125 n.). Il fiume cui poi s'allude sarebbe il Beti per la tradizione comune, ma come può dire il Nostro che dal promontorio di Calpe ad Erythia è la distanza di un sol giorno (vv. 150-1) e da Gades a Tartesso di due giorni di navigazione? Manca l'aiuto di qualsiasi fonte per chiarire la cosa; noto però come anche Eratostene commette un errore analogo dicendo (Strab. III p. 148) che da Gades al promontorio sacro ci sono 5 giorni di navigazione.

165-6 *ποταμόρρυτον κασσίτερον ἐκ τῆς Κελτικῆς*
χρυσόν τε καὶ χαλκὸν φέρουσα πλείονα.

Allusione al fiume Beti presso cui è posta Tartesso e che, secondo [Scimno] dice, trasporta minerale di stagno. Strabone ci dà una notizia analoga quando (III 148) parlando della sorgente del fiume dice che esso nasce da un monte che chiamano Argenteo appunto per le grandi miniere che contiene di questo metallo; evidentemente si tratta d'una tradizione affine, la quale pare assai diffusa: il Müller in nota a questi versi dice: " talem fama celebrat Baetin ". Cfr. i passi raccolti da Hübner s. v. *Baetis* in Pauly-Wissowa II 2763 sg.

169-74 *Ἔπειτα χώρα Κελτικὴ καλουμένη*
μέχρι τῆς θαλάττης τῆς κατὰ Σαρδὼ κειμένης,

---

(1) Cfr. anche Ateneo VII, 302 e Hübner art. *Gades*, in Pauly-Wissowa VII, 451.

(2) Cfr. Hübner art. *Gades* in Pauly-Wissowa, VII 441-442.

ὅπερ μέγιστόν ἐστι πρὸς δυσμαῖς ἔθνος.
Τὴν μὲν γὰρ ἐντὸς ἀνατολῶν πᾶσαν σχεδόν
οἰκοῦσιν Ἰνδοί, τὴν δὲ πρὸς μεσημβρίαν
Αἰθίοπες ἐγγὺς κείμενοι νότου πνοῆς·
τὸν ἀπὸ ζεφύρου Κελτοὶ δὲ μέχρι δυσμῶν τόπον
θερινῶν ἔχουσιν, τὸν δὲ πρὸς βορρᾶν Σκύθαι.

Dopo alcuni versi di carattere generale viene a parlare dei Celti che " sono la più grande popolazione dell'Occidente " e dà la distribuzione dei maggiori popoli nelle varie regioni da essi abitate; così, conclude, si dice (v. 177). Chi dice così, benchè [Scimno] non lo nomini, è come al solito Eforo del quale abbiamo fortunatamente il fr. 38 che ce ne fa chiara testimonianza. " Gli Indi abitano la regione orientale, gli Etiopi la meridionale verso Ostro, i Celti l'occidentale dove soffia il vento Favonio, gli Sciti infine la settentrionale ". L'imitazione, come si vede, è pedissequa.

Vi è però da notare che [Scimno] chiama *Sardo* quel mare (cfr. v. 196), denominazione che non risulta fosse in Eforo, mentre si ritrova in Eratostene (Plinio III 75). " Eratosthenes inter ostium Oceani et Sardiniam quidquid est Sardoum (mare) appellat ".

175-7 *Ἰνδοὶ μὲν οὖν μεταξὺ θερινῶν ἀνατολῶν*
καὶ χειμερινῶν οἰκοῦσι. Κελτοὶ δ' ἀνάπαλιν
ὑπ' ἰσημερινῆς θερινῆς τε δύσεως, ὡς λόγος.

Nemmeno l'ordine delle parole è turbato; cfr. il fr. 38 di Eforo: " Gli Indi abitano tra l'oriente estivo e invernale, i Celti invece occupano la regione che va dall'occaso estivo a quello invernale ".

178-182 *Τὰ μὲν οὖν ἔθνη τὰ τέτταρ' ἐστὶ τοῖς ὄχλοις*
τοῖς πλήθεσίν τε τῶν κατοικούντων ἴσα
ἡ δ' Αἰθιόπων πλέον' ἐστὶ χώραν καὶ Σκυθῶν
ἐρημίαν δ' ἔχουσα πλείστην, διὰ τὸ καὶ
τὰ μὲν ἔμπυρ' εἶναι μᾶλλον αὐτῶν τὰ δ' ἔνυγρα.

Anche qui cfr. Eforo fr. 38 che parla precisamente allo stesso modo: " tuttavia queste singole parti non sono eguali, poichè

quella degli Sciti e degli Etiopi è maggiore di quella degli Indi e dei Celti „; son parole riferite da STRABONE I 33 seg. Aggiunge [Scimno] che la regione degli Etiopi e degli Sciti benchè più estesa è però meno popolata di quella dei Celti perchè è infocata e ardente mentre l'altra è fresca e ricca di acque. Anche questo particolare si può credere tratto da Eforo, il cui fr. finisce colle parole sopra riferite, che abbiamo visto così perfettamente corrispondenti a quelle del Nostro.

183-7 *Χρῶνται δὲ Κελτοὶ τοῖς ἔθεσιν Ἑλληνικοῖς*
ἔχοντες οἰκειότατα πρὸς τὴν Ἑλλάδα
διὰ τὰς ὑποδοχὰς τῶν ἐπιξενουμένων·
σὺν μουσικῇ δ' ἄγουσι τὰς ἐκκλησίας,
ζηλοῦντες αὐτὴν ἡμερώσεως χάριν.

Si viene a parlare dei costumi dei Celti. Il Nostro dice che li hanno derivati dagli Elleni coi quali si trovarono in consuetudine perchè molti vennero di là nella loro terra. Osserva il Müller nel commento in nota a questo verso che [Scimno] non vuol già dire che i Celti hanno costumi ellenici veri e proprî, ma solo somiglianti. Anche a questo proposito viene opportuno il confronto con EFORO fr. 43, dove parlando dei costumi dei Celti, dice che essi furono “ filelleni „. Quanto a queste relazioni che essi ebbero coi Greci cfr. Aristotele *Mir.* c. 86; Strabone non ne parla e a noi manca quindi la possibilità di poter stabilire nessun raffronto con lui; ma basti quello con Eforo. Pei versi seguenti dove [Scimno] parla del loro amore per la musica che accompagna le loro adunanze e produce l'effetto di calmare gli animi eccitati non abbiamo da fare raffronti perchè ogni altra fonte ci manca. I luoghi dove Eforo parla dei costumi dei Celti sono i due fr. 143, 144.

188-90 *Τούτων δὲ κεῖται λεγομένη τις ἐσχάτη*
στήλη βόρειος. ἔστι δ' ὑψηλὴ πάνυ
εἰς κυματῶδες πέλαγος ἀνατείνουσ' ἄκραν.

Non trovo nessun accenno a tale tradizione nelle fonti superstiti (cfr. MÜLLENHOFF I p. 89 n.).

191-5 *Οἰκοῦσι τῆς στήλης δὲ τοὺς ἐγγὺς τόπους*
Κελτῶν ὅσοι λήγουσιν ὄντες ἔσχατοι
Ἐνετοί τε καὶ τῶν ἐντὸς εἰς τὸν Ἀδρίαν
Ἴστρων καθηκόντων· λέγουσι δ' αὐτόθεν
τὸν Ἴστρον ἀρχὴν λαμβάνειν τοῦ ῥεύματος.

La notizia che gli Istri erano confinanti coi Veneti si ritrova in Ps. SCILACE § 20; esso aggiunge che è lì che l'Istro ha la sua sorgente; STRABONE invece crede che le sue fonti siano nel dorso delle Alpi che si protende al di là del Reno e ad Oriente verso i Suevi e la selva Ercinia (IV 207). Come si vede nulla di preciso da poter confrontare colle notizie di [Scimno]. Ma dell'Istro dovremo riparlare a proposito dei versi 391, 664 sgg., 773 sgg.

196-8 *Τῶν πρὸς τὸ Σαρδῷον δὲ πέλαγος κειμένων*
οἰκοῦσι Λιβυφοίνικες, ἐκ Καρχηδόνος
ἀποικίαν λαβόντες.

[Scimno] ritorna alle colonne di Ercole e riprende a parlare della spiaggia orientale della Spagna. Dice dunque che presso il mare della Sardegna abitano i Libifenici, colonia venuta da Cartagine. Questo nome di " Libifenici „ si ritrova in AVIENO v. 421 e in STRABONE XVII 835: " Sopra la spiaggia che da Cartagine va a Cefala e ai Masesili si estende la terra dei Libifenici fino ai monti della Getulia „. Per quello che si riferisce alle colonie Cartaginesi in Ispagna cfr. III p. 157. Come al solito abbiamo ragione di credere che tanto Ps. Scimno che Strabone derivino tali notizie indirettamente da Eforo.

198-9 *. . . ἑξῆς δ', ὡς λόγος,*
Ταρτήσσιοι κατέχουσιν· εἶτ' Ἴβηρες οἱ
προσεχεῖς. Ἐπάνω τούτων δὲ κεῖνται τῶν τόπων
Βέβρυκες.

Ps. Scimno nomina qui i *Tartessi*; della città ha già parlato altrove (cfr. v. 164); ora parla del popolo che, secondo lui, si estenderebbe dunque dalle foci del fiume Beti fino alla costa orientale. La sua opinione perciò non ha nulla a fare con quella di coloro che ponevan la città sulla spiaggia orientale e precisamente nel luogo dove poi sorse Carteja, cui accenna anche

Strabone III p. 151: [Scimno] parla del popolo, non della città di cui ha già detto. — Notiamo ora che questa tradizione si trova solo in Avieno *Or. mar.* 416, che dopo i Libifenici ricorda i " divites Tartessii qui porriguntur in Calactinum sinum ", sulla costa occidentale dunque; ma ecco che al v. 462 li ricorda ancora presso il fiume Segura, sulla costa orientale " hic terminus quondam stetit Tartessiorum ". Risulta evidente la corrispondenza perfetta della notizia, ed il fatto che tanto [Scimno] quanto Avieno mediatamente o immediatamente devono attingerla ad una fonte di una certa importanza e diffusione. — Noto poi ancora come arrivato a questo punto, [Scimno] dà notizie ancor più povere per quello che segue: il fatto è degno d'osservazione: la sua fonte dunque non potrà essere che difficilmente del II sec. av. C. perchè in quel tempo, dopo la conquista romana, chi poteva ignorare le notizie geografiche della parte settentrionale della penisola Iberica? Dopo i Tartessi, il Nostro nomina gli Iberi ed i Bebrici; per questi ultimi cfr. anche Avieno v. 482 che ne parla in modo analogo: " Praestringit amnis Tyrius oppidum Tyrin. At qua recedit ab salo tellus procul, dumosa late terga regio porrigit. Bebryces illic ". Noto poi come [Scimno] ricordando i Bebrici lascia un momento la costa marittima e s'interna nella Gallia Narbonense; ritornerà poi al mare con i Liguri. — E qui si presenta una questione assai grave: quella del confine fra i Liguri e gli Iberi.

201-3 . . . *Ἔπειτα παραθαλάττιοι κάτω*
Λίγυες ἔχονται καὶ πόλεις Ἑλληνίδες,
ἃς Μασσαλιῶται Φωκαεῖς ἀπῴκισαν·

Gli Iberi dunque sono confinanti con i Liguri: su ciò non v'ha dubbio; e se [Scimno] ricorda di mezzo i Bebrici è, come abbiamo già detto, perchè si spinge verso l'interno. Ma dov'è questo confine? [Scimno] venuto a parlare dei Liguri, ricorderà fra le città liguri colonizzate dai Focesi di Massilia Emporio e Rode; dunque non v'ha dubbio: la parte occidentale del golfo è abitata dai Liguri, ed il confine cogli Iberi sarà quello comunemente ammesso da tutti gli scrittori, cioè ai Pirenei; ma la cosa non è così semplice; al v. 206, come vedremo in seguito, parlando di Agata e di Rodanusia, dirà che sono nell'Iberia. O

allora? La soluzione unica è che in [Scimno] o meglio nella sua fonte si ritrovi la medesima tradizione riguardante i due popoli che si trova in Ps. Scilace § 2: *Λίγυες καὶ Ἴβηρες: ἀπὸ δὲ Ἰβήρων ἔχονται Λίγυες καὶ Ἴβηρες μιγάδες μέχρι ποταμοῦ Ῥοδανοῦ.* Questo è un punto, in cui, come già vide l'UNGER (" Philol. " Suppl. b. IV p. 197 n. 8), [Scimno] non può derivare da Eforo. La dichiarazione del MÜLLENHOFF I 80 sgg. che [Scimno], dove non ricorda altre fonti attinge da Eforo è del tutto indimostrata. Fino al Rodano dunque Iberi e Liguri sarebbero misti. Delle colonizzazioni Focesi in Ispagna parla anche STRABONE III p. 156, dove dice della fondazione di Menace.

204-6 *πρώτη μὲν Ἐμπόριον, Ῥόδη δὲ δευτέρα·*
ταύτην δὲ πρὶν ναῶν κρατοῦντες ἔκτισαν
Ῥόδιοι.

Nomina qui [Scimno] due di queste città: Emporio e Rode. Anche STRABONE III p. 159 dice la prima colonia dei Massiliesi. Altrettanto risulta dallo PSEUDO SCILACE, 3. Per la seconda Strabone ibid. dice: *Ἐμποριτῶν κτίσμα, τινὲς δὲ Ῥοδίων φασί*: dunque si tratta di due tradizioni diverse, e delle due la prima è preferita dai moderni (cfr. BELOCH *Gr. Gesch.* I² 1 p. 251 n. 4). Invece in [Scimno] abbiamo una contaminazione, apparendovi i Massalioti preceduti dai Rodiesi. Che così dicessero già Eforo o Timeo (PAIS *St. della Sic.* I 460 n. 1) non risulta. Per Agata si può confrontare anche AVIENO 584 sgg.

206-9 *. . . Μεθ' οὓς ἐλθόντες εἰς Ἰβηρίαν*
οἱ Μασσαλίαν κτίσαντες ἔσχον Φωκαεῖς
Ἀγάθην, Ῥοδανουσίαν τε, Ῥοδανὸς ἣν μέγας
ποταμὸς παραρρεῖ.

Agata pure da STRABONE IV p. 182 è detta colonia dei Massiliesi presso il fiume Arauri; Rodanusia anche p. 180. Ma anche qui la notizia di [Scimno] differisce in parte da quella di Strabone. Il primo parla di Rodanusia (cfr. ST. BIZ. s. v.), mentre dal passo, un po' corrotto del secondo, si vede che parlava di Rode [cfr. PLINIO II 33: " Rhoda Rhodiorum, unde dictus Rhodanus "].

209-214 . . . *Μασσαλία δ' ἐστ' ἐχομένη,*
πόλις μεγίστη, Φωκαέων ἀποικία.
'Εν τῇ Λιγυστικῇ δὲ ταύτην ἔκτισαν
πρὸ τῆς μάχης τῆς ἐν Σαλαμῖνι γενομένης
ἔτεσιν πρότερον, ὥς φασιν, ἑκατὸν εἴκοσι.
Τίμαιος οὕτως ἱστορεῖ δὲ τὴν κτίσιν.

Lì vicino, continua il Nostro, è Massilia, città grandissima, colonia dei Focesi: cfr. Strabone IV 179: " Massilia fu fondata dai Focesi in luogo sassoso... ed è di segnalata grandezza „. Anche Ecateo fr. 22: " Massilia, città Ligustica, presso la regione Celtica, colonia dei Focesi „. Antioco fr. 9 fa anche il racconto della fondazione, dicendo che quando Arpago a capo delle truppe di Ciro prese Focea, i cittadini con tutte le loro famiglie s'imbarcarono e prima approdarono a Cirno, poi a Massilia e ad Elea. Così pure Tucidide I 13 derivante la notizia da Antioco. Questo per la notizia generale che riguarda la fondazione di Massilia, ma per il dato cronologico, non è dubbio che il Nostro attinge qui a Timeo, il cronologo per eccellenza, che egli stesso nomina dicendo: così Timeo racconta della sua fondazione: è il fr. 40 ricostruito appunto in base a questo passo di [Scimno]. La stessa cronologia troviamo in Solino II 52, e nella tradizione Eusebiana.

215-6 *Εἶτεν μετὰ ταύτην Ταυρόεις καὶ πλησίον*
πόλις 'Ολβία κἀντίπολις αὐτῶν ἐσχάτη.

Il passo è evidentemente da confrontarsi con quello di Strabone IV p. 180 che già abbiamo visto. Strabone infatti dopo aver ricordato Agata, Rodanusia e Massilia nomina subito Tauroentio, Olbia e Antipoli; e le ricorda poi ancora (IV p. 184) come colonie dei Massiliesi; nè sorprenda il fatto che Strabone dopo Antipoli nomini anche Nicea come città della costa ligure mentre [Scimno] ha detto che Antipoli è l'ultima (evidentemente delle città Liguri e non delle Focesi, come potrebbe far dubitare la poca chiarezza del testo). Strabone stesso infatti (IV p. 184) riconosce che Nicea viene assegnata all'Italia, benchè sia anche essa colonia dei Massiliesi come le altre, e poco più sotto (ibid.) dice che Antipoli è nella provincia Narbonense, Nicea invece in Italia. Di Tauroeis (Tauroentium), città celtica, abbiamo un

accenno anche in APOLLOD. fr. 105 (1); anche Ps. SCILACE infine (§ 4) dice che Antipoli (*Ἄντιον*) è l'ultima città della costa ligure. Alcuni dedussero dal silenzio di [Scimno] su Nicea, che ai tempi della sua fonte essa non esisteva ancora (cfr. BUSOLT *Gr. Gesch.* I² p. 439 n. 3) ma l'argomento *ex silentio* prova ben poco. Cfr. quanto dice il periegeta stesso ai vv. 69 e sgg.

§ 3.

217-9 *Μετὰ τὴν Λιγυστικὴν Πελασγοὶ δ' εἰσὶν οἱ*
πρότερον κατοικήσαντες ἐκ τῆς Ἑλλάδος,
κοινὴν δὲ Τυρρηνοῖσι χώραν νεμόμενοι.

Di questa emigrazione dei Pelasgi parla diffusamente STRABONE al lib. V p. 221 e 232: ivi dice della loro navigazione in Italia con Tirreno e della fondazione di Agilla in Etruria; cfr. pure ELLANICO fr. I: " i Tirreni erano prima chiamati Pelasgi ". È degno di nota che [SCIMNO] non segue la tradizione di Ecateo, il quale identifica Pelasgi e Tirreni, ma piuttosto quella, distinguente i due popoli, che fa capo ad ERODOTO I 57. E con ERODOTO (I 94) si accorda in seguito il periegeta facendo venire i Tirreni dalla Lidia.

220-1 *Τυρρηνίαν δ' ὁ Λυδὸς Ἄτυος ἔκτισεν*
Τυρρηνὸς ἐπὶ τοὺς Ὀμβρικοὺς ἐλθών ποτε.

La Tirrenia, dice [Scimno], fu fondata da Tirreno uomo lido figlio di Atys. La notizia si ritrova in STRABONE al lib. V 219: Tirreno figlio di Atys, fratello di Lido, condusse una colonia in Etruria dalla Lidia " e dice che vi fondò 12 città fra cui nomina Tirrenia. La medesima tradizione si trova riflessa nel fr. 19 di TIMEO: " I Lidi profughi dall'Asia si fermarono in Etruria con Tirreno come condottiero che partì dal suo paese in seguito ad una contesa avuta col fratello ".

(1) È incerto, data la condizione del passo di ST. BIZ. (*Ταυρόεις*), se ne parlasse proprio Apollodoro, e ad ogni modo se nella *Cronaca* o nel *περὶ γῆς*. Ad ogni modo non risulta in nessun modo provata la dipendenza di [SCIMNO] da APOLLODORO. Cfr. PARETI *Intorno al περὶ γῆς etc.* pag. 300.

L'accordo col passo di Erod. 1 94 sull'origine Lida dei Tirreni, donde deriva Dion. d'Alic. I 27, è anche nel particolare che i Tirreni occupano il paese già tenuto dagli Umbri (1).

222-4 *Ἐν τῷ πόρῳ κεῖνται δὲ νῆσοι πελάγιαι*
Κύρνος τε καὶ Σαρδὼ μεγίστη λεγομένη
μετὰ τὴν Σικελίαν νῆσον...

Strabone V p. 224 parlando delle due isole dice anche egli che sono di fronte all'Etruria e ne dà la posizione e la grandezza precisa dicendone le misure.

224 *... αἵ τε πρίν ποτε*
Σειρηνίδες Κίρκης τε νῆσοι λεγόμεναι.

Dopo le due isole più grandi viene a nominare le più piccole sul litorale Etrusco: le Sirenidi e le Circee. Strabone V 247 ricorda le prime presso il promontorio di Minerva Campana; non accenna però alle seconde.

227-30 *οὓς ᾤκισ' οὐκ Κίρκης Ὀδυσσεῖ γενόμενος*
Λατῖνος, Αὔσονές τε μεσόγειον τόπον
ἔχοντες, Αὔσων οὓς συνοικίσαι δοκεῖ
Ὀδυσσέως παῖς καὶ Καλυψοῦς γενόμενος.

Dopo qualche verso caduto, in cui nominava il popolo dei Latini, continua dicendo che essi sono discendenti di Latino, figlio di Ulisse e di Circe, e gli Ausoni discendenti da Ausonio, figlio di Ulisse e di Calipso. Il mito è antichissimo e si ritrova in Esiodo *Theog.* vv. 1011-1018:

Κίρκη δ' Ἠελίου θυγάτηρ Ὑπεριονίδαο
γείνατ' Ὀδυσσῆος ταλασίφρονος ἐν φιλότητι
Ἄγριον ἠδὲ Λατῖνον ἀμύμονά τε κρατερόν τε·
[Τηλέγονον δ' ἄρ' ἔτικτε διὰ χρυσέην Ἀφροδίτην]
οἳ δή τοι μάλα τῆλε μυχῷ νήσων ἱεράων
πᾶσιν Τυρσηνοῖσιν ἀγακλειτοῖσι ἄνασσον.
Ναυσίθοον δ' Ὀδυσῆι Καλυψὼ δῖα θεάων
γείνατο Ναυσίνοόν τε μιγεῖσ' ἐρατῇ φιλότητι.

(1) Esamineremo le teorie del Pais *St. della Sic.* I 440 sgg., parlando dei vv. 367 sgg. ch'egli analizza a p. 447.

Cfr. pure STEPH. BYZ. *Πραινέστη*. Per gli Ausoni derivanti da Ausone cfr. *Scol.* APOLL. ROD. IV 553; SUIDA s. v. *Αὐσονίων*; ROSCHER *Lexikon* 734.

Per i versi che seguono riguardanti Roma e la sua fondazione da parte di Romolo non occorrono raffronti.

236 *Μετὰ δὲ Λατίνους ἔστιν ἐν Ὀπικοῖς πόλις... (Κύμη)*

Ps. Sc. dice che Cuma è " *ἐν Ὀπικοῖς* „. La notizia si ritrova in Tucid. VI 4 dove si parla della fondazione di Zancle da parte dei " ladroni che erano venuti da Cuma, città Calcidica nella Opicia „. Strabone I p. 26 dice solo che Cuma è città della Campania, ma giova ricordare anche il passo V 242 dove si dice che gli Opici erano abitatori della Campania.

237 *τῆς λεγομένης λίμνης Ἀόρνου πλησίον*

Dice il Nostro che Cuma è vicina alla palude dell'Averno. Questa prossimità è ricordata anche da Strab. V 245: è solo per incidenza, ma la notizia vi si ritrova identica; del resto è il solo passo che possa mettersi a confronto con questo verso di [Scimno].

238-9 *Κύμη, πρότερον ἣν Χαλκιδεῖς ἀπῴκισαν,*
εἶτ' Αἰολεῖς . . .

Vedemmo il passo di TUCID. VI 4 dove la città vien detta " calcidica „; non vi è fatto cenno però agli Eoli. EFORO invece fr. 87 dice che Cuma, anticamente fondata dalle Amazzoni, fu poi " instaurata „ da Eoli e da Joni. STRABONE V 243 dice Cuma antica fondazione dei Calcidesi e dei Cumani: fondatori sarebbero stati Ippocle e Megastene Calcidese (cfr. HOLM o. c. I p. 235); si tratterebbe di Cuma asiatica, colonia eolica. È forse perciò che Ps. Sc. congiunge Eoli e Calcidesi nella fondazione della città. È fuori di dubbio che le due versioni di Strabone e di [Scimno] sebbene siano simili non sono identiche; il Nostro infatti dice che gli Eoli vennero dopo. DIONISO D'ALICARNASSO VII 3 nomina i Calcidesi e gli Eretriesi dell'Eubea. Il Pais (op. cit., p. 156 n.) citando Strabone e [Scimno] si domanda: " Quale delle due versioni risponde meglio al testo primitivo di Eforo? „. Egli ammette

dunque senz'altro che la notizia dell'uno come dell'altro venga in sostanza da Eforo, ed è probabile; ma la diversità come si spiega se non forse ammettendo una fonte intermedia? Ricordiamo anche che Eforo era Cumano dell'Asia Minore, per intendere com'egli tendesse a connettere Cuma dell'Italia colla propria patria (cfr. Pais, *St. d. Sic.* I 157. 276 n. 4. 326). Che [Scimno] per Cuma derivi da Eforo sostiene anche il Beloch [*Campanien*[2] 147], che parla senz'altro di un epitomatore di Eforo (1).

239-41 . . . *οὗ Κερβέριόν τι δείκνυται*
ὑποχθόνιον μαντεῖον· ἐλθεῖν φασι δὲ
δεῦρο παρὰ Κίρκης ἐπανάγοντ' Ὀδυσσέα.

Il passo può essere confrontato con Strabone V p. 244 dove si parla assai diffusamente di ciò; ed osservato il fatto che nota anche il Müller, che alcuni dicono *Κερβέριοι* i Cimmeri Omerici, l'analogia fra il passo di [Scimno] e di Strabone risulta evidente.

242-3 *Ἐκ τῆς δὲ Κύμης τῆς πρὸς Ἀόρνῳ κειμένης*
κτίσιν κατὰ χρησμὸν ἔλαβεν ἡ Νεάπολις.

Napoli dunque avrebbe avuto dei fondatori di Cuma, e ciò in seguito al responso di un oracolo. Strabone V 246 dice lui pure Napoli fondazione dei Cumani. Cfr. ancora Velleio Pat. I 4. Però quanto all'oracolo a cui Ps. Sc. allude, nessun'altro ne fa parola, per quello che ci è superstite delle antiche fonti, tranne forse Lutazio Catulo fr. 7 Peter.

248-9 *μέχρι τῆς Ποσειδωνιάδος ὠνομασμένης*
ἥν φασι Συβαρίτας ἀποικίσαι προτοῦ

La medesima notizia che Posidonia fu fondata dai Sibariti si ritrova in Strabone VI p. 251 e Ps. Scil. 13 (2).

---

(1) Sulle questioni relative alla fondazione di Cuma cfr. Pais o. c. I 156 sgg.; Beloch *Campanien*[2] e *Gr. Gesch.*[2] I 1, 242; 2, 227 sgg.; De Sanctis *St. dei Rom.* I 318 sgg. — Sull'Averno, le Sirene, ecc. in Timeo vedi Geffcken *Timaios' Geographie des Westens* p. 30 sgg. 144; sull'Averno Beloch *Campanien*[2] 168 sgg.

(2) Per Posidonia fondata dai Sibariti cfr. pure Holm o. c. I p. 363. Il Pais (o. c. I p. 246) mostra di credere a una fondazione anteriore da parte

250-2 *καὶ Μασσαλιωτῶν Φωκαέων τ' Ἐλέα πόλις,*
ἣν ἔκτισαν φυγόντες ὑπὸ τὰ Περσικά
οἱ Φωκαεῖς

La notizia che Elea è città dei Massiliesi e dei Focesi, fondata dai fuggiaschi della Focide si ritrova in STRABONE, riportata da ANTIOCO, che dice come i Focesi dopo che la loro patria fu presa da Arpalo (542) andarono prima in Corsica, poi a Massilia (1), fondata già da circa 60 anni, e poi di lì andarono a fondare Elea (cfr. Strab. VI p. 252). È vero che Antioco dice in più che essi furono respinti (*ἀποκρουσθέντες*) da Massilia, ma le due notizie possono accordarsi ammettendo che alcuni degli abitanti di Massilia fossero dalla loro parte e si unissero loro al momento della partenza.

252-3 *(μάλιστα δ' εὐανδρουμένη*
κατὰ τὴν Ἀσίαν Φωκαία κειμένη πόλις.)

Sono assai importanti questi due versi che tenderebbero a far rilevare come la partenza dei Focesi fu un'emigrazione dovuta a sovrabbondanza di popolo anzichè alla sconfitta toccata da parte di Arpalo: se dunque il passo d'Antioco, riportato da Strabone, coincide per la seconda parte con quello del Nostro, non altrettanto si può dire per la prima, cioè per la causa che determinò la partenza dei colonizzatori di Elea.

254-61 *Ἐν τῷ πόρῳ κεῖνται δὲ τῷ Τυρρηνικῷ,*
νησῖδες ἑπτὰ τῆς Σικελίας οὐ πρόσω,
ἃς δὴ προσαγορεύουσι νήσους Αἰόλου,
ὧν ἔστιν Ἱερὰ λεγομένη τις εὐλόγως·
καιόμενα φαίνεται γὰρ ἐξ αὐτῆς πυρά
ἀπὸ σταδίων εὔδηλα πᾶσι πλειόνων,
καὶ διαπύρων εἰς ὕψος ἀναβολαὶ μύδρων,
ἔργα τε σιδήρειός τε ῥαιστήρων κτύπος.

---

dei " Trezeni che si unirono agli Achei per fondare Sibari e che furono poi da questi ultimi espulsi ".

(1) Nota a questo proposito come sia insostenibile la congettura del JULLIAN, *Histoire de la Gaule*, I, 218 n., che leggerebbe Alalia invece di Massalia nel passo d'Antioco; a provarlo basta il fatto che si ritrova Massalia in [Scimno].

Si può confrontare il passo di STRABONE VI 275: " Sono 7 di numero, la più grande Lipara, colonia dei Cnidî, ... vicina alla Sicilia, già detta Meligunide... Iera, tutta sassosa, deserta ed ardente, da tre luoghi come da tre crateri spira fuoco, e dal maggiore le fiamme traggono su massi incandescenti da cui fu interrata perfino gran parte del mare sottostante ". — È evidente l'analogia perfetta dei due passi confrontati fra loro. La notizia si ritrova in TUCIDIDE (III 88): esso dice che gli abitanti di quei luoghi credono che Iera sia abitata da Vulcano, che anzi il dio abbia lì la sua officina perchè di notte si vede salire verso il cielo fuoco e fumo (1).

262-3 *Μία δ' ἐστὶν αὐτῶν Δωρικὴν ἀποικίαν*
ἔχουσα, Λιπάρα δ' ὄνομα, συγγενὶς Κνίδου.

Per Lipara " *συγγενὶς Κνίδου* " si può fare un raffronto col fr. 2 d'ANTIOCO conservatoci in Pausania X 2: " I Liparesi furono colonia degli Cnidî duce uno Cnidio di nome Pentatlo ". Anche TUCIDIDE (III 88) dice i Liparesi coloni degli Cnidî, e così STRABONE VI 275. Invece TIMEO in DIODORO V 9 parla per i compagni di Pentatlo non solo di Cnidî, ma anche di Rodiesi. In [Scimno] è dunque rispecchiata la versione di Antioco, e non quella di Timeo.

§ 4.

Lasciando da parte alcuni versi, che però sono per lo più privi di importanza, per i quali non ci è stato possibile fare raffronto e che avremo altrove occasione di esaminare, gli altri, come abbiamo veduto, riflettono una tradizione che si ritrova in autori sia anteriori a [Scimno] e sia posteriori; fra i primi sopratutto EFORO, che abbiamo avuto occasione di ricordare in molti luoghi; ANTIOCO per i vv. 250-2 (?) e 262-3; TIMEO per la notizia cronologica riguardante la fondazione di Marsiglia

(1) Delle eruzioni vulcaniche di Lipara parla pure PLIN. III 94; SIL. XIV 56; AR. *Mir*. 37 (V. HOLM o. c. I 96 e n.).

(vv. 212-4); Ps. SCILACE per le questioni di confine fra Liguri e Iberi, unico punto di contatto col Nostro; EUCTEMONE (v. 144) per la distanza che intercede fra le colonne di Ercole; ERATOSTENE per la denominazione del Mare Sardo al v. 170. — Degli scrittori posteriori a [Scimno], di cui pure non abbiamo creduto inutile il raffronto, hanno relazioni strette con lui STRABONE in moltissimi luoghi che abbiamo preso in esame, AVIENO per il v. 143, per il 149 (le questioni dei Tartessi sulla costa orientale) e per il 200-1 a proposito dei Bebrici. — Ricordiamo anche che abbiamo avuto occasione di fare qualche raffronto con PLINIO, autore che secondo alcuni moderni dipenderebbe dalla stessa fonte generale di Strabone, ossia da Artemidoro (1).

Osserviamo anche che l'età della fonte deve essere alquanto arcaica come abbiamo già detto a suo luogo parlando dell'Iberia e della parte settentrionale del paese che appare così poco conosciuta; questa fonte doveva seguire il cammino inverso di quello che si propone di seguire il Nostro; abbiamo già visto infatti come [Scimno] parlando delle coste orientali e occidentali dello stretto di Gibilterra cada in errore probabilmente seguendo per un certo tratto il corso della fonte. — Infine fra i punti rimasti oscuri e che dovremo poi prendere in esame è degno di rilievo sopratutto quello che parla della " colonna celtica, boreale " di cui [Scimno] ai versi 188-90.

---

(1) Cfr. ad es. la recente affermazione del BELOCH, *Gr. Gesch.*² I 1 p. 43.

Le notizie del Pseudo Scimno sulla Sicilia e sulla Magna Grecia.

Nota di GIUSEPPE CAMMELLI.

§ 1. — La Sicilia (1).

Ps. Sc. vv. 264-70.

Ἑξῆς Σικελία νῆσος εὐτυχεστάτη,
ἣν τὸ πρότερον μὲν ἑτερόγλωσσα βάρβαρα
λέγουσι πλήθη κατανέμεσθ' Ἰβηρικά,
διὰ τὴν ἑτερόπλευρον δὲ τῆς χώρας φύσιν
ὑπὸ τῶν Ἰβήρων Τρινακρίαν καλουμένην
χρόνῳ Σικελίαν προσαγορευθῆναι πάλιν,
Σικελοῦ δυναστεύσαντος·

Eforo fr. 51 in Strab. VI p. 270.

Διετέλεσαν μέχρι δεῦρο Σικελοὶ καὶ Σικανοὶ καὶ Μόργητες καὶ ἄλλοι τινὲς νεμόμενοι τὴν νῆσον, ὧν ἦσαν καὶ Ἴβηρες, οὕσπερ πρώτους φησὶν τῶν βαρβάρων Ἔφορος λέγεσθαι τῆς Σικελίας οἰκιστάς.

Il confronto di questi due passi di Eforo e dello Pseudo Scimno per ciò che riguarda i primi abitatori della Sicilia non può lasciar luogo a dubbio: nell'uno come nell'altro si trova la notizia che i primi abitatori dell'isola furono popoli iberici; ciò ci induce a credere che (benchè noi non abbiamo il passo in cui Eforo avrà parlato dei nomi dell'isola), i due scrittori andassero d'accordo anche in questa notizia. — Veggasi invece Tucidide VI, 2; il confronto può farsi intieramente perchè parla anche dei diversi nomi dell'isola e quando e da chi essa li ebbe. — Il Nostro ha detto che la Sicilia fu dapprima abitata da gente di razza iberica e che da essi fu chiamata Trinacria, nome cam-

(1) Cfr. *Per le fonti dei versi 139-263 del Pseudo Scimno,* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", adun. dell'8 giugno 1913.

biato poi in quello, che le è rimasto finora, di Sicilia, sotto la dominazione del re Siculo. Tucidide invece afferma che i primi abitatori dell'isola furono i Ciclopi e i Lestrigoni di cui dice sconosciuta la razza e la provenienza. Dopo di essi sarebbero venuti i Sicani che tenevano a dirsi indigeni, ma che erano invece di razza iberica e venivano così chiamati dal fiume Sicano; furono essi che cambiarono il nome dell'isola: mentre prima si chiamava " Trinacria „, essi la dissero " Sicania „. Vennero poi infine dall'Italia i Siculi e, vinti i Sicani, si fermarono e abitarono l'isola dandole un terzo nome: " Sicilia „. — La differenza fra le due tradizioni è dunque evidente (1) riguardo l'aver abitato la Sicilia, prima dei Sicani (popolo iberico) i Ciclopi e i Lestrigoni di cui lo Pseudo Scimno non fa parola. Quanto alle varie denominazioni dell'isola, essa, secondo Tucidide, ebbe tre nomi: *Trinacria* dai Ciclopi e Lestrigoni, *Sicania* dai Sicani, *Sicilia* dai Siculi. Lo Ps. Scimno invece ne ricorda due soli e cioè *Trinacria* e *Sicilia* e anche qui si distanzia dalla notizia di Tucidide perchè secondo lui il nome di Trinacria le sarebbe stato dato dalla " gens Iberica „ che per prima abitò l'isola. È quindi evidente che in questo luogo il Nostro non attinge in nessun modo a Tucidide, e perciò neppure ad Antioco, fonte di Tucidide. — Per questo luogo possiamo ricordare anche un passo di Filisto fr. 3 in Diod. V 6: *Περὶ δὲ τῶν κατοικησάντων ἐν αὐτῇ* (Sicilia) *πρώτων Σικανῶν, ἐπειδή τινες τῶν συγγραφέων διαφωνοῦσιν, ἀναγκαῖόν ἐστι συντόμως εἰπεῖν. Φίλιστος μὲν γὰρ φησὶν ἐξ Ἰβηρίας αὐτοὺς ἀποικισθέντας κατοικῆσαι τὴν νῆσον, ἀπό τινος Σικανοῦ ποταμοῦ κατ' Ἰβηρίαν ὄντος τετευχότας ταύτης τῆς προσηγορίας. Τίμαιος δὲ τὴν ἄγνοιαν τούτου τοῦ συγγραφέως ἐλέγξας ἀκριβῶς ἀποφαίνεται τούτους αὐτόχθονας εἶναι.* Questo passo è assai interessante per noi, prima di tutto perchè ci parla di un'altra opinione, quella di Timeo, secondo la quale i Sicani sarebbero stati *αὐτόχθονες* e non già di razza iberica, come invece le altre due versioni affermano, anche quella di Tucidide che dice espressamente a proposito: *Σικανοὶ... ὡς μὲν αὐτοί φασι καὶ πρότεροι διὰ τὸ αὐτόχθονες εἶναι, ὡς δὲ ἡ ἀλήθεια εὑρίσκεται, Ἴβηρες ὄντες κ. τ. λ...* (1).

(1) V. Costanzi, *Osservazioni sull'etnografia della Sicilia*, in " Rivista di Storia antica „, 1909, a pag. 482 n. riferisce il passo di [Scimno] e con-

Noi non abbiamo naturalmente accennato alla questione che per quello che si riferiva direttamente al passo di [Scimno].

vv. 270-3.

... εἶθ' Ἑλληνικὰς
ἔσχεν πόλεις, ὥς φασιν, ἀπὸ τῶν Τρωϊκῶν
δεκάτῃ γενεᾷ μετὰ ταῦτα Θεοκλέους στόλον
παρὰ Χαλκιδέων λαβόντος·

Eforo fr. 52 *M.* in Strab. VI p. 267:

φησὶ δὲ ταύτας Ἔφορος πρώτας κτισθῆναι πόλεις Ἑλληνίδας ἐν Σικελίᾳ [δε]κάτῃ γενεᾷ μετὰ τὰ Τρωϊκά... Θεοκλέα δ' Ἀθηναῖον παρενεχθέντα ἀνέμοις εἰς Σικελίαν, κατανοῆσαι τὴν τε οὐδένειαν τῶν ἀνθρώπων καὶ τὴν ἀρετὴν τῆς γῆς· ἐπανελθόντα δὲ, Ἀθηναίους μὲν μὴ πεῖσαι, Χαλκιδέας δὲ... καὶ τῶν Ἰώνων τινὰς ...πλεῦσαι.

Vi si parla delle prime *κτίσεις* di città elleniche. Teocle avrebbe dunque fondato una prima colonia greca in Sicilia (1). C'è però una questione cronologica; il Nostro dice: " *ἀπὸ τῶν Τρωϊκῶν δεκάτῃ γενεᾷ* ". Ora se Eforo credeva (come dice Clem. Aless. Strom. I pag. 337) che il ritorno degli Eraclidi fosse avvenuto 735 anni prima che Alessandro muovesse contro l'Asia, in tal caso si arriverebbe al 1070 a. C. ed allora (essendo il ritorno degli Eraclidi tre generazioni dopo la guerra di Troia) tale colonizzazione greca cadrebbe circa l'835 (2). In ogni modo però la notizia dello Ps. Scimno è diversa da quella di Tucidide per cui la fondazione delle prime colonie greche in Sicilia cade intorno al 736. Si vegga invece il passo di Eforo in Strab. VI p. 267 sopra trascritto accanto ai versi del Nostro. Il testo veramente è corrotto, e dice: *καὶ τῇ γενεᾷ*; il *δεκάτῃ* è una felice congettura dello Scaligero; più difficile ad ammettersi quella del Cluverio *πεντεκαιδεκάτῃ* per ragioni puramente paleografiche,

---

clude per la derivazione da Eforo, mentre esclude quella da Filisto che " per questa parte cammina troppo sulle orme di Tucidide ". Si aggiunga che Tucidide camminava su quelle di Antioco.

(1) Per la narrazione del fatto, cfr. Holm *Storia della Sicilia* vol. I pag. 248-9.

(2) Cfr. Beloch *Gr. Gesch.* I^2 2 p. 223.

che vorrebbe metter d'accordo Eforo colla tradizione tucididea; a questo proposito anzi si è cercato di modificare anche il passo dello Pseudo Scimno leggendo *δεκάτῃ γενεᾷ μετὰ πέντε* invece che *μετὰ ταῦτα*; ma lo sforzo evidente di conciliare le due tradizioni diverse non fa che metterne ancor meglio in rilievo il contrasto; e noi lo accettiamo, trovando in esso ancora una volta che lo Ps. Scimno si allontana dalla corrente di Tucidide per seguire quella di Eforo.

vv. 273-4.

ἦν δ' οὗτος γένει
ἐκ τῶν Ἀθηνῶν . . .

Eforo fr. 52 in Strab. VI p. 267:

Θεοκλέα δ' Ἀθηναῖον, παρενεχθέντα ἀνέμοις εἰς Σικελίαν...

La notizia che questo Teocle, il primo colonizzatore greco della Sicilia, era Ateniese, la troviamo contemporaneamente in Ps. Scimno e in Eforo: indarno la si cercherebbe altrove; anche Tucidide ricorda solo il nome del personaggio dicendo che fu a capo della colonizzazione di Nasso (VI 3): *Ἑλλήνων δὲ πρῶτοι Χαλκιδῆς ἐξ Εὐβοίας πλεύσαντες μετὰ Θουκλέους οἰκιστοῦ Νάξον ᾤκισαν.* Cfr. Ellanico fr. 50. Anche qui dunque il riavvicinamento del Nostro alla tradizione eforiana risulta evidente.

vv. 274-5.

...καὶ συνῆλθον, ὡς λόγος,
Ἴωνες εἶτα Δωριεῖς οἰκήτορες.

Eforo fr. 52 in Strab. VI p. 267:

...ἐπανελθόντα δέ, Ἀθηναίους μὲν μὴ πεῖσαι, Χαλκιδέας δὲ τοὺς ἐν Εὐβοίᾳ συχνοὺς παραλαβόντα καὶ τῶν Ἰώνων τινάς, ἔτι δὲ Δωριέων οἳ πλείους ἦσαν Μεγαρεῖς, πλεῦσαι.

Lo Ps. Scimno ed Eforo sono ancora una volta d'accordo nel dire che alla prima colonizzazione greca della Sicilia sotto la guida di Teocle presero parte assieme ai Calcidesi da lui condotti, degli Joni e dei Dori. Tale notizia al pari che quella della nazionalità di Teocle, manca in Tucidide che nomina solo i Calcidesi come facenti parte di tale spedizione; cfr. VI 3: *Ἑλλήνων δὲ πρῶτοι Χαλκιδῆς ἐξ Εὐβοίας πλεύσαντες...* Anche qui la fonte dello Pseudo Scimno non può essere dubbia.

vv. 276-7.

Στάσεως δ' ἐν αὐτοῖς γενομένης, οἱ Χαλκιδεῖς
κτίζουσι Νάξον, οἱ Μεγαρεῖς δὲ τὴν Ὕβλαν.

Eforo fr. 52 in Strab. VI p. 267:

τοὺς μὲν οὖν Χαλκιδέας κτίσαι Νάξον, τοὺς δὲ Δωριέας Μέγαρα τὴν Ὕβλαν πρότερον καλουμένην.

La notizia si ritrova eguale tanto nel Nostro che in Eforo; e se lo Ps. Sc. dice Megaresi invece di Dori i fondatori di Ibla, la cagione di ciò va anch'essa ricercata nelle parole di Eforo che precedono quelle da noi trascritte: " *ἔτι δὲ Δωριέων, οἱ πλείους ἦσαν Μεγαρεῖς, πλεῦσαι...* ". L'imitazione dunque è evidente di per sè stessa e si potrebbe forse dire anche servile. Di fronte a tale identità di notizie osserviamo invece la differenza che si riscontra con quelle di Tucidide; e diciamo anzitutto che il Nostro fa derivare la fondazione di queste due città dal sorgere di una contesa in seguito alla quale Calcidesi e Dori si staccarono. Anche dal punto di vista cronologico parrebbe dunque che la fondazione delle due colonie cadesse nello stesso tempo o quasi. Tucidide parla di ciò in due passi differenti, uno per Nasso e uno per Megara, il primo al VI 3 il secondo al VI 4; nel primo dice che i Calcidesi venendo dall' Eubea fondarono Nasso sotto la guida di Teocle, nell'altro che una colonia di Megaresi con a capo Lamide venne in Sicilia; e in ciò le due tradizioni vanno d'accordo; ma Megara non sarebbe stata fondata affatto nello stesso tempo, bensì nel 736, 6 anni dopo la fondazione di Nasso (del 736 c.): di mezzo ce n'è altre tre: quella di Siracusa (735) e quelle di Leontini e di Catana (730 c.). La differenza quindi che passa tra la notizia di Ps. Sc. e quella di Tucidide non ha bisogno di essere messa in rilievo (1).

vv. 278-9.

τὸ δ' ἐπὶ Ζεφύριον τῆς Ἰταλίας Δωριεῖς
κατέσχον

Strab. VI 270:

τὸν δ' Ἀρχίαν κατασχόντα πρὸς τὸ Ζεφύριον τῶν Δωριέων εὑρόντα τινὰς δεῦρο ἀφιγμένους ἐκ τῆς Σικελίας παρὰ τῶν τὰ

(1) Per la fondazione di Nasso cfr. Pais o. c. I p. 166 sgg.

Μέγαρα κτισάντων ἀναλαβεῖν αὐτούς, καὶ κοινῇ μετ' αὐτῶν κτίσαι τὰς Συρακούσσας.

Per questo passo la notizia trovasi identica nello Pseudo Scimno e in Strabone; ambedue infatti ci dicono dello stanziarsi di alcuni Dori presso il promontorio Zefirio; Strabone aggiunge che di essi si servì Archia per la fondazione di Siracusa; ciò che lo Ps. Sc. pure dirà nei versi sgg. Tucidide anche a questo proposito non dice parola.

vv. 279 sgg.

> ...*Ἀρχίας δὲ τούτους προσλαβὼν*
> *ὁ Κορίνθιος μετὰ Δωριέων κατῴκισεν*
> *ἀπὸ τῆς ὁμόρου λίμνης λαβούσας τοὔνομα*
> *τὰς νῦν Συρακούσας παρ' αὐτοῖς λεγομένας.*

Strab. VI 269: *Ἀρχίας ἐκ Κορίνθου.* Cfr. il passo dianzi riferito (ai vv. 278-9).

Cominciamo dall'appellativo di Archia " *ὁ Κορίνθιος* ". Come abbiamo visto la notizia è anche in Strab. VI 270; si ritrova pure in Tucid. VI 3 " *Ἀρχίας τῶν Ἡρακλειδῶν ἐκ Κορίνθου* ". Si potrebbe forse obiettare che se lo Ps. Sc. avesse avuto sott'occhio Tucidide non avrebbe omesso di dare anche quell'altro particolare genealogico del personaggio, che esso cioè era uno degli Eraclidi. Ma noi trascuriamo ciò perchè abbiamo di meglio per concludere che anche questa volta Tucidide non è presente al Nostro, ed è la questione cronologica riguardante la fondazione di Siracusa: secondo Tucid. essa fu fondata l'anno dopo di Nasso, cfr. VI 3 " *Συρακούσας δὲ τοῦ ἐχομένου ἔτους Ἀρχίας τῶν Ἡρακλειδῶν ἐκ Κορίνθου ᾤκισεν...* "; e siccome sappiamo che secondo Tucidide Nasso fu fondata nel 736 c. (1), Siracusa lo sarebbe stata nel 735 c. Lo Ps. Sc. invece ne parla dopo quella di Megara (sec. Tuc. 730) seguendo anche in ciò evidentemente le notizie di Eforo che si ritrovano in Strabone, il quale nel passo ora da noi riferito, dice che furono suoi fondatori dei Dori che avevano abbandonato i compagni intenti alla fondazione di Megara. La differenza delle due tradizioni è evi-

(1) Per la cronologia tradizionale vedi Beloch *Gr. Gesch.* I² 2 p. 218 sgg.

dente e degna d'essere messa in rilievo, e il fatto che lo Ps. Sc. segue per tali " *κτίσεις* „ quest'ordine cronologico: Nasso, Megara, Siracusa, lo avvicina alla tradizione eforo-straboniana allontanandolo dalla tucididea, poichè le fondazioni di queste tre città sono strettamente collegate nella loro cronologia. — E veniamo ora a quei due versi:

ἀπὸ τῆς ὁμόρου λίμνης λαβούσας τοὔνομα
τὰς νῦν Συρακούσας παρ' αὐτοῖς λεγομένας.

Tale notizia non si trova in Tucidide, nè in Strabone e nemmeno negli altri da cui il Nostro dice aver attinto. Steph. Byz. s. v. *Ἀκράγαντες* cita un passo di Duride dove è detto che parecchie città trassero il loro nome da fiumi, e di esse si cita Gela, Imera, Selinunte etc. e prima di tutte Siracusa; sotto poi il nome " *Συρακοῦσαι* „ Steph. Byz. nomina proprio la palude: " *καὶ λίμνη, ἥ τις καλεῖται Συρακώ* „. Noi non possiamo che mettere in rilievo la differenza della notizia di Duride e quella dello Ps. Sc.: lì si parla di un *ποταμός*, qui di una *λίμνη*. Se Ps. Sc. avesse avuto dinanzi agli occhi Duride certo tale diversità non si osserverebbe (1).

vv. 283-6.

Μετὰ ταῦτα δ' ἀπὸ Νάξου Λεοντῖνοι πόλις,
ἡ τὴν θέσιν τ' ἔχουσα Ῥηγίου πέραν,
ἐπὶ τοῦ δὲ πορθμοῦ κειμένη τῆς Σικελίας,
Ζάγκλη, Κατάνη, Καλλίπολις ἔσχ' ἀποικίαν.

Strab. VI, 273: *κεκάκωται δὲ καὶ ἡ Λεοντίνη πᾶσα, Ναξίων οὖσα καὶ αὐτὴ τῶν αὐτόθι.*

VI, 268: *κτίσμα δ' ἐστὶ Μεσσηνίων τῶν ἐν Πελοποννήσῳ, παρ' ὧν τοὔνομα μετήλλαξε καλουμένη Ζάγκλη πρότερον... Ναξίων οὖσα πρότερον κτίσμα τῶν πρὸς Κατάνην·*

VI, 268: *καὶ Κατάνη δ' ἐστὶ Ναξίων τῶν αὐτῶν κτίσμα*

VI, 272: *τὴν μὲν Ἱμέραν οἱ ἐν Μύλαις ἔκτισαν Ζαγκλαῖοι, Καλλίπολιν δὲ Νάξιοι...*

Leontini, Zancle, Catane e Callipoli sono dunque secondo lo Ps. Sc. e secondo Strabone tutte colonie di Nasso. Non così

---

(1) Per la fondazione di Siracusa v. Pais o. c. p. 171 sgg., la questione del nome è accennata a p. 177 e n. 2.

Tucidide; esso ricorda come colonie di Nasso soltanto Leontini e Catane (VI 3); di Callipoli non parla affatto. Quanto a Zancle veggasi il passo VI 4, dove egli dice che essa fu fondata da alcuni ladroni-pirati venuti da Cuma Calcidica; poi col tempo sarebbero venuti ad abitarla molti di Calcide e dell' Eubea. Fondatori sarebbero stati Periere di Cuma, e Cratemene Calcidese. — Luogo dunque anche questo per il quale si può ripetere quanto abbiamo detto fin qui, che cioè lo Ps. Sc. non ha certo presente Tucidide, ma invece Eforo da cui indirettamente attinse la notizia Strabone. Merita d'esser ricordata a proposito anche la notizia di Pausania (IV 23, 7) secondo il quale *Κραταιμένης Σάμιος* e *Περιήρης ἐκ Χαλκίδος* sono i condottieri dei pirati; contaminazione evidente delle due teorie qui sopra esposte (1). Di Callipoli parla anche Erodoto VII, 154, ma non per la fondazione della città.

vv. 287 sgg.

> *Πάλιν δ' ἀπὸ τούτων δύο πόλεις, Εὔβοια καὶ*
> *Μύλαι κατῳκίσθησαν ἐπικαλούμεναι,*
> *εἶθ' Ἱμέρα καὶ Ταυρομένιον ἐχομένη·*
> *εἰσὶν δὲ πᾶσαι Χαλκιδέων αὗται πόλεις.*

Strab. VI 272:

τὴν μὲν Ἱμέραν οἱ ἐν Μύλαις ἔκτισαν Ζαγκλαῖοι, Καλλίπολιν δὲ Νάξιοι, ...Εὔβοιαν δὲ οἱ Λεοντῖνοι.

VI p. 268: dove dice Tauromenio fondazione *τῶν ἐν Ὕβλῃ Ζαγκλαίων.*

I due passi dello Ps. Scimno e di Strabone vanno dunque d'accordo nell'ammettere che queste nuove città sono fondazioni delle colonie più antiche e già ricordate, cioè di Leontini, Zancle, Catane, e Callipoli; in tal modo sono anch' esse colonie calcidesi. — Tucidide non parla che della sola Imera cfr. VI 5, parlando oltre che dei Calcidesi dei Miletidi siracusani (2);

(1) Per la narrazione dettagliata della fondazione di queste città cfr. Pais o. c. I: per Leontini p. 178 sgg.; per Zancle p. 183 sgg.; per Catane p. 182; per Callipoli p. 220.

(2) Certo si tratta di due interpretazioni diverse del nome di Miletidi, da Tucidide connesso con Siracusa, da Eforo con Mile.

impossibile quindi che lo Ps. Scimno se ne serva come fonte nemmeno in questo luogo.

Per Tauromenio però la questione è assai complessa (cfr. Holm o. c. II pag. 264 n.): [Scimno] la nomina assieme alle città calcidesi, non solo, ma dice anche che essa è confinante di Imera. L'errore è evidente: il Müller in nota a questo verso fa la supposizione che si tratti di un'altra città che andò distrutta col tempo, forse anche vicino ad Imera come dice [Scimno]. Altri però (Meineke) hanno voluto correggere l'*ἐχομένη* in *λεγομένη* per risolvere la questione topografica. Tolta la prima difficoltà con questa congettura (1) resta l'altra questione più importante. Si tratta proprio di una città distrutta o di Tauromenio di cui ci è conservata notizia? Non potrebbe [Scimno] parlare proprio di quella Tauromenio di cui Diodoro Siculo (XIV 59) dice che fu fondata nel 396, e riflettere così una fonte più tarda? Solo bisogna osservare che questa fondazione sarebbe dorica (Dionisio) e fatta anzi sulla distruzione della calcidese Nasso. Ma c'è un altro passo di Diodoro (XVI 7) in cui si parla di Andromaco, il padre di Timeo, che nel 358 fonda una città a Taormina: ...*Ἀνδρόμαχος ὁ Ταυρομενίτης ...ἤθροισε τοὺς ἐκ τῆς Νάξου τῆς κατασκαφείσης ὑπὸ Διονυσίου περιλειφθέντας: οἰκίσας δὲ τὸν ὑπὲρ τῆς Νάξου λόφον τὸν ὀνομαζόμενον Ταῦρον καὶ μείνας κατ' αὐτὸν πλείω χρόνον ἀπὸ τῆς ἐπὶ τοῦ Ταύρου μόνης ὠνόμασε Ταυρομένιον κ. τ. λ.* Qui dunque Timeo in Diodoro parla come di una fondazione *ex novo* di Taormina per opera del proprio padre Andromaco, fondazione che si può dire calcidese, trattandosi degli abitanti di Nasso, superstiti dalla distruzione di Nasso operata da Dionisio il vecchio (Diod. XIV 15) sul finire del V secolo. Si capisce come Timeo parli di una nuova *κτίσις* di Tauromenio, essendo prima colà una semplice colonia militare, fondata da Dionisio nel 392 (Diod. XIV 96). È possibile che Andromaco conducesse nella nuova sede non solo i superstiti calcidesi di Nasso, ma anche i superstiti calcidesi di Messene, gli antichi Zanclei, ritiratisi forse a Ibla, come vorrebbe Strabone, dopo la presa di Messene per opera di Imilcone nel 396 (Diod. XIV 56-57). In tal caso le notizie di [Scimno]

(1) Vedi in favore di questa congettura quanto osserva il Pais *St. d. Sic.* I p. 593 n. 2.

e di Strabone si completerebbero. Ad ogni modo se reggesse la nostra interpretazione del periegeta avremmo ragione di supporre due cose: 1° che la notizia di [Scimno] possa venire da TIMEO; 2° che la fonte sia quindi posteriore al 358 (1).

vv. 291-4.

Τὰς Δωρικὰς δὲ πάλιν ἀναγκαῖον φράσαι.
Μεγαρεῖς Σελινοῦνθ', οἱ Γελῷοι δ' ἔκτισαν
Ἀκράγαντα, Μεσσήνην δ' Ἴωνες ἐκ Σάμου,
Συρακόσιοι δὲ τὴν Καμάριναν λεγομένην·

Il Nostro viene a parlare delle città di fondazione dorica, e ricorda fra queste Selinunte, Agrigento, Messene e Camarina. Si noti che nominando le città doriche ricorda Messene, dicendo che fu fondata dagli Joni di Samo: non ci meraviglieremo vedendo che qui come in qualche altro luogo si osserva una contaminazione; la fonte di [Scimno] ha presente la fondazione samia del 494 e la fondazione dorica di Dionigi del 396 (cfr. Diod. XIV 78). Questo ci dà un dato cronologico sulla fonte che deve essere posteriore al 396.

Vediamo come lo Ps. Sc. si è fermato alquanto a lungo a parlare delle colonie calcidesi dandone delle notizie assai dettagliate, avuto riguardo alla brevità del suo racconto; ed ecco che ora trattandosi delle doriche ne nomina solo quattro, impiega in tutto 5 versi e cade anche in errore. Non sarà difficile per noi trarre argomento anche da ciò per mettere in rilievo la differenza del racconto di [Scimno] da quello di TUCIDIDE; il Nostro rispecchia una tradizione calcidese (EFORO), Tucidide invece una dorica (Antioco di Siracusa), e questo passo per chi bene lo osservi ha una importanza generale che si estende a tutta la parte del poemetto di [Scimno] che parla della Sicilia. Benchè dunque le scarsissime notizie che abbiamo ora visto sulle colonie doriche si ritrovino tanto in STRABONE quanto in TUCIDIDE (per *Selinunte* cfr. Strab. VI 272 e Tuc. VI 4; per *Agri-*

(1) Per la fondazione di Tauromenio v. PAIS o. c. p. 592 sgg. APP. XIV: " Tauromenio colonia degli Zanclei di Ibla ", dove sostiene l'esistenza di un'altra Tauromenio, oltre quella prossima a Nasso. Ma Strabone parla esplicitamente di quest'ultima, e la duplicità non deriva da [SCIMNO].

gento Strab. VI 272 e Tuc. VI 4; per *Messene* Strabone VI p. 267, Tuc. VI 4; per *Camarina* VI 272 sgg., Tuc. VI 5), è impossibile ammettere che il Nostro si sia giovato come fonte di quest'ultimo. Noi abbiamo due tradizioni diverse, una calcidese e una dorica: rispecchiano la prima Eforo, Strabone e Ps. Sc., la seconda Antioco e Tucidide.

vv. 295-6.

αὐτοὶ δὲ ταύτην ἦραν ἐκ βάθρων πάλιν,
πρὸς ἓξ ἔτη καὶ τετταράκοντ' ᾠκημένην.

La notizia della distruzione di Camarina non si ritrova in Strabone; Tucidide ne parla, ma non dà il dato cronologico: cfr. VI 5. Secondo lo Scol. Pind. Olymp. V 16: *κτίζεται μὲν γὰρ ἡ Καμάρινα με' Ὀλυμπιάδι· ἐπικρατησάντων δὲ Συρακουσίων πορθεῖται τῇ νζ' Ὀλυμπιάδι.* La notizia dello Scoliasta va dunque d'accordo con quella dello Ps. Sc. cioè tra la fondazione di Camarina e la sua prima distruzione passarono 46 anni.

vv. 297-99.

Αὗται μὲν οὖν εἰσ' αἱ πόλεις Ἑλληνίδες·
τὰ δὲ λοιπὰ βάρβαρ' ἐστὶ τῶν πολισμάτων,
Καρχηδονίων ἐντειχισάντων τοὺς τόπους.

Questi versi hanno assai importanza per la fonte di [Scimno]: ma non mi fermo qui a parlarne rimandando senz'altro alle conclusioni. Solo voglio osservare come la congettura del Meineke che ha corretto al v. 297 la lezione del cod. che dice: *αὗται μόνον αἱ πόλεις εἰσὶν Ἑλληνίδες*, si raccomanda per ragioni paleografiche. Certo non si potrebbe aver difficoltà nell'ammettere che [Scimno] manifesti anche qui la sua poca perizia geografica, sarebbe anzi naturale e congruo a tutto il resto del poemetto; ma fa intralcio la metrica.

Prima di venire a esaminare la parte della periegesi di [Scimno] che parla dell'Italia, fermiamoci un momento a considerare alcune cose, che, benchè dovremo poi riaccennare e riassumere nelle conclusioni, è tuttavia bene aver presenti fin d'ora. Notiamo come nell'enumerazione delle città fatta dal Nostro non si tien conto, si può dire, che delle città greche; nessun particolare sugli indigeni; in Sicilia sono ancora i Fenici: dunque la

fonte prima è anteriore alla conquista romana. Nota poi ancora che mentre [Scimno] parla di Eubea, di Camarina, di Nasso, città al suo tempo distrutte, non ricorda affatto Gela. La ragione di questo suo silenzio si può trovare probabilmente nel fatto che al tempo in cui scriveva la fonte diretta del periegeta, la città era distrutta: ora si pensi che la distruzione di Gela cade nel 282 e si noti l'importanza di questo fatto, che darebbe un termine *post quem* relativamente assai preciso.

§ 2. — **La Magna Grecia.**

Prima di cominciare a esaminare i versi di [Scimno] riferentisi all' Italia, si osservi una cosa, riguardo l'itinerario da lui seguito nel periplo. Arrivato a Velia egli è saltato a parlare della Sicilia (1): finita la descrizione delle coste di questo paese, torna all'Italia, rifacendo un salto indietro per arrivare a Terina e parlare della Magna Grecia. Come si spiega questo fatto? Forse basta a spiegarlo il desiderio che egli può avere avuto di parlare della Magna Grecia tutto in una volta? Non credo, perchè sarebbe stato più naturale in tal caso continuare la descrizione della costa italica, e dopo la Magna Grecia tornare addietro per parlare della Sicilia, a cui poteva fare un richiamo arrivato a Regio. [Scimno] dunque non è logico nel suo itinerario. Si noti come la sua fonte (l'abbiamo già visto parlando dello stretto di Gibilterra) pare camminasse in senso inverso: essa dunque avrà prima parlato della Magna Grecia, poi sarà ritornata alla Sicilia, per riprendere in seguito la descrizione delle coste del Tirreno. Non si può dunque anche in questo caso spiegare il fatto ammettendo che [Scimno] sia caduto in errore, avendo sott'occhio

(1) Aggiungo a proposito dei Lucani che il Pais *St. d. Sic.* I 401 n. 1 vuol dimostrare che per la Magna Grecia [Scimno] formicola di errori: " infatti egli colloca gli Enotri presso Posidonia e Velia e non si accorge " di aver ricordati i Lucani che inesattamente fa abitare insieme ai Cam- " pani, v. 246, i quali occupavano invece le coste dell'Enotria dove erano " Pesto e Velia un secolo prima del tempo in cui fu composto lo scritto " del Pseudo Scimno, come si ricava, per citare una sola prova anche dal " Pseudo Scillace, cap. 12 ". Si tratterà forse di notizie derivate in parte da fonte anteriore alla conquista dei Lucani della Magna Grecia?

la sua fonte e non ricordandosi che l'itinerario da lei seguito era opposto al suo? Così pure si spiegherebbe come in [Scimno] la Sicilia non venga ad esser inclusa nella Magna Grecia, come troviamo in Strabone, e doveva quindi essere in Eforo, se era davvero la fonte di Strabone. Se infatti la fonte del periegeta parlava della Sicilia, dopo d'aver parlato della Magna Grecia peninsulare, non è escluso che considerasse l'isola parte della Magna Grecia. [Scimno] rovesciando la descrizione e parlando prima della Sicilia avrebbe involontariamente fatto sorgere il contrasto. Se ciò fosse, non ci sarebbe da negare col Pais (o. c. p. 523) la derivazione prima da Eforo.

Dopo i versi riguardanti la Sicilia, che noi abbiamo già esaminato, [Scimno] ritorna al continente e parla dell'Italia:

vv. 300-1.

Ἡ δ' Ἰταλία προσεχὴς μέν ἐστ' Οἰνωτρίᾳ [altri leggono *Οἰνωτρία*]
μιγάδας τὸ πρότερον ἥτις ἔσχε βαρβάρους.

Si è discusso molto se in questi versi [Scimno] identifichi l'Enotria e l'Italia. Il Pais (*St. d. Sic.* I 401 n. 1) crede che il periegeta distingua: per lui gli Enotri giungono sino a Velia (v. 246 sgg.), e la prima città ellenica d'Italia è Terina. Io non sono convinto della sua dimostrazione: Terina più che prima città greca dell' Italia appare in [Scimno] prima città greca della Magna Grecia. Può benissimo [Scimno] aver identificato Italia ed Enotria, come Dionisio d'Alic. 1 12; II 1 e Strabone p. 210 e 265. Vedi oltre per il v. 263.

vv. 302-3.

ἀπὸ τοῦ δυναστεύσαντος Ἰταλοῦ τοὔνομα
λαβοῦσα . . .

Cfr. il fr. di Antioco che usa proprio le stesse parole: " col tempo fu chiamata Italia sotto la dominazione del potente Italo, uomo buono e sapiente che indusse molti colle buone, altri colle armi, dei popoli confinanti all'ubbidienza ". E così pure Tucidide in VI 2 dice che la regione fu chiamata Italia da un certo Italo, re dei Siculi che colà si trovavano. La notizia si ritrova pure identica in Aristotele *pol.* VIII 1329 b, e in Strabone;

essa è molto diffusa (1). A noi preme di notare che per questa parte si può escludere che il periegeta usasse Ellanico, perchè quest'ultimo (cfr. Dionisio d'Al. I 35) seguito a un dipresso da Timeo (Gellio *n. A.* XI 1), connetteva il nome degli Itali col " vitello ".

vv. 303-4.

. . . μεγάλη δ' ὕστερον πρὸς ἑσπέραν
Ἑλλὰς προσαγορευθεῖσα ταῖς ἀποικίαις.

Dice dunque il Nostro che il nome di Magna Grecia derivò all' Italia dalle sue colonie greche. Questo nome di " Magna Grecia " lo si ritrova forse già in Aristotele (Ateneo XII p. 523 *e*) e poi in Timeo (fr. 77) e Polibio (II 39, 1. III 118, 1. X 1, 4). Ateneo citando Timeo (XII p. 523 *e*) dice che tal nome le derivò dalla ricchezza della terra e dalla bontà del clima. Un passo però che si possa veramente confrontare con quello di [Scimno] è in Strabone (VI p. 253) dove è detto che la potenza dei Greci e delle città da loro fondate fu tanto grande, che arrivò perfino a dare il nome (Magna Grecia) a quella parte di terra. Altrettanto troviamo in Ateneo (XII p. 523 *e*) e in tardi scrittori come Servio, Festo, Isidoro (cfr. Pais o. c. 519 n. 2) (2).

vv. 305-7.

Ἑλληνικὰς γοῦν παραθαλαττίους ἔχει
πόλεις· Τέρειναν πρῶτον, ἣν ἀπῴκισαν
Κροτωνιᾶται πρότερον,

[Scimno] viene a nominare le colonie greche: prima di tutte Terina, fondata dai Crotoniati. Il Pais (op. cit. pag. 245) dice a questo proposito: " le stesse ragioni che consigliarono i Crotoniati a fondare Caulonia li indussero probabilmente verso lo stesso tempo a dar vita alla città di Terina, che essendo posta sulla vetta del monte che sta nel centro dell'istmo, dominava ambedue i golfi ". Terina è detta colonia di Crotone oltre che

(1) Per le diverse opinioni sulla derivazione del nome " Italia " v. Pais o. c. I p. 21-22, 34-35; De Sanctis *St. d. Romani* I p. 110 sgg,

(2) Per la questione riferentesi al nome di " Magna Grecia " v. Pais o. c. I App. VII p. 513.

da [SCIMNO], da PLINIO *N. H.* III 72, SOLIN. II 10, Phleg. Trall. apd. Steph. Byz. s. v. = fr. 26 in Müller F. H. G. III p. 608.

vv. 307-8.

. . . ς ἄϑ' οἱ πλησίον
Ἱππώνιον καὶ Μέδμαν ᾤκισαν Λοκροί.

[Scimno] dice dunque le due città d'Ipponio e Medma fondazione dei Locresi. In tale notizia troviamo d'accordo TUCIDIDE, STRABONE e [SCIMNO]; cfr. Tuc. V, 5; Strab. VI 256. Così almeno il Pais (op. cit. pag. 243); ma io non trovo corrispondenza tra il passo di Tucidide e quello di [Scimno] se non in parte e cioè per Ipponio, ed anche qui ammettendo la congettura del Beloch (Jahrb. f. Phil. 123 (1881) pag. 391 sgg.) che legge *Ἰπωνέας*. Il luogo di Strabone è invece identico e corrispondente e per Medma e per Ipponio, cfr. VI 256. È degno di nota che [Scimno] usa per Medma la forma *Μέδμα* che ritroviamo in ECATEO, TEOGNOSTO, STRABONE, PLINIO, MELA e DIODORO. invece di quella *Μέσμα* che ricorre nel Ps. SCILACE, APOLLODORO (in STEF. BIZ.) e nell'ETIMOLOG. MAGN. (1).

vv. 309-312.

Εἶτ' εἰσὶ Ῥηγῖνοι πόλις τε Ῥήγιον,
ὅϑεν ἐστὶν ἐγγυτάτω πλέοντι διάβασις
εἰς τὴν Σικελίαν· Χαλκιδεῖς δὲ Ῥήγιον
ἀποικίσαι δοκοῦσιν.

Tale notizia si ritrova in Antioco fr. 10 riportata da STRABONE VI p. 257 " Regio fu fondato dai Calcidesi, i quali, a quanto si dice, in seguito ad un oracolo ed a causa di una carestia erano stati consacrati come decima ad Apollo; essi qui giunsero da Delfi avendo presi con sè altri della loro patria. Antioco invece dice che i Calcidesi furono invitati da quelli di Zancle e fecero loro *οἰκιστής* Antimnesto " etc. — Ricordo anche la tradizione che si ritrova in DIONIGI D'ALICARNASSO (XIX 2, 1) secondo il quale *οἰκιστής* sarebbe stato un calcidico, Artimede, che dall'oracolo di Delfi sarebbe stato invitato a fondare una città dove avesse visti congiunti un maschio ed una femmina

(1) Cfr. PARETI, *Intorno al περὶ γῆς di Apollodoro*, p. 313-314.

(il caprifico e la vite). Anche TUCIDIDE (VI 43) dice Calcidesi i Regini, e TIMEO (fr. 64-65) afferma che Regio è una colonia d'Apollo, riferendosi evidentemente all'oracolo dato da Apollo ai Calcidesi.

vv. 312-13.

. . . Οἱ δὲ λεγόμενοι
Ἐπιζεφύριοι πλησίον κεῖνται Λοκροί.

Vicino a Regio, continua il Nostro, sono gli Epizefiri Locresi. È forse da mettersi in rilievo il fatto che anche STRABONE (VI 259) dopo aver parlato di Regio, nomina subito questo popolo, e negli stessi termini.

vv. 314-15.

Τούτους δὲ πρώτους φασὶ χρήσασθαι νόμοις
γραπτοῖσιν, οὓς Ζάλευκος ὑποθέσθαι δοκεῖ·

È interessante il confronto di questo passo col fr. 47 di EFORO " le leggi dei Locresi che Zaleuco compose da quelle dei Cretesi, dei Laconi e degli Areopagiti ". Il fatto è negato invece da TIMEO fr. 69, che pone in dubbio l'esistenza di Zaleuco. — STRABONE riporta la notizia di Eforo a VI 259, e afferma anch'egli che i Locresi per primi usarono leggi scritte.

vv. 316-17.

εἰσὶν δ' ἄποικοι τῶν Ὀπουντίων Λοκρῶν·
ἔνιοι δὲ Λοκρῶν φασι τῶν ἐν Ὀζόλαις.

Gli Epizefiri sono coloni dei Locresi Opunzi. La notizia si ritrova in Eforo identica (cfr. fr. 46): " I Locresi Epizefirii sono colonia di quei Locresi che abitano nel seno Criseo, condotta da Evante non molto dopo la fondazione di Crotone e di Siracusa. *È falsa poi la notizia di Eforo che li dice coloni degli Opunzi* " (1). Così STRABONE riportando il passo di Eforo (VI p. 259): queste parole mostrano come due e diverse fossero le tradizioni; del resto [Scimno] conosce anche l'altra come ci mostra il v. 317: " alcuni altri poi li credono coloni dei Locresi Ozoli ". Strabone

(1) Il BELOCH, *Gr. Gesch.* 2ª ediz., vol. I p. I pag. 246 n. 2, sostiene le ragioni di Eforo con nuovi e interessanti argomenti.

segue apertamente questa seconda opinione e la riconferma anche a IX p. 427: " i Locresi Epizefirî sono coloni dei Locresi Ozoli ". E quest'opinione di Strabone va ricongiunta con quella di Aristotele (fr. 547, ediz. Rose) e con quella di Timeo al fr. 70: Timeo pur differendo da Aristotele sotto altro aspetto, negando cioè che essi fossero dei fuggiaschi come egli asseriva, va d'accordo con Aristotele stesso nel credere che i Locresi Epizefiri siano coloni degli Ozoli e non degli Opunzî. — Anche Dionisio Periegete 366, segue questa tradizione. Ecco un passo di [Scimno] che avrà assai valore quando vorremo decidere fino a qual punto arrivi ed in che cosa consista la sua dipendenza da Eforo che ora generalmente si ammette.

vv. 318-22.

Ἔχεται δὲ τούτων πρῶτα μὲν Καυλωνία
ἐκ τοῦ Κρότωνος ἥτις ἔσχ' ἀποικίαν·
ἀπὸ τοῦ σύνεγγυς κειμένου δὲ τῇ πόλει
αὐλῶνος αὕτη τοὔνομα σχοῦσ' ὕστερον
μετωνομάσθη τῷ χρόνῳ Καυλωνία.

Per questo passo di [Scimno] si osservi che Strabone dà una notizia identica per quello che riguarda la seconda parte, non la prima, perchè la dice fondata dagli Achei, e tace che fu colonia di Crotone VI 261: " Caulonia fondata dagli Achei, già detta Aulonia per la valle che si estende dinanzi alla città ". Anche Ecateo è dello stesso parere sull'origine di tale denominazione; cfr. fr. 52 in Steph. Byz.: " Caulonia città dell'Italia che Ecateo chiama Aulonia, perchè posta in mezzo ad una valle ". Pausania VI, 3, 12 nomina anche l'*οἰκιστής* che sarebbe stato Tifone di Aegium, ed il Pais (op. cit. 243 n.) dice a questo proposito: " [Scimno] sa di più e dice che Caulonia *ἐκ τοῦ Κρότωνος ἔσχ' ἀποικίαν*: cfr. Solino II, 10 " Cauloniam et Terinam a Crotoniensibus (i. e. constitutam) ". Pare adunque che i Crotoniati fondando una colonia, abbiano preso l'oichista da Aegium, ossia dalla madre patria. Così ad es. i Corciresi, benchè già fossero incominciate le inimicizie colla metropoli, ossia con Corinto, presero un Corinzio come oichista allorchè fondarono Epidamno (v. Thuc. I 24) ". Davanti a questa osservazione del Pais si può però notare che *Achei* può significare *Achei d'Italia*

e quindi includere anche i *Crotoniati*: e perciò non sarebbe necessario ammettere che in [Scimno] si osservi una contaminazione (1).

vv. 323-25.

Ἑξῆς δὲ ταύτης ἡ πρὶν εὐτυχεστάτη
εὐανδροτάτη πόλις τε γενομένη Κρότων,
Μύσκελος Ἀχαιὸς ἣν ἀποικίσαι δοκεῖ.

Si veda anzitutto il fr. di Ippis Regino 4 (Müller II p. 14) conservatoci in Zenob. III 42: ivi si legge l'oracolo dato a Miscello oriundo di Rhype non volendo egli fondare la propria colonia dov'è Crotone ma presso Sibari. Antioco nel fr. 11 (Strab. VI 262) tace l'origine di quest'uomo, ma riferisce l'oracolo ed il fatto colle stesse parole. Diodoro VIII 17 dice Miscello Acheo e lo fa venire a Delfi *ἐκ Κρήτης* (il Bekker corregge *ἐκ Ῥύπης*; il Pais *St. d. Sic.* I 192 n. 1 *ἐκ Ῥυπικῆς*). Strabone oltre al luogo sopra citato ove riporta il passo d'Antioco ritorna sull'argomento a VI 269, dove dice che Miscello ed Archia vennero a Delfi e, domandati dal dio quale grazia chiedessero, il primo chiese la sanità ed il secondo la ricchezza, e allora furono dall'oracolo mandati a fondare Crotone e Siracusa. Ed ancora (VIII p. 387) ha occasione di ricordare Rhype ed aggiunge: " fu questa la patria di Miscello fondatore di Crotone ". Si osservi però come il Nostro lo dica semplicemente Acheo. Si dice poi che Crotone veniva da lui fondata per la seconda volta perchè era già esistente ancor prima e abitata dagli Japigi (così Strabone VI 262 testimonia di Eforo).

v. 326. *Μετὰ δὲ Κρότωνα Πανδοσία καὶ Θούριοι·*

Pandosia è ricordata da Strabone VI 256 come città posta poco sopra Cosenza (2). Teopompo presso Plinio *H. N.* III 15 la ricorda come " urbs Lucanorum ". Ps. Scilace § 12 la nomina anche egli fra le città della Lucania, ed il Müller in nota al luogo di Ps. Scil. osserva al proposito che, mentre egli la pone nella costa occidentale fra Lao e Clampetia, [Scimno] la pone nell'orientale fra Crotone e Turi. — Di Turi Strabone parla a VI p. 262

(1) Per la fondazione di Caulonia v. Pais o. c. I p. 243 sgg.
(2) Per la posizione V. Beloch o. c. vol. I, 1 pag. 237 n. 2.

dicendo che essa sorse dopo la distruzione di Sibari e dopo aver avuto un periodo di splendore fu soggiogata dai Lucani.

v. 327. *δμορον δὲ τούτοις ἐστὶ τὸ Μεταπόντιον.*

Il Nostro non entra nella questione relativa alla fondazione di Metaponto, contentandosi di nominar la città solamente di passaggio. Ricordiamo a proposito che vi sono due tradizioni differenti: una d'Antioco (ap. Strab. VI p. 264) e l'altra di Eforo (fr. 49 pure in Strab. l. c.). Per la questione rimando al Pais (op. cit. I 219 sgg., e App. X p. 541). [Scimno] si limita a dire che Metaponto è vicina a Pandosia ed a Turi.

v. 330. *Εἶτεν μεγίστη τῶν ἐν 'Ιταλίᾳ Τάρας,*

Viene il Nostro a nominare Taranto come la più grande delle città italiche, fondata dall'eroe Tarante, e colonia spartana, come dirà poi nei due versi sgg. — Qui si noti anzitutto che [Scimno] nomina Taranto fra le città italiche. In ciò si distacca evidentemente dalla tradizione di Antioco che (Strab. VI 234) poneva i confini settentrionali dell' Italia dalla parte del Tirreno al fiume Lao, e dall'altra al territorio di Metaponto, attribuendo Taranto agli Iapigi (vedi per il motivo Beloch *Gr. Gesch.* I² 1 p. 236 n. 1). E anche Strabone dopo aver parlato di Metaponto VI 265 dice: " dopo viene Taranto e l'Japigia di cui discorreremo dopo aver parlato delle isole di fronte all'Italia ". Perchè dunque [Scimno] annovera Taranto fra le città italiche? Il Müller in n. al v. 300 dice senz' altro: " Scymnus autem (Ephorum sequens) ab Antiocho eatenus dissentit quod Tarentum urbem Italiae annumerat ". Certo è che già nel V secolo attribuiva Taranto all' Italia Erodoto (I 94; III 136), e intorno al 400 il comico Demetrio (presso Ateneo III 109 *a*), e che tale opinione era diffusa nel IV secolo. Si osservi che la notizia di [Scimno] sull'importanza di Taranto si intende meglio se la sua fonte era del IV o del III secolo, perchè nel V secolo l'importanza di Crotone era maggiore, e col 209 si ha la presa rovinosa di Taranto per opera di Fabio Massimo.

v. 331. *ἀπό τινος ἥρωος Τάραντος λεγομένη*

Così pure Antioco presso Strab. VI p. 279, il quale dopo aver parlato della leggenda riguardante la fondazione della città

così termina: " la città chiamarono poi Taranto dal nome di un eroe „; Pausania (X 10, 8) e Dionisio d'Alicarnasso (XIX 1, 6) dicono invece che la città ebbe tal nome da un fiume a lei vicino (1).

vv. 332-33.

Λακεδαιμονίων ἄποικος, εὐδαίμων πόλις.
Οἱ Παρθενίαι ταύτην γὰρ ἔκτισαν προτοῦ

Questi due versi alludono in brevi parole alla fondazione di Taranto: colonia dei Lacedemoni, fondata dai Parteni. Due sono le versioni principali sulla fondazione della città: l'una fa capo ad Antioco, l'altra a Eforo alla quale si riconnette il Nostro, Dionisio d'Alicarnasso (XIX 2) Trogo Pompeo (cfr. Iust. III 4) ed Eustazio *ad Dion.* v. 376. Tali versioni sono riferite l'una dopo l'altra da Strabone VI 279 e sgg. — Secondo Antioco furono i Parteni (i laconi fatti iloti per non aver preso parte alla guerra messenica) con a capo Falanto che in seguito a una congiura contro i cittadini si allontanarono fondando per consiglio dell'oracolo una colonia: Taranto. La versione di Eforo racconta che i Parteni non erano già quelli che non avevano preso le armi nella guerra contro i Messeni, ma i discendenti di alcuni connubî illegittimi permessi a scopo di perpetuare la razza durante la lunga guerra, nella quale i Lacedemoni erano trattenuti da un giuramento di non tornare a casa prima di essere riusciti nell'impresa. Come si vede dunque le due versioni si discostano sopratutto nella prima parte: nella seconda sono simili, se non che Eforo presenta anche qualche altra piccola differenza di lieve conto. Ma i versi dello Ps. Scimno si tengono tanto sulle generali che non è possibile sapere se egli segue l'una o l'altra di queste versioni: che Taranto fosse colonia dei Lacedemoni e fondata dai Parteni, lo dice Eforo come Antioco. Ha probabilmente ragione il Pais (o. c. pag. 210 n.) quando dice che colla narrazione di Eforo si riconnette quella dello Ps. Scimno. Per quanto infatti le brevi notizie di [Scimno] su Taranto possano in genere derivare anche da Antioco, la notizia che Ta-

(1) Cfr. Pais o. c. I p. 609 sgg. Per la *κτίσις* di Taranto, cfr. pure Geffcken, *Die Gründung von Tarent*, negli " Jahrbücher für Philol. „ 1893 p. 177 sgg.

ranto è in Italia è in antitesi con Antioco stesso; quindi è più probabile pensare al filone eforiano.

v. 334. *εὔκαιρον, ὀχυράν, φυσικὸν εὐτύχημά τι·*

Quste lodi che il Nostro fa della città di Taranto possono forse essere riconnesse a quelle di Strabone (VI 278) dove si parla della bontà del porto, della favorevole posizione, della fertilità della terra e della ricchezza della città.

vv. 335-36.

συναγομένη γὰρ λιμέσιν ἐπὶ νῆσον δυσίν
πάσῃ σκεπεινὴν νηὶ καταγωγὴν ἔχει.

L' " *ἐπὶ νῆσον* „ è una correzione del Meineke all'*ἐπ' ἴσον* del cod. che non dà senso; a tale proposito il Meineke stesso nota contro la congettura " *ἐπ' ἰσθμόν* „ del Gaille che Taranto era posta non già sull'istmo, ma sulla penisola che si avanza oltre l'istmo. Così il luogo può essere confrontato con Strabone VI 278.

vv. 336-40.

Ἦν καὶ πρότερον μέγιστον ἐξυμνημένη
πόλις μεγάλη, βαρεῖα, πλουσία, καλή,
ἀπὸ τοῦ ποταμοῦ Συβάριδος ὠνομασμένη
Σύβαρις, Ἀχαιῶν ἐπιφανὴς ἀποικία,

È notevole l'ordine con cui procede [Scimno]: da Caulonia passa a Crotone, poi a Pandosia nell'interno, poi a Turi, Metaponto e Taranto: dunque fin qui procede per ordine geografico. Ma giunto a Taranto torna indietro a parlare di Sibari e Crotone. Si dovrà ciò solo al desiderio di porre in confronto la maggiore città dei tempi arcaici, Sibari, con la maggiore dei tempi posteriori, Taranto? o possiamo supporre che contribuisse come in altri casi, la fonte che procedeva in senso opposto? Anche Strabone VI 263 parlando di Sibari dice che fu colonia Achea " *Ἀχαιῶν κτίσμα* „. Veramente non dice che fu dal fiume che la città prese nome; lo nomina tuttavia dove dice che essa è situata fra due fiumi: il Cratide e il Sibaride. Anche le parole dei vv. 336-7 colle quali il Nostro parla dell'opulenza di Sibari possono trovare un riscontro in quelle che usa Strabone prima

di venire a parlare della sua rovina: " città che eccelse per la sua prosperità ". Cfr. anche DIODORO XI 90, 3. Ma più importante è un altro passo di STRABONE stesso dove ricorda l'origine del nome della città che anche lui dice derivato da quello del fiume (cfr. VIII 386) (1).

vv. 341-42.

δέκα μυριάδας ἔχουσα τῶν ἀστῶν σχεδόν
περιουσίᾳ πλείστῃ τε κεχορηγημένη·

DIODORO (XII 9, 2) dice che la popolazione era ancora maggiore: " *ὥστε τὴν πόλιν ἔχειν πολιτῶν τριάκοντα μυριάδας* ". E STRABONE nel passo ora citato a proposito del v. 340 (VI 263) dice che nella guerra contro i Crotoniati, Sibari potè disporre di ben 300.000 uomini. Ecco un altro luogo in cui le notizie di Strabone che dipende in quel punto, probabilmente, come Diodoro, da Timeo (2), non si accordano con quelle di Scimno.

vv. 343 sgg.

οἳ δὲ παρεξαρθέντες οὐκ ἀνθρωπίνως
αὔτανδρον ἐξέφθειραν ἐπιφανῆ πόλιν,
τἀγαθὰ τὰ λίαν μὴ μαθόντες εὖ φέρειν.

Di questa decadenza di Sibari si parla in più luoghi. C'è i fr. 58, 59, 60 di TIMEO che ne parlano a lungo nel descrivere i costumi degli abitanti; e STRABONE (VI 263) dice che per il lusso e per la superbia dei Sibariti avvenne che 70 giorni bastarono perchè i Crotoniati mandassero tutto in rovina. [Scimno] dunque non fa che ripetere lo stesso pensiero; strana rassomiglianza fra il v. 345 e il famoso " *ἀλλὰ γὰρ καταπέψαι μέγαν ὄλβον οὐκ ἐδυνάσθη* " di Pindaro! (*Ol.* I 85). Si vedano raccolte le citazioni sul lusso dei Sibariti in BUSOLT *Gr. Gesch.* I² p. 401 n. 1.

vv. 346-47.

Λέγεται γὰρ αὐτοὺς μήτε τοῖς νόμοις ἔτι
τοῖς τοῦ Ζαλεύκου τἀκόλουθα συντελεῖν,

Per le leggi di Zaleuco vedi quanto abbiamo detto a verso 315. Mancano notizie parallele sulla diffusione delle leggi di Zaleuco specificamente a Sibari.

---

(1) Per la fondazione di Sibari v. PAIS o. c. I p. 191 e App. VIII p. 527.

(2) Cfr. BELOCH *Bevölk.* p. 264; *Gr. Gesch.* I² 1 p. 281 n. 2.

vv. 350-57.

σπεῦσαι δὲ καὶ τὸν τῶν Ὀλυμπίων ὅπως
ἀγῶνα καταλύσωσι, τάς τε τοῦ Διός
ἀνέλωσι τιμὰς τῇδε τῇ παρευρέσει·
ἀδρόμισθον Διὶ γυμνικόν τιν' ἐπετέλουν
κατὰ τὸν χρόνον τὸν αὐτὸν Ἠλείοις, ἵνα
πᾶς τις πρὸς αὐτοὺς τοῖς ἐπάθλοις ἀγόμενος
σπεύδοι καταντᾶν, ἀπολιπὼν τὴν Ἑλλάδα.

Arrivò a tal punto, la loro arroganza che vollero cercare di distruggere perfino i giuochi Olimpici, cercando di far disertare dalla Grecia i concorrenti al certame mediante la promessa di larghe ricompense. È questa l'accusa che i Crotoniati lanciarono contro i Sibariti; curioso poi che TIMEO accusa essi stessi di tale colpa; cfr. fr. 82 in Athen. XII p. 522 B: " cercarono i Crotoniati di mandare in rovina i giuochi olimpici, istituendo nello stesso tempo un agone di più lauta mercede. Essi poi dicono che ciò fu fatto dai Sibariti ". Strabone non accenna a tal fatto il quale invece è narrato egualmente da Eraclide Pontico nel *περὶ δικαιοσύνης* ap. Athen. XII, p. 521.

vv. 357-58.

Κροτωνιᾶται πλησίον δὲ κείμενοι
κατὰ κράτος αὐτοὺς ἦραν ἐν βραχεῖ χρόνῳ

La notizia si ritrova in STRABONE al luogo sopra riferito (VI 263): dice che " bastarono 70 giorni " ed aggiunge che dopo aver preso la città la distrussero facendo straripare le acque del fiume.

vv. 359-60.

. . . διαμείναντας ἀπταίστως ἔτη
ὡς ἑκατὸν ἐνενήκοντα πρὸς τοῖς εἴκοσι.

Sibari cadde dopo aver prosperato per ben 210 anni. DIODORO (XI 90; XII 10) dice che Sibari fu distrutta 58 anni prima dall'arconte Lisicrate (453/2) cioè nel 511/10; EUSEBIO dice che fu fondata assieme a Crotone nell'Olimp. 18, 1 cioè nel 708; così non si arriverebbe ad avere i 210 anni di cui parla [Scimno]; giova però ricordare, come nota il Beloch (*Gr. Gesch.* I² 2 p. 219 sg.) che i 210 anni corrispondono a 6 generazioni di 35, o a 7 di

30 anni; mentre la cronologia di Eusebio presuppone il computo con generazioni di 33 anni ($6 \times 33 = 198$). Resta sempre da dedurre che [Scimno] non dipende dalla stessa fonte di Eusebio.

vv. 361-2.

Μετὰ τὴν 'Ιταλίαν εὐθὺς 'Ιόνιος πόρος
κεῖται·

Giustamente nota il Müller a questo verso che secondo [Scimno] l'Italia non arriverebbe dunque solo fino a Taranto, ma comprenderebbe anche tutta quella parte di spiaggia che sta ad oriente del golfo. Già intorno al 400 includeva la Messapia nell'Italia il comico Demetrio (Ateneo III 109 *a*).

vv. 362-64.

...καθήκοντες δὲ πρὸς τὴν εἰσβολὴν
οἰκοῦσ' 'Ιάπυγες· μεθ' οὓς Οἰνώτριοι
Βρεντέσιον ἐπίνειόν τε τῶν Μεσσαπίων.

Per gli Japigi v. Antioco presso Strabone VI 254 secondo il quale la terra abitata da questi popoli è fuori dell' Italia e segue a occidente dopo Metaponto. Dopo di essi [Scimno], in termini molto generali, dice che vengono gli Enotri e il porto di Brindisi dei Messapi; e questa notizia sugli Enotri dopo d'aver parlato degli Japigi, è di molta importanza, non trovando riscontro in altri scrittori. Si tratta di allusione ai " Morgeti enotrici ", come pensa il Pais *St. della Sic.* 1 401 n. 1? Ma Antioco parlava dei Morgeti come abitanti dell'Italia, ossia della regione al sud di Metaponto. — Si tratterà qui ancora dell'aver [Scimno] errato seguendo la fonte che procedeva in senso opposto?

vv. 367-68.

... 'Ομβρικοί,
οὓς φασιν ἁβροδίαιτον αἱρεῖσθαι βίον
Λυδοῖσι βιοτεύοντας ἐμφερέστατα.

Dopo alcuni versi caduti dove forse si parlava dei Dauni e dei popoli Sabellici (1), si viene agli Umbri che, si dice, vive-

(1) Il Pais, *St. d. Sic.* I 454 accetta la restituzione del Meineke secondo cui si direbbe che gli Umbri erano limitrofi dei Messapi: *Μεσσαπίων δ' οἰκοῦσι 'Ομβρικοὶ πέλας,* ma si tratta di congettura molto discutibile.

vano mollemente, di costumi simili ai Lidi. — La notizia, come del resto l'autore stesso dice al v. 370, è tolta da TEOPOMPO: cfr. fr. 142 in Ath. XII p. 526: " Si dice che il popolo degli Umbri fosse di vita molle e licenziosa, simile di costumi ai Lidi, e che vivesse in paese fertile e ricco ". Ma di ciò nelle ricerche che seguiranno.

§ 3.

Per la parte riguardante la Sicilia e per quella riguardante la Magna Grecia le conclusioni che possiamo trarre non sono eguali. Per la prima abbiamo nominati quasi sempre come termine di confronto EFORO, STRABONE, TUCIDIDE; meno, TIMEO e FILISTO. La maggior parte delle volte la tradizione scimniana per ciò che riguarda la fondazione delle prime città sicule e in generale di tutta la Sicilia segue quella di EFORO, e dove i fr. di Eforo mancano abbiamo messo in rilievo l'analogia con STRABONE che deriva anch'esso molte cose da Eforo. Quanto a TUCIDIDE invece (e parlando di lui, parliamo anche della sua fonte Antioco), benchè noi lo abbiamo ricordato perchè trattava delle medesime questioni di [Scimno], dobbiamo concludere che non è mai presente alla mente del Nostro. — TIMEO gli è forse presente ai vv. 287 sgg., come abbiamo visto, riguardanti la questione di Taormina; e notiamo che non sarebbe già per una semplice nozione cronologica, come altre volte. — Quanto alla Magna Grecia invece non possiamo dire altrettanto, che cioè tutte o quasi tutte le notizie si ritrovano eguali in Eforo o nella tradizione eforiana attraverso Artemidoro conservataci da Strabone: sono in maggior numero invece quei luoghi che potremo chiamare *negativi* cioè in cui si ritrovano delle notizie che non ci è dato rinvenire in nessuna altra fonte, e siccome queste fonti sono così scarse e frammentarie, nulla di preciso si può trarne nè per affermare nè per negare; molti ancora ve n'è, e non più concludenti, pei quali le notizie si trovano contemporaneamente in fonti di natura diversa: Timeo, Antioco, Tucidide, Eforo, Strabone.

Abbiamo poi già messi in rilievo dei passi che meritano speciale attenzione: quelli cioè nei quali la tradizione eforiana non è riflessa nella sua integrità, dove accade, per così dire, una contaminazione. I vv. 316-7 ce ne danno un esempio assai

chiaro; parlando degli Epizefirî, [Scimno] dice che essi sono secondo alcuni coloni dei Locri Opunzî, secondo altri degli Ozoli. Orbene, Eforo di cui possediamo fortunatamente il fr. 46 dice apertamente che " i Locresi Epizefirî sono colonia degli Opunzi " e non altro, e tanto apertamente che Strabone (VI p. 259) riportandone il passo dice che la notizia è falsa. [Scimno] dunque in questo luogo non segue ciecamente Eforo, ma invece evidentemente la sua fonte è diversa: essa univa in sè la tradizione di Eforo con quella opposta. Quale questa fonte intermedia? È quello che noi vogliamo mettere alla luce, se sarà possibile, con questi nostri studî. Intanto però osserviamo dei fatti assai importanti che contribuiscono non poco ad agevolare la nostra ricerca; questi fatti si riferiscono tutti alla data della fonte immediata: li riassumo in breve; si possono designare due termini cronologici: il primo **ante quem** il secondo **post quem**. Per il primo osserviamo: 1° i **versi 297-299** dove si parla ancora dei Fenici in Sicilia; quindi avanti la fine della prima guerra punica (241); 2° al **verso 330** [Scimno] parla dell'importanza di Taranto, che questa città conservò con più o meno fortuna non oltre il 209. Osserviamo anche in generale come la trattazione scimniana rispecchia i tempi dei Greci liberi, e non già assoggettati a Roma. — Per il secondo termine cronologico ricordiamo: 1° il v. 293 dove Messene è detta dorica: la fonte ha presente la rifondazione dorica di Dionisio del 396; 2° al v. 289 la questione di Tauromenio calcidese di cui abbiamo già parlato a suo luogo: anche qui la fonte ha presente la venuta di Andromaco e dei Nassi del 358, di cui Diodoro XVI 7; 3° come pure abbiamo già accennato, non si allude alla città di Gela, e quindi si può credere che al tempo della fonte di [Scimno] fosse già distrutta: la distruzione è del 282. — La fonte dunque del nostro cadrebbe così fra il 282 (distruzione di Gela) o almeno il 358 (Tauromenio calcidese), e il 241 (prima guerra punica). E ricordiamo ancora che alcuni punti della descrizione ora presa in esame, ci hanno spinti a riproporre l'ipotesi, già avanzata nel primo contributo, che la fonte immediata di [Scimno] procedesse in senso opposto al nostro periegeta (1).

(1) In altri contributi ci occuperemo dei versi 371 e sgg.

Gli "aeditui" e i "camilli" (1).

Nota di GIULIO GIANNELLI.

§ 1. Gli " Aeditui „.

Merita veramente una speciale attenzione il personale incaricato in Roma di custodire gli edifici sacri. È noto che i templi romani adibiti al Culto ufficiale rimanevano normalmente chiusi al pubblico, tranne che in occasione dell'annuale sacrificio che si offriva nell'anniversario della fondazione del tempio, e in altri giorni, vari pei singoli edifici, stabiliti dalla *lex aedis* (2).

Per tutto il rimanente dell'anno, il tempio restava abbandonato, salvo i casi, rarissimi in Roma, che il sacerdote o i sacerdoti addetti a quel culto vi abitassero (3). Era pertanto necessario che qualcuno pensasse a custodire il sacro edificio, a mantenerlo pulito, a ricevere le offerte del pubblico, e, quando il tempio non fosse sotto la speciale giurisdizione di un collegio sacerdotale, a curarne il mantenimento e a provvedere ai necessari restauri: nè si dimentichi che a Roma, come in Grecia, i templi facevano l'ufficio della maggior parte delle moderne

(1) Nel presente lavoro sono indicati con *R.-E.* e *D. S.* la *Real-Encyclopädie der class. Altertumswiss.* di Pauly-Wissowa, e il *Dictionnaire des antiquités grecques et romaines* di Daremberg-Saglio. Il Manuale del Marquardt (*Römische Staatsverwaltung*, vol. III) è citato nella trad. franc. del Brissaud (*Le culte chez les Romains*, in 2 vol.).

(2) Marquardt, I, p. 252 sgg.; Wissowa², p. 476-7. Un esempio di codesti regolamenti ci è offerto da quello che vigeva per il tempio di Vesta; l'ingresso in esso era sempre vietato agli uomini; permesso alle matrone dal 7 al 15 giugno (*Vestalia*); nel *penus Vestae interior* potevano entrare solo le Vestali (Vedi Jordan, *Der Tempel der Vesta*, p. 68; Santinelli, " Rivista di Filologia „, 1902, p. 255 sgg.).

(3) Tale è il caso dell'*aedes Vestae*, presso cui, nell'*Atrio*, abitavano le sacerdotesse.

banche: accoglievano cioè i depositi di danaro, di oggetti preziosi, di documenti importanti, che loro affidavano i privati e spesso anche lo Stato. Faceva dunque d'uopo che mai non mancasse chi vigilasse codesti valori e si rendesse di essi responsabile di fronte ai depositanti (1).

Perciò in Roma ogni tempio che non fosse sede di particolari sacerdoti, ebbe un sovrintendente che si chiamò *aedituus* (2). Era fatta all'edituo speciale prescrizione di abitare nel tempio o nelle immediate vicinanze di esso; era suo precipuo compito di regolare e sorvegliare l'ingresso del pubblico nei giorni di apertura, di ammettere o no, secondo l'autorizzazione che ne avessero ricevuta, i privati a sacrificare o a pregare: doveva infine curare il mantenimento e la pulizia dell'edificio, sorvegliare i *deposita*, aprirlo o chiuderlo in seguito a straordinari comandi di magistrati (3). Da chi e per qual durata di tempo gli editui fossero nominati e presieduti è impossibile stabilire; l'unica indicazione che abbiamo a questo riguardo ci fa credere che essi fossero sottoposti agli edili (4), ai quali spet-

---

(1) Codesta consuetudine prese uno sviluppo straordinario in Grecia; quivi i sacerdoti dei templi potevano anche far circolare le somme presso di loro depositate, impiegandole in prestiti o nell'acquisto di proprietà fondiarie, ed emettendo talora, come delle vere e proprie zecche, del numerario (Vedi lo studio di M. Newton, *L'épigraphie grecque* in *Traité d'épigraphie grecque* di S. Reinach, p. 67 sgg.). In codesti templi dei funzionarî speciali erano incaricati di custodire il tesoro del dio, gli *hierotamiai* (studio cit., p. 103). Su questi addetti ai templi greci, v. anche Schoemann, *Griechische Alterthümer*, II[4], p. 422 sgg. Per i templi romani, vedi Wissowa, p. 476, nota 5.

(2) *Aedituus, aedis sacrae tuitor, id est curam agens* (Festo, p. 9). *Qui curat aedes sacras*, dice Varrone (*lingua lat.*, VII, 12); cfr. Gellio, XII, 10, 5. Forma più antiquata del nome è *aeditumus* e *aeditimus* (Gellio e Varrone, luoghi cit. Lucrezio, IV, 1273, ha *aedituentes*). Il nome viene naturalmente da *aedes*.

(3) Marquardt, I, 261; Wissowa, p. 476-7.

(4) Varrone (*de re rust.*, I, 2, 2) narra che fu una volta invitato, insieme al suocero Fundanius e ad altri amici, a una *cena* presso un tal L. Fundilius, edituo dell'*aedes Telluris in Carinis*; ma gli ospiti non lo trovarono in casa; *arcessitus enim erat ab aedile, cuius procuratio huius templi erat.* Del resto dagli edili dipendeva direttamente l'*aedes Cereris*, la cui custodia essi avranno certo affidato a un edituo (Cfr. Mommsen, *Staatsrecht*, I[2], p. 316, 1). Il Vaglieri (art. *aedituus* in *Dizion. epigr.* di De Ruggiero) crede che al censore dovessero gli editui rendere conto della cassa del tempio.

tava appunto la *sacrarum aedium procuratio* (Wissowa², pag. 476, nota 1).

Chi era chiamato a ricuoprir questa carica? Per l'età repubblicana ci troviamo di fronte a tale scarsità di documenti che non siamo in grado di dare una risposta precisa; in ogni modo quegli editui, di cui conosciamo qualche particolare, ci appariscono tutti come persone ragguardevoli (1); sicchè io sarei d'accordo con l'Habel (artic. *aedituus* in *R.-E.*) nel ritenere che, durante la Repubblica, siano stati editui solo uomini liberi e cittadini considerevoli. Non si può invece affatto ammettere la affermazione dell'Halkin che " già sotto la Repubblica vi furono schiavi pubblici impiegati come editui "; affermazione nata per una confusione dall' Halkin fatta fra i *servi publici* addetti in gran numero a tutte le amministrazioni dello Stato e quindi anche a quella dei culti, e la carica particolare e precisa di edituo (2). È del resto troppo naturale che solo ad uomini distinti si affidasse codesta carica, che difficilmente gli schiavi avrebbero potuto coprire, soprattutto perchè alla loro responsabilità non si sarebbero potuti affidare i tesori e i depositi custoditi nel tempio (3).

Per l'età imperiale abbiamo invece più copiose informazioni; le quali però hanno fatto sorgere una grave questione. Le iscrizioni romane di questo periodo ci portano innanzi degli *aeditui magistri* e degli *aeditui ministri*: di fronte a ciò, il Marquardt ha manifestato l'opinione che si tratti di due differenti specie di editui. La carica di edituo, egli ragiona, si dava in generale, specie pei templi e collegi più importanti, a cittadini ragguardevoli, i quali difficilmente avranno voluto da sè attendere a

---

(1) Tale era certamente l'edituo Fundilius, sopra ricordato, che invitava a cena Varrone.

(2) L. Halkin, *Les esclaves publics chez les Romains*, Bruxelles, 1897, p. 68. Sempre in seguito a questa confusione l'Halkin è indotto ad affermare (p. 69) che il *servus publicus* che trasse a salvamento Pisone nell'*aedes Vestae* (Tac., *Hist.*, I, 43) era l'edituo di questo tempio; mentre è noto che trattasi qui di uno dei molti schiavi pubblici posti al servizio delle Vestali, fra i quali, neppure nell'epoca imperiale, non troviamo alcun *aedituus minister*.

(3) Cfr. Ohnesseit, *Das niedere Gemeindeamt in den römischen Landstädten*, " Philologus " XLIV (1885), p. 518-56.

certe faccende, quali quelle di spazzare il tempio, aprire le porte ai visitatori, e simili; costoro affidarono codesti uffici più umili a persone di bassa condizione, servi o liberti, riservandosi l'alta vigilanza sull'edificio e l'amministrazione dei suoi beni; a loro spetta allora il titolo *aedituus magister*, di fronte all'altro loro sottoposto, che è l'*aedituus minister* (1).

La teoria del Marquardt, ripresa dal Karlowa (*Römische Rechtsgeschichte*, I, p. 249), è stata poi respinta dall'Habel (articolo in *R.-E.*) e dal Wissowa (p. 476, nota 3) (2).

Io credo che un esame più minuto delle iscrizioni ci dia modo di ricostruire lo svolgimento storico e l'ordinamento di codesta istituzione. Contro la tesi del Marquardt l'Habel, a cui il Wissowa si rimette, non porta alcun argomento positivo; egli crede che non sia accettabile solo perchè non abbastanza documentata, essendochè una sola iscrizione (*C. I. L.*, VI, 2212) nomina un *aedituus magister* e pure una sola fa parola del *minister* (VI, 2213, trattasi di una donna). Ora invece numerose sono le epigrafi che, pur con differente nomenclatura, ci confermano il fatto. In VI, 2202, gli *aeditui Castoris et Pollucis* hanno reso onore a un tal Synhistor, che è designato come *curator aedituom* (= *aedituorum*) *Castoris et Pollucis*. Chi vorrà negare che siamo qui di fronte a due diverse categorie di addetti al tempio?

Gli uni sono di bassa condizione, impiegati ai servizi più umili; l'altro, che a loro sovrintende, è evidentemente l'edituo vero del tempio, quello che ha in custodia l'edificio, ch'egli ha affidato, per le cure più grossolane, a un certo numero di editui ministri. La VI, 2203 non porta che il nome di un tale, qualificato come *primus aedituus*, ma è quanto basta per te-

---

(1) Marquardt in *Comment. in honor. Momms.*, p. 378 sgg.; eppoi *Culte chez les Romains*, I, p. 258 sgg.

(2) Fra gli avversari alla tesi del Marquardt il Wissowa cita anche il Vaglieri (art. *aedituus* in *Dizion. Epigr.* di De Ruggiero); in realtà egli rifiuta solo di identificare, come il Marquardt vorrebbe (I, p. 259, nota 8), gli editui con i *magistri fani*, non permettendolo la *Lex Col. Juliae Gen.* (col. 128; cfr. Ohnesseit, art. cit.); ma, a proposito della duplice denominazione degli editui offerta dalle iscrizioni, il Vaglieri ammette debba essere spiegata col fatto " che venisse delegato, nei collegi più ragguardevoli, uno al posto dell'*aed. mag.*, per disimpegnare il servizio ".

stimoniarci di nuovo la suddetta classificazione di codesti impiegati.

Usciamo da Roma nelle vicine città del Lazio, nelle quali l'istituzione ebbe uno svolgimento parallelo (1). Ad Ostia (XIV, 32), un tale Asclepiade, *aeditus* (sic) *Capitoli* (2), ha fatto un dono alla *familia publica libertorum et servorum*; dalla quale probabilmente egli aveva tratto il basso personale che gli era necessario nel tempio a lui affidato. Anche più chiara è una iscrizione di Tusculum (XIV, 2637), in cui si legge una dedica: *M. Tusculanio Amiantho Mag. aeditu. Castoris Polluc. Augustalium*; qui troviamo addirittura usato il nome di *magister*.

Si noti ancora: in tutte le citate iscrizioni, in cui è possibile riconoscere due categorie di editui, troviamo sempre che l'edituo di grado superiore è uno solo, mentre un collegio o una collettività di editui troviamo soltanto per quelli di grado inferiore (come in VI, 2202 e in XIV, 32; 2637); ed è evidente che soltanto uno poteva essere il sovrintendente e il responsabile del tempio. mentre parecchi potevano essere quelli che gli somministravano l'opera loro nei servigi inferiori. Terza osservazione da fare: laddove è specificata la condizione sociale dell'edituo, resulta che un edituo del grado superiore non è mai persona di basso ceto (3); viceversa, dove si fa distinzione delle due categorie, non troviamo mai che fra gli editui inferiori compariscano persone di riguardo (4).

Infine due iscrizioni ci parlano di *aedituae*, segno che codesta funzione poteva essere affidata anche alle donne. Ora è evidente che, se è vero che esistono due categorie di editui, noi non dovremo mai trovar donne in quella superiore, resultando il compito di sovrintendenza e amministrazione dei fondi del tempio incompatibile con la posizione giuridica della donna in Roma. E infatti in una di codeste iscrizioni (VI, 2213) è detto chia-

(1) Anche su ciò puoi vedere il citato studio dell'Ohnesseit.

(2) Trattasi probabilmente di un " tempio capitolino „ di Ostia; sulla diffusione del culto Capitolino, in appositi *Capitolia*, in moltissime città dell'Impero, vedi Wissowa[2], p. 128.

(3) Sarebbe ingiusto ritenere come tale quel *Sex. Larditius Sex. L. adrena*, nominato in VI, 2212.

(4) Ciò è specialmente evidente in XIV, 32, dove gli editui inferiori appartengono alla *familia publica libertorum et servorum*.

ramente: *Lollia Urbana aeditua ministra*. Nè meno chiaro parla l'altra (VI, 2209): — *Doridi Asinii Galli Aedituae a. Diana(e) Antiochus conservus b. m. f.* Se l'Antiochus che ha fatto porre l'epigrafe si dichiara *conservus* di Doride, è evidente che anche questa doveva esser *serva*, e appartenere quindi agli editui inferiori.

Tenendo pertanto presenti le osservazioni fin qui esposte, io credo di poter giungere alle conclusioni seguenti: ogni qual volta in Roma si doveva provvedere alla custodia di un pubblico tempio, si affidava codesto incarico a un edituo, che rimaneva compreso, per tutta la durata delle sue funzioni (che non sappiam quale fosse), nella giurisdizione dell'edile. Codesto edituo poteva essere persona di poca levatura, se trattavasi di custodire qualche cappella o un tempietto senza importanza; si procurava invece che fosse uomo ragguardevole e stimabile sotto ogni aspetto, se ricco e importante era l'edificio affidato alle sue cure. Ma, in questo caso, non si poteva naturalmente pretendere che costui attendesse personalmente ai più bassi servizi; gli si dovette quindi permettere di valersi dell'opera dei servi (o pubblici, forniti dallo Stato, o proprî) o di liberti, i quali restavano sotto la sua responsabilità. Però durante tutta l'epoca repubblicana codesto personale non ebbe alcun riconoscimento ufficiale, e non vi fu che un edituo per ogni tempio.

Al sorgere dell'Impero, e, con tutta probabilità, fin dal tempo di Augusto (1), codesti servi o liberti e in genere tutto quel basso personale sottoposto all'edituo potè ottenere, in molti casi, di vedere ufficialmente riconosciuta la propria mansione; non sempre però, si badi. In questo caso, si distinsero con nomi speciali il vero edituo e gli altri ora aggiunti. Il primo si chiamò *aedituus magister* (VI, 2212; XIV, 2637), *curator aedituorum* (VI, 2202), *primus aedituus* (VI, 2203) o con altri nomi simili; gli altri presero il nome di *aedituus minister* (VI, 2213), o si denominarono semplicemente *aeditui*, omettendo talora la quali-

(1) Grande fu la benevolenza di Augusto verso gli infimi strati della popolazione; anche a servi e liberti egli concesse cariche nel culto imperiale del *Genius Augusti*, da lui completamente riorganizzato. Vedi su ciò Boissier, *La Religion Romaine d'Aug. aux Antonins*. Paris, 1874, I, 2, par. 3.

fica (1). Nei templi dove il basso personale non fu ufficialmente riconosciuto, il sovrintendente mantenne il semplice nome di *aedituus*, senz'altre aggiunte (2). Ricordiamo infine che, nella più bassa classe di *aeditui*, poterono essere ammesse e riconosciute ufficialmente anche le donne; vi furono così in Roma delle *aedituae ministrae*.

Io credo che, ricostruita così la teoria degli editui, liberata dalle asserzioni troppo assolute e imprecise del Marquardt, possa essere accettata, nè debba apparire debole di testimonianze.

§ 2. — I " Camilli ".

Presso parecchi sacerdozî romani e in varie cerimonie religiose noi troviamo che fanciulli di ambedue i sessi erano designati a compiere funzioni varie secondarie, come assistenti al culto. Ordinariamente erano a tale uso adibiti i figli stessi dei sacerdoti; ma, nel caso che questi mancassero o non fossero sufficienti al bisogno, erano rimpiazzati da altri fanciulli, scelti secondo norme nettamente stabilite dalle leggi del culto (3).

L'uso di fanciulli impuberi come aiutanti nelle cerimonie sacre corrisponde al concetto, generalmente diffuso in tutte le antiche religioni, che lo stato di castità, temporaneo o perma-

(1) Come in VI, 2202, 2211, 2214; XIV, 73, 4257, etc. E sempre più mi convinco che questa riorganizzazione degli editui sia stata opera di Augusto, se la confronto con le nuove istituzioni municipali di Roma a lui dovute. Egli divise la città in 14 rioni e 265 quartieri: ciascuno di questi era amministrato da 4 funzionari, detti *magistri vicorum* e designati dalla autorità superiore, al di sotto dei quali esisteva un collegio di 4 schiavi, detti *ministri*, subordinati ai primi. *Magistri* e *ministri* facevan parte della stessa amministrazione ed entravano insieme in carica (cfr. Boissier, op. cit., pp. 155-6). Il parallelismo fra i due istituti è dunque veramente straordinario.

(2) Per es., 4 iscrizioni (VI, 2204, 2205, 2206, 2207) ricordano per la *aedes Concordiae* 4 editui, senz'altra qualifica; tutte però persone considerevoli. E, corrispondentemente, da nessuna epigrafe risulta che i serventi di codesto tempio fossero ufficialmente riconosciuti come editui (ministri).

(3) Vedi a questo proposito come Dionisio (II, 22) spiega la partecipazione al culto delle mogli e dei figli dei sacerdoti, riferendosi alle istituzioni di Romolo. Però egli crede, a torto, che questo ordinamento sia di importazione greca.

nente, debba richiedersi non soltanto a coloro che vengono direttamente in comunione con la divinità, cioè ai sacerdoti, ma anche a chi è incaricato di mansioni di secondaria importanza presso di quelli. Sembrando d'altra parte per costoro, destinati a modesti servigi, troppo grave una speciale imposizione di purità, il senso pratico suggerì di adibire fanciulli non ancor pervenuti all'età pubere o, per lo meno, non ancora usciti dallo stato di castità (1).

Codesti assistenti ai culti sono nella religione greca veramente legione (2); nè mancano presso popoli di indole e civiltà totalmente diverse: e una notevole rassomiglianza con le *camillae* romane, di cui ci apprestiamo a parlare, offrono quelle fanciulle che noi troviamo nei templi giapponesi di rito shintoista, incaricate di danzare durante le cerimonie sacre e di assistere alle funzioni del culto; esse sono ordinariamente figlie di " kannuschi " (sacerdoti shintoisti) e rimangono addette al santuario fino all'epoca di maritarsi (3).

Il nome dato dai Romani ai giovani aiutanti dei loro sacerdoti è originariamente quello di *camilli* e *camillae* (4). È difficile stabilire con sicurezza l'etimologia di questo nome. Varrone collegava questa parola con *Casmilus*, il nome sotto il quale Mercurio era in Samotracia venerato come servo degli dei (5); in ciò seguìto da Plutarco (6). Dionisio d'Alicarnasso ravvicinava invece (II, 22) *camilli* con *καδμῖλοι*, nome portato dagli assistenti ai culti presso gli Etruschi e i Pelasgi. Varie sono le opinioni dei moderni, mantenendosi alcuni favorevoli alla identificazione fatta già dagli antichi di *καδμῖλος* con *camillus*, preferendo altri di collegare questo vocabolo con qualche radice latina (*cas*) (7).

---

(1) Fehrle, *Die Kultische keuschheit im Altertum*, Giessen, 1910, p. 112 sg.

(2) Una diligente esposizione in Fehrle, op. cit., p. 113 sgg.

(3) Turchi, *Manuale di storia delle Religioni*, Torino, 1912, p. 98.

(4) Servio, *Aen.*, XI, 558: *Ministros enim et ministras impuberes camillos et camillas in sacris vocabant*. Cfr. XI, 543.

(5) *Ling. lat.*, VII, 34.

(6) *Numa*, 7: *καὶ τὸν ὑπηρετοῦντα τῷ ἱερεῖ τοῦ Διὸς ἀμφιθαλῆ παῖδα λέγεσθαι Κάμιλλον, ὡς καὶ τὸν Ἑρμῆν οὕτως ἔνιοι τῶν Ἑλλήνων Καδμῖλον ἀπὸ τῆς διακονίας προσηγόρευον.*

(7) Gli studi dei moderni sull'argomento sono esposti nell'art. del Samter in *R.-E.* L'identificazione *camillus* con *καδμῖλος* è sostenuta dal

Di queste etimologie pertanto nessuna arriva a soddisfare. È in ogni modo evidente che a due condizioni dovrà rispondere ogni soluzione che si voglia proporre per tale questione: essa dovrà cioè concludere o per un'origine puramente romana del nome o per una importazione di esso tanto antica da potersi considerare contemporanea all'istituzione dei più antichi sacerdozi romani (flaminato, Arvali) o di poco posteriore; secondariamente, se si consideri la parola d'importazione straniera, essa non dovrà obbligarci a supporre necessaria una corrispondente importazione dell'istituto stesso dei *camilli* nella religione (come costringono a fare le ipotesi di Varrone, di Dionigi, di Plutarco, accettate in parte dai moderni); codesto istituto infatti, in quanto è un portato della rituale partecipazione della moglie e dei figli al culto domestico diretto dal padre, è parte eminente del patrimonio religioso originario dei Romani.

Io preferisco per ora credere che siamo qui di fronte non ad una parola straniera, ma a un vocabolo indigeno latino, di-

---

Berger, " Mémoires de la Société de Linguistique de Paris „, 1884, p. 140 sgg e dal Keller, *Lat. Volksetymologie*, p. 241. *Cadmilos* o *Casmilos* è il nome di Hermes adorato come accolito e compagno dei *Cabiri* pelasgici, nella religione ch'ebbe suo centro specialmente nelle isole di Lemnos e di Imbros; e *καδμῖλοι* o *κασμῖλοι* furono dipoi chiamati i fanciulli addetti al culto nei Misteri di Samotracia. Di qui l'istituzione e il nome sarebbero passati, attraverso l'Etruria, in Roma. Questa ipotesi è contraddetta dal fatto che *camilli* si chiamavano tutti i fanciulli di genitori patrizi indipendentemente da ogni incarico religioso pubblico (Festi *Ep.*, p. 66 T. P. *Alii dicunt omnes pueros ab antiquis camillos appellatos, sicut habetur in antiquo carmine, cum pater filio de agricultura praeciperet: Hiberno pulvere, verno luto, grandia farra, camille, metes*), non meno che dal carattere indigeno dell'istituzione, confermato dalla presenza dei *camilli* per eccellenza (il *flaminius* e la *flaminia*) presso la coppia flaminica diale. I tentativi di collegare *camillus* con una radice *cas* (fra i quali va annoverato quello del Schweizer-Sidler, che riconnette *camillus* a *carmen* [" Zeitschrift für vergl. Sprachf. „ I, 512] e l'altro assai più antico dell'Hartung [*Religion der Römer*, I, p. 157-8] che ravvicinava *camillus* a *castus*) presuppongono una forma originaria *casmilus*, la quale non è testimoniata; poichè il luogo di Festo: *sacrorum ministrum κάσμιλον appellabant* (Festi *ep.*, p. 44 T. P.), è manifestamente sotto l'influsso dell'identificazione della parola latina con la greca *κασμῖλος*, come anche dimostrano i caratteri greci usati per codesto vocabolo (cfr. Samter, art. cit.).

rettamente proveniente da una radice indo-europea (1). Questa radice potrebbe esser per avventura quella stessa da cui dipende il greco *γάμος*; sicchè il latino *camillus* corrisponderebbe in certo modo al greco *γαμήλιος*, vocabolo che designa appunto tutto ciò che è attinente al *γάμος*, alle nozze. Qualora si voglia accettar questa ipotesi, l'espressione *puer camillus* equivarrebbe a *puer nuptialis*; e si designerebbe con essa il fanciullo nato da un matrimonio contratto con tutte le regole della religione, cioè da una confarreazione. E saremmo così perfettamente d'accordo anche con la riferita informazione di Festo (2).

Sembra dunque che, nei tempi più antichi, questo nome sia stato dato in generale ai fanciulli delle famiglie patrizie (3), al di fuori da ogni funzione religiosa, beninteso del culto ufficiale (4). A me sembra d'altra parte evidente che la organizza-

---

(1) A radice indo-europea fa risalire direttamente questo vocabolo anche il Fick (v. in Walde, *Lat. Etym. Wört.*[1]), il quale lo avvicina però, col significato di " addetto, servo di un tempio ", all'iranico *cumal* = schiava. Altre ipotesi in Walde[2], p. 119.

(2) Oltremodo significativo è il passo seguente di Festo (p. 44 T. P.): *Cumerum vocabant antiqui vas quoddam quod opertum in nuptiis ferebant, in quo erant nubentis utensilia, quod et camillum dicebant, eo quod sacrorum ministrum κάσμιλον appellabant.*

Si chiama dunque *camillum* un oggetto che è in stretta connessione col matrimonio religioso; come abbiamo supposto *camillus* = *puer nuptialis*, così qui ci vien testimoniato *camillum* = *vas nuptiale*. Chi legga poi per intero il passo si convince anche meglio della verità di quanto fu osservato: che cioè l'ortografia *κάσμιλον* (invece di *camillum*) è dovuta alla erronea identificazione del vocabolo latino col greco *κασμῖλος*. Questo *cumerum* o *camillum* di cui parla Festo è evidentemente da riconnettersi con la *camella* di cui parla Ovidio, *Fasti*, IV, 779; del qual vocabolo la forma originaria dev'essere appunto *camilla*. Cfr. Rossbach, *Unters. über die Röm. Ehe*, p. 320.

(3) V. di Festo, oltre il luogo già citato (p. 66 T. P.), anche a p. 30: *Camillus proprie appellabatur puer ingenuus.*

(4) È necessario aggiungere quest'ultima determinazione che l'Hunzicker (art. *camilli* in *D. S.*) nella sua definizione trascura. Dire infatti che a tutti i fanciulli di nobile famiglia si dava il nome di *camilli* non porta di conseguenza che questo nome dovesse essere estraneo ad ogni incarico sacro. Non esiste infatti fanciullo patrizio il quale non agisca nel culto domestico come aiutante del padre (Cfr. De Marchi, *Culto privato di Roma antica*, I, p. 110); sicchè può benissimo supporsi che tutti i fanciulli patrizi portassero il nome di *camilli* in quanto ricoprivano un certo grado nella religione privata.

zione dei più antichi culti dello Stato romano (come quelli dei flamini) fu fondata sul tipo della religione domestica, e che per quest'unica ragione il flamine era assistito nel suo ministero religioso dalla moglie (*flaminica*); sarà facile quindi dedurre che anche i figli dei flamini dovettero, fin da principio, come i fanciulli nell'antica famiglia, aiutare il padre nel servizio del culto. D'altra parte il flaminato era riservato ai soli patrizi, uniti in matrimonio per " confarreatio „ (1): se è vero quindi quanto Festo ci attesta, i figli dei flamini portavan già di diritto il nome di *camilli*; ma essi, coll'elezione del padre al flaminato, divenivano i figli di una famiglia che i Romani consideravano come l'esemplare della vita domestica dei tempi più antichi, divenivano cioè i *camilli* per eccellenza. Questa denominazione, caduta poi in disuso per i fanciulli patrizi che non ricoprivano alcun ufficio religioso, rimase invece a designare i figli dei flamini, addetti al culto dei genitori.

Come già dicemmo, anche per altri sacerdozi e per altri culti si volle valersi dell'opera di fanciulli assistenti; di essi parleremo particolarmente più oltre. Per ora basti dire che anche questi si chiamarono *camilli*; e si volle che le loro condizioni fossero simili a quelle dei *camilli* tipici, cioè dei flaminali. Le condizioni a tutti costoro imposte furono, oltre ad un'età inferiore alla pubere (2), la provenienza da genitori confarreati (3) e la qualità di *patrimi et matrimi* (4). Quando però, nell'anno 300 a. C., con la " lex Ogulnia „, fu ammessa la plebe ai sacerdozi (5), non si richiese più per codesti fanciulli la nascita

---

(1) Gaio, I, 112.

(2) *Investes*, Servio, *Aen.*, XI, 543; *impuberes*, XI, 558. Macrobio, *Sat.*, III, 8, 7: *Romani pueros et puellas nobiles et investes camillos et camillas appellabant.* Cfr. Servio, *Aen.*, VIII, 545; Gell., I, 12. Dionisio (II, 22) dice che una fanciulla poteva servire come *camilla ὅσον ἂν ᾖ χρόνον ἁγνὴ γάμων.* Però da tutte le altre fonti ci consta che il limite d'età non era segnato dalle nozze, ma dalla pubertà.

(3) Servio, *Georg.*, I, 31.

(4) *Patrimi et matrimi* sono i fanciulli che hanno ambedue i genitori viventi, " quibus matres et patres adhuc vivunt „, dice Festo (p. 90 T. P.). In greco ἀμφιθαλεῖς (Dionisio, II, 22; Dione Cass., LIX, 7).

(5) Wissowa, p. 492.

da genitori confarreati, tranne che pei figli dei flamini (1); di solito infatti funzionavano da *camilli* i figli stessi dei sacerdoti (2), che da questo momento poterono essere anche plebei. Ed allora, obliterata l'antica denominazione di *camilli* (tranne, al solito, che pei figli dei flamini), si designarono questi giovani assistenti con la caratteristica loro principale, col nome cioè di *pueri patrimi et matrimi* (3).

Tenendo conto della notizia di Macrobio (*Sat.* I 6, 13) che, dall'anno 218 a. C., anche i figli dei liberti furono ammessi a partecipare alle cerimonie sacre celebrate secondo il rito greco, si è voluta stabilire la seguente teoria: dopo il 218, i fanciulli assistenti nei culti dell'antico rito romano si designano, per distinguerli dagli altri, con la denominazione di *pueri ingenui patrimi et matrimi* (4). Questa conclusione è però in realtà erronea; e mal si apporrebbe chi credesse poter riconoscere le cerimonie di rito romano dalla partecipazione ad esse di *pueri ingenui*: poichè noi ne troviamo in funzioni che sono di rito indubbiamente greco.

Il Wissowa, accennando di sfuggita a tale questione (5), sembra accedere alla teoria posta dall'Hunzicher e dal Marquardt; egli infatti, studiando quelle caratteristiche processioni ordinate a più riprese in Roma per supplicare gli dei, con intervento di cori di vergini e di fanciulli (pel solito in numero di 27), nota che codeste processioni, studiate nel loro svolgimento, grazie alla descrizione che Livio ha lasciato della prima di esse (XXVII 37, 11, anno 207), si manifestano di rito completamente

---

(1) Cfr. Hunzicher e Samter, articoli cit. in *D. S.* e *R.-E.* Pei figli dei flamini vedi Macr., *Sat.*, III, 8, 7: *nobiles*.

(2) Hunzicher, art. cit. La regola è esposta da Dione Cassio, II, 22.

(3) Così si spiega il luogo di Servio (*Georg.*, I, 31): *unde confarreatio appellabatur ex quibus nuptiis patrimi et matrimi nascebantur*. Il glossatore ha qui contaminato due stati di fatto appartenenti a due epoche differenti: in realtà *patrimus et matrimus* significa solo: " che ha ambedue i genitori viventi ". Ma siccome, in tempi più tardi, si denominarono così quei fanciulli che tenevano il posto degli antichi camilli nati da confarreazioni, così Servio ha usato per significare questi la denominazione data ai loro successori.

(4) Hunzicher, art. cit.; Marquardt, I, p. 275.

(5) *Religion*², p. 426 e 496.

greco (1). E ciò è confermato sopratutto dal fatto che esse sono di solito ordinate dai libri sibillini e presiedute dai Decemviri s. f. Questa osservazione del Wissowa è giustissima; ma egli aggiunge (pag. 426, nota 3) che di carattere diverso sono da considerare le funzioni sacre tenute nel 218, nel 190 e nel 108, con intervento di *pueri* e *puellae ingenui patrimi et matrimi*. In realtà, in codeste cerimonie nulla ci si offre di diverso, se non il numero dei fanciulli assistenti e qualche particolare del rito; e non c'è ragione alcuna per ritenere codesti atti cultuali di specie differente da quelli sopra nominati, nè il " rito greco " è in essi meno evidente.

Nel 218, in seguito ai soliti prodigi avvenuti nella città, consultati i libri sibillini, si stabilisce una serie di sacre cerimonie; si trovano enumerate in Livio (XXI, 62), mentre i particolari sul compito assegnato ai *patrimi* si leggono in Macrobio (I, 6, 13). Nel 190, per consiglio dei libri sibillini, si fa una supplicazione con un sacrificio, al quale vengono adibiti 10 fanciulli e 10 fanciulle (Livio, XXXVII, 3, 6). Nel 108 si compie la stessa cerimonia con 30 fanciulli e 30 fanciulle (Obs., 40). Ora si esaminino le caratteristiche fondamentali dei fatti del primo gruppo e si confrontino con quelle di questi ultimi; ci persuaderemo che siamo di fronte a riti della stessa specie.

Si prendano come tipiche pel primo gruppo le cerimonie del 207 (Livio, XXVII, 37, 11) e del 200 (Livio, XXXI, 12, 9). Ambedue sono ordinate dai libri sibillini, dirette dai decemviri; la divinità in special modo onorata è *Iuno Regina* (2); in onore di essa 27 vergini cantano un carme (3).

---

(1) Simili sono quelle descritte in Livio, XXXI, 12, 9, e in Giul. Obseq. 27, 34, 36, 43, 46, 48, 53. Il Wissowa vi riconnette anche il coro formato di *pueri XXVII patrimi et matrimi et puellae totidem*, i quali cantarono il Carme Secolare di Orazio. Sull'uso di questi cori di vergini e di giovanetti in Grecia, v. Fehrle, *Kultische Keuschheit*, p. 113 sgg.

(2) Nel 207 si fa all'Juno Regina dell'Aventino (Wissowa², p. 189-90) un'offerta di due vacche bianche; nel 200 le si reca un *donum*, di cui non è specificata la natura. Le vacche bianche costituiscono in Grecia l'offerta rituale per Hera e per Dione. Cfr. Roscher, *Juno und Hera*, p. 25, nota 34, e p. 90.

(3) Queste caratteristiche compaiono anche in tutte le cerimonie della stessa specie enumerate da Giulio Ossequente. Così in 27 *a* troviamo: *Virgines ter novenae canentes urbem lustraverunt* (cfr. 34, 36, 53, ed. Rossbach,

Passiamo alle cerimonie del secondo gruppo. Per tutte e 3 è nettamente stabilita dai testi la condizione per noi essenziale; esse si sono cioè compiute dietro responso dei libri sibillini e per cura dei decemviri s. f.; per due di esse non è nominata nei testi la divinità a cui ci si poteva particolarmente rivolgere; ma, nella festa del 218, sappiamo che si dedicò a *Iuno Regina* un *signum aeneum*. Il parallelismo è dunque perfetto: resta da esaminare la parte data ai *pueri patrimi et matrimi*. Nel 218, *acta obsecratio est pueris ingenuis itemque libertinis* (1), *sed et virginibus patrimis matrimisque pronuntiantibus carmen*. Nel 190 *decem ingenui*, *decem virgines*, *patrimi omnes matrimique ad id sacrificium adhibiti*. Nel 108 si fa il sacrificio *per triginta ingenuos patrimos et matrimos totidemque virgines*.

Chi non si accorge che la differente condizione e qualità dei " patrimi „ è causata soltanto dal differente atto cultuale ch'essi han da compiere nel rito? Tutte le cerimonie dei due gruppi fin qui enumerate sono della stessa specie; i libri sibillini davano certamente di ciascuna di esse una minuziosa descrizione, regolando i vari atti del culto. Queste norme si estendevano naturalmente anche all'uso dei fanciulli assistenti; laddove si trattava semplicemente di un canto e di una danza sacra, ci si contentava di prescrivere il coro delle 27 vergini, insieme o no ai 27 giovanetti; laddove la funzione affidata loro era di diversa o maggiore entità (per esempio un sacrifizio), si determinava volta per volta il numero e la qualità di questi fanciulli, in un caso permettendosi che accedessero alla cerimonia i libertini (come nel 218), in un altro riservandola solo agli " ingenui „ (2).

1910); oppure, in 43: *virgines viginti septem dona canentes tulerunt*. I doni sono offerti a Juno Regina: *per virgines viginti septem cantitatum. Signa cupressea Junoni Reginae posita* (46; cfr. 48, *cupressea simulacra*).

(1) " Dies hier als Ausnahme „ nota il Wissowa[2], p. 496, nota 1. Una eccezione nell'eccezione dunque! Proprio quanto basta per ricondurre il fatto alla regola generale.

(2) Debbo anche fare osservare che, nei tre luoghi citati, di Macrobio, di Livio e di Ossequiente, la qualità di *ingenuae* non è mai data specificatamente alle *puellae*, benchè si possa forse intenderla come sottintesa. Così Livio, invece di *decem ingenui, decem virgines, patrimi omnes matrimique*, avrebbe potuto dire: *decem pueri, decem virgines, ingenui omnes et patr*..... Osservazioni simili si posson fare per gli altri due luoghi.

Per qual ragione dunque ci si è lasciati indurre a distinguere in due categorie fatti che, in realtà, ne formano una sola? Probabilmente soltanto perchè faceva difficoltà ammettere che a funzioni di rito greco intervenissero quei *pueri* e *puellae ingenui patrimi et matrimi* i quali, in quanto si identificano con gli antichi *camilli*, rappresentano un istituto prettamente romano. E si dimentica così che le matrone di Roma, quelle stesse che troviamo alle antichissime feste delle *Nonae Caprotinae* e delle *Matronalia*, partecipavano a quel *sacrum anniversarium Cereris*, che si celebrava con rito completamente greco (1); e si dimentica che alle feste notturne di Bona Dea, inspirate totalmente alle greche *παννυχίδες* (2), intervenivano, insieme alle matrone, le vestali romane!

Mi sembra così sufficientemente dimostrato l'errore di chi vuole riconoscere le funzioni dei fanciulli assistenti nei culti di rito romano dal nome loro dato di *pueri ingenui patrimi et matrimi*; mentre è evidente che tale qualifica spetta ai figli di buona condizione, sol per distinguerli dai libertini e che con codesta stessa qualifica essi intervengono anche a cerimonie di rito puramente greco.

Così messe in chiaro le cose, passiamo brevemente in rassegna i fanciulli veramente addetti ai sacerdoti e ai " sacra " dell'antica religione di Roma.

L'esistenza dei *camilli* assistenti ai sacerdoti ci è documentata per la coppia flaminica diale (3), per i *Fratres Arvales* (4), e per i *Curiones* (5); ma possiamo facilmente supporre che ve ne fossero addetti a quasi tutti gli altri sacerdozi o che almeno

---

(1) V. Wissowa[2], rispettivamente a p. 184, 185, 300 sgg.

(2) Jordan, *Der Tempel der Vesta und das Haus der Vestalinnen*. Berlin. 1886, p. 52 e 56.

(3) Festi *Ep.*, p. 66 T. P.; Plut., *Numa*, 7.

(4) Henzen, *Acta fratrum Arvalium*, p. 12 sgg.

(5) Dionisio, II, 22. 64. Originariamente si distinguevano i *Curiones*, che sono i capi (*magistri*) delle Curie, dai *flamines Curiarum* o *flamines Curiales*, che ne erano i Sacerdoti (Festi *Ep.*, p. 45 T. P.). Sacerdoti divennero i Curioni solo più tardi, quando le Curie non ebbero più alcun significato religioso (Cfr. Wissowa[2], p. 482, nota 2). Così si spiega come Dionigi d'Alic. (II, 64) e Varrone (*ling. lat.*, V, 83) considerino i *Curiones* come sacerdoti.

vi fossero temporaneamente chiamati a prestarvi servizio in occasioni straordinarie di sacrifizi, di banchetti sacri, o per altri simili casi.

Sui *camilli* dei Curioni non abbiamo alcuna notizia, ma ci si può fare facilmente un'idea di costoro, confrontandoli con quelli addetti al flamine e alla flaminica di Giove; poichè anche il culto affidato ai Curioni non è originariamente altro che un culto flaminale.

Dagli Atti degli Arvali sappiamo che al banchetto sacro del Collegio partecipavano " *pueri praetextati patrimi et matrimi senatorum fili (numero) IIII* " (1). Questo banchetto chiudeva quella serie di feste che gli Arvali celebravano dal 19 al 29 Maggio, identiche alle antiche *Ambarvalia* (2). Esso era offerto nella casa del presidente del Collegio, e vi assistevano quattro fanciulli, possibilmente figli dei sacerdoti e, in ogni modo, di genitori viventi di rango senatorio. Fa giustamente notare il Mommsen (3) che è qui conservata una delle più antiche consuetudini della famiglia romana, in cui era norma che i fanciulli maschi presenziassero ai banchetti che il padre offriva agli ospiti, sedendo all'estremità del *lectus convivalis*. Il Mommsen però non crede di doverli identificare con dei *camilli*, perchè non erano essi ad offrire il sacrificio agli dei, essendo tale mansione riservata al *magister* o al *kalator* (4). Giustamente però il Wissowa ha fatto rilevare (p. 496, nota 3) come questa distinzione sia inopportuna: se infatti il sacrificio era affidato a ministri più importanti, non è questa una ragione per negare la condizione di *camilli* ai fanciulli assistenti.

Importanza assai maggiore conservarono sempre i fanciulli addetti alla coppia flaminica diale: se non si potevano scegliere fra i figli stessi dei flamini si reclutavano fra i fanciulli impuberi, *patrimi et matrimi*, nati da genitori confarreati. Essi mantennero sempre il nome di *camilli*, anche quando questa

---

(1) Henzen, *Acta*, p. 12.

(2) Wissowa², 561 e 562 (anche nota 5). Cfr. Henzen, *Acta*, p. ix.

(3) *Reden und Aufsätze*, Berlin, 1905, p. 285 sg.

(4) Henzen, *Acta Arvalium*, p. 132 sg. Della stessa opinione del Mommsen che già ebbe ad esprimerla in *Grenzboten*, 1870, 1, p. 172) sono l'Henzen (*Acta*, p. vii e p. 15) e il Samter (art. cit. in *R.-E.*).

denominazione fu caduta dall'uso; e, più precisamente, si chiamò *flaminius camillus* il fanciullo posto al servizio del flamine Diale, e *flaminia camilla* o *flaminia sacerdotula* la fanciulla addetta alla flaminica (1).

Di speciali servigi prestati dalla *camilla* in occasione di pubbliche cerimonie non sappiamo. Io credo invece debba identificarsi col *flaminius camillus* quello di cui le fonti ci parlano in occasione di due funzioni religiose.

Varrone ci parla di un *camillus qui nuptiis cumerum fert* (2). Ora è noto che, nel matrimonio religioso stretto con la confarreazione, l'unione era consacrata dalla presenza del Pontefice Massimo e del flamine Diale (3): l'intervento di quest'ultimo ci fa credere che il fanciullo che assisteva all'offerta sacrificale fosse appunto il camillo addetto al servizio del flamine Diale.

Da Arnobio e Cicerone abbiamo pure notizia di un *puer patrimus et matrimus*, il quale, nella *Pompa Circensis*, guidava il carro recante le immagini degli dei da esporsi nel Circo (4).

Ora, quando si consideri che i *Ludi Romani*, in occasione dei quali aveva luogo questa processione, altro non sono che una continuazione degli antichi ludi che si davano al popolo ogni volta che un qualche duce trionfasse, che della processione trionfale era appunto un'imitazione la *pompa circensis*, che infine questi giuochi e queste feste erano intieramente consacrate a Juppiter (5), si capirà come sia più che probabile che il fanciullo ivi adibito fosse appunto quello particolarmente addetto al culto di Giove, cioè il *flaminius camillus*. In ogni modo, a maggior conferma di quanto più addietro abbiamo dimostrato, abbiamo qui un bell'esempio di un *puer* detto semplicemente

(1) *Flaminius camillus puer dicebatur ingenuus patrimes et matrimes qui flamini Diali ad sacrificia praeministrabat: ministros enim antiqui camillos dicebant:* Festi *Ep.*, p. 66 T. P. *Flaminia dicebatur sacerdotula, quae flaminicae Diali praeministrabat, eaque patrimes et matrimes erat*: Festi *Ep.*, p. 66 T. P.

(2) Varr., *ling. lat.*, VII, 34.

(3) Servio, *Georg.*, I, 31: *Per Pontificem Maximum et per flaminem Dialem, per fruges et molam salsam coniungebantur.*

(4) Cicer., *De har. resp.*, 23; Arnobio, IV, 31.

(5) Cfr. Wissowa², p. 127.

patrimus et matrimus, benchè addetto ad un rito schiettamente romano.

Per finire l'enumerazione dei camilli dell' antica religione romana, ricordiamo l'informazione di Festo (p. 407 T. P.) dalla quale apprendiamo che da *virgines ingenuae patrimae et matrimae, cives* doveva esser confezionata la *rica* della *flaminica*. Qualcuno ha affermato debba qui trattarsi della *camilla* stessa della flaminica (1): questo non mi sembra probabile, perchè l'altro luogo di Festo già citato affermava chiaramente essere una sola la *flaminia sacerdotula*; mentre qui si parla di più fanciulle: nè siamo, evidentemente, di fronte a un plurale iterativo.

Questi, e non altri, sono i fanciulli assistenti di cui ci è testimoniata la presenza nei culti ufficiali di rito romano.

---

(1) Così il Fabia, art. *patr. et matr.* in *D. S.*

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Lit. Salussolia, Torino

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

OFF. FOTOTECNICA ING. MOLFESE TORINO

folio 15 prima del restauro

folio 15 dopo il restauro

Facsimile di una pagina del codice k

OFF. FOTOTECNICA ING. MOLFESE TORINO

pagina del codice k folio 15 dopo il r

INDICE

DEL VOLUME XLVIII

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1912.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Aberdeen** University. Studies, N. 42-51.

* **Acireale.** R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti. Rendiconti e Memorie, ser. 3ª, vol. VI, 1909-1911. Memorie della Classe di lettere.

* **Alba.** Alba Pompeia, ann. IV, 3-6.

Albany. New York State Education Department. Report of higher Education in the State of New York, 1910.

* **Albuquerque.** University of New Mexico. Bulletin. — Sociological ser., vol. I, n. 2. — Physics ser., vol. I, 1. — Catalogue ser., vol. 25.

America. American Philological Association. Transaction and Proceeding, 1910, vol. XLI.

* **Amsterdam.** Royale Académie des sciences. Verhandelingen Afd. Natuurkunde, 1e Sect., Dl. X, N. 2; XI, 1, 2; 2e Sect., XVI, 4, 5. —Verhandelingen Afd. Letterkunde, N. R., Dl. XII, N. 1. — Zittingsverslagen Afd. Natuurkunde ann. 28 mei 1910 tot 28 april 1911; Dl. XIX, 1ª e 2ª. — Proceedings of the Section of Sciences, vol. XIII, 1ª-2ª part. — Verslagen en Mededeelingen Afd. Letterkunde, 4e Reecks DL. 10, Jaarboek, 1910. — Prijsvers.

— Wiskundig Genootschap. Register of de Wiskundige Opgaven, 1875-1910, 8°. — Wiskundige opgaven met de opiossinge, Dl. X, 2; Dl. XI, 3.

* **Angers.** Société d'Études Scientifiques; Bulletin, Nouv. Sér., XLe an., 1910, 8°.

* **Arpino.** Museo Civico. Bollettino, an. I, N. 1-2.

* **Baltimore.** Johns Hopkins University. Circular, 1911, N. 4-8. — Studies in Historical and Political Science, Ser. XXIX, 1, 2.

— Peabody Institute: Forty-Fifth Annual Report, June 1, 1912.

* **Barcelona.** Real Academia de Ciencias y Artes. Personal académico, año 1911-1912. — Memorias, III época, vol. III, N. 3; IX, 1; X, 3-12.

* **Basel**. Naturforschende Gesellschaft: Verhandlungen, Bd. XXII.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino, anno VIII (1911), N. 4; IX, (1912), 1-3.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Rapporten van de Commissie in Nederlandsch. Indië vooc Oudhedikundig onderzoek of Java en Madoera, 1910, 1911, 1912. — Tijdschrift, Dl. LIV, Afl. 1-6. — Verhandelingen, Dl. LIX, 3 Stuk. — Notulen, Deel XLIX (1911), Afl. 3, 4; L (1912), 1, 2.

— R. Magnetical and Meteorological Observatory. Observations, vol. XXXI, 1908. — Verhandelinge, N. 1, 2.

* **Bergen**. Bergens Museums Aarbog, 1911, 1912, 2det hekte. — Aarsberetning for 1911. — Skrifter, Bd. II, N. 1.

* **Berkeley**. University of California: Publications: Bulletin, III ser. vol. V, N. 3. — Chronicle, an Official Record, vol. XIII, N. 2-4. — American Archaeology and Ethnology, vol. IX, N. 3; X, 1-3. — Botany, vol. IV, 11. — Geology, vol. VI, N. 5-19. — Modern Philology, vol II, 2-3. — Physiology, vol. IV, 4-7. — Zoology, vol. VII, N. 7-8, 15; VIII, N. 1 — Pathology, vol. II, 1-7. — Memoirs, vol. I, N. 2.

* **Berlin**. K. Preussische Akademie der Wissenschaften. Acta Borussica: Handel-, Zoll- und Akzisepolitik Brandenburg-Preussen bis 1713. I. Bd. — Denkmäler der Preuss. Staatsverwaltung im 18. Jahrhundert., 10. Bd.; 5. Bd., 2. Hälfte. — Sitzungsberichte, 1911, N. XXXIX-LIII; 1912, I-VIII. — Abhandlungen, 1911.

— K. Preussisches Geodätisches Institut. Weröffentlichung, N. F. N. 53.

** — Historische Gesellschaft. Jahresberichte der Geschichtswissenschaft, XXXIII. Jahrgang, 1910.

— Charlottenburg. Physikalisch-Technische Reichsanstalt: Tätigkeit, 1911.

* **Beyrouth**. Université St.-Joseph. Al-Machriq. 1912, XV an., N. 1.

* **Bologna**. R. Accademia delle Scienze dell'Istituto. Classe di Scienze morali. Memorie, ser. I, t. II (1907-1908); III (1908-1909); IV e Supplemento. — Sezione di Scienze giuridiche, ser. I, t. V, fasc. unico, t. VI. — Sezione di Scienze storico filologiche, ser. I, t. V, fasc. unico, t. VI. — Classe di Scienze fisiche Memorie, ser. VI, t. VIII, 1910-1911. — Rendiconto. Classe di Scienze morali, ser. I, vol. I (1906-1907; 1907-1908); II (1908-1909); III (1909–1910); IV (1910-1911); V (1911-1912). — Classe di Scienze fisiche, N. S., vol. XV (1910-1911). — Premio Elia De Cyon.

— Osservatorio della R. Università. Osservazioni meteorologiche, 1910-1911.

* — Società Medico-Chirurgica e della Scuola Medica. Bullettino d. scienze mediche, Ser. VIII, vol. XII, fasc. 1-12. — Omaggio a Augusto Murri.

* — Biblioteca Comunale. L'Archiginnasio. An. VI, 1911, N. 6; VII, 1-6.

* **Bordeaux**. Faculté des Lettres et des Universités du Midi. Bulletin hispanique, XIV (1912). — Bulletin italien, t. XII (1912). — Revue des études anciennes, t. XIV (1912).

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Proceedings, vol. XLVI, 18-24; XLVII, 1-21.

— Massachusetts General Hospital. Publications, vol. III (1911), N. 3. — Contribution of the Nineteenth Century to a Living Pathology.

* **Brescia**. Ateneo. Commentari. 1911.

* **Bruxelles**. Académie Royale de Belgique. Annuaire, 1912. — Classe des sciences. Bulletin, 1911, N. 8-12; 1912, 1-7. — Mémoires, Collect. in-4°, 2ᵉ Sér., T. III, fasc. 6, 7, 8. — Mémoires, Collect. in-8°, 2ᵉ Sér., T. III fasc. 2-5, — Biographie nationale, T. XXI.

* — Société d'Archéologie. Annales, mémoires, rapports et documents, T. XXV (1911), livr. 2-4; XXVI (1912), 1-2. — Annuaire, T. XXII, 1912.

— Observatoire Royal de Belgique. Annales. Nouv. sér. Physique du Globe, T. V, fasc. II. — Annuaire astronomique pour 1913. — Annuaire météorologique pour 1912.

* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, T. XXX, fasc. 4; XXXI, 1-3.

* — Société Royale de Botanique. Bulletin, T. XLVIII (1911).

* — Société Entomologique de Belgique. Annales, T. LV-LVI. — Mémoires, T. XIX.

* — Société Géologique de Belgique. Annales, T. XXXVIII, livr. 4ᵉ; XXXIX, 1ᵉ-2ᵉ.

* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Procès verbaux des séances. — Mémoires. T. XXV (1911), fasc. 1-4. — Nouveaux Mémoires, sér. in 4°, Mémoire N. 4.

* **Bucarest.** Société Roumaine d. sciences. Bulletin, an. XX, N. 6; XXI, N. 3-5.

* **Bucureşti.** Observatorul Astronomic şi Meteorologic. Buletinul lunar, An. XXI, N. 1, 2.

* **Budapest**. K. Ungarische Geologische Reichsanstalt. Jahresbericht für 1909. — Mitteilungen, Bd. XVIII, 3-4; XIX, 2-5; XX, 1.

— Ungarische geologische Gesellschaft. Földtani közlöny. XLI kötet (1911), 9-12 füzet; XLII (1912), 1-8.

* **Buenos Aires**. Museo Nacional de historia natural. Anales, T. XXII.

* — Sociedad Científica Argentina. Anales, T. LXXII, Entrega VI; LXXIII, 1-6; LXXIV, 1-3.

— Dirección General de Estadística. Boletín mensual, T. IX (1912), N. 136-143.

— Oficina Meteorológica Argentina. Boletines (1911), N. 1.

* — Ville de Buenos Ayres. Bulletin mensuel de Statistique municipale, XXVᵉ an. (1911), N. 11-12; XXVIᵉ (1912), 1-10.

* **Cagliari**. Società storica Sarda. Archivio, vol. VII, fasc. 1-4.

* **Calcutta**. Geological Survey of India. Records, vol. XLII, (1912), part 2.

* — Asiatic Society of Bengal. Bibliotheca Indica. Collection of Oriental Works. Fascicoli: N. ser., N. 1168, 1176, 1187, 1214, 1216, 1219, 1221-1234, 1235-1238, 1240-1243, 1245, 1246, 1248-1262, 1264-1266. — Memoirs, vol. III, Nos. 2-4; IV, 1. — Journal and Proceedings, vol. VI, Nos. 7-11; VII, 1-3.

— Board of Scientific Advice for India. Annual Report, 1910-11, 8°.

— Fishery Department. Ceylon Marine biological Reports: P. IV., January, 1912, N. 20-22.

* **Cambridge**. Cambridge Philosophical Society. List of Fellows, 1912. — Proceedings, vol. XVI, p. 5-8. — Transactions, vol. XXI, N. 17, 18; XXII, 1.

* **Cambridge**. (Mass.) Museum Comparative Zool. Bulletin, vol. LIII, Nos. 5-9; LIV, Nos. 7, 9-14; LV, Nos. 1; LVI, Nos. 1; LVII, Nos. 1. — Memoirs, vol. XXV, N. 3; XXVII, 4,; XXVIII, 2; XXXV, 3; XXXIX, 2; XLV, 1. — Annual Report for 1911-1912.

* **Cape-Town**. R. Society of South-Africa. Transactions, vol. II, p. 3-5.

* **Catania**. Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti, ser. V, vol. IV (1911). — Bollettino, ser. 2ª, 1911, fasc. 19-28.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, ser. 2ª, vol. I, Disp. 1-12 (1912).

* **Chambéry**. Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Savoie. Mémoires, 4ª sér., T. XII (1ª partie); 5ª sér., T. I.

* **Charleroi**. Société d'Archéologie et de Paléontologie. Notice descriptive du Musée.

* **Chicago**. Field Museum of Natural History. — Geological Ser., vol. III, N. 9.

— John Crerar Library. 17° Annual Report, 1911.

* **Cincinnati**. Lloyd Library. Bibliographical Contributions, N. 3-6. — Bulletin. Botany ser., N. 2 (16); Pharmacy ser., N. 3 (17), 4 (18), 5 (19); Mycological ser., N. 6 (20). — Synopsis of the Section Ovinus of Polyporus.

* **Copenhague**. Académie R. des sciences et des lettres. Bulletin (Oversigt) 1911, N. 6; 1912, 1-6. — Mémoires, 7ª sér., Section des Sciences, T. VI, N. 9; T. X, 1.

Danzig. Naturforschende Gesellschaft. Katalog der Bibliothek. 2. Heft. C. Meteorologie. — D. Physik. — Schriften N. F., 12. Bd., 3, 4. Heft.

— Westpreussisches Botanisch-Zoologischer Verein. Bericht 31, 32 (1909-10).

De Bilt. Institut Météorologique Royal des Pays-Bas. Mededeelingen en Verhandelingen, N. 12-14.

Dehra Dún (U. P.). Survey of India. Professional Paper, N. 13.

* **Dublin**. Royal Irish Academy. Proceedings, vol. XXXI, 11-13, 15-20, 23, 25-31, 33, 34, 40, 41, 43, 44, 46, 53, 56-60, 63; Sect. A, vol. XXIX, N. 5, 6; XXX, 1-6; Sect. B, vol. XXIX, N. 7-9, XXIX, 1-2; Sect. C, vol. XXIX, N. 9; XXX, 1-3; 9-13. — Index serial publications, 1786-1906.

— Royal Dublin Society. Scientific Proceedings, vol. XIII (N. S.) N. 12-26; — Economic Proceedings, vol. II, N. 5.

* **Edinburgh**. Royal Society. Proceedings, sess. 1910-1911, vol. XXXI, p. 5; XXXII, 1-4; Transactions, vol. XLVIII, p. 1-2, sess. 1911-12.

— Edinburgh Geological Society. Transactions, vol. X, p. I.

* — Royal Physical Society. Proceedings, vol. XVIII, N. 4.

* **Elberfeld**. Naturwissenschaftlicher Verein. Jahres-Berichte, XIII, 1912.

* **Erlangen**. Physikalisch-medizinische Sozietät. Sitzungsberichte, XLII Bd., 1911, 8°.

— Friedrich-Alexanders-Universität. N. 292 tesi dell'anno scolastico 1911-12.

* **Firenze**. Accademia della Crusca. Atti, anno 1910-1911.

* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, serie 5ª, vol. IX, Disp. 1-4.

Firenze. R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Risultati scientifici di un viaggio nella Colonia Eritrea. — La " Rettorica „ italiana di Brunetto Latini. — R. Osservatorio di Arcetri. Fasc. 30. Osservazioni astronomiche nel 1911. — Osservazioni cristallografiche su la calcite dell'isola d'Elba.

— Unione Statistica delle Città italiane. Annuario statistico, an. IV (1911-12).

* **Fiume.** Deputazione Fiumana di Storia patria. Bullettino, vol. I, II e supplemento.

Formose. Bureau de l'Industrie productive. Icone Plantarum Formosanarum nec non et Contributiones ad Floram Formosanam. Fasc. 1°, 1911.

* **Frankfurt a. M.** Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft. 41. Bericht, Heft 1, 2; XLII, 1-4. — Abhandlungen, XXIX, 4; XXXII; XXXIII, 4; XXXIV, 1-2.

* **Freiburg i. B. B.** Naturforschende Gesellschaft. Berichte, XIX, 2.

* **Gap.** Société d'Études des Hautes-Alpes. Bulletin, XXX^e Ann., 3^e Sér., N. 38, 39.

* **Genève.** Société de Physique et Histoire naturelle. Compte rendu des Séances, XXVIII, 1911. — Mémoires, XXXVII, 3.

* **Genova.** Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti. An. XXXVIII, fasc. 6; XXXIX, 1-6.

* — Società Ligure di storia patria. Atti, vol. XXXVIII, XLIV, 1910, 1912.

* — R. Scuola Navale superiore. Relazione del Consiglio Direttivo, 1910-11.

— R. Istituto idrografico. Biblioteca. Catalogo dei periodici. Litg. 4°.

— Università popolare genovese. Rivista mensile, an. II, N. 5.

* **Giessen.** Universitätsbibliothek. N. 168, Tesi, 1911-12.

* **Göteborgs.** K. Vetenskaps-och Vitterhetssamhälles. Handlingar Fjärde följden, Häft XIII, 1910.

* **Göttingen.** K. Gesellschaft d. Wissenschaften. Nachrichten: Mathematisch-physikalische Klasse, 1911, Heft 5; 1912, 1-6, Beiheft. — Philologisch-historische Klasse, 1911, Heft 4, 1912, 1-2. — Geschäftliche Mitteilungen, 1911, Heft. 2; 1912, 1. — Abhandlungen: Mathematisch-physikalische Klasse, N. F., Bd. VIII, 4, Bd. IX, N. 3. — Philologisch-historische Klasse, N F., Bd. XII, 5, Bd. XIII, N. 2, 3; XIV, 1-2.

* **Granville.** Denison University. Bulletin Scientific Laboratories, vol. XVI, art. 8-17.

Halifax. Nova Scotian Institute of Science. Proceedings and Transactions vol. XII, p. 3; XIII, 1-2.

* **Halle.** K. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher. Abhandlungen, 94, 95. Bd. — Leopoldina, XLVII, 1911.

* **Hamburg.** Hamburgische Wissenschaftliche Anstalten. Jahrbuch, XXVII Jahrgang, 1909; XXVIII, Jahrg., 1910; Beiheft XXVII, 1909, 1-6; XXVIII, 1910, 1-7.

* **Harlem.** Société hollandaise des sciences. Arch. Néerlandaises. Sér. III A (Sciences naturelles), T. I, 3-4; T. II. — Sér. III B (Sciences naturelles), T. I, 3-4.

* **Heidelberg.** Naturhistorisch-medicinischer Verein. Verhandlungen, N. F., XI, 3-4; XII, 1.

* **Helgoland**. Biologische Anstalt. Wissenschaftl. Meeresuntersuchungen, N. F., 14. Bd. Abth. Kiel, 1912; N. F., V. Bd. Abth. Helgoland Heft 3.

* **Helsingfors**. Societatis Scientiarum Fennicae. Acta, T. XXXVIII, 4, 5; T. XL, 5, 6; T. XLI, 1; XLII, 1, 2. — Minnestal, T. XLI. 2-7; T. XLII. — Bidrag T. LXIX; LXXI, 1, 2 (Suid); LXXIII, 2; LXXV, 1. — Ofversigt: A. Matematic och Naturvetenskaper, T. LIV (1911-1912). — B. Redogörelser och Förhandlingar, T. LIV (1911-1912). — Table générale, 1838-1910.

— Meteorologische Zentralanstalt. Meteorologisches Jahrbuch für Finnland, Bd. V, VI, (1905, 1906). — Schnee- und Eisverhältnisse in Finnland im Winter 1903-1904; 1904-1905. — Niederschlags-Beobachtungen in Finnland im Jahre 1910. — Absolute Erdmagnetische Bestimmungen in Finnland ausgeführt in Sommer 1910.

Hermannstadt. Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften. Verhandlungen und Mitteilungen, LXII Bd., Jahrg. 1912; Heft 1-6.

Houston. The Rice Institute of liberal and technical learning.

* **Jena**. Medizinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft. Denkschriften, Bd. VII, 5. Liefg.; Bd. XVII. — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. N. F., XLI Bd., Heft 1-4; XLII, 1-2.

* **Inghilterra**. British Association for the Advancement of Science. Report of the Portsmouth Meeting, 1911.

* **Jowa**. State University. Physical Laboratory, vol. I, n. 4. — Laboratories of Natural history, vol. VI, n. 1-2.

* **Kasan**. Société Physico-Mathématique. Bulletin, 2e Sér, T. XVI, N. 4; XVII, 1-4.

* **Kharkow**. Société mathématique. Communications, 2e sér., T. XII, N. 2-6; XIII, 1-5.

Kodaikánal and **Madras**. Observatory. Annual Report of the Director... for 1911.

— Observatory. Bulletin, N. XXV-XXVI.

* **Königsberg**. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft. Schriften LII (1911).

* **Krakowie**. Akademii Unriejetnosci. Rozprawy: Matematyczno-przyrodniczego: Nauki matematyczno-fizyczne, Ser. III, T. II. A. — Nauki biologiczne, Ser. III, T. II, B. — Historyczno-filozoficzny, Ser. II, T. XXIX. — Filologiczny, Ser. III, T. IV. — Bibliografia slawianoznawstwa polsktego zestawil. — Materyal i prace komisyi jezykowej, T. V. — Katalog Morstinow. — Conspectus florae Galiciae criticus, vol. III. — Bulletin international: Sér. A, Sciences mathématiques, 1911, N. 10; 1912, 1-8; Sér. B, Sciences naturelles, 1911, 9, 10; 1912, 1-8; Classe de philologie. — Classe d'histoire et de philosophie, 1911, N. 7-10; 1912, 1-6.

* **Kristiania**. Videnskapsselskapet Skrifter. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse I, II Bind; Forhandlinger, Aar 1911.

* **Kyōto**. Imp. University: College of Sciences and Engineering. Memoirs, vol. III, (1912), N. 8-12.

* **Leipzig**. K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physische Klasse: Abhandlungen, XXX, 5; XXXII, 6. — Berichte, 1911, N. 7-9; 1912, 1-4. — Philologisch-historische Klasse: Abhandl., XXIX, 5-7; Berichte, 63 Bd., 1911, N. 6-10; 64 Bd., 1-3.

* — Jablonowskische Gesellschaft. Jahresbericht, märz 1912. — Preisschriften, Mathematisch-naturwissenschaftliche, XLI, N. 17; XLII, 18.

* — Gesellschaft für Erdkunde. Mitteilungen, 1911.

Léopol. Société Polonaise pour l'avancement des sciences. Bulletin, XI, 1911.

* **Liege**. Sociéte Géologique du Belgique. Annales, T. XXXVII, livrs. 4e; T. XXXVIII, livrs. 1re-3e.

Lima. Ministerio de Fomento. Ingenieros de Minas del Perú. Boletìn, N. 77.

* **Lisbonne**. Société Portugaise des sciences naturelles. Bulletin, vol. IV, fasc. 3; V, fasc. 1. — Acquario Vasco da Gama. Relatorio 1910-1911.

* — Commission du service Géologique du Portugal. Études sur le seisme du Ribatejo du 23 avril 1909. — Terrains Paléozoïques du Portugal. — Communicações, T. VIII.

* **London**. Royal Institution of Great Britain. Proceedings, vol. XIX, Part III (104).

* — Royal Society. Year-Book 1912. Proceedings: Mathematical and Physical sciences, Ser. A, vol. 86, N. 584, 591 ; 87, 592-599. — Biological sciences, Ser. B, vol. 84, N. 574-576 ; 85, 577-584. — Transactions (Philosophical), Ser. A, vol. 211; Ser. B, vol. 202. — The Record of the Royal Society of London. Third edition. — The signatures in the first Journal-Book facsimile of the signatures of the founders patrons and fellows... year 1660.

— Royal Society. International Catalogue of scientific Literature, 1911, 17 vol. 8°.

* — Royal Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXXII, N. 2-9; vol. LXXIII, N. 1-2.

* — Chemical Society. Index, 1911. — Journal, 1912, January-December. Proceedings, vol. 27, Index; vol. 28, N. 395-408.

* — Geological Society. List 1912. — Quarterly Journ., vol. LXVII, p. 4, N. 268; LXVIII, N. 269-272. — Geological Literature, 1911.

* — Linnean Society. List 1912-13. — Proceedings, 1911-12. — Journal, Botany, N. 276-278, 280, 281; Zoology, N. 213, 214. — Transactions, Botany, 2nd Ser., vol. VII, p. 16-17; Zoology, 2nd Ser., vol. XI, p. 8-10; XIV, 2-4; XV, 1-3.

* — Royal Society of Literature. Transactions, 2nd ser., vol. XXXI, p. 1-3. — Report and List of Fellows, 1912.

* — Royal Microscopical Society. Journal 1912, p 1-6.

* — London Mathematical Society. Proceedings, vol. X, p. 6; XI, p. 1-7.

* — British Museum (Natural History). National Antartic Expedition 1901-1904, vol. VI, Zoology and Botany, 1 vol. 4°. — Catalogue Chiroptera, 2nd. edition, vol. I; Megachiroptera, 1 vol. 8°. — General index... genera and species of Birds, vols I-V, 1 vol. 8°. — Catalogue Lepidoptera Phalaenae, vol. XI, Texte and Plates CLXXVI-CXCI. — Ichneumonidae, P. I, 1 vol. 8°. — Monograph of Mycetozoa, 1 vol. 8°. —

Guide to the Exhibition of animals, plants and minerals mentioned in the Bible. 2nd edition, 1 vol. 8°.

* **London**. Zoological Society. List of the Fellows, 1912. Proceedings, 1912, p. 1-4; Index 1901-1910. — Transactions, vol. XX, p. 1-2.

— International (The) Law Association. 23-24 Report Conference Berlin; Portland, Maine U. S. A., Budapest.

* **Louvain**. Université catholique. Annuaire, 1912. — Année 1911-1912. — Programme des cours 1911-1912. — Bibliographie, 5e Suppl., 1908-11. — P. Harmignie, L'État et ses agents. Étude sur le syndicalisme administratif. Louvain, 1911. — H. Pierlot, La législation scolaire de la province de Québec. Bruxelles, 1911. — E. de Moureau, Adolphe Dechamps, 1807-1875. Bruxelles, 1911. — B. Messiaen. L'appauvrissement des masses. Essai de critique sociale. Louvain, 1911. — A. E. Janssen, Les conventions monétaires. Paris, 1911. — L. Rizzi, Le privilège de l'émission des billets de banque en Italie. Lausanne, 1911. — E. Descampe, L'État neutre à titre permanent. Bruxelles, 1912. — C. Mohlberg, Radulph de Rivo, der letzte Vertreter der altrömischen Liturgie. Bd. I. Louvain, 1911. — E. De Backer, Sacramentum. Le mot et l'idée représentée par lui dans les œuvres de Tertullien. Louvain, 1911. — H. Delulle, Les répétions d'images chez Euripide. Louvain, 1911.

* **Lucca**. R. Accademia lucchese di scienze, lettere ed arti. Atti, vol. XXXII, XXXIII.

* **Lund**. Universitet. Acta Universitatis Lundensis, Nova Series, Teologi, juridik, humanistiska ämnen, VII, 1 Afd., 1911. — Medicin samt matematiska, naturvetenskapliga ämnen, VII, 2 Afd, 1911.

* **Lyon**. Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts: Mémoires, Sciences et Lettres, 3e Sér., T. XII.

* — Diocèse de Lyon. Bulletin historique, N. 72-77.

* — Société d'Agriculture, Sciences et Industrie. Annales, 1910.

* — Société Linnéenne. Annales, An. 1911, N. Sér., T. LVIII.

* **Madison**. Wisconsin Academy of sciences, arts and lettres. Transactions, vol. XVI, p. II, N. 1-6.

* — Wisconsin Geological and Natural hystory Survey. Bulletin, N. XXIII, Economic Ser., N. 14; XXIV, Soil Ser., N. 1; XXI-XXII, XXV, Scientific Ser., N. 6-8. — Map Wisconsin showing Geology and Roads.

* **Madrid**. R. Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Anuario, 1912. — Revista, T. X, N. 1-12.

* — Real Academia de la Historia. Boletín, T. LIX, cuad. 5, 6 (1911); LX (1912); LXI; LXII, (1913), 1.

* — Sociedad Matemática Española. Revista, an. I, N. 1-10; an. II, 11, 12.

* **Magdeburg**. Museum für Natur- und Heimatkunde und Naturwissenschaftlicher Verein. Abhandlungen u. Berichte, Bd. II, Heft 2, 3.

* **Mantova**, R. Accademia Virgiliana. Atti e Memorie, N. Ser., vol. IV, p. 1-2, 1911.

Messina. Osservatorio. Annuario 1909 (An. VI).

* **México**. Sociedad Científica " Antonio Alzate ". Memorias y Revista, T. XXVIII, N. 9-12; XXIX; XXX, 1-6.

México. Observatorio Meteorológico Magnético Central. Boletín mensual, 1911, Agosto-Diciembre; 1912, Enero-Junio.

* — Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Anuario 1912. — Boletín, N. 1-2.

* **Milano.** Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, Ser. II, vol. XLIV, fasc. 15-20; XLV, 1-18. — Memorie. Classe di scienze matematiche e naturali, vol. XXI, fasc. 5. — Classe di scienze morali e storiche, XXII, fasc. 5-8.

* — Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico di storia naturale. Atti, vol. L, fasc. 4; LI, 1-2.

— R. Osservatorio Astronomico di Brera. Anno 1913. — Calendario ed Effemeridi per Milano.

— Università Commerciale Luigi Bocconi: Annuario 1910-1911.

* — Città. Bollettino statistico mensile. 1911, novembre-dicembre; 1912, gennaio-novembre. — Riassunto dei Bollettini statistici mensili, 1911. — Dati statistici a corredo del Resoconto dell'Amministrazione comunale, 1910; idem, 1911.

* **Modena.** Regia Accademia di scienze, lettere ed arti. Memorie, Ser. 3ª, vol. X, parte 1ª.

* — Società dei Naturalisti e Matematici. Atti, Ser. IV, vol. XIII (1911); XIV (1912).

Monaco. Institut Océanographique. Bulletin, N. 220-252. — Résultats des Campagnes scientifiques par Albert I Prince de Monaco, fasc. 35-39, 43, 1911, 1912.

* **Moncalieri.** Osservatorio del Real Collegio Carlo Alberto. Osservazioni meteorologiche, 1911, dicembre e 1912. — Osservazioni sismiche, 1911, N. 10 e 1912.

* **Montpellier.** Académie des sciences et lettres. Bulletin mensuel, 1911.

* **Moscou.** Société Impériale des Naturalistes. Bulletin, An. 1910, N. 4; 1911, 1-3.

* **München.** Kgl. Bayerische Akademie der Wissenschaften. Philologisch-philosophische und historische Klasse: Abhandlungen, XXVI Bd., 1-3 Abth.; XXVII, 1, 2. — Sitzungsberichte: Jahrg. 1911, 13, 14 Abhd. u. Schlussheft, 1912. 1-3, 5. — Mathematisch physikalische Klasse: Abhandlungen, XXV Bd., 8, 10; XXVI, 1. — Sitzungsberichte, 1911, Heft 3; 1912, 1, 2. — Beiträge zur Naturgeschichte Ostasiens: II Suppl.-Bd., 7-8 Abth. — Ueber den Bedeutungswandel der Worte Akademie und Akademisch; von K. T. v. Heigel. Der Anteil der ägyptischen Kunst am Kunstleben der Völker, von Fr. W. v. Bissing.

* — Ornithologische Gesellschaft in Bayern. Verhandlungen, Bd. XI, Heft 1.

* **Nancy.** Académie de Stanislas. Mémoires, 1910-1911, 6ᵉ Sér., T. VIII.

* **Nantes.** Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin, 3ᵉ Sér., T. I, 1911.

* **Napoli.** Società Reale. Annuario 1912. — R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche: Rendiconti, Ser. 3ª, vol. XVII, fasc. 7-12; XVII, 1-9. — Accademia di scienze morali e politiche: Rendiconto delle tor-

nate e dei lavori, An. L, 1911. Atti, vol. XL. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti, N. Ser., An. XXV, 1911.

* **Napoli.** Accademia Pontaniana. Atti, vol. XLI, XLII.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, Ser, 6ª, vol. LXIII (1911).

* — Museo Zoologico della R. Università. N. S., vol. III.

* — R. Osservatorio di Capodimonte: i lavori dei signori Contarino, Guerrieri e Lazzarino.

* — Zoologische Station. Mittheilungen aus der... zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde, XX Bd., 3 Heft.

* **Neuchâtel.** Société Neuchâteloise des sciences naturelles. Bull., T. XXXVIII, An. 1910-1911.

New Haven. Astronomical Observatory of Jale Observatory. Transactions, Vol. II, p. III-IV.

* **New-York.** New-York Academy of Sciences. Annals, vol. XX, p. 3; XXI, pp. 1-175.

* — American Mathematical Society. Annual Register, 1912. — Bulletin, vol. XVIII, N. 4-10; XIX, 1, 3. — Transactions, vol. XIII, N. 1-4.

* — New York Public Library. Astor Lenox and Tilden foundations. Bulletin, 1912, vol. XVI, N. 1-12.

— Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. Sixth Annual Report, 1911.

* **Nürnberg.** Naturhistorische Gesellschaft. Abhandlungen, XVIII. Bd., II. (Schluss) Heft; XIX, 1-3. — Mitteilungen, Jahrg. 1908, N. 2-5; 1909, 1.

Oberlin. Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin, Nos. 76-80.

Odessa. Observatoire météorologique et magnétique de l'Université. Annuaire 1910.

* **Ottawa.** Royal Society of Canada. Proceedings and Transactions, 3ª Ser., vol. V, 1911.

* — Geological Survey of Canada. Rapport de l'Expédition du Gouvernement du Canada à la Baie d'Hudson et aux îles Arctiques, à bord du " Neptune ", 1903-1904; 1912; 1 vol. 8°.

— Ministère des Mines. Division de la Commission Géologique. Mémoires, N. 6, 7, 9, 1060, 1067, 1087, 1157-1159. — Rapport sommaire, 1910.

— Department of Mines. Mines Branch. Bulletin, N. 6, 7. — Catalogue of Publications of the Mines Branch (1907-1911). — Annual Report of the Mineral production of Canada, 1910; 1 vol. 8°. — An Investigation of the coals of Canada with reference to their economic qualities; 2 vol. 8°. — Mica, its occurrence, exploitation and uses, 2nd edit., 1912; 1 vol. 8°. — Report on the utilization of peat Fuel for the production of power..., 1912. — — Summary Report, 1911.

* **Oxford.** Radcliffe Observatory. Results of Meteorological Observations, 1906-1910; 1 vol. 8°.

* **Padova.** R. Accademia di scienze, lettere ed arti. Atti e Memorie, N. S., vol. XXVIII.

* — Accademia scientifica veneto-trentino-istriana. Atti, Serie 3ª, An. IV, fasc. 1, 2; V, 1, 2.

* — Museo Civico. Bollettino, An. XIII (1910), fasc. 4-6.

* **Palermo.** R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti. Atti, 3ª Serie, Vol. IX. — Bullettino (anni 1907-1910).

* — Circolo Matematico. Annuario biografico, 1912. — Rendiconti, T. XXXIII, fasc. 1-3; XXXIV, 1-3. — Supplemento al vol. VII, 1912, N. 1-4.

* — Società di scienze naturali ed economiche. Giornale, vol. XXIX, 1912.

* **Paris.** Ministère de l'Instruction et des Beaux-Arts. Inventaire sommaire des Archives communales et départementales: *Allier*, Sér. S. — *Amiens* (Ville d'), T. VI, Sér. FF (1-702). — *Bouches-du-Rhône*, Sér. G. — *Charente*, Sér. L, de 1789 à l'an VIII. — *Corréze*, Sér. H, Suppl. — *Haute-Saône*, Sér. U, Y. — *Hautes-Alpes*, Ser. L., 1790-1800. — *Nord*, *Ville de Cassel*, Sér. L. — *Orne*, Sér. O et D.

* — Ministère des Travaux Publics. Annales des Mines, Xᵉ Sér., T. XX (1911), livr. 11-12; XIᵉ, XXII (1912), T. I, livrs. 1-8; II, 9-11.

** — Bureau des Longitudes. Annuaire pour l'an 1912.

* — Institut de France. Annuaire pour 1912. — Académie des Sciences. Procès-Verbaux des séances de l'Académie depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835. Tome I, Ann. IV-VII (1795-1799); 4°.

* — Muséum National d'histoire naturelle. Bulletin, Ann. 1911, N. 3-5. — Nouvelles Archives, 5ᵉ Sér., T. II, fasc. 1-2.

* — Société Nationale des Antiquaires. Bulletin, 1911, 4ᵉ trimestre; 1912, 1ʳ-3ᵉ trimestre. — Mémoires, 8ᵉ Sér., T. I (1911). — Mettensia, VI, Mémoires et documents.

* — Société de Géographie. La Géographie. Bulletin, XXVI; XXVII, N. 1-2.

* — Société Mathématique de France. Bulletin, T. XXXIX, fasc. 4; XL, 1-4. — Comptes-rendus des Séances, 1912.

* — Société Philomathique. Bulletin, Xᵉ Sér., T. III, N. 4-6; IV, 1-2.

* — Société de Spéléologie. Spelunca. Bulletin et Mémoires, N. 65-69.

* — Société Zoologique de France. Mémoires, T. XXIII (1910).

* **Pavia.** Società Pavese di Storia patria. Bollettino, An. XI (1911), fasc. 3-4; XII, 1-4.

* **Perugia.** R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. Bollettino, An. XVII, fasc. 2-3.

* — Università degli Studi. Facoltà di Giurisprudenza, Annali, Ser. III, vol. VIII, fasc. 3-4; 1911, vol. I, fasc. 1-4. — Annali della Facoltà di Medicina, Ser. IV, 1911, vol. I, fasc. 4; II, 1, 3.

* **Philadelphia.** Academy of Natural Sciences. Proceedings, vol. LXIII, p. 1-3. — Memoirs, 2nd Ser., vol. XIV, p. 3.

* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. L, N. 199-203. — General Index, vol. 1-50. — Transactions, N. S., vol. XXII, p. 1.

* **Pinerolo.** Biblioteca Municipale Alliaudi. Bollettino, 1911; 4°.

* **Pisa.** Università Toscane. Annali, T. XXXI, 1912.

* — R. Università. Annuario per il 1911-1912.

* — Società Toscana di scienze naturali. Atti. Processi verbali, vol. XX, N. 4, 5; XXI, 1-5. — Memorie, vol. XXVII.

* — R. Scuola Normale superiore. Annali. Filosofia e Filologia, vol. XXIII. Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, vol. XII.

* **Portland**. Portland Society of Natural history. Proceedings, vol. II (1911), p. 9.
* **Porto**. Academia Polytecnica. Annaes scientificos, vol. VI, N. 4; VII, 1-3.

Potsdam. Association Geodésique Internationale. Rapport sur les travaux de 1911 et Programme des travaux pour 1912; 4°.

— K. Preuss. Geodätische Institut. Veröffentlichungen, N. F., N. 52-56.

* **Prag**. Kgl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. Sitzungsberichte, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, 1911. — Sitzungsberichte, Klasse für Philosophie, Geschichte und Philologie, 1911. — Jahresbericht 1911.

— K. K. Sternwarte. Astronomische Beobachtungen 1905-1909. — Magnetische und Meteorologische Beobachtungen 1911.

* **Praze**. České Akademie Císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění. Almanach, Ročnik. XXII (1912). — Rozpravy, Třida I, Císlo 41, 44, 45; Třida II, Ročnik XX; Třida III, Císlo 36. — Bulletin international. Résumé des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine (1911). — Věstník, Ročn. XX (1911). — Historicky Archiv, Císlo 37. — Sbirka, Skupina II, Císlo 16. — Tadeás Haenke, jeho zivot, dilo a listy ze zămořskych krajin. Napsal Fr. Khol. — Roncesvalles. V. Tille. — Vijvoj Opalin. Sepsal Frantisek Schuster.
* **Pusa**. Agricultural Research Institute. Memoirs Department of Agriculture in India. Botanical Ser., vol. IV, 4-6; V, 1. — Chemical Ser., vol. II (1912), N. 2, 5. — Entomological Ser., vol. II (1911), N. 9-10; III (1912); IV (1912), 1-4. — Report, 1910-1911. — Report on the progress of Agriculture in India for 1911.
* **Reims**. Académie Nationale. Travaux, An. 1906-1907, T. II (122); 1909-1910, T. II (128); 1910-1911, T. I (129).
* **Rennes**. Société Scientifique et Médicale de l'Ouest. Bulletin, XX° Ann., 1911, T. XX, N. 2, 3.
* **Riga**. Naturforscher-Verein. Arbeiten, N. F., 13. Heft. — Korrespondenzblatt, LIV, LV.
* **Rio de Janeiro**. Bibliotheca Nacional. Kosmos, Ann. V, N. 2-8, 10-12; VI, N. 4. — E. Sanna, Conselheiro Antonio Ferreira Vianna, Sua vida e suas obras. 1902.
* — Museu Nacional. Archivos, vol. XIII.

— Observatorio Nacional. Annuario 1912. — Boletim, Anno 1909.

* **Rochester**. Academy of Science. Proceedings, vol. IV, pp. 233-241; V, pp. 1-38.
* **Roma**. Senato del Regno. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto, 1911, N. 1-6.
* — Ministero degli Affari esteri. Raccolta di pubblicazioni coloniali italiane, 1911; 8°. — Raccolta cartografica, 1911; 8°.
* — Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Annuario statistico italiano, vol. I, 1911. — Impianti elettrici nel decennio 1899-1908. — Notizie sulle varie applicazioni elettriche, 1911. — Annali di statistica sulla tavola di mortalità italiana, 1899-1902. — Statistica delle cause di morte, 1909. — Annali di Statistica, Ser. V, vol. I, 3, 4. — Statistica

giudiziaria civile e commerciale e statistica notarile. Parte II, 1897-1900; Parte I, 1901-1904; Parte I, 1905-1906. — Atti del Consiglio superiore di Statistica, Sessione di luglio 1910. — Movimento della popolazione nell'anno 1910.

* **Roma.** Ministero delle Finanze. Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione dal 30 novembre 1910 al 31 dicembre 1911, gennaio-novembre 1912. — Bollettino di legislazione e statistica doganale e commerciale, An. XXVIII (1911), settembre-dicembre; An. XXIX (1912), gennaio-agosto-ottobre. — Movimento commerciale del Regno d'Italia, 1910, vol. I, parte 2ª e 3ª; II, parte 1ª. — Movimento della navigazione del Regno d'Italia, 1910, vol. I (Tavole analitiche); vol. II (Tavole riassuntive).

* — Ministero di Grazia e Giustizia e dei Culti. Atti della Commissione di statistica e legislazione, 1910, 1911. — Statistica giudiziaria Civile e Commerciale, 1907, 1 vol.; Penale, 1907, 1 vol.

— Ministero dell'Interno. Il funzionamento degli Archivi di Stato italiani nel 1911. 1912; 4°.

** — Calendario generale del Regno, 1912.

* — Ministero dei Lavori Pubblici. L'opera nei Comuni colpiti dal terremoto del 28 dicembre 1908. 1912; 3 vol. in-4°.

* — Ministero dell'Istruzione Pubblica. L'Istruzione primaria e popolare in Italia con speciale riguardo all'anno scolastico 1907-1908; vol. IV, 1912.

** — Annuario 1912; 1 vol. 8°.

* — R. Accademia dei Lincei. Annuario 1912. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Memorie, Ser. V, vol. VIII, fasc. 18-24; IX, 1-6. — Rendiconti. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Memorie, Ser. V, vol. XIV, fasc. 7-9. — Notizie degli scavi di antichità, Ser. V, vol. VIII, fasc. 5-12 e Supplemento, IX, 1-2, 5, 6. — Rendiconti. — Rendiconto dell'adunanza solenne del 2 giugno 1912.

* — Società italiana delle scienze (detta dei XL). Memorie di matematica e fisica, Ser. III, T. XVII.

* — Istituto di Diritto Romano. Bullettino, An. XXIII, fasc. 3-6; XXIV, 1-6; XXV, 1.

— " Mathesis ". Società Italiana di matematica. Bollettino, An. III, N. 9-12; IV, 1-8.

— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, 1912, N. 1-24.

* — R. Ufficio Geologico. Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia vol. XV: I vulcani dell'Italia centrale; 8°.

* — Biblioteca Nazionale centrale " Vittorio Emanuele ". Bollettino delle Opere moderne straniere acquistate dalle Biblioteche governative del Regno d'Italia, 1911, Ser. IV, N. 1, 2997.

* — R. Comitato Geologico d'Italia. Bollettino, 1911, fasc. 3, 4; 1912, 1.

* — R. Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica italiano. Elenco delle pubblicazioni dal 1860 al 1910. — Annali, vol. XIX, parte II; XX, II; XXI, III; XXII, III; XXXI, I; XXXII, I.

* — R. Osservatorio del Collegio Romano. Memorie, Ser. III, vol. V, parte 2ª.

* **Roma**. Pontificia Accademia Romana dei nuovi Lincei. Atti, Anno LXV, Sessioni 1ª-7ª. — Memorie, vol. XXIX.

* — Biblioteca Apostolica Vaticana. Codices Vaticani Latini, T. III (Codices 1461-2059). — Studi e Testi, N. 23, 24, 2 vol. — Codices Urbinates Latini, T. II (Codices 501-1000); 1912, 1 vol. 4°.

* — Imperiale Istituto Archeologico Germanico, Sezione romana. Bullettino, vol. XXVII, fasc. 3-4.

* **Rovereto**. I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Agiati. Atti, Ser. III, vol. XVII (1911), fasc. 3-4; XVIII (1912), 1-2.

* **Saint-Louis** Mo. Missouri Botanical Garden. 22d Annual Report, 1911.

* **St-Pétersbourg**. Académie Imp. des sciences. Bulletin, 4e Sér., 1912, N. 1-18. — Mémoires, VIIIe Sér., T. XXV, N. 9, 10; XXVI, 1-2; XXVII, 1-2; XXVIII, 1-2; XXIX, 1, 3, 5; XXX, 1-8.

— Missions scientifiques pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg. Mission Russe, T. I, Géodésie, IIe Section, Travaux aux diverses stations. B. Observations de A. S. Wassiliew. 2. Mont Hedgehog. C. 1. Observations de V. Akhmatov au Mont Keilhau.

* — Commission centrale sismique permanente. Comptes-rendus des séances, T. III, livr. II, n. 2; III; IV, livr. 1-3; V, 1. — Bulletin, Ann. 1907, octobre-décembre; 1908, janvier-septembre. — Seismometrische Tabellen, von B. Galitzin.

* — Comité Géologique. Bulletins, 1910, XXIX, Nos. 5-10; XXX, 1-5. — Mémoires, N. Sér., livrs. 53-55, 60, 61, 67, 68, 71, 73.

— Musée Géologique Pierre le Grand. Travaux, T. V (1911), 2, 4, 5; VI (1912), 1-3.

* — Société Physico-Chimique russe. Journal, T. XLIII, N. 9; XLIV, 1-9.

— Observatoire Physique central Nicolas. Annales, An. 1907, 1908. — Publications, Sér. II, vol. XVIII, XIX.

* **San Francisco**. California Academy of Sciences. Proceedings, 4e Ser., vol. I, pp. 289-430; III, pp. 73-186.

San José. República de Costa Rica. Anales del Centro de Estudios Sismológicos, 1911.

— Ministerio de Fomento. Boletín. Año I (1911), N. 12; II (1912), 1-6.

* **Sendai** (Japan). Tōhoku Imperial University Sciences Reports, Vol. I, N. 1-3. — Sciences Reports, First Ser. (Mathematics, Physics, Chemistry), Vol. I, N. 4. — Sciences Reports, Second Ser. (Geology), Vol. I, N. 1.

* **Siena**. R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, Ser. V, vol. III, N. 1-10.

* — R. Università degli Studi. Annuario accademico 1911-1912.

* — Circolo Giuridico della R. Università. Studi Senesi, vol. XXVIII, fasc. 3-4; XXIX, fasc. 1-2.

* **Stockholm**. Académie R. Suédoise des Sciences. Handlingar (Mémoires), Bd. XLVII, N. 9-11; XLVIII, 1, 2, 4-7; XLIX, 1-10. — Arkiv för Matematik, astronomi och fisik, Bd. VII, 3-4; VIII, 1-2. — Arkiv för kemi, mineralogi och geologi, Bd. IV, 3. — Arkiv för botanik, Bd. XI, 1-4; XII, 1, 2. — Arkiv för zoologi, Bd. VII, 2, 3. — Meteorologiska iakttagelser i Sverige, Bd. LIII. — Meddelanden från K. Vetenskapsakad Nobel-institut, Bd. II, 2. — Iac. Berzelius Bref., I, 1, 2. — Årsbok för år 1912. — Lepradsteckningar, Bd. IV, 5. — Prix Nobel en 1911.

Stockholm. Bibliothèque Royale-Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. N. 24-26 (1909-1911). Senare hälften. — Tioars-Register, 1896-1905, 2 vol. 8°.

Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological and Magnetical Observations 1911.

Strassburg. Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt. Veröffentlichungen. Jahrg. 1909, Heft 12; 1910, 1-9.

* **Stuttgart.** Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Jahreshefte, 68 (1912), Suppl.

* **Svizzera.** Commission Géologique de la Société Helvétique des sciences naturelles. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse: 1 Carte 1 : 500000 avec texte explicatif. — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., XXI Liefg.; XXII. — 1 Carte spéciale, N. 64, 3 fol. de profils. — 1 Carte spéciale Stühlingen avec texte explicatif.

* — Société Helvétique des sciences naturelles. Vol. XLVI.

* **Sydney.** Royal Society of New South Wales. Journal and Proceedings, Vol. XLV, p. 2ª-3ª.

* **Tananarive.** Académie Malgache. Bulletin, Vol. IX.

Teddington. National Physical Laboratory. Report 1911.

* **Thonon.** Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents, T. XXIV.

* **Tōkyō.** K. Universität. Mitteilungen der Medizinischen Facultät. IX Bd., 2-3 Heft; X, 1, 2.

* — Imperial Earthquake Investigation Committee. Bulletin, Vol. IV, N. 3; VI, 1.

* — Imperial University College of Sciences. Journal, vol. XXIX, art. 2; XXX, 2; XXXI; XXXII, 1-7.

* **Topeka.** Kansas Academy of Science. Transactions, Vol. XXIII and XXIV.

* **Torino.** R. Accademia di Agricoltura. vol. LIV, 1911.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, An. LXXIV, N. 11-12; LXXV, 1-11.

* — R. Università. Annuario 1911-1912.

— Museo di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università. Bollettino, Vol. XXVI, N. 634-644, 1911.

— Istituto d'Anatomia patologica della R. Università. Lavori, 1909-1911 (dal prof. Senatore P. Foà, Direttore dell'Istituto).

* — R. Osservatorio astronomico. Annuario 1913.

* — Società degli Ingegneri ed Architetti. Atti, An. 41; 46, fasc. 1, 2.

* — Società Meteorologica italiana. Bollettino mensile, Serie III, vol. XXXI, N. 1-8.

— Società promotrice dell'industria nazionale. Atti del VI Congresso nazionale delle Società economiche tenutosi in Torino, 1911.

* — Club Alpino italiano. Rivista mensile, vol. XXX, N. 12; XXXI, 1-12.

— Scuola Professionale per gli orefici. 1911-1912.

— Consiglio Provinciale. Atti, 1911.

* — Città. Atti del Municipio 1910. — Ufficio d'Igiene, Bollettino Statistico 1911, An. XL, N. 5-13; 1912, XLI, 1-8. — Statistica demografico-sanitaria e Servizi dell'Ufficio d'Igiene 1910. — Torino e le sue istituzioni igieniche, sanitarie, filantropiche e sociali, 1912. — Quinto

censimento della popolazione e primo censimento industriale, 10 giugno 1911. Relazione sui lavori e cenni sui risultati. — Biblioteca Civica: Cataloghi, Sezione Teatrale, 1, 2. Cenni sui manoscritti di Vincenzo Gioberti. Raccolta Bodoniana. Cenni illustrativi. — Annuario, 1910-11.

* **Torino**. Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1911.

— Associazione " Pro-Torino ". Pro-Torino, pubblicazione mensile illustrata, an. VIII, N. 1-2.

* **Tortona**. Società storica Tortonese. Bollettino 1911, fasc. 31.

* **Toronto**. Canadian Institute. Transactions, Vol. IX, p. 1-2.

* — University Studies. Vol. XVI (1911).

* **Tortosa**. Observatorio del Ebro. Boletín mensual, vol. II, 4-12; III, 1-3.

* **Toulon**. Société d'histoire naturelle. Annales, Ann. 1911.

* **Toulouse**. Université. Annuaire 1911-1912 et Livret d'étudiant. Rapport annuel du Conseil de l'Université. Comptes-Rendus des Travaux des Facultés et de l'Observatoire. — Rapports sur les concours.

— Annales du Midi. Revue de la France méridionale, XXII^e An., N. 88; XXIII, 91, 92.

* **Trieste**. Società di Minerva. Archeografo Triestino. Raccolta di Memorie, Notizie, Documenti particolarmente per servire alla storia della regione Giulia.

* **Udine**. Società Storica friulana. Memorie storiche forogiuliesi, An. VII, fasc. 2-4; VIII, 1-4.

* — Civica Biblioteca e Museo. Bollettino, An. VI (1912), 1-2.

* **Upsala**. K. Humanistiska Vetenskaps-Samfundet. Skrifter, Bd. X, XIII.

* — Observatoire météorologique de l'Université. Bulletin mensuel, vol. XLIII (1911).

* — Bibliotek. Arbeten utgifna med understöd af Wilhelm Ekmans Universitetsfond, N. 11. — Bref och Skrifvelser af och till Carl von Linné, Del. VI.

* — Universitet. Årsskrift, 1910; 1911, Bd. 1, 2.

* **Urbana**. Illinois State Laboratory of Natural History. Bulletin, IX, art. 5.

* **Varsovie**. Société scientifique. Comptes rendus des séances, IV, fasc. 8; V, 1-7. — Wydzial I. jezykoznawstwa i literatury, N. 1, 2. — K. Wóycicki, Forma Dźwiekowa prozy polskiej i wiersza polskiego. — II. Classe des sciences anthropologiques, sociales, historiques et philosophiques. Travaux, N. 6, 7. — Komisya historyczna-Przywileje królewskiego miasta stolecznego Starej Warszawy 1376-1772 wydal T. Wierzbowski. — Dyaryusze sejmowe z wieku XVIII. I. II. Dyaryusz sejmu z. r. 1748 (II) 1746. wydal Wladyslaw Konopczynski. — Zródla Dziejowe. T. XXIII. Polska XVI Wieku pod wzgledem geograficzno-Statystycznym. T. XII. Prusy Królewskie, Czesc I wydal L. T. Baranowski. — III. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Edward Flatau, La migraine. — Commission Météorologique: Wladyslaw Gorczynski, Précipitations observées... en 1901-1910; Suppl. 1901-1910.

* **Venezia**. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Atti, vol. LXIX, disp. 8-10; LXX, 10; LXXI, 1-10. — Memorie, vol. XXVIII, N. 6. — Osservazioni meteorologiche e geodinamiche eseguite negli anni 1909 e 1910.

Venezia. R. Commissione per la pubblicazione dei documenti finanziari della repubblica di Venezia. Bilanci generali, Ser. II, vol. I, tomo 1.

* — R. Magistrato alle Acque. Ufficio Idrografico. Pubblicazioni, N. 18, 20, 21, 30, 33, 36, 37, 41, 43. — Livellazioni di precisione. — Bollettino: Parte I (*a*), Servizio meteorologico: Dati orari a Venezia, luglio-dicembre 1911; (*b*) Dati dolle stazioni meteorologiche, luglio-agosto 1911. — Parte II, Servizio pluviometrico e idrometrico, maggio-giugno 1911. — Bollettino mensuale, 1912, gennaio-aprile,

* **Vercelli.** Società Vercellese di Storia ed Arte. Archivio. Memorie e Studi, An. III, N. 2-4.

* **Verona.** Accademia d'Agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio. Atti e Memorie, Serie IV, vol. XII. — Osservazioni meteoriche dell'anno 1911.

* — Museo civico. Bollettino, fasc. 20-23.

Washington. Library of Congress. Reports. For the Year ending June 30, 1911.

* — Smithsonian Institution. Smithsonian Miscellaneous Collections, vol. 53, Index; 56, N. 12, 16, 18, 37; 57, 2 8; 58, 1-5. — Smithsonian Contributions of knowledge, vol. XXVII, 3. — Zoological nomenclature. Opinions 30 to 51. — Annual Report for the Year ending June 30, 1910.

* — Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Bulletin Nos. 43, 44, 47, 50, 51. — 27 Annual Report.

* — Smithsonian Institution. United States National Herbarium. Contributions, vol. XIII, p. 11, 12; XIV, 3; XVI, 1. — United National Museum: Proceedings, vol. XXXVIII, XXXIX, XL; Bulletin, 50 (Part V), 76, 77. — Report for the Year ending June 30, 1911.

* — Carnegie Institution, Tenth Anniversary. Publications, Nos. 74. vol. IV, V, p. III, 82, II and Atl. 139, 140, 145-150, 154-156, p. I, II; 157, 158, 160, 162, 164. — Juris et Judicii Fecialis, sive Juris Inter Gentes et Quaestionum de Eodem Explicatio. By Richard Zouche. — Year Book, N. 10, 1911. Th. Erskine Hollande, Oxoniae, 1650, 2 vol. in 4° (Facsimile). — Publications of the Carnegie Institution of Washington price list, classified descriptive lists, and index of Authors, 1912.

— Department of Commerce and Labor. Coast and Geodetic Survey: Geodesy. Special publication, No. 10. — Report Superintendent Coast and Geodetic Survey showing the progress of the work, 1910, 1911, 4°.

* — Department of Commerce and Labor. Bureau of Standards, Bulletin, vol. VII (1911), 4; VIII (1912), 1 3.

— U. S. Geological Survey (Department of Interior). Mineral resources of the United States Calendar 1910-1911. Part. I, Metals; II, Nonmetal. 4 vol. 8°. — Professional Paper, N. 70, 72, 73, 75. — Bulletins, Nos. 436, 438, 439, 441, 443, 445 449, 451-464, 466-470, 472-477, 479-484, 486-491, 493, 495, 504, 505, 511, 512. — Water Supply Papers, Nos. 256 258, 263, 265-268, 270, 271, 273-278, 286-288. — Monographs of the U. S. Geological Survey, vol. LIII.

* — U. S. Naval Observatory. Publications, 2nd Ser., vol. VI, VII. — Researches on the Evolution of the Stellar Systems, vol. II. — Report for the Year ending June 30, 1911.

* **Wien.** K. Akademie der Wissenschaften. Almanach, LXI. 1911. — Register der Bd. I-LX. (Jahrg., 1851-1910) des Almanachs und der Feierlichen Sitzungen. — Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Abhandlungen, Bd. 87. — Sitzungsberichte: CXX. Bd. (1911): Abt. I, 7-10; II *a*, 7-10; II *b*, 5 10; III, 4-10; CXXI (1912): Abt. I, 1-7; II *a*, 1-7; II *b*. 1-6; III, 1-3. — Register zu den Bänden 111-115 (1902-1906), 116-120 (1907-11). — Philosophisch-historische Klasse, Denkschriften, Bd. LV, 1; LVI. 1, 2; Sitzungsberichte, 166. Bd., 3, 5. 7 Abt.; 167. Bd., 3 Abt.; 168, 2, 3, 5-7; 169, 1-5; 170, 1. 3, 5, 7-9; 172. 3. — Mitteilungen der Erdbeben-Kommission, Neue F., N. XL-XLIV. — Archiv für österreichische Geschichte, 99 Bd., 2 Heft. — Generalregister der Bd. I-C einschliesslich der Bd. I-IX des "Notizenblattes". — Historische Kommission. Fontes rerum austriacarum - Zweite Abt. Diplomata et Acta: LXIII, 2. Abt., LXIV, LXV. Bd., LXVI, 2; LXVII, 2. Abt. — Französische Phonogrammstudien I.
* — K. K. Geologische Reichsanstalt. Verhandlungen, 1911, N. 12-18; 1912. 1-15. — Jahrbuch, 1911, LXI Bd., 3, 4 Heft; 1912, LXII, 1, 2. — Abhandlungen, XX Bd., Heft 4, 5.
* — K. K. Zoologisch-Botanische Gesellschaft. Verhandlungen, Jahrg. 1911, LXI Bd.
* **Würtzburg.** Physikalisch-Medicinische Gesellschaft. Verhandlungen, N. F., Bd. XLI, N. 8 11; XLII, 1, 2. — Sitzungs-Berichte, 1911, N. 8, 9.
* **Zagrebu.** Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Ljetopis, 1911, 26 Svez. — Rad, Razredi hist.-filolog. i filozoficko-juridicki. Knjiga, 189, 191, 192. — Starine, Kng. XXXIII. — Rjećnik hrvatskoga ili srpskoga jezika, Svezak 30. — Sbornik za narodni život i običaje južnih slavena, Kng. XV, Svezak 2; XVII, 1. — Djela, Kng. XIX. — Codex diplomaticus regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. IX. Dipl. an. 1321-1331 continens.
* — Hrvatsko prirodoslovno društvo (Societas scientiarum naturalium croatica). Glasnik, Godina XXII Druga, prva polovina. XXIII, Svezak 1-4; XXIV, 1-3.
* — Kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskoga Zemaljskoga Arkiva. Vjesnik, Godina XIV, Sveska 1-4.
* **Zürich.** Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrsschrift. Jahrg. LVI (1911). 1-3 Heft.; LVII, 1, 2.

PERIODICI 1912.

* **Acta** mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.

** **Almanacco** italiano. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica. Firenze; 16°.

American Chemical Journal.

American Journal of Mathematics.

American Journal of Phylology.

** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.

** **Annales** de biologie lacustre publiées sous la direction du dr. E. Rousseau.
** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.
** **Annales** scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris; 4°.
* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.
** **Annals** of Mathematics, second series. Charlottesville; 4°.
** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.
** **Archiv** für Protistenkunde. Jena; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.
** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.
* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.
* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania, 8°.
* **Archivum** Franciscanum historicum. Ad Claras Aquas; 8°.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift. Berlin; 8°.
** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Milano; 8°.
** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften-Litteratur, mit Einschluss von Sammelwerken und Zeitungen. Leipzig; 4°.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Stockholm; 8°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica. Berlin; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
* **Brixia Sacra**. Bollettino bimestrale di Studi e documenti per la Storia Ecclesiastica bresciana. Brescia; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
* **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
** Ἐφημερὶς ἀρχαιολογική. Ἐν Ἀθήναις. 4°.
Eranos. Acta philologica Suecana. Göteborg; 8°.
** **Euphorion**, Zeitschrift für Literaturgeschichte. Leipzig; 8°.
** **Fortschritte** der Physik. Braunschweig; 8°.

* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
Gegenbauers Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
Giornale storico della Lunigiana. La Spezia; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Berlin; 8°.
** **Jahrbuch** (Neues) für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. 1909, I. II. Beil. Bd. VIII, 1, 2. Stuttgart; 8°.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. BERNER. Berlin; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. DANA. New-Haven; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. 1907; T. LVI. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
** **Mathematische** u. Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Leipzig; 8°.
** **Minerva.** Jahrbuch d. gelehrten Welt. Strassburg; 16°.
** **Modern** language notes. Baltimore; 4°.
* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.
* **Morphologisches** Jahrbuch. Leipzig; 8°.
** **Moyen Age** (Le). Bulletin mensuel d'histoire et de philol. Paris; 8°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
Navigazione (La) aerea: Rivista italiana di aeronautica.
* **Nieuw Archief** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Palaeontographica.** Beiträge zur Naturgesch. der Vorzeit. Stuttgart; 4°.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt. Gotha; 8°.
** — Ergänzung. N. 159-160.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
Piemonte.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa; 8°.
* **Psychologische Studien** herausg. von W. Wundt. Neue Folge der Philosophischen Studien. Leipzig; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.

** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. 8°.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** de la Renaissance. Paris; 8°.
* **Revue** de l'Université de Bruxelles; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
** **Revue** du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
** **Risorgimento** italiano. Rivista storica. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica. Bologna; 8°.
** **Rivista** di filosofia, in continuazione della *Filosofia delle Scuole italiane* e della *Rivista italiana di Filosofia*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
** **Studi** medioevali diretti da F. Novati e R. Renier. Torino; 8°.
* **Tridentum**. Rivista mensile di studi scientifici. Trento; 8°.
** **Vegetation** (Die) der Erde. Leipzig; 8°.
* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.
** **Zeitschrift** für Gletscherkunde für Eiszeitforschung und Geschichte des Klimas. Berlin; 4°.
* **Zeitschrift** für matematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig; 8°.
** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

Dal 16 Giugno al 17 Novembre 1912.

Boselli (P.). Giuseppe Berruti ricordato nel venticinquesimo anno di vita dell'Ospedale Maria Vittoria. Torino, 1912; 8° (*dall'A. Presidente dell'Accademia*).

Burrard (S. G.). On the Origin of the Himalaya Mountains. Calcutta, 1912; 4° (*dall'A.*).

Colonnetti (G.). Sulle deformazioni elastiche delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro. Roma, 1912; 8° (*Id.*).

Congresso (1°) Nazionale di Navigazione promosso dall'Associazione Nazionale per i Congressi di Navigazione. Torino, 28 settembre-4 ottobre 1911. Rendiconto particolareggiato pubblicato per cura del Comitato locale di organizzazione. Torino, 1912; 1 vol. 8°.

Convegno Caseario del 16 marzo 1912. Milano; 1912; 8° (*dal Presidente Senatore Giulio Vigoni*).

Dehaut (E.-G.). Matériaux pour servir à l'histoire zoologique et paléontologique des îles de Corse et de Sardaigne. Fasc. IV. Étude zoologique et ostéologique des suidés de la Corse et de la Sardaigne. Paris, 1912; 4° (*dall'A.*).

Delgrosso (M.). Sopra una dolomite ferrifera del traforo del Sempione. Padova, 1912; 8° (*Id.*).

** **Eulero** (L.). Opera omnia. Mechanica sive motus scientia analytice exposta. Lipsiae et Berolini, 1912; T. 1, 2; 4°.

Galitzin (B.). Vorlesungen über Seismometrie. St-Pétersburg, 1912; 1 vol. 4° (*dall'A.*).

Ideal (The). Calendar and the pratical. 1912; 8°.

Johnston-Lavis (H. I.). List of Books, Memoirs, Articles, Letters, ecc. London, 1912; 8° (*dall'A.*).

Mangin (L.). Phytoplancton de la croisière du *René* dans l'Atlantique. Monaco, 1912; 4°.

— et **Patouillard** (N.). Les Atichiales, groupe aberrant d'Ascomycètes inférieurs. Paris, 1912; 4° (*dal sig. Mangin Socio dell'Accademia*).

Ogliotti (R.). Invenzione per usufruire della forza derivante dalla rotazione del globo terrestre. Masserano, 1912; 8°.
— Nouveau système du tir des armes à feu par l'utilisation du mouvement rotatoire de la terre, etc.; 8° (*dall'A.*).
Pampini (R.). Per la protezione dei monumenti naturali in Italia. Firenze, 1912; 8° (*Id.*).
Pizzetti (P.). Rilevamento ottico del campanile di Pisa. Roma, 1912; 4°.
Relazione della Giunta tecnica presentata al Comitato Generale per la Navigazione interna. Torino, 1912; 8° (*dono del Comitato locale*).
** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe: Fauna Exotica; Livrs. 32-36, 56-99, 100-116.
Taramelli (T.). La foresta e le sorgenti. Parma, 1912; 8°.
— Il nubifragio del 21 e 22 agosto 1911 in Valtellina in relazione alle condizioni del suolo. Roma, 1912; 8°.
— A proposito del giacimento carbonifero di Manno presso Lugano. Milano, 1912; 8° (*dall'A.*).
Villani (N.). L'equazione di Fermat con dimostrazione generale. Lanciano, 1912; 8° (*Id.*).

Dal 23 Giugno al 24 Novembre 1912.

Albonico (C. G.). Manuale di diritto civile italiano. Mantova, 1909-1912; 2 vol. in-8° (*dall'A.*).
Arnò (C.). Textura. Paris, 1912; 8° (*Id.*).
Atti del II Congresso nazionale delle Casse di Risparmio italiane. Torino, 1912 (*dalla Presidenza del Congresso*).
Barbavara (G. C.). Camillo Tacconis. Commemorazione 20 aprile 1912. Torino; 8° (*dall'A.*).
Bertolini (C.). Bibliografia dell'antico diritto greco e romano. V (*Id.*).
Biadego (G.). Cristoforo Pasqualigo: parole dette nell'Accademia di Verona il 4 agosto 1912. Verona, 1912; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).
** **Bibliotheca** scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana. Leipzig, 1855-1912; 553 vol. in-16°.
Cagiati (M.). Supplemento all'opera " Le monete del Reame delle Due Sicilie da Carlo d'Angiò a Vittorio Emanuele II ". Anno II, N. 2-10 (*dall'A.*).
** **Cambridge** (The) Modern history. Atlas. Cambridge, 1912; 1 vol. 8°.
Carbonelli (G.). Gli ultimi giorni del Conte Rosso e i processi per la sua morte. Pinerolo, 1912; 1 vol. in-8° (*dall'A.*).
Catalogue de la Bibliothèque de la Compagnie d'assurances " Rossia ". St-Pétersbourg, 1912; 1 vol. in-8° (*dalla Direzione*).
De Gregorio (G.). Elenco delle Opere. 1 fasc. in-8° (*dall'A.*).
Delle Piane (G.). L'Offerta. Torino, 1 vol. in-8° (*Id.*).
Festgabe für Martin von Schanz; Zur 70. Geburtstagsfeier (12 Juni 1912) in Dankbarkeit überreicht von ehemaligen Schülern. Würzburg, 1912; 1 vol. in-8° (*dal sig. M. v. Schanz*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (Seconda serie). Carafa di Napoli; fasc. LIII, LIV.

Lajolo (G.). Sotto il velo della canzone " Tre donne intorno al cor mi son venute " di Dante Alighieri. Città di Castello, 1911; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri*).

* **Monumenta** Germaniae historica. Epistolarum, Tomi VII pars prior, Karolini aevi V. Berolini, MCMXII.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 103, 4° del T. XVII, p. 1; 104, 9° del T. XXXII, p. 1; 105, 2° ed ultimo del T. IX, p. 1; 106, 2° ed ultimo del T. XXIV, p. 2.

Origini (Le) di Napoli greco-romana. Napoli, 1912; 1 vol. in-4° (*dono del Municipio di Napoli*).

** **Pagliaini** (A.). Catalogo generale della Libreria italiana dall'anno 1900 a tutto il 1910. Primo supplemento, vol. I, fasc. 5-7. Milano, Associazione tipografica.

Prunas Tola (V.). Storia della famiglia de Tola di Sardegna con albero genealogico e cenni relativi al suo parentado. Torino, 1912; 4° (*dall'A.*).

Ramos-Coelho (J.). Obras poeticas e a tradução do poema Jerusalem Libertada de Torquato Tasso. Lisboa, 1910; 1 vol. in-8° (*Id.*).

Reycend (G. A.). Il Valentino. Cenni storici. Torino, 1912; 8° (*Id.*).

Rinkes (D. A.). Inhoudsopgave der Javaounische couranten in de bibliotheek van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen door raden poerwa soevignja. Batavia, 1911; 8° (*Id.*).

Sforza (G.). Giambattista Niccolosi. Spezia, 1912; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Zuccante (G.). Isocrate e Platone a proposito d'un giudizio del " Fedro ". Firenze, 1911; 8°.

— Aristippo di Cirene nei dialoghi di Platone. Milano, 1912; 8°.

— I Cirenaici. Genova, 1912; 8° (*dall'A.*).

Dal 17 Novembre al 1° Dicembre 1912.

Atti del 2° Congresso di chimica applicata. Torino, 23-28 settembre 1911. Torino, 1912; 1 vol. in-8° (*dono del Socio residente I. Guareschi*).

Boccardi (G.). Il nuovo Osservatorio di Torino. Torino, 1912; 8° (*dall'A.*).

Forni (G.). Sull'umidità atmosferica in Milano nei decenni 1880-89, 1890-99, 1900-909. Milano, 1912; 4° (*Id.*).

Lussana (S.). Sul calore specifico dei liquidi a pressione costante per pressioni e temperature diverse. Ricerche sperimentali. Pisa, 1912.

— Ueber den Einfluss von Druck und Temperatur auf das elektrolytische Leitvermögen von Lösungen. Leipzig, 1912.

— Ueber den Einfluss von Druck und Temperatur auf das elektrolytische Leitvermögen von Lösungen. — Erwiderung auf einige Bemerkungen des Herrn Körber. Leipzig, 1912 (*Id.*).

Neppi Modona (L.). I rapporti fra l'uomo e il suolo nelle colonie. Firenze, 1912; 8° (*Id.*).

Oechsner de Coninck (W.-F.). Exposé et résumé des recherches que j'ai effectuées, de 1900 à 1912, sur l'Uranium et ses composés. Montpellier, 1912; 8° (*dall'A.*).

Reverdin (Fr.). Analyse des matières colorantes organiques. Genève et Bâle. 1912; 8° (*Id.*).

** **Seitz** (A.). Macrolépidoptères du Globe. Part. II: Fauna Exotica. N. 100-116,

Valentini (C.). Sistemazione dei torrenti e dei bacini montani. Milano, 1912; 1 vol. in-16° (*dall'A. per concorrere al premio Bressa*).

Dal 1° al 15 Dicembre 1912.

Caprilli (A.). Nuove formole d'integrazione. Livorno, 1912; 8° (*dall'A. per il premio Bressa*).

— La trasformazione dell'energia nel movimento di un globo aerostatico e in generale di un corpo qualunque immerso in un liquido. Venezia, 1892; 8°.

— La pressione del vento sugli edifizi. Roma, 1905; 8°.

— Sull'ordinamento dei campi di tiro a segno. Roma, 1906; 8°.

— Il fermapalle di grande altezza. Roma, 1908; 8°.

— Collimatore a reflessione per telemetri. Roma, 1906; 8° (*dall'A.*).

De Toni (G. B.). Pugillo di lettere del rosminiano Giuseppe Gagliardi a botanici italiani. Rovereto, 1911; 8°.

— L'Erbario di Tommaso Andrea Morelli medico del secolo XVIII. Venezia, 1912; 8°.

— Nuovi documenti sulla vita e sul carteggio di Bartolomeo Maranta medico e semplicista del secolo XVI. Venezia, 1912; 8°.

— Frammenti Vinciani. Parte VI. Modena, 1912; 8°.

— Intorno a un erbario figurato del secolo XVI. Modena, 1912; 8°.

— Spigolature Aldrovandiane. XIII. Un altro corrispondente di U. Aldrovandi, il medico G. B. Balestri. Leipzig, 1912; 8°.

— Annotazioni ad alcune lettere di Corrado Gesner (*dall'A.*).

Fusari (R.). Compendio di Anatomia umana. Torino, 1913; 2 vol. in-8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Jadanza (N.). Tavole tacheometriche centesimali. 3ª ediz. stereotipata. Torino, 1912; 8° (*Id.*).

Mattirolo (O.). Sull'endemismo dell'*Isoetes Malinvernianum* di Cesati e De Notaris. Roma, 1912; 8° (*Id.*).

Sacco (F.). Quintino Sella. Cenni biografici. Torino, 1911; 8°.

— Fenomeni filoniani e pseudofiloniani nel gruppo dell'Argentera. Pavia, 1911; 8°.

— La Puglia. Schema geologico. Roma, 1911; 8°.

— L'esogenia quaternaria nel gruppo dell'Argentera. Parma, 1911.

— I ghiacciai antichi ed attuali delle Alpi marittime centrali. Pavia, 1912; 8°.

— La courbe hypsographique de l'écorce terrestre. Torino, 1912; 8°.

— L'avvenire della geotermica applicata. Pavia, 1912; 8°.

— Geoidrologia dei pozzi profondi della Valle Padana. Torino, 1912; 1 vol. in-8° (*dall'A.*).

Dal 24 Novembre al 22 Dicembre 1912.

Biadego (G.). Vittorio Betteloni. Discorso commemorativo; carteggio e bibliografia. Verona, 1912; 8° (*dall'A.*).

Boselli (P.). Camillo Solaro, Tenente colonnello nel 34° fanteria, caduto a Tobruk l'11 marzo 1912. Pinerolo, 1912; 8° (*Id.*).

Helssig (R.). Nochmals der Erwerb des Codex Utinensis durch Gustav Hänel. Leipzig, 1912; 8° (*Id.*).

Levi (A.). Studi logici. Prato-Firenze, 1909-1912; 2 fasc. in-8°.

— La Filosofia dell'esperienza. Pavia-Modena-Bologna, 1909-1911; 3 fasc. 8°.

— Filosofia dell'Assoluto in Inghilterra e in America. Prato, 1910; 1 fasc.; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (Serie seconda), fasc. LV, LVI: Ruffo di Calabria.

Mondovì al Cardinal Bona nel terzo centenario dalla sua nascita. Roma, tip. 1910; 4° (*dono del Sacerdote M. Gavotti*).

Netto (C.). Scenas e Perfis. Rio de Janeiro, 1910 (*dalla Biblioteca nazionale di Rio de Janeiro*).

Roméro (S.) e **Ribeiro** (J.). Compendio de historia da literatura brasileira. Rio de Janeiro, 1909; 1 vol.; 8° (*Id.*).

Ruffini (Fr.). Religious liberty; Translated by J. Parker Heyes; with a preface by J. B. Bury. London, 1912; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Dal 22 Dicembre 1912 al 16 Febbraio 1913.

Bertolini (C.). Bibliografia: 1895-99: Diritto romano, *Libri*. 1900-06: Diritto greco e Diritto romano, *Libri*, *Periodici*. Roma, 1912; 8° (*dall'A.*).

Bonelli (G.). L'Archivio Silvestri in Calcio. Notizia e inventario. Torino, 1912; 1 vol. 4° (*dal Sig. Emilio Silvestri*).

Bustico (G.). Intorno al concetto di progresso nella storia in Augusto Comte. Riva, 1905; 8°.

— Il concetto di progresso nella storia in Mario Pagano e in Condorcet. Genova, 1905; 8°.

— Bibliografia di Vittorio Alfieri.

— Terze pagine Benacensi; Salò, 1909; 16°.

— L'educazione vocazionale e la scuola. Desenzano, 1909; 8°.

— Norme nell'arte drammatica italiana e straniera. Firenze, 1909; 8°.

— Nuove pagine Benacensi. Salò, 1909; 16°.

— Avanzi romani nell'Ossola. Domodossola, 1910; 8°.

— Il concetto della storia in Arturo Schopenhauer. Lugano, 1910; 8°.

— Garibaldi sul lago di Garda. Como, 1910; 8°.

— La vita di un solitario, Giovita Scalvini. Domodossola, 1910; 8°.

— Le scuole di mutuo insegnamento a Milano e Brescia. Domodossola, 1910; 8°.

Bustico (G.). Lorenzino De Medici sul teatro. Dall'Alfieri a Sem Benelli. Domodossola, 1910; 8°.
— Il carteggio Brofferio-Celesia. Domodossola, 1910; 16°.
— Caterina Percoto e Francesco Dall'Ongaro. Domodossola, 1910; 8°.
— Saggio di una bibliografia Ossolana. Domodossola, 1910; 8°.
— Il concetto di progresso nella storia nella età cristiana. Giacchino da Fiore. Rovereto, 1910; 8°.
— Un'Aspasia del primo Regno Italico. Domodossola, 1910; 8°.
— Supplemento alla bibliografia di Vittorio Alfieri. Domodossola, 1911; 8°.
— Goffredo Herder pedagogista. — Il disegno nel fatto educativo. — Alfonso Peroni, Le prime scuole elementari governative a Milano. Milano, 1908; 8°; Domodossola, 1911; 8°.
— Di alcune dottrine educative in Giuseppe Parini. Domodossola, 1911; 8°.
— L'insegnamento del canto quale fattore estetico. — Educazione ed imitazione. Domodossola, 1911; 8°.
— Bellezze d'arte e di natura. — Valle Antigorio e Formazza. Intra, 1911; 4°.
— Cenni di storiografia ossolana 1673-1900. Intra, 1911; 16°.
— I manoscritti della biblioteca dell'Ateneo di Salò. 1911. Brescia, 1911; 8°.
— Relazione sull'andamento dei Musei Galletti per l'anno 1910. Domodossola, 1911; 8°.
— Il progresso nella storia. Genova, 1912; 8°.
— La poesia del Garda. Roma, 1912; 8°.
— Il palazzo Silva di Domodossola. Intra, 1912; 4°.
— La chiesa di S. Filippo e Giacomo di Levo sul Verbano. Intra, 1912; 4°.
— Notarelle pedagogiche (2ª edizione). Domodossola, 1912; 8°.
— Catalogo delle cose d'arte e d'antichità dell'Ossola. Domodossola, 1912; 8°.
— Luigi Bramieri e la Biblioteca teatrale di Venezia. Venezia, 1912; 8°.
— La cartografia dell'Ossola. Saggio. Domodossola, 1912; 8°.
— Un carteggio riguardante ricerche bibliografiche di G. B. Passano. Vigevano, 1912; 8° (*dall'A.*).

Catalogo della Libreria italiana dall'anno 1900 a tutto il 1910 compilato dal prof. A. Pagliaini: Primo supplemento, vol. I, fascicoli 8-10.

Gauckler (P.). Le Sanctuaire Syrien du Janicule. Paris, 1912; 1 vol. 8° (*dall'editore Mr Alfonse Picard*).

Lattes (A.). La formazione del codice Estense. Modena, 1912; 4° (*dall'A.*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc.ⁱ 107-110; 7° del T. XVIII, p. I; 3° ed ultimo del T. XIV, p. I; 1° del T. XXIV, p. III; 1° del T. XVI, p. III.

Ranelletti (O.). Principii di diritto amministrativo. Vol. I: Introduzione e Nozioni fondamentali. Napoli, 1912; 8° (*dall'A.*).

Rossi (T.). In memoria di Vittorio Avondo. Torino 1912; 8° (*Id.*).

Taglietti (G.). Discorso del Procuratore Generale del Re, G. T., all'Assemblea della Corte di Cassazione di Torino per l'inaugurazione dell'anno giudiziario 1912-1913. 8° (*Id.*).

Zocco Rosa (A.). I risultati d'una Nuova Palingenesia delle Istituzioni di Giustiniano. Paris, 1912; 8° (*Id.*).

Dal 15 Dicembre 1912 al 23 Febbraio 1913.

Atti del Congresso internazionale delle applicazioni elettriche tenutosi in Torino dal 10 al 16 settembre 1911. Torino, 1912 (*dal Prof. G. Grassi, Socio dell'Accademia*).

Bakhuyzen (H. G. De Sande). Rapport sur l'origine et le développement de l'Association géodésique internationale 1862-1912. Leyde, 1912; 4° (*dall'A.*).

Bassani (F.) e **Misuri** (A.). Sopra un delfinorinco del calcare miocenico di Lecce (*Ziphiodelphinis* Abeli dal Piaz). Roma, 1912; 4°.

— e **D'Erasmo** (G.). La Ittiofauna del calcare cretaceo di Capo d'Orlando presso Castellammare (Napoli). Roma, 1912; 4° (*dal Prof. Bassani, Socio corrispondente dell'Accademia*).

Bernardi (G.). Nuovo metodo di risoluzione dell'equazione $ax + by = c$ in numeri interi e positivi, quando i tre numeri noti a, b, c sono interi e positivi. Bologna, 1913; 8° (*dall'A.*).

Carbonelli (G.). Farmacie e farmacisti in Italia nel secolo XVI. Roma, 1912; 8° (*Id.*).

** **Euler** (L.). Opera omnia. Series I, Opera Mathematica. Vol. XX. Lipsiae et Berolini, 1912; 1 vol. 4°.

Gorini (C.). Il fermento coagulante del bacillo prodigioso. Roma, 1893; 8°.

— Studi critico-sperimentali sulla sterilizzazione del latte. Milano, 1894; 8°.

— Sopra una nuova classe di bacteri coagulanti del latte. Milano, 1894; 8°.

— Sulla bacteriologia del caseificio. Roma, 1897; 8°.

— Sui bacteri acido-presamigeni del latte. Milano, 1901; 8°.

— Sulla presenza di bacteri acido-presamigeni nei formaggi in maturazione. Modena, 1907; 8°.

— Ricerche batteriologiche sui formaggi conservati nei silos. Milano, 1906; 8°.

— Il bacillus minimus mammae. Milano, 1907; 8°.

— Ricerche comparative fra presami animali e presami microbici. Milano, 1908; 8°.

— Ricerche microbiologiche sui latti fermentati commestibili. Milano, 1908; 8°.

— Ricerche sulla virulenza dei fermenti lattici contenuti nelle dejezioni delle vaccine. Milano, 1910; 8°.

— Ricerche sui cocchi acido-presamigeni del formaggio. Roma, 1910; 8°.

— Il comportamento dei batteri acido-presamigeni (acidoproteolitici) del formaggio di fronte alle temperature basse in rapporto col loro intervento nella maturazione dei formaggi. Roma, 1911; 8°.

— Di un fermento lattico filante. Roma, 1912; 8°.

— Contributo alla differenziazione dei fermenti lattici. Roma, 1912; 8° (*dall'A. per concorrere al XVIII premio Bressa*).

Gola (G.). Il terreno forestale. Parma, 1912; 8°.

— Osservazioni sopra un fungo vivente sugli idrocarburi alifatici saturi. Firenze, 1912; 8°.

— La vegetazione dell'Appennino piemontese. Roma, 1912; 8° (*dall'A.*).

Guareschi (I.). Storia della Chimica (Parte VIII). La Chimica in Italia dal 1750 al 1800 (Parte III). Torino, 1912; 4° (*dall'A. Socio dell'Accademia*).

Guerrini (G.). Index parasitorum qui existunt in Instituto Pathologico R. Scolae Superioris Medicinae veterinariae Mediolani. Bologna, 1909; 8°.

— Di alcuni fatti di secrezione studiati nell'epitelio intestinale dell'*Ascaris Megalocephala*. Parigi, 1910; 8°.

— Rendiconto III Anno Scolastico 1909-1910. Milano, 1910; 8°.

— Del supposto elemento tossico nel meccanismo di azione della Fasciola hepatica L. Genova, 1910; 8°.

— Ueber die sogenannte Toxizität der Cestoden. Jena, 1911; 8°.

— Sulla Fisiopatologia dello Shock anafilattico. Genova, 1911; 8°.

— Beitrag zum Studium der Anaphylaxie. Ueber Anaphylaxie durch Gewebe- und Bakterienproteiste. Jena, 1912; 8°.

— I Trematodi parassiti dell'uomo. Pavia, 1912; 8° (*dall'A.*).

Kilian (W.). Feuille de Vizille (2e édition) au 80.000e et Carte au 320.000e de la région du Sud-est de la France; 8°.

— Rapport sur les travaux paléontologiques entrepris en 1911. Paris, Grenoble, 1912; 8°.

— Sur la faune du calcaire de l'Homme d'Armes (Drôme). Aptien inférieur. Paris, Grenoble, 1912; 8°.

— Liste des publications scientifiques de M. W. K. Grenoble, 1910; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

— et **Pussenot** (Ch.). Sur l'âge des Schistes des Alpes franco-italiennes. Paris, 1912; 8° (*Id.*).

Lacroix (A.). Sur quelques minéraux des pegmatites du Vakinankaratra (Madagascar).

— Sur un groupe de niobotantalates cubiques radioactifs des pegmatites du Vakinankaratra (id.).

— Sur l'existence de minéraux bismutifères dans les pegmatites de Madagascar.

— Les gisements de lazulites du Vakinankaratra.

— Les gisements de cordiérite et d'amphiboles rhombiques de Madagascar. Paris, 1912; 8°.

— Sur l'existance de la bestnaésite dans les pegmatites de Madagascar. Les propriétés de ce minéral.

— Sur les minéraux du guano de la Réunion.

— Sur les zéolites des basaltes de la Réunion.

— La tourmaline noire des environs de Betroka (Madagascar).

— Sur les minéraux de la pegmatite d'Ampangabé et de ses environs (Madagascar) et en particulier sur un minéral nouveau (ampangabéite). Paris, 1912; 8°.

— Sur la continuité de la variation des propriétés physiques des béryls de Madagascar, en relation avec leur composition chimique.

— Sur la silicification des végétaux par les sources thermales (Mont-Dore, Madagascar).

— Sur une nouvelle espèce minérale (manandonite) des pegmatites de Madagascar. Paris, 1912; 3 fasc. in-8°.

Lacroix (A.). Un voyage au pays des Béryls. Paris, 1912; 4°.
— Les roches grenues, intrusives dans les brèches basaltiques de la Réunion: leur importance pour l'interprétation de l'origine des enclaves homogènes des roches volcaniques; 4°.
— Les pegmatites gemmifères de Madagascar.
— L'origine du quartz transparent de Madagascar.
— Sur la constitution minéralogique des volcans de l'ile de la Réunion.
— Note préliminaire sur quelques minéraux de Madagascar dont plusieurs peuvent être utilisés comme gemmes.
— Sur l'existence de roches à néphéline dans les schistes cristallins de Madagascar (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).
Longo (B.). Di nuovo sul Ficus carica L. Firenze, 1912; 8° (*dall'A.*).
Mattirolo (O.). Lorenzo Terraneo (1676-1714) e l'importanza dell'opera sua nella Storia botanica del Piemonte. Firenze, 1912; 8°.
— Risultati delle erborizzazioni nelle *5 terre* studiati in rapporto all'efficacia del fattore antropico. Firenze, 1912; 8° (*dall'A. Socio dell'Accad.*).
Messeri (V.). In memoria di Costantino Pittei. Cenni necrologici. Bologna, 1912; 8° (*dall'A.*).
Onoranze a Giovanni Capellini nel 50° anniversario del suo insegnamento nell'Università di Bologna. Narrazione e Documenti per cura del Comitato ordinatore. Bologna, 1912; 1 vol. in-4° (*dal Comitato*).
Pascal (E.). La crisi nelle Università italiane. Napoli, 1913; 8° (*dall'A.*).
Perroncito (A.). Gli elementi cellulari nel processo di degenerazione dei nervi. Pavia, 1909; 8°.
— Ueber die Zellen beim Degenerationsvorgang der Nerven. Leipzig, 1909; 8°.
— Isotossiçità del sangue di animali trattati col siero d'anguilla. Pavia, 1909; 8°.
— Isotoxicité du sang d'animaux traités avec le sérum d'anguille. Paris, 1910; 8°.
— Sulla presenza di grasso nelle ghiandole linfatiche in seguito all'azione delle sostanze contenute nel corpo del bacillo della tubercolosi. Modena, 1909; 8°.
— Condriosomi, cromidii e apparato reticolare interno nelle cellule spermatiche. Milano, 1908; 8°.
— Mitocondri, cromidii e apparato reticolare interno nelle cellule spermatiche. Milano, 1908; 8°.
— Contributo allo studio della biologia cellulare. Il fenomeno della dictiocinesi. Modena, 1909; 8°.
— Contributo allo studio della biologia cellulare. Mitocondri, cromidii e apparato reticolare interno nelle cellule spermatiche. Roma, 1910; 4°.
— Contribution à l'étude de la biologie cellulaire. Mitochondre, chromidies et appareil réticulaire interne dans les cellules spermatiques. Le phénomène de la dictyokinèse. Pise, 1910; 8°.
— Studi sulla pellagra. Nota 1ª e 2ª. Pavia, 1910; 8°.
— Sui Mitocondri della cellula uovo. Jena, 1911; 8°.
— Sui Mitocondri della cellula uovo. Risposta ad A. Russo. Jena, 1911; 8°.

Perroncito (A). Ueber den Einfluss der Ernährung auf den osmotischen Druck der Nierenzellen. Berlin, 1911; 8°.
— Variazioni sperimentali di resistenza delle cellule di fronte a diverse pressioni osmotiche. Pavia, 1911; 8°.
— Azione dei vermi intestinali sui batterii. Torino, 1911; 8°.
— Biologia generale e l'ora presente nella sua storia. Pavia, 1912; 8°.
— Azione dei vermi intestinali sui batteri. Milano, 1912; 8°.
— Variazioni sperimentali di resistenza delle cellule di fronte a diverse pressioni osmotiche. Torino, 1912; 8° (*dall'A. per concorrere al XVIII premio Bressa*).
Pizzetti (P.). Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti. Pisa, 1913; 1 vol. in-8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).
Reina (V.), **Bianchi** (E.), **Gabba** (L.) e **Favaro** (G. A.). Differenza di longitudine fra Milano (Osservatorio di Brera) e Roma (Monte Mario) determinata nei mesi di luglio e agosto del 1907. Bologna, 1912; 4° (*dalla R. Commissione Geodetica Italiana*).
** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. — I parte: Fauna palaearctica, livrs. 98. — II parte: Exotica, 117-130.
Suess (F. E.). Die moravischen Fenster und ihre Beziehung zum Grundgebirge des Hohen Gesenke. Wien, 1912; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).
Taramelli (T.). Rapporti fra popolazione e natura del suolo nel Friuli e nell'Appennino pavese. Parma, 1912; 8° (*Id.*).
Visconde de Santarem (2°). Opuscolos e Esparsos. – Colligidos e coordenados por Jordão de Freitas e novamiente publicados pelo 3° Visconde de Santarem. Lisboa, 1910; 2 vol. in-4° (*dono del 3° Visconde de Santarem*).

Dal 23 Febbraio al 13 Aprile 1913.

Anfossi (G.). Materiali per la climatologia d'Italia; III. La pioggia in Piemonte e nelle Alpi occidentali. Firenze, 1913; 1 vol. 8° (*dall'A.*).
Brambilla (G.). Le nostre civiltà agricole. Milano, 1913; 16° (*Id.*).
Caldarera (Fr.). Trattato dei determinanti. Palermo, 1913; 8° (*Id.*).
Church (J. E.). The progress of Mount Rose Observatory, 1906-1912.
— The conservation of Sorow: Its dependence on Mountains and Forests. Salt Lake City, 1912 (*Id.*).
Coblenz (W. W.). Instruments and Methods used in Radiometry. Washington, 1912; 8°.
— Selective radiation from various substances. Washington, 1913; 8° (*Id.*).
Colomba (L.). Giorgio Spezia e la sua opera scientifica. Roma, 1912; 8° (*Id.*).
Coppedé (C.). Classificazione topologica delle superficie di Lamé. Firenze, 1912; 8° (*Id.*).
Eredia (F.). Climatologia di Tripoli e Bengasi. Studio: con prefazione di L. Palazzo. Roma, 1912; 8° (*dal Prof. L. Palazzo*).
Fagnano (G. C. De' Toschi di). Opere matematiche. Milano-Roma-Napoli, 1911-1912, 3 vol. in-8° (*dono del Ministero dell'Istruzione*).

Guareschi (I.). Cenni biografici su Leonardo Doveri. Torino, 1913; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Helmert (F. R.). Rapport sur les travaux du Bureau Central pendant les 50 premières années de l'Association géodésique internationale. Leyde, 1913 (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Heredia (C. E.). Observaciones sobre el método crioscopico y Relaciones entre lo cuerpos simples. Buenos Aires (*dall'A.*).

Lebon (E.). Notice sur Henry Poincaré. Paris, 1913; 8° (*Id.*).

Pirotta (R.). L'alternanza di generazioni nelle piante superiori. Pavia, 1912; 8°.

— Hanno le piante organi dei sensi? Roma, 1912; 8°.

— Relazione sulle piante raccolte nel Karakoram dalla spedizione di S. A. R. il Duca degli Abruzzi. Bologna, 1912; 8° (*dall'A.*).

Sacco (F.). La geotettonica dell'Appennino meridionale. Roma, 1912; 8° (*Id.*).

Seitz (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. Fauna palaeartica, Livr. 99; Fauna Exotica, Livrs. 131-140.

Taramelli (T.). Se le Dinaridi costituiscono realmente una massa carreggiata. Milano, 1912; 8°.

— Se l'Appennino settentrionale rappresenti in realtà un carreggiamento. Milano, 1913; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Telfingi (Ippolita). Sugli aspetti fittizi della Luna e di Marte. Torino, 1912; 8° (*dall'A.*).

Dal 16 Febbraio al 20 Aprile 1913.

Ateneo Veneto (L') nel suo primo centenario (1812-1912) con illustrazioni archeologiche. Venezia, 1912; 1 vol. in-8° (*dalla Presidenza dell'Ateneo*).

Balch (Th.). International Courts of Arbitration. Philadelphia, 1912; 1 vol. in-4° (*dall'A.*).

Cagiati (M.). Supplemento all'Opera: Le monete del Reame delle Due Sicilie da Carlo d'Angiò a Vittorio Emanuele III. An. III, N. 1-4 (*Id.*).

Cifarelli (N.). Abbozzi di filosofia umana. Bari, 1913; 1 vol. in-8° (*Id.*).

Cordova (F.). I Siciliani in Piemonte nel secolo XVIII. Palermo, 1913; 8° (*dal Municipio di Palermo*).

Elenco degli edifici monumentali. II. Provincia di Torino. Roma, 1912; in-16° (*dal Ministero dell'Istruzione*).

Istituto (L') delle Opere Pie di S. Paolo in Torino nel 350° anno di sua esistenza. Gennaio 1563–Gennaio 1913. Torino, 1913; 1 vol. in-4°.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane. Seconda Serie, fasc. 57, 58.

Monumenta Germaniae historica, Scriptorum T. XXXII, p. 3ª.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores (fasc.ⁱ 111-113), T. XVII, p. 1ª (fasc. 5-6); T. XXIII, p. IV (fasc. unico).

Rinaudo (C.). Il Risorgimento italiano. Conferenze illustrate con appendice bibliografica. Città di Castello, 1911; 2 vol. in-8°.

— Giudizi della stampa e lettere all'autore sulla 1ª edizione dell'opera; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Storia*).

Rodolfo (G.). Di manoscritti e rarità bibliografiche appartenenti alla biblioteca dei Duchi di Savoia. Carignano, 1912; 8° (*dall'A.*).

Savio (F.). Gli antichi vescovi d'Italia dalle origini al 1300, descritti per regioni. La Lombardia; Parte 1ª: Milano. Firenze, 1913; 1 vol. in-8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Venturi (A.). Storia dell'arte italiana. VII. La pittura del Quattrocento, P. II. Milano, 1913; 1 vol. in-8° (*dall'A.*).

Dal 13 Aprile al 15 Giugno 1913.

Agabiti (A.). Tortura sepolcrale. Roma, 1913; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Atti del Congresso Internazionale delle applicazioni elettriche tenutosi in Torino dal 10 al 16 settembre 1911. Vol. 1° e 3°. Torino, 1912; 2 vol. 8° (*dono del Comitato ordinatore*).

Bassani (Fr.). Sopra una nuova fumarola nel fondo della solfatara di Pozzuoli. Napoli, 1913; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Bonnesen (E. P.), **Boggild** (O. B.) og **Ravn** (J. P. J.), Carlsbergfondets Dybdeboring i grondals eng ved Kobenhavn 1894-1907 od dens videnskabelige resultater. Kobenhavn, 1913; 4° (*dono del Carlsbergfondet*).

De Leonissa (M.). Muscideos e Culicideos as myiasis. S. Paulo, 1907; 8°.

— A vida a morte apparente a morte real. S. Paulo, 1908; 8° (*dall'A.*).

Guareschi (I.). La Storia delle Scienze e Domenico Guglielmini. Roma, 1913; 8°.

— Nota sulla Storia del movimento Browniano. Wondelgem-Lez-Gand, 1913; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Helbronner (P.). Description géométrique détaillée des Alpes Françaises. T. I. Chaîne méridienne de Savoie. Paris, 1910; 1 vol. 4°.

— Résumé des opérations exécutées jusqu'à la fin de 1911 pour la description géométrique détaillée des Alpes Françaises. Paris, 1912; 4° (*dall'A.*).

Helmert (F. R.). Rapport sur les travaux du Bureau Central de l'Association Géodésique internationale en 1912 et programme des travaux pour l'exercice de 1913. Leyde, 1913; 4° (*dall'A. Socio straniero dell'Accad.*).

Janet (Ch.). Organes sensitifs de la mandibule de l'Abeille (Apis mellifera L.). Paris, 1910.

— Sur l'existence d'un organe chordotonal et une vésicule pulsatile antennaire chez l'Abeille et sur la morphologie de la tête de cette espèce. Paris, 1911.

— Constitution morphologique de la bouche de l'insecte. Limoges, 1911.

— Le sporophyte et le gamélophyte du végétal; le soma et le germe de l'insecte. Limoges, 1912 (*dall'A.*).

Jenkins (T.). Sea-fishing. Calcutta, 1909; 8° (*Id.*).

Longiave (I.). Atlante della Sardegna che comprende l'evoluzione geologica, geografica, idrografica, etnografica e storica, ecc. Sassari, 1912; 4° (*Id.*).

Mangin (L.). Élouard Bornet, Bienfaiteur du Muséum d'histoire naturelle. Paris, 1913; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Mattirolo (O.). Rudolph Hesse. Torino, 1913; 8°.
— Amedeo Genesy. Torino, 1913; 8°.
— Un Micete nuovo per il Ruwenzori. Firenze, 1913; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).
Negri (G.). Relazioni razionali pel calcolo della distanza epicentrale: velocità medie apparenti ed assolute apparenti, nei primi tempi preliminari. Buenos Aires, 1913; 8° (*dall'A.*).
Pacinotti (A.). Descrizione di una macchinetta elettro-magnetica. Bergamo, 1912; 8° (*dall'Associazione elettrotecnica italiana*).
Pirotta (R.). Hanno le piante organi dei sensi? Roma, 1912; 8°.
— L'alternanza di generazioni nelle piante superiori. Pavia, 1912; 8°.
— e **Cortesi** (F.). Relazione sulle piante raccolte nel Karakoram dalla spedizione di S. A. R. il Duca degli Abruzzi. Bologna, 1912; 8° (*dal professor Pirotta, Socio corrispondente dell'Accademia*).
Rejna (V.), **Bianchi** (E.), **Gabba** (L.) e **Favaro** (G. A.). Differenza di longitudine fra Milano (Osservatorio di Brera) e Roma (Monte Mario) determinata nei mesi di Luglio e Agosto 1907. Bologna, 1912; 4° (*dono del Direttore del R. Osserv. di Brera prof. G. Celoria, Socio dell'Accad.*).
Roccati (A.). I nostri medaglioni. Bartolomeo Gastaldi. Torino, 1912; 8°.
— I ghiacciai del gruppo Clapier-Maledia-Gelas (Alpi marittime). Torino, 1912; 8°.
— Tremolite e talco lamellare nel calcare del vallone dei Subiaschi (Valle Pellice). Padova, 1913; 8° (*dall'A.*).
** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. Parte I: Fauna palaeartica, livr. 100-103. Parte II: Exotica, livr. 141-148.
Somigliana (C.). Sopra un criterio di classificazione dei massimi e dei minimi delle funzioni di più variabili. Cambridge, 1912; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).
Vasconcellos (F. de). Sur la rotation des forces autour de leurs points d'application et l'équilibre astatique. Coimbre, 1912; 8° (*dall'A.*).

Dal 20 Aprile al 22 Giugno 1913.

Arrighi (G. L.). La storia del femminismo. Firenze, 1911; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).
Cinquetti (G. F.). Torquato Tasso e le glorie di una secolare milizia. Verona, 1913; 16° (*dall'A.*).
Congresso (III) Archeologico internazionale. Bollettino riassuntivo. Roma, 1912.
Giovagnoli (R.). Risorgimento italiano dal 1815 al 1848. Milano.
— Pellegrino Rossi e la Rivoluzione romana. Roma, 1898-1911; 3 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).
Litta. Famiglie celebri italiane. Fasc. LIX, LX (Carafa di Napoli).
Menzio (P. A.). Alfieri, Gioberti, Mazzini e il Risorgimento nazionale. Vol. I. Casalbordino, 1912; 1 vol. 16° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).

Morpurgo (G.). Un Umanista martire. Aonio Paleario e la Riforma teorica italiana nel secolo XIV. Città di Castello, 1912; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).

Nallino (C. A.). L'arabo parlato in Egitto. Grammatica, dialoghi e raccolta di vocaboli. 2ª ediz. Milano, 1913; 1 vol. 16°.

— La scienza anatomica. Sua storia presso gli Arabi nel Medio evo (edita in arabo, 1909-1910); 4 fasc. 8° (*dall'A.*).

Pagliaro-Bordone (S.). La mente e il cuore di un siciliano. Bio bibliografia documentata. Catania, 1913; 1 vol. 8° (*Id.*).

Pélissier (L. G.). Documents relatifs au règne de Louis XII et à sa politique en Italie. Montpellier, 1912; 1 vol. 8°.

— Lettres inédites du bibliothécaire Prunelle. Paris, 1912; 8°.

— Lettres de Alexandre de Humboldt au professeur Provençal. Torino, 1912.

— Vivant Denon suspect à Venise (1793). Paris, 1913; 8° (*dono della signora vedova L. G. Pélissier*).

** **Petermanns** Mitteilungen 1855-1859, 1893-1898. Gotha, 11 vol.

Pitré (G.). La démopsychologie. Traduit par L. G. Pélissier. Montpellier, 1912 (*dalla signora vedova G. Pélissier*).

Rossi (T.). In memoria di Vittorio Avondo. Torino, 1912; 8° (*dall'A.*).

Sandonà (A.). La polemica sulla battaglia di Solferino e la Campagna d'Italia nel 1859. Roma, 1909; 8°.

— Episodi di guerra e di pace nel Trentino nell'anno 1866. Trento, 1910; 8°.

— Contributo alla storia dei processi del ventuno e dello Spielberg. Torino, 1911; 1 vol. 8°.

— " Il Caffè Pedrocchi ". Le vicende di un giornale celebre. Roma, 1912; 8°.

— L'evasione dei Fratelli Bandiera dalla flotta austriaca e il loro preteso traditore. Roma. 1912; 8°.

— Il Regno Lombardo-Veneto (1814-1859). Milano, 1912; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).

Sanna (S.). Biografia leggendaria di Santa Giusta v. e m. sarda. Portici, 1911; 16° (*dall'A.*).

Zozzi (G.). Di una lettera di Torquato Tasso in relazione con un'opera di Andrea Palladio (L'antico Parco Reale di Torino). Venezia, 1912; 8° (*Id.*).

Tip. Vincenzo Bona - Torino — 1913

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(ANNO 1912-1913)

R. OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI TORINO

OSSERVAZIONI METEOROLOGICHE

fatte nell'anno 1912

ALL'OSSERVATORIO DELLA R. UNIVERSITÀ

DI TORINO

(Lat. 45°4′8″ N.; Long. da Greenwich 7°41′48″ = $0^h30^m47^s$ E.; Alt. sul liv. del mare m. 276.4)

CALCOLATE
DALLA
Dott.ª GIOVANNA GREGGI
Assistente all'Osservatorio

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1913

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(ANNO 1912-1913)

R. OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI TORINO

OSSERVAZIONI METEOROLOGICHE

fatte nell'anno 1912

ALL'OSSERVATORIO DELLA R. UNIVERSITÀ

DI TORINO

(Lat. 45°4'8" N.; Long. da Greenwich 7°41'48" = 0h30m47s E.; Alt. sul liv. del mare m. 276.1)

CALCOLATE
DALLA
Dott.a GIOVANNA GREGGI
Assistente all'Osservatorio

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1913

Nelle tavole che seguono, sono raccolti i risultati delle principali Osservazioni Meteorologiche fatte all'Osservatorio della R. Università di Torino nell'anno 1912.

Le notazioni e i simboli usati sono quelli che si adoperano generalmente; la forza del vento è espressa nella scala 0 — 4; la nebulosità del cielo nella scala 0 — 10.

Le meteore sono indicate coi simboli internazionali proposti dal Congresso di Vienna e ora comunemente adottati:

Pioggia	●	Temporale	⚡
Neve	✱	Temporale lontano	T
Nevischio	△	Lampi senza tuoni	<
Grandine	▲	Lampi e tuoni	≷
Nebbia	≡	Vento forte	⌴
Nebbia all'orizzonte	≡	Vento fortissimo	⌴
Brina	∨	Uragano di neve	✛
Gelo	⊔	Alone solare	⊖
Gelicidio	∾	Alone lunare	∈
Rugiada	⌓	Corona solare	⊕
Aghi di ghiaccio	←	Corona lunare	∂
Caligine	∞	Arco baleno	⌒

Le nubi vengono specificate con le abbreviature: *Ci* = *cirri*, *Cu* = cumuli, *S* = strati, *N* = nembi, *Ci-Si* = cirro-strati, *Ci-Cu* = cirro-cumuli, *S-Cu* = strato-cumuli, *Cu-N* = cumulo-nembi. Quando si scorgono più forme di nubi, queste si notano nell'ordine della loro predominanza.

Gli esponenti ^{0}, ^{2} e ^{3} indicano che la meteora alla quale si riferiscono, è di poca intensità, oppure forte o fortissima; le lettere ***n*** e ***m*** significano che la meteora è stata osservata nella notte, oppure nel mattino.

Le ore sono contate da una mezzanotte all'altra in tempo medio dell'Europa Centrale.

I valori medî giornalieri sono ottenuti prendendo la media dei valori osservati alle 9^h, alle 15^h e alle 21^h, fuorchè per la temperatura, che è ottenuta facendo la media dei valori estremi e delle temperature osservate alle 9^h e alle 21^h. I dati della temperatura senza segno, si intendono preceduti dal segno +.

Sono considerati come *sereni* quei giorni in cui la somma dei decimi della nebulosità ottenuta dalle tre osservazioni delle 9^h, 15^h e 21^h non sorpassa il numero 3, *misti* quelli nei quali detta somma varia da 4 a 26, *coperti* quelli in cui la somma va da 27 a 30; *nebbiosi* sono detti quei giorni nei quali la nebbia (≡) persiste per tutta la giornata, ***con nebbia*** quelli in cui tale fenomeno non è durato tutta la giornata (fra questi però sono contati anche i nebbiosi). In ultimo sono considerati come *giorni di gelo* quelli nei quali la temperatura minima è a 0° o sotto 0°.

I dati relativi alle precipitazioni e all'evaporazione di ciascun giorno si riferiscono al periodo di tempo che decorre dalle ore 21 del giorno precedente alle 21 di quello indicato.

Per ciascuna decade e in corrispondenza dei giorni in cui sono avvenuti, sono stampati in **grassetto** i massimi e i minimi della pressione, della temperatura, della tensione del vapore e dell'umidità relativa. A pie' di pagina sono riportati i massimi e i minimi mensili degli stessi elementi meteorici. A pag. 52 e 53 sono contenute le medie decadiche e mensili.

Nell'ultima tavola sono confrontati coi valori normali i risultati ottenuti in quest'anno.

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	746,07	**747,53**	748,56	747,39	−0°,6	2°,6	−0°,2	2°,6	1°,8	0,[illegible]
2	**48,95**	46,29	45,29	46,84	1,2	4,1	2,5	4,1	2,0	2,[illegible]
3	42,75	39,88	38,08	40,24	**−2,2**	7,0	−0,2	6,7	6,0	2,[illegible]
4	35,38	33,32	33,78	34,16	2,9	**11,2**	3,8	11,0	8,5	6,[illegible]
5	34,16	32,08	31,34	32,53	0,0	3,9	0,4	3,9	2,4	1,[illegible]
6	29,28	27,58	24,25	27,04	0,2	8,3	5,4	7,5	6,5	5,[illegible]
7	19,01	**14,90**	18,96	17,62	1,9	10,6	3,4	6,8	10,6	6,[illegible]
8	35,15	36,96	38,70	36,94	3,4	6,9	5,4	6,9	3,4	4,[illegible]
9	38,21	36,88	36,42	37,17	0,0	4,1	0,4	4,1	2,6	1,5
10	37,09	36,64	40,28	38,00	−1,0	6,0	−0,4	5,8	4,4	2,[illegible]
11	745,26	745,99	748,13	746,46	−1,1	6,0	0,2	5,9	2,6	1,[illegible]
12	48,67	47,08	46,77	47,50	−1,4	3,2	2,4	3,1	2,6	1,7
13	46,26	45,00	44,58	45,28	1,5	2,6	2,0	2,3	3,3	2,4
14	44,08	41,49	41,69	42,42	1,5	2,0	1,4	1,9	1,9	1,7
15	42,24	41,88	**40,91**	41,34	−0,2	1,6	1,4	0,4	−0,2	0,6
16	41,05	41,38	42,50	41,64	−2,2	1,7	−1,8	−1,9	−1,8	−1,[illegible]
17	41,03	41,74	43,24	42,00	**−2,6**	−0,1	−1,2	−0,1	−0,2	−1,0
18	46,97	48,12	**49,05**	48,04	−1,2	−0,1	−0,7	−0,1	−0,8	−0,7
19	48,66	47,95	46,84	47,81	−1,8	1,6	0,0	1,4	1,6	−0,4
20	45,14	45,06	44,45	44,88	0,0	2,8	0,6	2,8	1,8	1,[illegible]
21	**742,92**	741,88	741,09	741,96	0,2	3,4	1,0	3,4	3,4	2,[illegible]
22	40,32	39,88	40,17	40,12	0,6	4,2	2,5	4,0	4,2	2,[illegible]
23	40,28	39,33	38,46	39,35	3,0	4,0	3,6	3,8	3,1	3,4
24	39,14	38,62	37,45	38,40	1,6	4,2	2,6	4,0	4,2	3,1
25	31,65	29,80	30,38	30,61	3,6	5,5	4,0	5,5	4,4	4,4
26	32,20	32,05	32,08	32,11	0,0	5,2	1,2	4,7	5,2	2,9
27	29,99	**29,13**	29,95	29,69	3,0	5,5	4,4	5,5	5,0	4,5
28	30,01	30,13	31,75	30,63	3,9	5,6	5,2	5,6	3,8	4,[illegible]
29	34,05	32,87	33,92	33,64	0,5	4,2	3,8	4,6	4,4	3,[illegible]
30	34,90	35,92	37,13	35,13	2,0	2,4	2,0	2,3	2,3	2,[illegible]
31	36,65	35,03	33,78	35,15	1,1	3,4	1,4	3,3	1,8	1,[illegible]
Media	39,06	38,25	38,50	38,59	0,53	4,31	1,78	3,92	3,23	2,4[illegible]
Massima	749,05 il giorno 18					11°,2	il giorno		4	
Minima	714,90 » 7					−2°,6	»		17	

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
4,2	5,1	4,8	4,7	92	93	93	93		1
4,8	4,9	4,6	4,8	88	80	87	85		2
4,1	5,4	5,1	4,9	89	74	73	79		3
5,0	4,3	5,3	4,9	83	44	64	64		4
4,6	5,3	5,1	5,0	96	87	93	92		5
3,3	4,3	4,6	4,1	49	55	64	56		6
4,5	5,3	3,8	4,5	76	71	40	60		7
2,7	1,6	3,1	2,5	40	22	51	38		8
3,5	3,4	2,9	3,3	75	55	51	60		9
3,5	3,3	4,1	3,6	78	48	65	64		10
4,1	4,9	4,4	4,4	89	70	79	79		11
4,9	5,1	5,1	5,0	89	89	93	90		12
5,1	4,9	4,7	4,9	96	91	81	89		13
4,3	4,2	4,2	4,2	85	80	80	82		14
4,5	4,4	4,2	4,3	89	92	92	91		15
3,8	3,7	3,7	3,7	96	94	92	94		16
3,9	4,3	4,0	4,0	92	93	89	91		17
4,1	4,3	4,0	4,1	92	93	92	92		18
4,2	4,3	4,4	4,3	93	85	85	87		19
4,2	4,3	4,3	4,3	88	75	82	82		20
4,2	5,0	5,1	4,7	85	85	86	85		21
5,2	5,7	5,6	5,5	95	93	90	93		22
5,7	5,4	5,4	5,5	93	90	93	92		23
4,8	5,6	5,6	5,3	86	92	90	89		24
5,7	6,1	5,9	5,9	93	91	93	92		25
4,8	5,8	6,2	5,6	96	90	94	93		26
5,7	6,0	6,1	5,9	90	89	94	91		27
6,2	6,0	5,6	5,9	94	93	93	93		28
4,8	5,2	4,1	4,7	96	88	72	85		29
4,7	4,4	4,4	4,5	89	81	81	83		30
4,3	3,9	3,7	3,9	85	68	71	75		31
4,48	4,70	4,63	4,59	86,2	78,7	80,8	81,9		Media
6,2	il giorno 26			96	il giorno 16				Massima
1,6	» 8			22	» 8				Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e form	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	—	0	*N*	1	—	0	10	10
2	*SW*	1	*SSW*	2	—	0	8	0
3	*S*	1	—	0	*N*	2	0	5
4	*SW*	1	—	0	*S*	1	4	3
5	*N*	1	*N*	1	*E*	1	10	6
6	*SW*	2	*E*	1	*E*	1	4	10
7	—	0	*N*	2	*W*	2	9	8
8	—	0	*SE*	2	—	0	0	0
9	—	0	*S*	1	—	0	0	4
10	—	0	*W*	1	*S*	1	0	0
11	*S*	1	—	0	*NE*	1	0 ≡	5 *SCi* ≡
12	*SW*	1	—	0	—	0	10 *Cu* ≡	10 ≡
13	—	0	—	0	*SE*	1	10 ≡	10 *CuN* ≡
14	*NE*	1	—	0	*S*	1	10 ≡	10 ≡
15	*NE*	1	*E*	1	*N*	2	10 ≡	10 *CuN* ≡
16	*N*	1	*N*	1	*N*	1	10 *CuN* ≡	10 *CuN*
17	—	0	*N*	1	—	0	10 *Cu*	10 *CuNSCi*
18	—	0	*N*	0-1	—	0	10 ✳ ≡	10 ≡
19	—	0	*N*	0-1	*S*	2	10 *Cu* ✳	10 *Cu* ✳
20	*NE*	1-2	*W*	1	*N*	2	10 *Cu* ≡	9 *CuSCi*
21	—	0	*SW*	1	—	0	10 ≡	10 *mnsr*
22	—	0	—	0	—	0	10 ≡^{3}	10 ≡
23	*S*	1	*E*	1	*E*	1	10 *mn* ●^{2} ≡	10 *mn* ●^{2} ≡
24	*S*	1	—	0	—	0	10 ≡	10 *m* ≡
25	—	0	*S*	1	*S*	2	10 *m* ● ≡	10 *mnsr*
26	—	0	—	0	—	0	10 ≡^{3}	10 *mnsr* ≡
27	*NW*	1	—	0	*S*	1	10 ● ≡^{2}	10 *mnsr* ≡
28	—	0	*S*	1	*N*	1	10 ● ≡	10 ● ≡
29	*N*	1	*E*	1	—	0	10 ● ✳ ≡	1 *ms*
30	*NE*	1	*NE*	1	*NE*	2	10 *mn* ≡	10 *mns* ●
31	—	0	*S*	1	*S*	1	9 *mnsr*	10 *mnsr*

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
15	7	7	2	15	5	3	1	38

...elle nubi 21h	Media	Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
10	10			1
0	3			2
8	4		2h V; 21h ∈.	3
2	3			4
5	7			5
9	8			6
0	6		Pioggerella di breve durata.	7
0	0			8
10	5			9
0	0			10
0	2		8h V.	11
10 ≡	10			12
10	10			13
10 ≡	10			14
10 *Cu*	10		Accenno di neve durante il pomeriggio.	15
10 *CuN* ≡	10		Accenno di neve nel mezzogiorno.	16
10 *Cu*	10			17
10 ≡	10	1,9	8h nella notte leggera nevicata.	18
10 *Cu* ≡	10	7,2		19
0 ≡	6			20
10 *mnsr*	10	1,4		21
10 ≡	10			22
10 *mn*●² ≡	10	9,8		23
10 *m* ≡	10	5,6		24
0 ≡	7	25,4		25
10 ≡	10			26
10 *mn* ≡	10	14,0		27
10 ●	10	8,2		28
10 *m*	7	3,6	8h incomincia a nevicare forte.	29
10 *mns* ≡	10	4,5		30
2 ≡	7			31

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	nebbiosi	con nebbia	pioggia	neve	di gelo	Temp.
5	9	17	5	—	—	10	—	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	731,23	729,02	727,71	729,32	—1°,5	3°,3	—1°,4	2°,7	1°,0	0°,4
2	23,42	18,39	15,73	19,18	—0,2	0,4	0,3	—0,1	—0,2	0,[illegible]
3	**11,92**	14,58	21,80	16,10	—3,0	6,0	—3,0	5,8	2,0	[illegible]
4	28,27	28,11	25,91	27,43	—3,0	0,5	—1,5	0,2	—1,0	—1,[illegible]
5	24,04	27,06	30,42	27,17	**—4,0**	0,2	—4,0	—0,3	0,2	—[illegible]
6	33,15	34,37	34,09	33,87	—2,0	1,0	—0,4	0,9	0,8	—0,[illegible]
7	34,16	25,23	**35,42**	31,60	1,6	3,8	1,6	3,2	3,8	2,7
8	34,94	34,02	32,29	33,75	2,6	5,0	3,2	4,4	4,8	3,9
9	30,07	28,68	27,31	28,69	3,4	6,0	4,6	5,6	6,0	5,6
10	26,67	26,41	27,67	26,92	3,8	**10,5**	3,8	9,5	7,4	6,[illegible]
11	728,97	**728,26**	728,62	728,62	6,2	7,2	6,6	6,7	6,5	[illegible]
12	33,41	35,44	36,90	35,25	3,7	10,9	4,2	10,7	9,2	[illegible]
13	37,70	37,23	34,24	36,39	3,4	7,8	4,2	7,4	6,4	[illegible]
14	33,74	32,98	33,98	33,57	5,1	11,8	5,4	10,7	8,2	7,6
15	36,09	38,01	**39,12**	37,74	5,0	**12,2**	6,1	11,1	8,1	7,9
16	43,01	43,54	43,77	43,44	2,3	10,1	2,3	9,6	7,6	5,6
17	45,67	46,62	**46,74**	46,34	1,4	9,0	2,0	8,4	6,8	4,8
18	46,27	44,78	44,00	45,02	4,5	7,8	5,2	7,6	7,2	6,2
19	40,05	38,92	37,40	38,79	5,0	5,9	5,4	5,8	5,0	5,3
20	34,79	34,33	35,30	34,81	4,1	9,5	4,6	8,5	7,6	6,4
21	**737,35**	738,50	739,70	738,52	2,5	9,6	3,7	9,6	7,6	5,[illegible]
22	41,83	43,06	44,81	43,23	2,0	12,0	3,6	10,9	8,8	6,6
23	46,93	46,14	45,39	46,15	2,0	11,2	4,6	10,4	9,2	6,[illegible]
24	42,74	40,74	40,00	41,16	3,2	11,0	5,0	9,8	8,6	6,[illegible]
25	38,37	38,41	37,76	38,18	5,5	11,2	6,8	10,6	9,8	8,4
26	38,70	39,17	42,45	40,11	7,8	14,0	8,6	12,9	10,2	10,1
27	45,22	45,83	46,13	45,75	9,0	13,7	9,8	13,5	10,8	10,[illegible]
28	**46,29**	45,52	45,65	45,82	5,5	14,2	6,6	13,9	12,0	9,6
29	45,20	43,72	43,68	44,20	5,1	**14,5**	7,2	13,9	11,8	9,6
Media	36,09	35,65	36,23	35,99	2,86	8,42	3,71	7,52	6,50	5,[illegible]
Massima	746,29 il giorno 28				14°,5 il giorno 29					
Minima	711,92 » 3				— 4°,0 » 5					

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
3,8	3,6	3,9	3,8	92	65	80	79		1
4,2	4,3	4,2	4,2	89	87	92	89		2
3,3	5,4	**2,4**	3,7	91	78	**46**	72		3
3,8	4,1	3,6	3,8	92	89	84	88		4
3,2	4,3	3,8	3,8	**95**	93	81	90		5
3,9	4,3	4,6	4,3	89	87	94	90		6
4,8	5,3	5,6	5,2	93	91	93	92		7
5,4	5,9	6,0	5,8	93	93	93	93		8
5,9	6,4	6,6	6,3	93	94	94	94		9
5,6	**7,7**	7,5	6,9	93	86	97	92		10
6,9	7,0	6,8	6,9	94	96	94	95		11
6,0	4,8	4,2	5,0	**97**	50	49	65		12
4,4	6,2	6,6	5,7	70	80	91	80		13
5,9	5,5	6,6	6,0	83	57	81	75		14
5,5	**3,8**	4,3	4,5	77	**39**	53	56		15
4,5	4,5	4,8	4,6	82	51	61	65		16
4,1	5,8	5,9	5,3	77	70	79	75		17
5,8	6,5	6,3	6,2	87	83	83	84		18
5,3	5,8	5,5	5,5	78	85	84	82		19
5,7	6,4	6,3	6,1	90	77	80	82		20
5,1	5,4	6,3	5,6	77	60	80	72		21
4,7	4,9	6,2	5,3	80	**51**	73	68		22
5,1	6,6	6,6	6,1	81	70	76	76		23
5,9	6,5	6,9	6,4	90	72	81	81		24
6,3	7,6	7,7	7,2	85	80	85	83		25
8,0	8,2	8,3	8,2	**92**	74	90	85		26
8,6	8,0	8,2	8,3	90	70	85	82		27
6,2	7,1	7,5	6,9	85	60	72	72		28
7,0	7,9	7,8	7,6	86	67	76	76		29
5,37	5,90	5,94	5,73	87,4	74,1	80,2	80,4		**Media**
8,6	il giorno 27			97	il giorno 10 e 12				Massima
2,4	» 3			39	» 15				Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e forma	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	*W*	2	*W*	2	*N*	1	10 *mns* ≡	0
2	—	0	—	0	*S*	1	10 ≡	10 ✱ ≡
3	*S*	2	*W*	3	*E*	3	10 ≡	0
4	*NE*	1	*S*	3	*S*	3	10 ✱ *mn*	10 *mn* ●
5	*NE*	1	—	0	*S*	1	10 ≡²	0
6	—	0	—	0	*S*	1	10 ≡	10 ✱ ≡
7	*S*	1	*SW*	1	*S*	1	10 ● ≡	10 *mn* ≡
8	—	0	—	0	*NE*	2	10 ≡²	10 ≡²
9	—	0	—	0	—	0	10 ● ≡	10 ≡
10	*S*	2	*NE*	1	*N*	3	10 ≡	8 *msr*
11	*N*	1	*N*	1	—	0	10 ● ≡	10 *mnsr* ●
12	*N*	1	*S*	1	*N*	2	4 ≡	0
13	—	0	*N*	1	*N*	1	0 *msr* ≡	10 *mnsr*
14	*S*	1	*S*	1	—	0	4 *mr*	5 *srm*
15	—	0	—	0	*S*	1	0	0
16	—	0	*S*	1-2	*S*	2	3 *ms*	0
17	*NE*	1	*NE*	0-1	*NE*	1-2	0	1
18	—	0	—	0	—	0	10 *m* ≡	10 *m* ≡
19	*N*	0-1	*SW*	2	—	0	10 *m* ≡	10 *mns*
20	*S*	2	—	0	—	0	0 *mr*	0
21	*N*	1	*N*	1	*S*	1	8 *mr*	5 *mn*
22	*S*	1	*S*	1	—	0	0 *sr*	0 *sr*
23	—	0	*E*	0-1	*NW*	1	6 *ms* ≡	8 *sr*
24	—	0	—	0	—	0	10 *m* ≡	7 *srm*
25	*NE*	1	*W*	1	*W*	3	10 *msr*	10 *msr*
26	—	0	*W*	1	*NW*	2	10 ● ≡	1 *sr*
27	—	0	*S*	1-2	—	0	8 *m* ≡	8 *ms*
28	*S*	1	*W*	1	—	0	0 ≡	0
29	—	0	—	0	—	0	0 ≡	3 *sm* ≡

Frequenza relativa dei venti :

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
10	7	2	0	21	2	7	2	36

lelle nubi		Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
21h	Media			
0	0			1
10	10	2,5		2
0 ≡	3			3
10 *mn* ✳	10		Accenno di neve a 9h e 21h.	4
10	7		8h V.	5
10 ✳≡	10			6
10 ●	10	34,1	8h neve durante la notte.	7
10 ●≡	10	7,0		8
10 ≡	10	11,7	8h nebbia umida e folta.	9
10 ≡	9	1,2		10
10 *mrs*	10	8,7		11
0	1			12
10 *mnsr*	7			13
5 *m*	5			14
0	0			15
0	1			16
1	1			17
10 *m*	10			18
10 *m*	10	4,0	Incomincia la pioggia verso le 12h30m.	19
0	0			20
0	4			21
0 *sr*	0			22
10 *m*	8			23
7 *msr*	8			24
10 *msr*	10			25
10 *m* ≡	7			26
4 *ms*	6			27
0	0			28
8 *sm* ≡	3			29

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	nebbiosi	con nebbia	neve	di gelo	con pioggia
10	6	13	14	—	—	—	7

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	**743,41**	743,02	742,61	743,01	5°,0	11°,0	8°,6	10°,9	10°,0	8°,4
2	40,12	39,91	39,51	39,85	8,2	13,5	8,7	12,5	11,0	10,4
3	37,25	32,75	**31,10**	33,70	7,8	9,1	8,7	8,1	7,9	8,4
4	33,44	33,40	36,23	34,36	5,1	**14,2**	6,0	13,4	10,2	8,9
5	36,51	35,33	34,49	35,44	5,0	12,2	6,2	12,0	10,0	8,4
6	31,82	31,34	31,73	31,63	4,9	14,0	7,8	13,6	11,2	9,5
7	32,44	32,19	32,45	32,36	4,1	10,8	5,8	10,7	8,0	7,2
8	34,73	34,16	34,46	34,45	**3,1**	12,5	4,2	11,9	9,0	7,2
9	37,37	37,08	37,55	37,33	4,0	12,0	5,2	11,2	9,8	7,7
10	37,05	36,81	35,31	38,39	4,6	6,6	6,6	5,0	5,2	5,8
11	738,12	738,58	739,98	738,89	3,8	9,9	4,6	9,8	8,6	6,7
12	43,57	43,70	44,53	43,93	4,8	11,7	6,6	11,4	9,0	[illegible]
13	**45,35**	43,47	43,13	43,98	4,0	13,2	5,8	12,7	10,6	[illegible]
14	43,48	41,40	41,22	42,03	4,0	**13,5**	6,1	12,3	10,5	[illegible]
15	39,12	37,07	35,89	37,36	4,0	13,2	7,0	12,9	10,6	[illegible]
16	34,10	31,84	31,98	32,64	4,2	12,5	7,1	12,0	10,0	[illegible]
17	33,10	32,30	31,61	32,34	6,0	8,5	7,0	8,1	6,8	7,1
18	28,55	**25,68**	26,04	26,76	4,9	6,8	5,3	6,4	5,8	5,7
19	27,30	27,67	30,77	28,58	**3,1**	12,2	5,4	11,0	9,2	[illegible]
20	31,80	29,66	29,20	30,22	4,2	10,9	6,6	10,3	6.2	[illegible]
21	731,66	731,68	732,14	731,83	**2,2**	13,0	4,5	12,8	9,2	7,2
22	29,25	**28,09**	28,17	28,50	2,2	10,1	5,6	9,3	7,3	[illegible]
23	31,75	33,22	34,15	33,04	2,4	15,6	11,3	**15,4**	12,0	[illegible]
24	34,15	31,18	33,95	33,09	7,0	16,6	9,5	16,0	15,8	[illegible]
25	39,31	40,49	42,78	40,86	7,9	19,2	11,3	19,1	16,8	[illegible]
26	47,63	47,14	47,08	47,28	8,1	17,0	11,6	16,5	14,6	[illegible]
27	44,84	41,42	40,60	42,29	8,1	19,6	10,8	18,8	16,8	[illegible]
28	**48,55**	36,91	36,92	40,79	10,6	**21,2**	11,2	20,6	17,6	15,2
29	37,01	34,89	35,81	35,90	11,0	21,2	13,0	20,8	17,0	15,6
30	40,17	39,12	38,80	39,36	9,8	14,1	12,6	13,6	12,4	12,2
31	37,95	35,11	32,87	35,31	7,0	15,4	10,2	15,1	11,4	11,9
Media	37,08	35,68	35,88	36,21	5,47	10,13	7,69	12,39	10,56	[illegible]
Massima	748,65 il giorno 28				21°,2 il giorno 28					
Minima	725,68 » 18				2°,2 » 21					

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
7,3	7,9	8,5	7,9	87	81	92	87		1
7,8	8,0	8,1	8,0	93	74	82	83		2
8,1	7,7	7,2	7,7	**96**	96	90	94		3
6,4	3,0	5,5	5,0	91	**26**	59	59		4
5,6	6,1	7,3	6,3	79	58	79	72		5
6,8	4,2	4,3	5,1	86	36	43	55		6
5,2	6,2	6,7	6,0	73	64	83	73		7
5,6	**3,0**	4,6	4,4	90	29	53	57		8
3,8	4,1	5,6	4,5	57	41	62	53		9
6,6	5,9	5,8	6,1	91	90	87	89		10
5,7	5,8	6,5	6,0	90	64	78	77		11
5,5	6,2	6,5	6,1	75	62	**76**	71		12
5,6	**4,9**	5,3	5,3	82	**44**	56	61		13
5,8	6,2	6,7	6,2	82	58	71	70		14
5,6	5,8	6,5	6,0	74	52	68	65		15
6,3	**7,4**	7,3	7,0	84	70	79	78		16
6,7	6,6	6,5	6,6	90	82	88	87		17
6,4	6,4	6,1	6,3	**95**	89	88	91		18
6,0	6,6	7,1	6,6	89	67	81	79		19
6,4	6,6	6,0	6,3	88	71	85	81		20
5,1	5,0	5,2	5,1	81	45	60	62		21
6,0	6,1	6,2	6,1	88	70	81	80		22
3,0	3,2	5,2	3,8	30	**24**	49	34		23
5,8	5,9	**4,4**	5,4	65	43	32	47		24
5,6	6,2	7,8	6,5	58	37	55	50		25
8,1	8,8	9,4	8,8	79	63	76	73		26
7,6	**10,1**	**10,5**	9,4	80	63	73	72		27
8,4	8,0	8,7	8,4	85	44	58	62		28
7,4	8,3	8,7	8,1	66	46	61	58		29
4,8	9,8	7,7	7,4	44	70	72	62		30
6,7	8,2	9,0	8,0	72	64	**89**	75		31
6,18	6,36	6,77	6,45	79	59	71	70		Media
10,5	il giorno	27		96	il giorno 3				Massima
3,0	»	23		24	»	23			Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e forma	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	—	0	*N*	1	—	0	10 *m* ≡	10 *msr*
2	*NW*	1-2	*S*	1-2	*S*	4	9 *m* ≡	2 *sr*
3	*N*	1-2	*N*	2-3	—	0	10 ● ≡	10 *mnsr*
4	*NE*	1	*W*	2-3	—	0	0 *m* ≡	0 *m*
5	—	0	*NW*	1	—	0	9 *rs*	8 *msr*
6	—	0	*N*	4	*N*	4	0 ≡	0 *s*
7	*NE*	3	*N*	1	*N*	0	9 *m*	8 *msr*
8	—	0	*W*	1	—	0	0 ≡	7 *srm*
9	—	0	—	0	*N*	3	0 ≡	8 *msr*
10	*N*	1	—	0	*W*	1	10 ● ≡	10 ● ≡
11	*S*	2	—	0	—	0	8 *m* ≡	8 *msr*
12	—	0	*W*	1	*W*	2	9 m^2 ≡	10 *msr*
13	—	0	*S*	1	*S*	0	0 ≡	0 *sr*
14	*N*	1	—	0	—	0	0 ≡	3 *ms*
15	—	0	*NE*	1	—	1	0 ≡	3 *msr*
16	*N*	1	*NE*	1	*N*	2	10 *mn* ≡	6 *msr*
17	*N*	1	*N*	3	*N*	3	10 *m* ≡	10 *m* ≡
18	*N*	2	*N*	1	*N*	2	10 *m* ≡	10 *mnsr*
19	—	0	—	0	—	0	7 *m* ≡	1 *rs*
20	—	0	*E*	1	*W*	1	10 *mrs* ≡	10 *mns*
21	*E*	0	*SE*	1	*N*	3	0 ≡	3 *srm*
22	*NE*	2	—	0	*W*	1	10 ●	5 *msr*
23	*W*	2	*W*	3	*S*	1	0	3 *sr*
24	—	0	*W*	2-3	*NE*	1	10 *mnsr*	1 *ms*
25	—	0	*S*	1	—	0	0	3 *sr*
26	*N*	1	—	0	—	0	0 ≡	8 *msr*
27	—	0	*W*	1	—	0	4 *m* ≡	3 *sr* ≡
28	—	0	—	0	—	0	9 *msr*	8 *msr*
29	—	0	*S*	1-2	*S*	1	5 *m*	5 *srm*
30	*NE*	3	*NE*	1-2	—	0	8 *mnsr*	2 *ms*
31	—	0	—	0	*N*	1	2 *m* ≡	9 *mnsr*

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
21	8	2	1	0	9	2	9	41

delle nubi		Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
21h	Media			
10 *m* ●	10	0,5		1
9 *sr*	7			2
10 *mnsr*	10	28,3		3
0	0	0,4		4
8 *msr*	8			5
0	0			6
9 *m*	9			7
0	2			8
10 *msr*	6			9
10	10	20,2		10
0	5			11
0 ≡	6			12
0 ≡	0			13
0 ≡	1			14
10 *msr*	4			15
8 *m*	8			16
10 *m* ≡	10	0,7		17
8 *m*	9	0,3	18h ☇ con accomp. tuoni, ● fortiss. grandine.	18
0 ≡	3			19
0	7	6,4	Principio ● 18h, fine ● 18h40m, cielo completamente coperto; vento *N* forte.	20
0 ≡	1			21
5 ≡	7	10,8		22
7 *m*	3			23
0 *m*	4			24
0 *r*	1			25
0 ≡	3			26
5 *m*	4			27
0 ≡	6			28
0 ≡	3			29
4 *ms*	5			30
10 *mnsr*	7			31

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	nebbiosi	con nebbia	con pioggia	neve	di gelo	Temp.
11	14	6	23	—	9	—	—	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	724,95	722,39	**720,82**	722,72	7°,0	8°,9	8°,3	8°,2	8°,6	[illegible]
2	26,23	30,10	35,47	30,60	6,6	14,8	9,6	14,6	9,8	[illegible]
3	39,76	39,01	40,87	39,88	5,4	13,5	8,2	12,3	9,6	9,2
4	45,53	44,19	44,95	44,89	3,8	13,2	7,4	12,2	10,2	8,7
5	**46,90**	43,61	41,94	44,15	**3,2**	16,5	7,0	15,0	14,3	10,2
6	41,26	39,32	39,42	40,00	4,3	21,7	12,0	21,7	16,0	[illegible]
7	38,53	36,88	36,92	37,44	10,3	**22,9**	13,4	22,8	20,0	16,7
8	38,17	36,07	33,98	36,07	7,9	16,3	13,4	15,5	15,0	[illegible]
9	26,77	21,66	20,93	23,12	11,1	15,5	13,3	15,3	10,6	[illegible]
10	28,02	28,86	28,68	28,52	7,4	13,9	9,3	13,1	11,4	[illegible]
11	733,67	**733,08**	734,17	733,64	**4,0**	15,2	8,0	13,9	12,1	[illegible]
12	35,54	35,44	38,32	36,43	**4,0**	**17,2**	9,2	15,9	14,5	[illegible]
13	**44,87**	43,31	43,36	43,85	7,0	11,4	8,3	11,3	10,0	9,2
14	42,20	38,14	37,26	39,20	5,0	11,7	8,1	11,1	10,0	8,7
15	36,60	36,00	36,82	36,47	4,4	13,8	8,4	13,8	10,2	9,2
16	39,75	38,91	40,34	39,67	5,5	11,8	7,2	11,6	8,6	[illegible]
17	42,84	42,39	42,32	42,52	5,0	8,2	6,2	7,7	7,2	6,7
18	40,08	38,41	38,53	39,01	6,0	12,2	8,6	11,8	10,6	[illegible]
19	38,77	38,02	38,96	38,58	6,0	14,1	9,8	13,8	11,6	10,4
20	39,80	38,66	39,40	39,29	6,0	**17,2**	11,3	17,1	14,4	12,2
21	739,93	740,35	740,69	740,32	9,6	11,0	10,2	10,8	10,8	10,4
22	41,65	39,87	39,99	40,50	8,9	16,2	9,6	14,8	13,2	[illegible]
23	39,53	38,22	41,56	39,77	7,0	14,4	12,3	11,6	7,0	10,2
24	**42,28**	40,67	40,65	41,20	**6,0**	15,4	10,6	13,8	10,8	10,7
25	39,59	36,80	37,35	37,91	**6,0**	16,5	11,0	16,4	13,5	[illegible]
26	37,35	35,67	35,32	36,11	9,0	**18,5**	12,4	17,8	15,0	13,7
27	35,72	34,05	34,13	34,63	9,0	14,6	11,8	13,8	12,8	12,1
28	30,94	29,79	28,56	29,76	7,8	9,8	9,0	9,8	9,6	9,1
29	**27,01**	27,03	28,92	27,65	8,0	16,6	11,6	16,5	13,3	12,4
30	31,17	32,19	34,15	32,50	8,5	9,3	9,5	9,2	8,6	[illegible]
Media	37,18	35,97	36,49	36,55	6,66	14,41	9,83	13,77	11,68	[illegible]
Massima	746,90 il giorno 5				22°,9 il giorno 8					
Minima	720,82 » 1				3°,2 » 5					

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
7,7	7,3	6,5	7,2	**94**	90	78	87		1
5,5	2,3	2,8	3,5	62	18	31	37		2
3,4	3,7	3,2	3,4	42	34	35	37		3
2,5	3,7	4,1	3,4	32	35	44	37		4
4,5	4,4	7,4	5,4	60	34	61	52		5
6,6	8,1	8,2	7,6	63	42	65	57		6
8,3	8,8	7,7	8,3	73	43	44	53		7
7,7	9,2	**9,7**	8,9	67	70	76	71		8
8,4	8,3	4,8	7,2	74	64	50	63		9
1,9	**0,8**	3,3	2,0	22	**6**	33	20		10
5,0	4,1	5,8	5,0	62	34	55	50	9,6	11
5,7	6,3	7,2	6,4	66	47	58	57	4,0	12
5,4	4,5	4,6	4,8	66	45	50	54	5,0	13
3,1	3,9	4,8	3,9	39	40	53	44	4,7	14
5,1	3,6	5,6	4,8	62	31	60	51	3,2	15
5,6	5,3	5,9	5,6	74	52	70	65	2,2	16
5,8	5,6	5,9	5,8	82	71	77	77	2,0	17
5,2	5,4	5,8	5,5	62	52	61	58	1,8	18
5,5	5,9	6,6	6,0	60	50	64	58	3,8	19
6,5	7,0	**8,0**	7,2	65	48	**85**	66	3,1	20
8,3	8,2	7,0	7,8	90	85	73	83	2,5	21
7,5	6,5	7,0	7,0	83	52	62	66	4,5	22
6,2	7,4	6,6	6,7	57	70	88	72	3,8	23
6,5	8,6	7,3	7,5	68	73	75	72	5,6	24
6,4	6,3	7,1	6,6	66	45	61	57	4,5	25
7,0	6,4	7,1	6,8	65	42	56	54	7,0	26
5,7	5,5	5,1	5,4	56	46	47	50	3,0	27
7,3	7,4	7,8	7,5	85	82	87	85	1,8	28
7,7	8,3	9,2	8,4	76	59	80	72	2,0	29
7,8	7,4	7,7	7,6	88	85	**92**	88	0,4	30
5,99	6,01	6,33	6,11	65,4	51,5	62,4	59,8		Media
9,7 il giorno 8				94 il giorno 1					Massima
0,8 » 10				6 » 10					Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e form...	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	*N*	2	*N*	2-3	—	0	10 ● ≡	10 *ms*
2	—	0	*NE*	3-4	*NE*	3	0	0 *sm*
3	*S*	1-2	*W*	1	*E*	1	0	0 *r*
4	*S*	1	*S*	1	—	0	0	0
5	—	0	*W*	1	—	0	0 ≡	3 *sr*
6	*SE*	2	—	0	*S*	2	5	0
7	*S*	2	*SW*	1	*N*	1	0 ≡	0 ≡
8	*NE*	1	—	0	—	0	10 ≡	2 *sr*
9	—	0	—	0	*SW*	2	10 *m* ≡	10 *msr*
10	*E*	1	*W*	4	*W*	3	0	0 *m*
11	—	0	*W*	0-1	—	0	0	0
12	—	0	*SE*	1	—	0	5 *mrs*	3 *sr*
13	*N*	3	*NE*	1	*E*	1	8 *mrs*	8 *msr*
14	—	0	*E*	1	—	0	8 *mrs*	0 *sr*
15	—	0	*SE*	2	—	0	5 *msr*	8 *msr*
16	—	0	*S*	1	*N*	2	10 *m*	9 *msr*
17	*N*	2	—	0	*NW*	1	10 ● *msr*	10 *mnsr*
18	*N*	1	*S*	1	*S*	0-1	9 *m*	9 *msr*
19	*SW*	1	*SE*	1	*E*	2	2 *m*	5 *msr*
20	*S*	1	*W*	1	*E*	1	0 ≡	4 *ms*
21	*N*	2	*N*	2	—	0	10 *m* ●	10 *mn*
22	*W*	1	—	0	*S*	1	10 *mn*	1 *sm*
23	*S*	2	*N*	3	*S*	1	0 *r*	10
24	*W*	0-1	—	0	*S*	1	5	5 *m*
25	—	0	*W*	1	—	0	0	0
26	*S*	2	*S*	1	*N*	1	0	0 *m*
27	*N*	1	*N*	2	—	0	9 *m*	10 *m*
28	*N*	3	—	0	*S*	2	10 ●^{2}	10 ●
29	*S*	2	—	0	*S*	2	10 *m*	10 *mnsr*
30	*NW*	1	*N*	1	*NW*	2	10 *m* ●	10 *ms* ●

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
15	4	6	4	18	2	9	3	29

…lle nubi 21h	Media	Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
10 *m*	10			1
0	0	12,1		2
0	0			3
0	0			4
0	1			5
0	2			6
0 ≡	0			7
0	4			8
9 *msr*	10			9
0	0			10
0	0			11
10 *m*	6			12
10 *m*	9			13
0	3			14
0	4	0,5	16^h20^m K con ● forte breve durata, vento	15
10 *msr*	10		*SW* forte.	16
10 *mns*	10	0,5		17
10 *msr*	9			18
8 *msr*	5			19
3 *m*	2		18^h10^m tuoni.	20
10 *m*	10	5,9		21
0 ≡	4			22
10	6	28,5	14^h temporale con lampi e tuoni, pioggia	23
0	3	1,8	e vento forte di *N*, massima intensità	24
0	0		della pioggia 15^h45^m frammista a gran-	25
5 *m*	2		dine.	26
10 *m*	10	12,9		27
10 *m*	10	0,3		28
10 *msr*	10			29
10 ●	10	27,9		30

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	nebbiosi	con nebbia	con pioggia	neve	Temp.	di gelo
13	6	11	7	—	20	—	3	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	736,86	**736,73**	737,60	737,06	6°,8	9°,2	7°,3	9°,0	9°,2	8,1
2	39,40	38,40	38,10	38,63	**6,0**	13,0	7,4	11,8	10,3	9,5
3	38,18	36,94	37,09	37,40	6,1	17,2	10,2	15,9	13,8	11,8
4	38,46	37,05	37,68	37,73	8,0	18,5	12,4	18,4	16,0	13,7
5	38,71	37,75	39,84	38,77	10,0	19,0	13,8	18,8	14,2	14,2
6	41,99	42,00	42,85	42,28	10,6	16,6	13,4	15,6	13,6	13,6
7	**44,72**	43,65	43,37	43,91	10,3	22,4	15,8	20,6	19,3	[illegible]
8	42,76	39,95	40,30	41,00	13,6	**24,8**	18,2	23,8	21,8	[illegible]
9	44,18	43,72	42,93	43,61	13,0	**24,8**	18,2	22,0	20,0	[illegible]
10	40,82	38,03	38,08	38,98	15,0	24,5	18,7	24,3	21,6	20,[illegible]
11	739,27	738,42	739,80	739,16	15,1	26,9	19,9	26,5	23,6	21,4
12	41,31	39,94	40,59	40,61	17,5	25,8	20,6	25,6	22,4	21,6
13	40,57	39,07	39,32	39,65	16,8	25,0	19,9	24,4	21,2	20,7
14	38,28	36,08	36,11	36,82	15,3	25,5	20,4	25,3	22,1	[illegible]
15	36,57	34,54	32,64	34,58	15,2	25,5	19,8	23,4	20,2	[illegible]
16	31,47	30,89	**29,83**	30,73	15,0	24,0	18,7	22,2	19,9	19,4
17	34,67	34,80	36,94	35,47	13,6	20,4	16,6	19,9	17,0	16,9
18	38,18	37,17	38,12	37,82	**9,0**	22,0	15,8	20,6	18,6	16,4
19	41,30	39,83	40,06	40,40	10,5	21,2	15,0	20,3	19,7	16,6
20	40,51	38,32	38,04	38,96	10,5	23,0	18,2	22,8	20,8	18,1
21	737,21	735,42	734,41	735,68	15,5	**21,5**	18,6	20,9	15,3	17,7
22	32,40	30,95	30,98	31,44	13,2	19,8	15,2	19,3	18,6	16,7
23	31,19	**29,47**	31,20	30,62	12,6	20,8	16,4	14,2	13,1	15,7
24	30,62	30,34	31,15	30,70	10,8	21,5	14,9	20,7	18,4	16,4
25	33,23	31,87	31,85	32,32	11,9	22,3	17,4	22,2	19,2	17,7
26	31,97	30,94	32,16	31,69	13,8	24,5	20,4	23,8	18,7	[illegible]
27	34,56	33,36	34,98	34,30	14,2	22,2	17,6	21,8	19,0	18,2
28	**37,82**	37,30	36,60	37,24	13,9	20,2	15,2	20,0	18,4	16,9
29	35,29	34,44	33,65	34,46	14,0	15,4	14,8	15,2	14,8	14,8
30	32,77	32,11	32,15	32,34	12,6	15,2	13,5	13,8	13,3	[illegible]
31	34,05	33,00	33,71	33,59	12,0	**21,5**	15,6	21,2	18,6	[illegible]
Media	37,52	36,33	36,64	36,83	12,31	21,12	16,15	20.16	17,85	16,8[illegible]

	Pressione atmosferica	Temperatura dell'aria
Massima	744,72 il giorno 28	24°,8 il giorno 8 e 9
Minima	729,47 » 23	6°,0 » 2

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
6,7	6,5	7,3	6,8	**87**	76	84	82	0,5	1
6,2	6,5	6,6	6,4	80	63	71	71	2,5	2
6,7	7,1	7,6	7,1	72	53	65	63	4,0	3
8,0	7,7	9,6	8,4	74	49	71	65	4,5	4
9,1	9,5	10,0	9,5	78	59	83	73	4,8	5
9,6	9,9	10,0	9,8	84	75	86	82	5,1	6
9,7	7,9	9,8	9,1	73	**44**	59	59	8,0	7
11,0	11,6	**14,3**	12,3	71	53	74	66	7,6	8
11,3	9,9	11,1	10,8	73	50	64	62	7,0	9
11,6	11,9	11,9	11,8	72	53	62	62	6,0	10
11,8	11,9	12,2	12,0	**68**	46	57	57	9,0	11
12,2	14,0	13,3	13,2	68	57	66	64	8,1	12
11,5	14,2	12,5	12,7	66	62	67	65	7,0	13
12,0	**15,0**	13,2	13,4	68	62	67	66	7,5	14
10,2	13,0	10,1	11,1	59	61	57	59	7,5	15
10,2	10,2	7,5	9,3	63	51	43	52	8,0	16
2,8	**2,6**	4,7	3,4	20	**15**	32	22	23,2	17
4,5	5,6	7,8	6,0	33	31	49	38	10,0	18
5,9	8,0	9,3	7,7	47	45	54	49	9,2	19
8,0	7,4	7,8	7,7	52	36	43	44	10,2	20
7,9	8,1	10,3	8,8	50	44	80	58	4,0	21
10,4	10,1	**11,4**	10,6	81	61	71	71	3,0	22
10,7	9,4	9,5	9,9	77	78	85	80	4,2	23
8,8	**7,0**	8,2	8,0	70	39	52	54	7,2	24
7,1	7,5	7,9	7,5	48	37	48	44	10,0	25
7,2	7,6	8,5	7,8	40	**35**	53	43	9,5	26
9,7	9,7	10,3	9,9	65	50	63	59	8,6	27
10,2	10,1	10,9	10,4	80	58	69	69	3,2	28
10,3	11,1	10,9	10,8	82	86	87	85	1,2	29
10,3	10,7	10,5	10,5	90	91	**92**	91	3,0	30
9,9	10,4	10,5	10,3	75	55	66	65	5,2	31
9,07	9,43	9,85	9,45	66,6	53,9	65,0	61,8		Media
15,0	il giorno	17		92	il giorno 30				Massima
2,6	»	14		15	»	17			Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e form	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	*N*	1	*NE*	1	—	0	10 *m* ●	10 *mnsr*
2	—	0	—	0	—	0	10 *mn* ≡	10 *msr*
3	—	0	—	0	—	0	0	3 *ms*
4	—	0	*W*	1	—	0	0 ≡	7 *msr*
5	—	0	*S*	1	—	0	8 *ms* ≡	8 *mnsr*
6	—	0	*N*	1	—	0	10 *mn*	2 *ms*
7	—	0	*SW*	2	—	0	8 *s* ≡	1 *sr*
8	—	0	*NE*	0-1	—	0	3 *m*	4 *ms*
9	—	0	*SE*	1	—	0	0	9 *mnsr*
10	*SW*	2	*N*	1	—	0	7 *ms*	4 *srm*
11	—	0	—	0	—	0	4 *sr*	3 *ms*
12	—	0	*N*	1	—	0	0 ≡	2 *m*
13	*S*	2	*NE*	1	*S*	2	4 *m*	7 *msr*
14	*E*	1	—	0	*N*	1	0 *s*	3 *sr* ≡
15	*N*	1	—	0	*NE*	1	6 *m*	6 *m*
16	*NW*	1	*NE*	1	*NE*	4	0 *m*	5 *ms*
17	*W*	3-4	*W*	3-4	*SW*	2	0 *m*	0 *ms*
18	—	0	—	0	—	0	0	0
19	*N*	2	*N*	1	*S*	0-1	0 *r*	1 *mr*
20	—	0	*S*	1	—	0	8 m^3	3 *sr*
21	*NE*	0-1	—	0	*NE*	2	9 m^2	10 *mnsr*
22	—	0	—	0	—	0	10 *mn*	10 *mnsr*
23	*S*	1	*E*	1-2	—	0	0 ≡	10 *mnsr*
24	*S*	2	*W*	2-3	*W*	2	9 *ms*	6 *srm*
25	*S*	2	*W*	2-3	*S*	2	9 *mns*	10 *mnsr*
26	—	0	*E*	1	*E*	1	1 *sr*	2 *ms*
27	*E*	0-1	*SE*	1	—	0	3 *m* ≡	4 *ms*
28	—	0	—	0	*S*	2	10 *m* ≡	10 *mnsr*
29	*N*	1	—	0	*N*	1	10 *m* ≡	10 *mn*
30	*N*	1	*N*	2	*W*	2	10 *m* ≡	10 *mn* ●
31	—	0	—	0	—	0	4 *m*	4 *m*

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
12	8	5	1	10	3	6	1	47

delle nubi		Precipitazioni (in millimetri)	*Meteore*	DATA
21h	Media			
10 *m* ●	10	11,5		1
10 *msr*	10	4,0		2
1 ≡	1			3
10 *m*	6			4
0 *s*	5	10,5	● ☈ da 17^h30^m a 18^h30^m mass. inten. 18^h10^m.	5
3	5		Pioggia dalle 12^h30^m alle 13^h30^m.	6
1 *sr*	3			7
2 *s*	3			8
4 *m* ≡	4			9
4 *srm*	5			10
9 *mr*	5			11
10 *mn*	4			12
0	4			13
5 *sr*	3			14
5 *m*	6			15
2 *ms*	2			16
0 *ms*	0			17
0	0			18
8 *mr*	3			19
7 *mn*	6			20
10 *mns* ●	10			21
3 *mn*	8	2,4		22
10 *mns*	7	4,7	☈ < principio ● verso le 15^h, fine verso le 19^h30^m.	23
4 *srm*	6			24
3 *mn*	7			25
10 *mnsr*	4		Alle 21^h cielo temporalesco.	26
2 *m*	3			27
10 *mnsr*	10			28
10 *mn*	10	7,2		29
10 *mn* ●	10	17,7		30
8 m^2	5	10,5		31

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	con nebbia	con pioggia	neve	Temporali	Grandine
9	16	6	12	9	—	2	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	733,92	733,12	731,59	732,88	13°,6	15°,3	15°,2	14°,6	14°,8	14°,7
2	**27,85**	28,81	32,00	29,55	**9,4**	17,0	12,2	15,6	13,2	12,9
3	34,89	34,95	35,90	35,25	14,4	18,0	14,6	16,8	13,0	15,0
4	36,85	36,22	36,58	36,55	11,5	19,0	15,2	17,8	14,6	15,1
5	37,35	37,27	37,63	37,42	13,0	18,0	14,4	17,6	16,0	15,4
6	**39,45**	39,03	38,80	39,09	14,1	21,2	17,0	21,0	18,4	17,7
7	38,29	37,32	38,23	37,95	14,0	19,1	15,2	18,6	16,0	16,1
8	37,83	36,62	37,48	37,31	14,0	24,0	18,2	22,2	17,4	18,4
9	36,38	35,21	34,54	35,38	15,4	23,8	20,2	19,8	19,1	19,6
10	33,06	31,04	30,42	31,51	15,0	**24,3**	20,0	23,3	20,8	20,0
11	729,85	729,50	**729,31**	729,55	14,1	19,4	18,0	14,7	16,2	16,9
12	31,04	31,46	30,47	30,99	13,9	17,5	14,8	17,0	15,2	15,1
13	30,00	28,95	28,39	29,11	13,6	21,2	14,9	20,6	18,4	17,0
14	30,36	31,03	35,22	32,20	**13,5**	26,2	20,5	25,5	22,2	[illegible]
15	38,15	37,36	37,43	37,65	14,2	26,0	19,4	23,5	22,8	[illegible]
16	37,46	35,57	34,11	35,71	15,7	**25,9**	21,6	24,8	21,2	21,1
17	36,17	36,84	38,55	37,19	15,2	26,1	21,6	24,5	21,8	21,2
18	**42,16**	40,81	41,00	41,32	14,9	24,8	18,8	24,2	22,2	20,2
19	41,82	40,48	41,21	41,17	16,2	27,2	23,1	26,6	24,6	[illegible]
20	39,32	37,21	36,69	37,74	19,9	**29,0**	23,5	28,1	25,6	24,5
21	738,24	737,07	737,96	737,76	18,1	26,0	20,9	25,6	23,3	22,1
22	39,79	38,38	38,39	38,85	18,2	28,5	21,2	25,5	25,0	23,2
23	38,52	36,65	36,39	37,19	20,4	**30,9**	22,6	29,4	26,6	25,1
24	35,66	36,23	35,48	35,79	20,2	24,9	23,8	18,7	18,6	21,9
25	35,87	34,87	35,99	35,58	16,1	26,5	21,1	24,7	22,4	21,5
26	36,68	35,87	37,07	36,54	16,6	25,2	20,0	24,7	22,8	21,1
27	39,96	39,31	39,89	39,72	17,4	26,2	20,3	24,9	22,8	21,7
28	**41,26**	39,31	39,49	40,19	15,9	27,0	20,6	26,1	24,0	21,9
29	38,57	35,80	35,12	36,50	**13,8**	27,2	22,4	26,5	22,8	21,4
30	34,93	**33,97**	34,48	34,46	16,8	27,0	21,9	25,1	22,2	[illegible]
Media	36,39	35,56	35,86	35,94	15,29	23,75	19,13	22,27	20,13	[illegible]

	Pressione atmosferica	Temperatura dell'aria
Massima	742,16 il giorno 18	30°,9 il giorno 23
Minima	729,31 » 11	9°,4 » 2

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
10,4	11,0	9,8	10,4	81	89	78	83	2,5	1
9,3	8,5	8,7	8,8	88	65	77	77	4,1	2
9,1	**7,7**	8,8	8,5	74	54	79	69	4,5	3
9,0	9,4	11,5	10,0	70	60	85	72	3,5	4
10,1	10,7	11,5	10,4	82	71	85	79	3,2	5
10,6	11,1	**12,1**	11,3	74	60	77	70	4,0	6
11,7	11,4	11,8	11,6	**91**	71	87	83	2,7	7
11,3	11,9	11,5	11,6	73	60	78	70	6,0	8
11,6	11,5	9,9	11,0	66	67	60	64	6,2	9
9,7	11,0	12,1	10,9	56	**52**	66	58	7,5	10
9,9	10,3	11,9	10,7	64	82	72	73	4,4	11
10,7	11,5	10,6	10,9	86	80	83	83	1,0	12
11,1	9,6	10,7	10,5	**88**	53	68	70	3,2	13
10,2	**7,9**	8,6	8,9	57	**32**	43	44	12,8	14
8,6	11,5	12,4	10,8	51	49	64	55	9,0	15
11,2	11,5	11,1	11,3	58	50	59	56	6,5	16
10,1	8,8	8,0	9,0	53	38	41	44	9,7	17
9,0	10,0	11,6	10,2	56	45	58	53	7,2	18
12,2	14,2	14,2	13,5	58	55	62	58	8,1	19
15,1	**16,8**	15,7	15,9	70	59	64	64	7,5	20
12,7	14,1	14,0	13,6	69	58	66	64	7,2	21
13,7	14,0	**14,3**	14,0	73	58	61	64	6,8	22
16,7	15,5	15,6	15,9	79	51	61	64	13,0	23
14,7	12,8	12,8	13,4	67	80	**81**	76	2,0	24
11,9	9,3	10,5	10,6	64	40	52	52	9,5	25
10,5	11,6	12,1	11,4	61	50	59	57	6,2	26
9,3	**9,0**	10,6	9,6	53	**39**	58	50	11,5	27
10,7	9,8	12,3	10,9	59	**39**	56	51	8,5	28
12,4	12,6	14,0	13,0	61	49	68	59	7,5	29
13,9	11,7	13,7	13,1	71	49	69	63	8,2	30
11,25	11,22	11,75	11,39	68,4	56,8	67,2	64,2		Media
16,8	il giorno	20		91	il giorno	7			Massima
7,7	»	3		32	»	14			Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e form	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	*NE*	0-1	*N*	1	*N*	2	10 *mn* ≡	10 *mns*
2	—	0	—	0	*N*	1	9 *m*	4 *m*
3	—	0	—	0	*N*	1	8 *ms* ≡	9 *mnsr*
4	*NW*	1	*N*	1	*N*	1	8 *m*^{2}*n*	9 *mnsr*
5	*N*	1	*E*	1	*N*	2	10 *mn*	10 *mns*
6	*N*	1	—	0	—	0	9 *ms* ≡	10 *mns*
7	—	0	*E*	1	*E*	1	10 ● ≡	10 *msr*
8	*W*	1	—	0	—	0	5 *m* ≡	2 *m*
9	—	0	*NE*	2	*NE*	0-1	2 *m* ≡	5 *m* ●
10	—	0	*SE*	0-1	*S*	2	0	2 *ms*
11	*NE*	1	—	0	*NE*	2	4 *m*	10 *mnsr*
12	—	0	*SW*	1	—	0	10 *m*	10 ● *mnsr*
13	—	0	—	0	*SE*	2	10 *ms* ● ≡	10 *mnsr*
14	—	0	*NW*	2	*E*	1	0 ≡	2 *m*
15	*N*	1	*E*	0-1	—	0	0 ≡	8 *msr*
16	—	0	—	0	—	0	4 *sr*	3 *sr*
17	*S*	2	*E*	1	—	0	5 *ms*	0 *ms*
18	*N*	1	*SW*	1	—	0	2 *sr*	8 *msr*
19	—	0	*SE*	0-1	—	0	0	1 *ms*
20	—	0	—	0	*SW*	0-1	10 *ms*	8 *msr*
21	*N*	2	—	0	–	0	5 *mn* ≡	8 *msr*
22	*N*	2	—	0	—	0	6 *m*	3 *ms*
23	—	0	*SE*	1	—	0	5 *m*	5 *m*
24	*N*	1	*N*	1	—	0	8 *m*	10 *msr*
25	*SW*	1	—	0	*NW*	1	0 ≡	1 *sr* ≡
26	*N*	1	*E*	1	—	0	0 ≡	2 *sm*
27	*N*	1	*SE*	1	—	0	4 *m*	3 *sr*
28	—	0	*E*	0-1	—	0	0	3 *sr* ≡
29	—	0	—	0	—	0	10 *ms*	8 *ms*
30	—	0	*N*	1	—	0	5 *ms*	6 *ms*

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
18	4	8	5	2	3	1	3	46

[d]elle nubi 21h	Media	Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
10 *ms*	10		Dalle $12^h.45^m$ alle $14^h.45^m$ ● temporalesca.	1
0	4	62,6		2
10 *ms*	9		Nel pomeriggio cielo temporalesco.	3
10 *mnsr*	9			4
10 *mn* ●	10	0,5		5
10 *mns*	10	2,0		6
10 *msr*	10	4,2		7
5 *ms*	4			8
0	2		Cielo temp. a *NE*, ⚡ alle $14^h.40^m$, goccio-	9
9 *mn*	4		loni alle 15^h.	10
8 *mnsr*	7	12,2	K ⚡ dalle 13^h alle 14^h, ● dalle 13^h alle 15^h.	11
10 *mn* ●	10	9,9		12
5 *mn*	8	13,0		13
0	1			14
0	3			15
1 *m*	3			16
6 *m*	4			17
0 *s*	3			18
0 *msr*	0			19
5 *msr*	8			20
10 *msr*	8			21
3 *mn*	4			22
0	3			23
5 *m*	8	39,0	K con lampi e tuoni, principio dei tuoni	24
1 *sr*	1		12^h, principio della ● verso le $12^h.30^m$,	25
2	1		mass. int. verso le 14^h, fine verso le 15^h.	26
0	2			27
0	1			28
1 *ms*	6			29
0	4			30

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	nebbiosi	con nebbia	con pioggia	Temporali	Grandine
11	12	7	10	—	8	4	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	734,26	733,86	733,82	733,98	17°,0	20°,8	19°,7	20°,7	18°,6	19,0
2	33,52	**32,81**	33,63	33,32	16,3	26,7	19,3	25,5	21,1	[illegible]
3	35,40	34,52	35,42	35,11	15,1	18,3	18,1	16,2	17,0	17,1
4	36,73	36,77	37,86	37,12	**14,6**	25,0	19,2	23,0	21,9	20,2
5	**40,94**	39,69	39,77	40,13	15,8	25,0	20,3	24,1	22,4	20,9
6	40,77	39,33	38,16	39,42	18,0	23,8	20,7	23,7	22,2	[illegible]
7	36,81	34,65	35,05	35,50	15,7	25,0	18,0	23,6	21,8	20,1
8	37,56	37,43	37,54	37,51	16,5	26,5	22,9	25,8	24,4	[illegible]
9	39,39	37,86	37,98	38,41	17,8	**29,4**	22,4	28,0	24,7	[illegible]
10	38,97	37,92	38,73	38,54	17,8	27,2	23,0	26,8	21,2	[illegible]
11	741,07	740,10	741,00	740,72	18,9	27,6	21,6	25,5	24,0	[illegible]
12	**41,79**	40,35	40,15	40,76	19,0	29,3	24,6	28,7	23,6	24,1
13	39,97	37,63	37,60	38,40	19,2	**31,2**	24,0	29,7	26,9	[illegible]
14	37,72	36,46	36,97	37,05	19,2	29,1	24,0	27,4	25,8	[illegible]
15	39,44	38,99	39,34	39,26	19,0	27,8	22,0	27,0	24,5	[illegible]
16	39,54	38,20	37,80	38,51	19,2	28,0	24,1	27,6	24,8	21,0
17	39,05	37,16	37,81	38,01	19,0	26,6	21,7	25,7	21,9	[illegible]
18	35,93	33,12	32,29	33,78	18,0	26,8	22,1	26,2	21,0	[illegible]
19	28,87	29,19	29,56	29,21	17,7	24,2	18,8	21,8	21,6	20,6
20	30,44	28,99	**26,54**	28,65	15,2	24,9	20,7	24,3	20,0	[illegible]
21	730,28	**729,90**	731,53	730,57	**13,8**	25,2	18,5	24,8	20,5	[illegible]
22	31,97	31,86	32,87	32,23	15,1	**27,6**	19,6	26,1	23,2	21,4
23	35,04	34,32	35,36	34,91	15,4	27,4	20,5	25,7	24,2	[illegible]
24	37,40	36,43	36,29	36,71	17,5	26,4	20,0	25,7	24,3	22,0
25	37,38	36,97	36,28	36,88	16,8	24,8	18,8	20,7	18,0	19,6
26	**38,81**	38,37	38,19	38,46	14,1	24,8	18,1	23,7	22,6	[illegible]
27	38,53	37,33	36,97	37,61	17,6	25,2	20,5	24,9	23,3	21,6
28	36,84	35,93	35,80	36,19	18,4	26,6	23,2	25,9	23,9	[illegible]
29	35,27	34,27	33,72	34,42	18,2	24,1	22,2	20,6	18,2	20,7
30	34,94	34,59	35,30	34,94	16,9	25,2	20,2	25,0	22,4	[illegible]
31	37,76	36,57	36,16	36,83	15,4	25,0	20,6	24,9	22,2	[illegible]
Media	36,88	35,87	36,01	36,26	17,06	25,99	20,97	24,93	22,35	[illegible]

	Pressione		Temperatura		
Massima	741,79	il giorno 12	31°,2	il giorno	13
Minima	726,54	» 20	14°,6	»	4

Umidità assoluta 9h	15h	21h	Media	Umidità relativa 9h	15h	21h	Media	Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
13,4	13,9	13,8	13,7	78	76	86	80	4,2	1
12,4	10,0	11,3	11,2	75	41	61	59	8,2	2
11,4	11,0	11,5	11,3	74	80	80	78	2,0	3
11,1	10,8	11,4	11,1	67	52	58	59	5,1	4
10,1	11,9	11,4	11,1	57	49	57	54	8,8	5
10,1	10,9	11,9	11,0	56	50	60	55	8,3	6
11,0	11,1	12,1	11,4	72	52	62	62	7,9	7
8,6	9,5	11,1	9,7	39	38	49	39	10,1	8
12,2	10,8	12,9	12,0	60	39	56	52	12,7	9
13,6	14,1	14,4	14,0	65	54	77	65	8,7	10
13,2	13,8	14,8	13,8	69	57	67	64	9,2	11
14,6	13,9	13,1	13,9	63	48	60	57	9,2	12
13,6	12,8	13,8	13,4	61	41	53	52	9,0	13
14,3	13,9	13,8	14,0	64	51	56	57	9,0	14
13,5	15,3	16,0	14,9	69	57	70	65	8,1	15
12,4	14,1	16,2	14,2	56	51	69	59	9,2	16
11,3	12,1	14,1	12,5	58	49	72	60	8,8	17
13,8	13,6	13,4	13,6	70	54	72	65	8,2	18
14,6	13,2	14,1	14,0	90	68	74	77	5,8	19
11,6	13,1	10,4	11,7	64	58	60	61	4,4	20
8,5	7,9	10,3	8,9	53	34	58	48	10,0	21
9,3	8,1	10,5	9,3	55	32	49	45	10,0	22
10,8	11,5	13,5	11,9	60	46	60	55	8,0	23
12,9	13,9	14,7	13,8	74	57	65	65	5,7	24
13,0	13,5	12,0	12,8	81	75	78	78	4,0	25
11,7	12,7	14,9	13,1	76	58	73	69	5,1	26
13,9	13,9	14,5	14,1	72	59	68	66	5,6	27
14,9	14,1	15,7	14,9	71	57	71	66	5,2	28
12,8	14,4	13,5	13,6	64	80	87	77	4,2	29
13,7	12,0	11,5	12,4	78	51	56	62	5,0	30
12,7	11,0	13,4	12,4	70	47	67	61	9,0	31
12,29	12,36	13,09	12,58	66,4	53,6	65,5	61,6		Media
14,9	il giorno 26 e 28			90	il giorno 19				Massima
8,1	» 22			32	» 21				Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e forma	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	*N*	0-1	*E*	1	—	0	8 *msr* ≡	10 *msr* ●
2	*S*	1	*S*	1	—	0	9 ≡	2 *srm*
3	*N*	1	*NE*	1-2	*N*	2	10 *m*	10 *mnsr*
4	*S*	1	—	0	—	0	1 ≡	5 *msr*
5	—	0	—	0	—	0	0	1 *m* ≡
6	*N*	2	*E*	1	—	0	8 *ms*	6 *ms* ≡
7	—	0	—	0	—	0	5 *msr*	5 *ms*
8	—	0	*NE*	1	—	0	0 ≡	2 *msr*
9	*N*	1	*S*	1	—	0	0 ≡	1 *m*
10	*N*	0-1	*E*	1	*NW*	1	0 ≡	5 *ms*
11	—	0	*NE*	1	—	0	0 ≡	4 *ms*
12	*E*	0-1	*S*	1	—	0	2 *m*	2 *ms*
13	—	0	—	0	—	0	0 ≡	2 *ms*
14	—	0	—	0	*S*	1	2 *m*	9 ●
15	*N*	1	—	0	*E*	1	1 *m* ≡	3 *ms* ≡
16	—	0	—	0	—	0	2 ≡	8 *msr* ≡
17	*NW*	0-1	*E*	1	*N*	2-3	6 *msr*	2 *ms* ≡
18	—	0	—	0	*E*	2	7 *ms* ≡	4 *ms*
19	*E*	1-2	*NE*	1	—	0	10 *mnsr*	2 *ms* ≡
20	*N*	1	*N*	1	*W*	4	0 ≡	4 *ms*
21	*S*	2	*SE*	1	—	0	0 ≡	2 *m* ≡
22	—	0	*S*	0-1	—	0	2 ≡	2 *sr* ≡
23	*E*	1	*S*	0	—	0	2 *m* ≡	2 *sm*
24	*E*	1	*NE*	1	—	0	4 *m* ≡	8 *msr*
25	—	0	*NW*	2	*S*	1	10 *mnsr*	10 *mnsr*
26	—	0	*NE*	1	—	0	5 *mns*	3 *ms*
27	*N*	0-1	—	0	—	0	4 *mns*	6 *ms*
28	—	0	*N*	1	*N*	1	5 *srm*	3 *sm*
29	*N*	1	*S*	1	—	0	8 *ms*	10 *mns*
30	*S*	1	—	0	—	0	10 *msr* ≡	9 *mnsr*
31	—	0	*E*	1	—	0	0 ≡	2 *ms*

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
14	6	11	1	11	0	1	3	46

elle nubi 21h	Media	Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
5 ≡	8	1,0		1
4 *srm*	3			2
10 *mn*	10	2,3		3
1 *msr*	3			4
8 *m*	3			5
10 *m*	8			6
0	3			7
0 ≡	1			8
1 *m*	1			9
10 *m*	2		K ● ⚡ a $18^h.10^m$ princ. ● $18^h.15^m$ —*w* *N*.	10
4 *m*	3			11
2 *ms*	2			12
0 ≡	1			13
4 *m*	5			14
5 *ms*	3			15
8 *msr* ≡	6			16
10 *msr*	6			17
7 *msr*	6		Cielo K ⚡; —*w* di *E*. 21^h.	18
2 ≡	5	0,3		19
10 *mnsr*	5	0,4	K 20^h, ● $20^h.30^m$; 21^h ⚡ —*w*. $21^h.30^m$ ● forte.	20
0 ≡	1			21
1 *sr*	2			22
0	1			23
2 *m*	5			24
5 *ms*	8	19,7	K nella *n*. 7^h 9^h ; cielo K. ● diverse riprese.	25
3 *ms*	4			26
8 *mnsr*	3			27
8 *msr*	5		K verso 15^h. Tuoni abbastanza frequenti.	28
5 *mns*	8	3,7		29
1 ≡	6			30
8 *mn*	3			31

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	con nebbia	con pioggia	neve	Temporali	Grandine
16	14	1	22	6	—	5	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	M[illegible]
1	735,09	733,17	732,30	733,52	17°,8	**25°,2**	20°,2	24°,5	20°,6	[illegible]
2	32,39	31,81	34,72	32,97	17,9	21,8	19,0	21,2	17,9	[illegible]
3	35,84	36,18	**36,83**	36,28	16,0	24,2	20,5	24,0	22,0	[illegible]
4	38,21	36,56	35,46	36,74	18,1	24,0	20,6	23,4	19,4	[illegible]
5	33,85	33,42	33,37	33,55	17,7	23,4	19,6	22,8	20,1	[illegible]
6	33,30	31,77	32,95	32,67	16,6	22,8	18,4	22,6	18,6	[illegible]
7	29,79	**26,95**	29,47	28,74	16,4	21,0	16,4	21,0	18,8	[illegible]
8	33,92	33,35	34,41	33,89	15,5	23,8	18,8	23,6	20,4	[illegible]
9	35,78	35,48	35,80	35,69	**15,0**	22,4	17,4	21,8	20,2	[illegible]
10	36,68	35,39	35,16	35,74	15,9	23,2	19,0	23,0	21,0	[illegible]
11	736,88	736,95	738,32	737,38	14,8	26,0	20,8	25,0	20,3	[illegible]
12	39,05	36,78	36,10	37,31	**12,5**	21,8	17,5	21,2	19,4	[illegible]
13	33,67	31,50	**29,75**	31,64	16,4	18,0	17,0	18,0	16,4	[illegible]
14	32,50	32,84	34,97	33,44	13,9	24,0	16,2	23,3	19,8	[illegible]
15	37,86	37,34	38,37	37,86	14,5	23,0	17,3	21,8	18,1	[illegible]
16	40,77	40,17	40,61	40,52	13,6	22,9	17,2	22,5	19,8	[illegible]
17	**41,76**	40,04	39,90	40,57	14,1	23,0	17,3	22,2	20,6	[illegible]
18	40,39	38,70	39,06	39,38	15,5	23,6	17,6	23,2	21,0	[illegible]
19	39,40	38,46	38,77	38,88	16,2	**23,2**	19,0	23,1	19,2	[illegible]
20	37,84	37,28	37,37	37,50	17,1	21,4	19,4	19,4	16,5	[illegible]
21	737,87	737,78	739,05	738,23	15,1	24,8	17,2	23,0	20,8	[illegible]
22	**40,40**	36,88	37,31	38,20	14,0	22,5	17,3	22,2	19,8	[illegible]
23	39,01	36,92	36,84	37,59	13,5	23,8	18,0	22,6	19,3	[illegible]
24	36,03	35,30	34,55	35,29	13,4	22,7	17,2	22,2	21,0	[illegible]
25	35,50	34,50	34,41	34,80	15,1	24,2	17,4	23,4	21,6	[illegible]
26	31,33	29,11	28,68	29,71	16,8	21,1	19,0	20,7	19,6	[illegible]
27	28,45	29,15	29,78	29,13	16,6	25,1	20,2	24,9	19,6	[illegible]
28	31,36	32,58	34,93	32,99	12,5	24,8	16,6	24,2	20,6	[illegible]
29	39,88	39,73	40,24	39,95	14,1	22,7	17,0	22,3	20,5	[illegible]
30	39,33	37,03	36,34	37,58	16,9	21,9	20,4	21,6	18,2	[illegible]
31	35,76	34,53	35,46	35,25	15,4	**24,9**	18,0	23,7	20,8	[illegible]
Media	36,13	35,09	35,53	35,59	15,46	23,10	18,46	22,52	19,72	[illegible]

	Pressione atmosferica			Temperatura dell'aria		
Massima	741,76	il giorno	17	26°,0	il giorno	11
Minima	726,95	»	7	12°,5	»	12

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
13,4	14,6	**15,0**	14,3	76	64	83	74	6,2	1
14,1	12,5	12,7	13,1	86	67	83	79	4,0	2
12,6	12,3	14,5	13,1	70	56	74	67	4,1	3
13,9	**15,0**	14,8	14,6	78	72	88	79	4,5	4
13,4	14,0	14,7	14,0	79	68	84	77	6,0	5
13,6	14,1	12,2	13,3	86	69	77	77	3,0	6
12,8	13,2	13,3	13,1	**93**	72	83	83	2,0	7
9,0	**8,6**	10,3	9,3	56	40	58	51	10,0	8
9,6	10,5	12,2	10,4	65	**55**	69	63	7,2	9
11,1	12,3	14,2	12,5	68	59	77	68	6,2	10
6,2	6,9	10,1	7,7	34	**29**	57	40	15,0	11
7,7	9,5	11,2	9,5	51	51	67	56	8,0	12
11,5	12,3	11,6	11,8	80	80	83	81	3,0	13
11,3	9,7	11,2	10,7	81	46	65	64	5,0	14
11,4	10,7	12,0	11,4	78	55	77	70	7,0	15
12,9	10,3	11,2	11,5	74	51	65	63	6,1	16
12,3	11,7	11,9	12,0	70	59	66	65	5,0	17
1,8	12,5	**13,7**	12,7	79	59	74	71	5,4	18
13,2	11,9	11,9	12,3	81	57	77	72	5,0	19
2,1	11,9	12,4	12,1	72	71	**89**	77	5,0	20
1,8	10,8	12,7	11,8	82	52	**90**	68	2,8	21
9,1	11,7	12,1	11,0	62	59	71	64	7,2	22
7,9	7,5	10,4	8,6	51	27	62	50	11,0	23
8,5	10,4	12,9	10,6	62	52	70	61	4,4	24
2,4	12,1	13,2	12,6	84	56	69	70	5,0	25
2,9	13,2	14,1	13,4	79	73	83	78	5,0	26
5,5	5,7	9,3	6,8	31	**24**	55	37	17,2	27
0,1	8,5	10,7	9,8	72	38	49	53	5,0	28
1,2	11,3	13,9	12,1	78	57	72	69	4,7	29
3,0	**14,3**	13,7	13,7	73	74	88	78	3,5	30
2,6	10,0	8,9	10,5	82	46	49	59	3,1	31
,29	11,32	12,30	11,65	71,5	57,7	72,2	66,7		Media
15,0	il giorno	1		89	il giorno	20			Massima
5,5	»	27		24	»	27			Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e forma	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	*N*	1	*N*	1	*E*	2	5 *msr*	9 *ms*
2	—	0	—	0	*N*	2	10 *mn*	5 *ms*
3	—	0	—	0	—	0	0 *mr* ≡	4 *ms*
4	—	0	*N*	1	*NE*	1	10 *m*	10 *mn*
5	*N*	1	*N*	1	*N*	1	7 *mn*	4 *m*
6	*N*	1	—	0	*N*	2	10 *mn* ≡	7 *mn*
7	—	0	*S*	1	*N*	2	10 *mn* ●	4 *m*
8	*S*	1	—	0	—	0	0	0
9	*NE*	1	—	0	—	0	5 *mr*	0 *m*
10	—	0	*N*	1	—	0	6 *m*	5 *m*
11	—	0	*N*	1	*SE*	2	0 ≡	0 ≡
12	*N*	1	*N*	1	—	0	0 ≡	0 *mr*
13	*N*	1	—	0	—	0	10 *mn*	10 *mn*
14	—	0	*SE*	1	—	0	4 ≡	0
15	—	0	*E*	1	*W*	1	4 *ms* ≡	6 *ms*
16	—	0	—	0	—	0	3 ≡	3 *ms*
17	*N*	1	*N*	1	—	0	3 *m*	3 *ms*
18	—	0	*N*	1	—	0	10 *mnsn*	5 *ms*
19	—	0	*N*	1	—	0	7 m^2	10 *mnsn*
20	—	0	*NE*	1	—	0	8 *m*	10 *mnsn*
21	*S*	2	*S*	1	—	0	2 *m* ≡	0
22	—	0	*NE*	1	*S*	1	0	1 *m* ≡
23	—	0	*S*	1	*SE*	1	1 *s*	2 *ms*
24	—	0	*N*	1	—	0	0	2 *m*
25	—	0	—	0	—	0	10 *nr*	5 *m*
26	*N*	2	*E*	2	—	0	9 *m*	8 *ms*
27	*W*	4	*W*	4	*N*	1	0	0
28	*E*	1	*NE*	1	—	0	0	0
29	*N*	1	—	0	—	0	0	1 *msr*
30	*N*	1	*N*	1	—	0	4 *msr*	10 *mnsr*
31	*S*	1	*S*	1	*NW*	1	2 *m*	1 *ms*

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
25	5	4	3	8	—	3	1	44

...elle nubi 21h	Media	Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
9 *ms*	8	0,3		1
8 *ms*	8	5,0		2
5 *m*	3			3
10 *mn*	10	19,2	20h.15m K ≷ ● forte, fine ● 20h.50m.	4
5 *m*	5			5
10 *mn*	9	1,1	17h.10m K temp. senza ≷, cielo coperto tem-	6
10 *m*	8	7,5	poralesco da Nord ad Ovest.	7
0	0			8
5 *mn*	3		21h cielo temporalesco dalla parte di N.-W.	9
3 *m*	5			10
0 ≡	0			11
8 *m*	3			12
0 ≡	7	9,5		13
3 ≡	2			14
7 *ms*	6			15
7 *ms*	4			16
0 ≡	2			17
10 *msr*	8			18
4 *m*	7		17h accenno di pioggia.	19
10 *mns*	9	13,5	● 21h spessa nebbia sulla città.	20
0 ≡	1			21
0 ≡	0		●0 nelle prime ore del mattino.	22
0	1			23
3 *ms*	2			24
10 *mn*	8			25
5 *m*	7			26
0	0		≡ W mattino e pomeriggio.	27
0	0			28
8 *ms*	3			29
0 *m*	8		Poche gocce verso le 14h, pioggerella 16h.	30
5 *ms*	3			31

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	con nebbia	con pioggia	neve	Temporali	Grandine
15	13	3	6	7	—	3	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°) 9h	15h	21h	Media	Temperatura dell'aria Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	737,22	734,91	734,12	735,42	15°,0	22°,1	18°,0	21°,6	19°,3	[illegible]
2	32,71	30,82	30,71	31,41	13,3	19,0	15,2	17,7	16,2	[illegible]
3	31,49	34,22	36,86	34,19	11,3	21,2	15,0	20,8	17,8	[illegible]
4	40,33	39,12	38,86	39,44	10,3	22,2	14,6	22,0	18,8	16,5
5	36,81	34,65	33,98	35,15	12,9	**23,4**	15,4	23,2	21,3	[illegible]
6	32,58	**29,49**	30,63	30,90	13,2	22,1	16,0	21,8	17,4	[illegible]
7	37,20	36,61	39,13	37,65	**9,0**	21,4	12,8	20,0	17,2	[illegible]
8	**40,85**	39,32	38,94	39,70	9,9	21,6	13,6	20,0	18,2	[illegible]
9	36,81	34,08	34,26	35,03	10,0	21,2	13,0	20,2	18,2	[illegible]
10	33,01	30,91	31,43	31,80	11,9	21,8	15,0	21,5	17,0	16,4
11	735,50	735,16	736,24	735,63	10,1	16,2	11,8	15,8	13,4	[illegible]
12	38,35	38,99	40,36	39,23	9,6	13,0	11,4	12,9	11,8	11,4
13	**40,74**	40,12	40,43	40,43	**6,8**	17,6	10,6	17,2	14,4	[illegible]
14	39,56	37,80	38,07	38,48	8,8	**21,4**	10,4	19,0	16,5	[illegible]
15	37,08	33,37	**32,48**	34,31	9,2	21,7	12,9	20,9	17,3	[illegible]
16	34,32	35,11	37,22	35,55	9,8	21,4	12,2	21,2	17,6	[illegible]
17	**43,84**	42,88	43,47	43,40	10,7	17,1	12,6	16,3	15,4	[illegible]
18	43,66	41,73	41,70	42,36	11,3	21,2	13,8	20,6	17,0	[illegible]
19	41,83	39,78	39,92	40,51	13,1	21,4	16,2	20,1	18,3	17,2
20	38,39	38,76	40,60	39,25	13,6	16,6	14,6	12,0	12,2	[illegible]
21	742,71	741,54	743,00	742,45	9,9	15,5	12,0	14,9	13,4	[illegible]
22	43,49	42,66	**43,53**	43,23	9,9	12,8	10,8	12,4	11,2	[illegible]
23	42,55	40,69	41,20	41,48	8,1	16,3	10,4	15,8	13,0	[illegible]
24	39,22	37,45	38,28	38,32	7,8	16,2	10,7	15,3	12,8	[illegible]
25	37,49	**35,15**	35,40	36,01	8,8	**17,0**	11,2	16,5	13,8	[illegible]
26	36,69	36,76	37,46	36,97	7,3	13,0	9,8	12,3	10,4	[illegible]
27	39,03	39,11	41,04	39,73	7,7	15,2	9,4	13,7	11,7	[illegible]
28	43,48	43,13	43,38	43,33	**6,9**	13,2	8,7	11,5	12,4	[illegible]
29	43,38	42,80	43,51	43,23	10,2	14,8	11,2	14,2	12,8	[illegible]
30	42,50	40,55	39,71	40,92	10,2	15,2	11,8	15,1	13,4	[illegible]
Media	38,76	37,59	38,20	38,19	10,22	18,43	12,70	20,88	15,41	[illegible]

	Pressione atmosferica			Temperatura dell'aria		
Massima	743,84	il giorno	17	23°,4	il giorno	5
Minima	729,49	»	6	6°,8	»	13

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
9,7	9,0	10,1	9,6	64	47	61	57	4,2	1
9,6	10,1	10,6	10,1	74	67	77	73	3,0	2
9,2	4,1	5,2	6,2	72	22	34	43	5,2	3
6,8	5,8	9,8	7,5	55	30	61	49	5,2	4
8,7	9,9	10,6	9,7	66	47	56	56	3,8	5
10,2	10,7	6,2	9,0	75	55	37	56	6,0	6
8,2	5,6	7,7	7,2	75	32	52	53	5,2	7
6,8	6,9	8,8	7,5	58	40	57	52	5,2	8
8,6	10,2	10,5	9,8	77	58	67	67	3,4	9
10,0	8,2	9,3	9,2	78	43	64	61	4,4	10
8,3	7,4	8,6	8,1	81	55	75	70	4,2	11
7,4	6,8	7,0	7,1	73	61	68	67	4,0	12
7,2	5,8	13,7	8,7	75	36	64	58	6,0	13
6,8	5,4	7,1	6,4	72	33	51	52	5,4	14
6,9	6,0	9,6	7,5	62	32	66	53	5,6	15
8,8	8,1	9,7	8,9	83	43	65	64	7,0	16
9,8	10,5	10,9	10,4	90	76	83	83	3,7	17
9,6	9,9	10,6	10,0	82	55	69	69	5,0	18
10,3	11,9	12,9	11,7	75	62	82	73	2,4	19
11,0	9,2	8,6	9,6	89	88	81	86	2,0	20
6,3	6,4	6,7	6,5	60	51	59	57	2,9	21
7,3	5,6	6,6	6,5	75	51	66	64	4,8	22
7,0	5,2	6,6	6,3	75	39	59	58	5,0	23
6,5	6,6	9,2	7,4	68	51	84	68	5,0	24
7,3	6,1	7,1	6,8	73	43	61	59	5,6	25
7,6	7,3	7,7	7,5	83	68	82	78	4,0	26
6,7	6,4	6,9	6,7	76	55	67	66	3,0	27
6,7	7,2	6,9	6,9	80	71	60	70	1,0	28
7,5	6,2	8,2	7,3	75	52	75	67	4,0	29
7,8	7,5	9,1	8,1	76	59	79	71	1,9	30
8,15	7,52	8,68	8,12	73,9	50,7	65,4	63,3		Media
12,9	il giorno	19		90	il giorno	17			Massima
4,1	»	3		22	»	3			Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e for[illegible]	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	—	0	—	0	—	0	3 *msr*	8 *msr*
2	—	0	*NW*	1	*S*	2	8 *m*	10 *m* ●
3	*S*	1	*NE*	1	*W*	3	0 ≡	2 *sr*
4	—	0	*W*	1	—	0	0 *m* ≡	8 *msr*
5	—	0	*N*	1	*SW*	1	0	0
6	—	0	—	0	*W*	3	2 *sr* ≡	0
7	*NE*	1	*S*	1	—	0	0	0
8	—	0	—	0	—	0	0	0
9	—	0	*NE*	1	—	0	4 *msr*	0
10	—	0	*E*	1	—	0	0	10 *msr*
11	*N*	2	—	0	—	0	9 *m*	8 *mnsr*
12	*N*	2	—	0	*S*	1	9 *mn*	10 *mnsr*
13	—	0	—	0	—	0	3 *m* ≡	2 *m* ≡
14	—	0	*S*	1	—	0	3 *sr* ≡	2 *sr*
15	—	0	*S*	1	—	0	0 ≡	2 *sr*
16	—	0	—	0	—	0	0	0
17	—	0	—	0	—	0	9 ≡	10 *mnsr*
18	—	0	—	0	*N*	2	0 ≡	5 *ms*
19	*N*	1	—	0	—	0	10 *msr*	10 *mnsr*
20	—	0	*N*	3	*N*	1	5 *m*	10 *m*
21	*NE*	1	—	0	—	0	5 *m*	5 *ms*
22	—	0	—	0	—	0	10 *m*	5 *m*
23	—	0	—	0	—	0	0 ≡	5 *srm*
24	—	0	*E*	1	*NW*	3	4 *ms* ≡	5 *ms*
25	*S*	1	—	0	—	0	0 ≡	2 *ms*
26	*N*	1	*NE*	1	*N*	1	10 *ms*	10 *msr*
27	—	0	—	0	—	0	8 *mn*	0 *s*
28	—	0	—	0	—	0	10 *sm* ≡	8 *ms*
29	—	0	—	0	—	0	10 *sm*	10 *sm*
30	—	0	—	0	—	0	10 *ms*	10 *mns*

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
9	5	1	0	7	1	3	2	62

...delle nubi		Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
21^h	Media			
8 *msr*	6	5,0	● notte.	1
0	6	7,0	● notte.	2
0	1			3
0	3			4
0	0			5
0	1			6
0	0			7
0	0			8
0	1			9
0	3			10
10 *mn*	9			11
5 *ms*	8	0,2	Nella notte pioggerella.	12
0	2			13
0	2			14
0	1			15
0	0			16
2 ≡	7			17
8 m^3	4			18
8 *msr*	9			19
10 *m*	8		20^h accenno di pioggia.	20
10 *mnsr*	6		21^h pioggerella fine fine.	21
8 ≡	8			22
9 *m*	5			23
10 *mn*	6			24
10 *m*	4			25
10 *msr*	10			26
0 *s* ≡	3			27
10 *m*	9			28
10 *sm*	10	0,2	Pioggerella nelle prime ore del mattino.	29
10 *m*	10			30

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	con nebbia	con pioggia	neve	Temporali	Grandine
13	12	5	13	5	—	—	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	M[illegible]
1	736,74	734,75	734,05	735,18	11°,2	17°,2	12°,2	16°,9	13°,9	[illegible]
2	32,11	**30,70**	21,32	31,38	11,2	17,1	12,8	16,9	14,4	[illegible]
3	30,89	31,26	33,40	31,85	13,1	**20,2**	14,1	19,4	15,5	[illegible]
4	37,18	37,39	42,31	38,96	11,2	16,7	13,6	16,3	10,9	[illegible]
5	46,81	44,36	44,68	45,28	7,0	12,8	8,6	12,0	10,4	9,7
6	**44,92**	43,80	43,04	43,92	6,4	10,1	7,3	9,6	8,2	[illegible]
7	41,84	40,58	40,18	40,87	**6,1**	8,8	7,4	8,7	8,2	7,6
8	42,75	42,50	42,57	42,61	7,6	13,2	8,8	12,9	11,7	[illegible]
9	42,19	41,51	42,79	42,16	7,5	14,2	11,2	14,0	12,8	11,4
10	42,59	41,34	42,74	42,22	11,9	16,8	13,0	16,1	14,0	[illegible]
11	744,32	744,02	745,03	744,46	11,6	14,7	12,4	14,5	12,4	[illegible]
12	48,34	45,52	46,08	46,65	11,0	16,2	11,7	15,6	12,6	[illegible]
13	46,20	44,64	46,04	45,63	9,2	16,3	9,8	15,4	12,8	[illegible]
14	**46,68**	44,68	44,73	45,36	6,6	17,1	8,0	**16,5**	13,2	11,2
15	43,70	41,55	41,55	42,28	8,0	**17,8**	9,0	16,8	12,7	11,9
16	42,04	40,51	41,35	41,30	8,0	16,6	9,0	16,0	13,0	11,7
17	41,58	39,74	40,19	40,50	10,0	16,0	10,8	15,5	13,1	12,5
18	39,83	39,70	41,42	40,32	10,4	14,8	11,4	14,1	12,4	12,2
19	41,44	38,44	37,78	39,22	9,6	14,8	10,4	14,4	11,6	11,6
20	36,36	**34,70**	35,42	35,49	**5,8**	14,6	7,8	14,2	12,3	[illegible]
21	734,83	732,59	730,08	732,50	6,1	10,2	9,8	10,2	9,2	[illegible]
22	22,30	**20,59**	21,78	21,56	6,8	10,0	8,5	7,1	6,8	[illegible]
23	24,48	26,06	27,84	26,13	**4,2**	11,5	5,6	10,9	8,0	[illegible]
24	30,47	29,68	30,98	30,38	4,6	11,2	6,0	11,0	9,4	[illegible]
25	29,39	29,57	32,06	30,34	4,7	13,9	8,2	12,5	9,6	9,1
26	35,41	35,60	37,02	36,01	4,3	12,8	6,0	12,4	9,8	[illegible]
27	41,14	41,15	43,30	41,86	**4,2**	13,6	5,6	13,0	10,2	[illegible]
28	**44,97**	43,70	44,66	44,44	6,9	13,2	8,2	13,0	11,8	[illegible]
29	44,76	43,85	44,06	44,22	9,0	13,8	10,0	13,5	11,6	11,1
30	41,15	38,34	36,55	38,68	9,1	10,9	10,6	10,8	10,4	10,2
31	32,54	31,75	32,59	32,29	9,5	**17,6**	10,3	17,4	12,8	12,6
Media	39,17	38,02	38,77	38,65	8,22	14,40	9,66	13,83	11,49	[illegible]
Massima	746,68	il giorno	14			20°,2	il giorno	3		
Minima	720,59	»	22			4°,2	»	23 e 27		

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
8,3	7,7	9,1	8,4	72	54	77	68	5,0	1
9,5	9,2	10,1	9,6	86	64	82	77	1,5	2
10,5	9,9	10,7	10,4	88	59	81	76	4,2	3
9,5	10,4	8,2	9,4	82	75	78	78	3,0	4
5,6	6,1	6,4	6,0	67	58	67	64	7,2	5
5,4	5,3	5,8	5,5	70	59	71	67	3,0	6
6,2	6,3	7,2	6,6	80	74	89	81	3,0	7
7,8	7,9	8,8	8,2	92	71	85	83	1,0	8
8,4	9,0	9,7	9,0	85	76	88	83	0,6	9
8,6	11,1	10,0	9,9	89	74	84	82	2,5	10
9,3	9,1	8,3	8,9	87	74	73	78	2,0	11
9,1	8,8	9,1	9,0	89	66	83	79	3,1	12
8,1	10,0	9,5	9,2	89	77	86	84	3,2	13
7,1	7,2	8,7	7,7	89	52	77	73	4,1	14
6,7	6,1	7,4	6,7	79	43	68	63	4,0	15
6,5	8,8	8,3	7,9	79	65	75	73	4,0	16
8,0	8,3	8,9	8,4	82	64	79	75	2,5	17
8,8	8,5	7,5	8,3	89	71	70	77	2,8	18
7,4	7,1	7,5	7,3	78	58	73	70	2,9	19
6,6	7,6	8,0	7,4	83	63	75	74	3,2	20
7,9	7,7	8,2	7,9	87	83	95	88	1,0	21
8,0	6,3	6,3	6,9	96	84	85	88	1,0	22
5,8	7,2	6,7	6,6	85	79	83	82	1,0	23
5,9	5,8	7,2	6,3	85	59	81	75	2,0	24
6,6	6,8	6,4	6,6	82	63	71	72	5,4	25
5,2	5,8	6,5	5,8	74	54	72	67	2,2	26
6,0	6,9	7,6	6,8	88	61	82	77	3,1	27
6,6	7,5	7,8	7,3	81	67	76	75	2,0	28
7,4	8,3	8,7	8,1	82	72	85	80	1,0	29
8,8	8,9	8,7	8,8	92	92	92	92	0,8	30
8,3	3,3	7,7	6,4	88	22	49	53	0,6	31
7,56	7,74	8,12	7,69	83,6	65,2	78,4	75,9		Media
11,1	il giorno	10		96	il giorno	22			Massima
3,3	»	31		22	»	31			Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e form	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	—	0	—	0	—	0	7 *m* ≡	10 *msr*
2	—	0	—	0	—	0	9 *m* ≡	10 *mns*
3	—	0	—	0	—	0	10 *m* ≡	10 *ms*
4	—	0	*E*	1	*N*	7	0 *ms* ≡	10 *msr* ●^{2}
5	*N*	1	—	0	*NE*	1	10 *mn* ≡	4 *ms*
6	—	0	—	0	—	0	10 *msr*	10 *mns*
7	—	0	—	0	—	0	10 *m* ≡	10 *mns* ●
8	—	0	—	0	*SW*	1	10 *m* ≡	10 *ms*
9	—	0	—	0	—	0	10 *m* ≡	10 *mn* ≡
10	—	0	—	0	*E*	2	10 *mns* ≡	5 *ms*
11	—	0	*NE*	1	—	0	9 *ms*	8 *msr*
12	—	0	—	0	—	0	10 *m* ≡	3 *ms* ≡
13	—	0	—	0	—	0	0 ≡^{3}	0
14	*S*	1	—	0	—	0	0 ≡^{3}	0 ≡
15	—	0	—	0	—	0	0 ≡	5 *ms*
16	—	0	—	0	—	0	0 ≡	0 *s* ≡
17	—	0	—	0	*SE*	1	9 *m* ≡	2 *ms* ≡
18	—	0	*E*	1	—	0	10 *m* ≡	5 *ms*
19	—	0	*S*	1	*NW*	2	0 ≡	2 *sr*
20	—	0	*W*	0-1	—	0	0 ≡	0 ≡
21	*N*	1	*NE*	1	—	0	10 *mn* ≡	10 *mn* ≡
22	*N*	1	—	0	*SW*	2	10 ≡ ●	10 ≡ ●
23	—	0	*S*	1	—	0	0	0 ≡
24	—	0	—	0	—	0	5 *msr* ≡	9 *msr*
25	*N*	1	*W*	1	—	0	5 *m* ≡	0
26	—	0	—	0	—	0	0 ≡	2 *sr*
27	—	0	*W*	2	*W*	2	0 ≡	0
28	—	0	—	0	—	0	9 *m* ≡	2 *sr*
29	—	0	—	0	—	0	9 *m* ≡	5 *sr* ≡
30	—	0	—	0	—	0	10 ● ≡	10 ≡
31	*S*	1	*W*	3	*W*	3	0	2 *ms*

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
5	8	2	1	3	2	5	1	71

delle nubi 21h	Media	Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
7 ≡	8			1
10 *m*	9			2
10 *ms*	10		Verso le 11^h pioggerella immisurabile.	3
10 *msr* ●	7	16,5	15^h K ⸗, ● da 15^h a 16^h. Verso 18^h di nuovo ●.	4
10 *m*	8	3,5		5
0 *s*	7			6
10 *m* ●	10	7,2		7
10 *ms* ●	10	4,5		8
10 *mn*	10	7,4		9
10 *ms*	8	4,6		10
10 *msr*	9			11
4 ≡	6			12
0 ≡	0			13
0 ≡	0		Nebbia folta durante la notte.	14
0 ≡	2			15
0 ≡	0			16
10 *ms* ≡	7		$9^h.15^m$ vento di Sud-Est. Pioggerella.	17
10 *ms*	8	0,2		18
0 ≡	1			19
10 *ms* ≡	3			20
10 ●	10	2,5		21
5 *s* ≡	8	33,4	$14^h.20^h$ tuoni. Nella mattina ● violenta.	22
0 ≡	0			23
10 *msr*	8			24
2 *s* ≡	2		17^h vento forte W.	25
2 *sr* ≡	1		21^h ∈.	26
0	0			27
10 *m* ≡	7			28
10 *sr* ≡	8			29
10 ≡	10			30
0	1			31

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	nebbiosi	con nebbia	pioggia	neve	Temporali
11	12	8	28	—	9	—	1

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Media
1	734,27	735,79	738,90	736,32	10°,6	**16°,8**	11°,1	16°,4	12°,3	12,7
2	42,21	40,04	39,81	40,69	3,8	12,0	5,5	11,8	7,8	7,[illegible]
3	39,14	37,93	39,60	38,89	1,1	9,3	2,8	9,3	6,1	4,[illegible]
4	43,83	43,43	**44,85**	44,04	1,6	9,0	3,6	9,0	5,6	[illegible]
5	43,43	40,34	38,19	40,65	0,2	6,0	2,6	5,8	5,2	3,[illegible]
6	34,30	**31,70**	36,03	34,01	**—0,1**	9,8	3,6	9,6	5,4	4,7
7	42,74	42,04	42,62	42,47	2,4	7,0	4,1	7,0	3,8	4,[illegible]
8	44,41	42,35	43,42	43,39	0,8	7,1	1,2	6,7	4,8	3,[illegible]
9	43,56	42,66	42,87	43,03	0,4	8,2	2,5	8,2	6,0	4,[illegible]
10	41,36	38,01	36,24	38,54	2,2	9,5	3,6	9,4	7,4	[illegible]
11	728,25	721,76	718,52	722,84	2,2	7,9	3,4	8,1	5,8	4,[illegible]
12	**16,66**	17,33	20,19	18,06	4,1	**11,1**	7,8	10,9	8,6	7,[illegible]
13	25,10	26,10	30,23	27,14	1,8	4,8	3,0	4,6	1,8	3,0
14	37,65	39,04	40,57	39,09	-0,4	5,2	0,6	5,1	3,4	2,2
15	38,50	37,37	37,36	37,74	0,0	4,3	2,6	4,3	3,2	2,5
16	35,01	35,25	37,01	35,76	2,1	6,3	3,8	6,2	5,8	4,5
17	40,47	40,73	41,40	40,87	3,3	7,0	5,8	7,0	6,2	5,6
18	39,50	37,66	37,20	38,12	4,9	5,8	5,4	5,8	5,6	5,4
19	38,62	38,90	40,66	39,39	4,3	6,4	4,8	6,3	4,4	5,0
20	**41,86**	39,50	40,16	40,51	**— 0,5**	5,8	1,2	5,7	3,6	2,5
21	736,32	735,16	736,89	736,12	—0,2	6,2	0,6	4,5	3,2	2,[illegible]
22	40,40	40,83	43,60	41,61	**—1,9**	**6,6**	—0,4	6,5	3,2	1,[illegible]
23	**46,13**	44,86	46,03	45,67	0,0	5,5	0,6	5,5	2,0	2,[illegible]
24	44,51	42,20	41,09	42,60	— 0,9	5,4	— 0,1	4,9	2,6	1,7
25	41,54	40,98	41,52	41,35	—1,0	6,3	0,4	6,3	3,6	2,[illegible]
26	41,25	40,86	40,71	40,94	— 0,1	6,0	0,6	5,8	3,8	2,[illegible]
27	38,78	36,06	34,31	36,38	0,9	5,0	2,8	5,0	3,6	3,1
28	**29,90**	30,26	32,30	30,82	2,0	6,4	2,4	6,3	5,7	4,1
29	34,94	33,28	33,76	33,99	2,0	4,9	0,0	4,7	1,9	1,[illegible]
30	35,00	35,04	34,11	34,72	—1,7	1,1	—1,2	0,3	0,8	—0,[illegible]
Media	37,99	36,91	37,67	37,52	1,33	7,09	2,82	6,23	4,77	4,0[illegible]
Massima	746,13	il giorno	23			16°,8	il giorno	1		
Minima	716,6	»	12			—1°,9	»	22		

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
3,9	3,7	4,1	3,9	40	**26**	38	35		1
3,6	3,2	4,7	3,8	53	31	59	48		2
4,1	4,8	5,1	4,7	72	55	72	66		3
3,8	**2,9**	3,9	3,5	64	34	58	52		4
3,8	4,6	5,0	4,5	68	67	75	70		5
4,4	4,4	4,9	4,6	73	48	72	64		6
4,3	4,1	4,2	4,2	69	55	70	65		7
4,1	4,2	4,8	4,4	81	57	74	71		8
4,4	**5,3**	5,1	4,9	81	65	73	73		9
4,9	4,3	5,3	4,8	**83**	49	69	67		10
4,1	5,1	5,2	4,8	69	63	76	69		11
2,0	2,9	4,8	3,2	**26**	30	57	38		12
4,5	4,4	4,7	4,5	80	69	91	80		13
4,4	3,8	4,5	4,2	92	57	76	75		14
4,6	4,2	4,8	4,5	82	67	83	77		15
5,5	6,2	6,1	5,9	93	88	88	90		16
6,5	6,3	**6,7**	6,5	**94**	75	94	88		17
6,1	5,2	6,4	5,9	91	76	94	88		18
6,1	5,4	4,3	5,3	91	76	81	83		19
4,4	5,2	5,1	4,9	89	75	77	80		20
4,6	**4,9**	4,8	4,8	**92**	77	83	84		21
4,1	3,5	3,3	3,6	92	48	56	65		22
2,8	3,4	3,8	3,3	57	50	71	59		23
3,8	4,5	4,1	4,1	81	68	73	74		24
3,9	4,3	4,4	4,2	81	61	73	72		25
3,9	4,2	4,0	4,0	81	61	67	70		26
4,3	4,2	4,7	4,4	75	64	80	73		27
4,9	4,7	3,1	4,2	89	66	45	67		28
2,6	3,0	3,5	3,0	56	**47**	65	56		29
3,5	4,0	4,3	4,0	84	89	88	87		30
4,26	4,36	4,66	4,42	76,0	59,5	72,6	69,3		Media
6,7	il giorno	17		94	il giorno	18 e 17			Massima
2,0	»	12		26	»	12 e 1°			Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e form[illegible]	
	9^h		15^h		21^h		9^h	15^h
1	—	0	*W*	3	—	0	0 *m*	0
2	—	0	*S*	1	—	0	0	0
3	—	0	—	0	—	0	0	0 *sr*
4	—	0	—	0	—	0	0 ≡	0
5	—	0	—	0	—	0	5 *s* ≡	10 *msr*
6	*S*	2	*S*	1	—	0	0 ≡	10 *msr*
7	*N*	1	*S*	1	*S*	1	9 *m* ≡	0
8	—	0	*W*	0-1	—	0	0 ≡	0
9	—	0	—	0	—	0	5 *msr*	10 *mn*
10	—	0	—	0	—	0	2 *ms* ≡	5 *ms* ≡
11	—	0	*N*	0-1	—	0	2 *ms* ≡	10 *mn*
12	*W*	3	*W*	3-4	*W*	3-4	1 *ms*	3 *ms*
13	—	0	—	0	*N*	2	10 *m* ● ✱	2 *ms*
14	*S*	1	—	0	—	0	10 ≡	2 *ms*
15	*S*	1	*SW*	0-1	*S*	2	10 *m*	10 *mns*
16	—	0	—	0	—	0	10 ● ≡	10 *mn* ≡
17	—	0	—	0	—	0	10 *m* ≡	10 *m* ≡
18	—	0	—	0	—	0	10 ≡	10 *mn*
19	—	0	—	0	*S*	1	10 ≡	10 *mns*
20	—	0	—	0	—	0	0 ≡	0 ≡
21	—	0	—	0	—	0	0 ≡	0 *ms*
22	—	0	*S*	1	—	0	0 $\equiv^2$	0
23	—	0	—	0	—	0	0 ≡	0
24	—	0	—	0	—	0	0 ≡	2 *sr*
25	*SW*	0-1	—	0	—	0	0 ≡	0
26	—	0	—	0	—	0	2 *s* ≡	10 *ms* ≡
27	—	0	—	0	—	0	10 *m* ≡	0 ≡
28	*SE*	0-1	*S*	1	—	0	0 ≡	2 *sr*
29	—	0	—	0	—	0	2 *sm*	1 *sm*
30	—	0	—	0	—	0	10 *ms*	10 ≡ ●

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
2	0	—	1	10	2	5	0	70

…lle nubi 21h	Media	Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
0	0		Durante la notte vento forte.	1
0	0			2
0 ≡	0			3
0	0			4
10 *msr*	8			5
2 ≡	4			6
0 ≡	3			7
0	0		Brina nella notte.	8
2 ≡	6			9
5 *ms* ≡	4			10
0 ≡	4			11
0 *ms*	1		Durante la notte vento forte.	12
10 *ms*	7	0,3	Verso le 9h ● frammischiata a neve.	13
2 *ms* ≡	5		9h nebbia molto fitta.	14
10 *mns*	10			15
10 *m*	10	3,0		16
10 *m*	10	3,3		17
10 ≡	10			18
0	7	0,5		19
5 *m*	1			20
0 ≡	0			21
0	0			22
0	0			23
8 *msr*	3			24
0	0			25
2 *ms*	5			26
10 ●	7	0,2		27
1 *sr*	1	0,4		28
1 *sm*	1			29
10 ✳	10	4,5	13h incomincia ✳; 21h ✳ alta cm. 4,5.	30

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	nebbiosi	con nebbia	con pioggia	neve	di gelo
15	10	5	24	—	7	—	—

DATA	Pressione atmosferica (ridotta a 0°)				Temperatura dell'aria					
	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	Me[illegible]
1	**732,78**	733,57	736,35	734,22	−0°,9	3°,2	1°,8	3°,2	1°,6	[illegible]
2	39,05	37,27	38,40	38,24	−5,6	2,3	−5,6	2,2	−0,6	[illegible]
3	41,21	41,71	43,73	42,22	−4,2	**5,0**	−2,9	4,9	1,8	[illegible]
4	45,82	44,94	46,42	45,73	−3,4	4,6	−0,8	3,9	1,6	[illegible]
5	46,19	44,72	43,70	44,87	−3,0	1,0	−2,4	1,0	−1,1	[illegible]
6	42,31	42,56	45,90	43,59	**−6,3**	0,8	−5,2	0,8	−1,2	[illegible]
7	45,41	44,59	46,05	45,35	−6,2	1,1	−4,4	1,1	−1,2	[illegible]
8	**46,85**	45,38	45,77	46,00	−6,0	2,4	−4,9	2,0	−0,4	[illegible]
9	45,58	44,30	43,67	44,52	−5,5	3,4	−3,8	2,5	0,2	[illegible]
10	43,83	43,17	43,21	43,40	−3,5	2,1	−3,2	2,1	0,0	[illegible]
11	742,92	741,51	740,98	741,80	−3,5	2,3	−2,0	2,3	0,2	[illegible]
12	39,71	38,67	40,15	39,51	−2,9	1,6	−2,2	1,4	0,4	[illegible]
13	44,29	45,12	47,26	45,58	−3,3	1,2	−2,9	1,1	−1,0	[illegible]
14	**47,83**	46,83	46,63	47,10	**−5,6**	0,4	−5,0	−0,3	0,4	[illegible]
15	46,28	44,47	44,51	45,09	−2,2	4,1	−1,4	3,7	2,2	[illegible]
16	43,03	40,19	39,19	40,80	−1,6	2,8	−1,6	1,5	2,8	[illegible]
17	**35,45**	35,01	37,25	35,90	−0,6	3,0	2,0	1,7	−0,6	[illegible]
18	42,57	41,60	40,73	41,63	−3,0	1,5	−2,4	−0,1	1,4	[illegible]
19	40,49	40,85	44,15	41,83	−2,6	3,2	1,0	3,1	−2,6	[illegible]
20	46,86	46,92	47,28	47,02	−3,1	−1,0	−2,4	−1,0	−2,0	[illegible]
21	747,68	746,50	746,47	746,88	−4,5	2,4	−1,0	0,6	2,4	[illegible]
22	45,36	44,28	44,13	44,59	1,9	3,8	2,8	3,4	3,6	[illegible]
23	42,56	41,43	41,47	41,82	3,4	6,0	3,8	6,0	5,4	4,6
24	42,75	43,34	46,19	44,09	1,0	**6,3**	1,0	6,1	3,7	[illegible]
25	47,30	41,61	45,93	44,96	0,3	3,8	1,6	3,8	3,0	2,2
26	44,01	41,78	38,38	41,39	0,6	4,2	1,2	4,0	3,1	[illegible]
27	37,69	**36,23**	37,43	37,12	0,2	2,9	0,6	2,6	1,9	1,4
28	40,84	40,74	42,23	41,27	1,2	2,4	1,8	1,8	2,4	[illegible]
29	42,92	42,99	43,77	43,23	2,1	5,4	3,4	5,4	5,2	[illegible]
30	45,10	44,91	46,63	45,55	1,6	5,0	1,6	4,3	4,0	[illegible]
31	**49,70**	48,51	48,65	48,95	−2,0	0,2	−0,8	0,1	−1,0	[illegible]
Media	43,34	42,43	43,39	43,02	−2,26	2,78	−1,13	2,39	1,08	[illegible]

Massima	749,70 il giorno 31	6°,3 il giorno 24
Minima	732,73 » 1	−6°,3 » 6

Umidità assoluta				Umidità relativa				Acqua evaporata (in millimetri)	DATA
9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media		
4,3	**5,2**	4,4	4,6	82	84	85	84		1
2,8	3,3	**4,2**	3,4	90	61	**96**	82		2
3,0	3,6	3,5	3,4	82	55	**66**	68		3
2,7	**3,4**	3,1	3,1	62	**56**	59	59		4
3,0	3,9	3,3	3,4	79	80	**78**	79		5
2,5	3,3	3,5	3,1	80	66	84	77		6
2,4	3,7	3,8	3,3	74	72	92	79		7
2,0	2,9	3,1	2,7	64	**54**	70	63		8
2,8	3,1	3,8	3,2	81	56	81	73		9
3,0	3,3	3,9	3,4	82	60	78	73		10
3,1	3,2	**4,3**	3,5	79	**60**	93	**77**		11
3,4	3,7	4,2	3,8	88	74	89	84		12
3,3	3,8	4,1	3,7	89	78	96	88		13
3,0	3,9	4,0	3,6	95	87	85	89		14
4,4	1,6	3,7	3,2	98	76	81	85		15
4,1	4,3	4,8	4,4	96	83	86	88		16
4,4	4,8	4,2	4,5	78	93	96	89		17
3,7	4,3	4,7	4,2	96	93	93	94		18
4,8	**5,0**	3,9	4,6	96	88	96	93		19
3,7	4,1	4,0	3,9	98	96	**100**	98		20
3,9	4,1	5,1	4,4	92	83	93	89		21
5,4	5,7	5,6	5,6	**97**	97	95	96		22
5,6	**6,4**	6,3	6,1	93	91	94	93		23
4,8	6,1	5,4	5,4	96	86	96	93		24
4,8	5,3	4,9	5,0	93	88	86	89		25
4,4	5,1	5,0	4,8	89	83	88	87		26
4,6	5,1	4,9	4,9	96	93	93	94		27
4,8	4,8	5,3	5,0	93	93	96	94		28
5,7	5,5	6,2	5,8	97	**76**	94	89		29
5,0	5,8	5,9	5,6	93	93	97	95		30
4,2	4,4	4,2	4,3	96	94	96	95		31
3,82	4,25	4,40	4,13	87,6	78,7	87,9	84,8		Media
6,4	il giorno	23		100 il giorno		20			Massima
2,0	»	8		54	»	8			Minima

DATA	Direzione e forza del vento						Nebulosità e form	
	9h		15h		21h		9h	15h
1	—	0	*SW*	1	—	0	9 *ms*	0
2	—	0	*S*	1	—	0	0 ≡	10 *mnsr*
3	*S*	1	*S*	1	—	0	0 ≡	0 ≡
4	—	0	—	0	—	0	0 ≡	0 ≡
5	—	0	*S*	0-1	—	0	0 ≡	0 ≡
6	*W*	1	—	0	—	0	0	0 *sr* ≡
7	*S*	1	*S*	1	—	0	0 ≡	0 *sr*
8	*S*	1	—	0	—	0	0	0
9	*S*	1	*S*	0-1	—	0	0	0
10	—	0	*S*	1	*S*	1	0	0
11	—	0	—	0	—	0	6 *ms*	3 *sr* ≡
12	—	0	*SW*	0-1	*S*	1-2	0 ≡	5 *ms*
13	—	0	*S*	2	—	0	0 ≡	0 ≡
14	*S*	1	*S*	1	—	0	0 ≡	10 *mns*
15	*S*	1	—	0	—	0	7 *m*	8 *ms*
16	—	0	—	0	—	0	10 ≡	10 *msr*
17	*S*	2	—	0	—	0	10 $\equiv^3$	8 *sm* ≡
18	—	0	—	0	*N*	2	10 $\equiv^2$	10 ≡
19	*S*	1	*S*	1	*N*	1	10 ≡	2 *sm* ≡
20	—	0	—	0	*SW*	1-2	10 $\equiv^3$	10 $\equiv^3$
21	—	0	*S*	1	*S*	2	2 *mn*	10 *mn*
22	—	0	—	0	—	0	10 $\equiv^2$	10 $\equiv^2$
23	—	0	*S*	1	—	0	10 ●	10 *mu*
24	*SW*	0-1	*S*	1	—	0	0 ≡	0
25	—	0	*S*	1	—	0	6 *ms* ≡	9 *ms*
26	—	0	—	0	—	0	4 *m* ≡	10 *ms*
27	—	0	*S*	1	*S*	1-2	10 $\equiv^3$	2 ≡
28	—	0	*NE*	0-1	—	0	10 *ms* ≡	10 *ms* ≡
29	—	0	—	0	—	0	10 ≡	10 ≡
30	—	0	*S*	1	—	0	10 $\equiv^3$	0 ≡
31	—	0	—	0	*E*	1	10 $\equiv^2$	10 ≡

Frequenza relativa dei venti:

N	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	Calma
2	1	1	0	27	4	1	0	57

...delle nubi		Precipitazioni (in millimetri)	Meteore	DATA
21h	Media			
0	3	8,0	Neve.	1
0	3			2
0 ≡	0			3
0 ≡	0			4
0 ≡	0			5
0 ≡	0			6
0 ≡	0			7
0	0			8
0	0			9
0	0			10
0 ≡	3			11
0 ≡	2			12
0 $\equiv^2$	0		21h nebbia molto fitta.	13
10 ≡	6			14
0	5			15
10 *m*	10			16
10 $\equiv^3$	9		Nebbia fitta e bassa verso le 17h e 21h.	17
10 ≡	10		8h brina e nebbia fitta.	18
10 $\equiv^3$	7			19
10 $\equiv^3$	10			20
10 ●	7	5,8		21
10 ●	10	10,6		22
9 *m*	10	8,9		23
0	0			24
10 *m*	8			25
2 *ms* ≡	5			26
0	4			27
10 *ms* ≡	10			28
10 *m* ≡	10			29
2 ≡	4			30
10 ≡	10			31

Stato del cielo: giorni

sereni	misti	coperti	nebbiosi	con nebbia	con pioggia	con neve	di gelo
14	8	9	8	—	3	1	—

DATA		Pressione atmosferica (ridotta a 0°).				Temperatura dell'aria					
Mese	Decade	9h	15h	21h	Media	Min.	Mass.	9h	15h	21h	M[illegible]
Gennaio	1ª decade	736,61	753,21	735,57	735,79	0°,58	6°,47	2°,03	5°,94	4°,82	[illegible]
	2ª »	44,94	44,57	44,82	44,74	—0,75	2,13	0,43	1,57	1,08	[illegible]
	3ª »	35,64	34,96	35,10	35,24	1,77	4,32	2,88	4,24	3,80	[illegible]
	Mese	39,06	38,25	38,50	38,59	0,53	4,31	1,78	3,92	3,23	[illegible]
Febbraio	1ª decade	27,79	26,59	27,84	37,40	—0,23	3,67	0,32	3,19	2,48	[illegible]
	2ª »	37,97	38,02	38,01	38,00	4,07	9,22	4,60	7,65	7,26	[illegible]
	3ª »	42,51	42,35	42,84	42,57	4,73	12,37	6,21	11,72	9,86	[illegible]
	Mese	36,09	35,65	36,23	35,99	2,86	8,42	3,71	7,52	6,50	[illegible]
Marzo	1ª decade	36,41	35,60	35,54	35,85	5,18	11,59	6,78	10,93	9,23	[illegible]
	2ª »	36,45	35,14	35,44	35,67	4,30	11,24	6,15	10,69	8,73	[illegible]
	3ª »	38,38	36,29	36,66	37,11	6,94	7,55	10,15	15,54	13,71	[illegible]
	Mese	37,08	35,68	35,88	36,21	5,47	10,13	7,69	12,39	10,56	[illegible]
Aprile	1ª decade	35,61	34,21	34,40	34,74	6,70	15,72	10,19	15,07	12,65	[illegible]
	2ª »	39,41	38,24	38,95	38,87	5,29	13,28	8,51	12,80	10,92	[illegible]
	3ª »	36,52	35,46	36,13	36,04	7,98	14,23	10,80	13,45	11,46	[illegible]
	Mese	37,18	35,97	36,49	36,55	6,66	14,41	9,83	13,77	11,68	[illegible]
Maggio	1ª decade	40,61	39,42	39,78	39,94	9,94	19,00	13,64	18,02	15,98	[illegible]
	2ª »	38,21	36,91	37,15	37,42	13,85	23,93	18,49	23,10	20,55	[illegible]
	3ª »	33,73	32,65	32,98	33,12	13,13	20,44	16,32	19,37	17,03	[illegible]
	Mese	37,52	36,33	36,64	36,83	12,31	21,12	16,15	20,16	17,85	[illegible]
Giugno	1ª decade	35,59	34,96	35,32	35,29	13,44	19,97	16,22	18,73	16,33	[illegible]
	2ª »	35,63	34,92	35,24	35,26	15,12	24,33	19,62	22,95	21,02	[illegible]
	3ª »	37,95	36,80	37,03	37,26	17,30	26,94	21,48	25,12	23,05	[illegible]
	Mese	36,39	35,56	35,86	35,94	15,29	23,75	19,13	22,27	20,13	[illegible]
Luglio	1ª decade	37,44	36,48	36,80	36,90	16,46	24,77	20,36	23,74	21,56	[illegible]
	2ª »	37,38	36,02	35,91	36,44	18,44	27,55	22,36	26,39	23,41	[illegible]
	3ª »	35,83	35,11	35,31	35,43	16,29	25,66	20,20	24,36	22,07	[illegible]
	Mese	36,88	35,87	36,01	36,26	17,06	25,99	20,97	24,83	22,35	[illegible]
Agosto	1ª decade	34,49	33,41	34,05	32,98	16,69	23,18	18,99	22,79	19,90	[illegible]
	2ª »	38,01	37,01	37,32	37,45	14,86	22,69	17,93	21,97	19,11	[illegible]
	3ª »	35,90	34,86	35,23	35,33	14,85	23,44	18,45	22,80	20,16	[illegible]
	Mese	36,13	35,09	35,53	35,59	15,46	23,10	18,46	22,52	19,72	[illegible]
Settembre	1ª decade	35,90	34,42	34,89	35,07	11,68	21,60	14,86	20,88	18,34	[illegible]
	2ª »	39,33	38,37	39,05	38,92	10,30	18,76	12,65	17,60	15,39	[illegible]
	3ª »	41,05	39,98	40,66	40,57	8,68	14,92	10,60	14,17	12,49	[illegible]
	Mese	38,76	37,59	38,20	38,19	10,22	18,43	12,70	20,88	15,41	[illegible]
Ottobre	1ª decade	39,80	38,82	39,71	39,44	9,32	14,71	10,90	14,28	11,91	[illegible]
	2ª »	43,05	41,35	41,96	42,12	9,02	15,89	10,03	15,30	12,61	[illegible]
	3ª »	34,67	33,89	34,63	34,40	6,31	12,60	8,07	11,90	9,96	[illegible]
	Mese	39,17	38,02	38,77	38,65	8,22	14,40	9,66	13,83	11,49	[illegible]
Novembre	1ª decade	40,93	39,43	40,25	40,20	2,30	9,47	4,06	7,32	6,44	[illegible]
	2ª »	34,16	33,36	34,33	33,95	2,18	6,46	3,84	6,40	4,84	[illegible]
	3ª »	38,88	37,95	38,43	38,42	—0,49	5,34	0,57	4,98	3,04	[illegible]
	Mese	37,99	36,91	37,67	37,52	1,33	7,09	2,82	6,23	4,77	[illegible]
Dicembre	1ª decade	42,90	42,22	43,32	42,81	—4,46	2,59	—3,14	2,37	0,07	[illegible]
	2ª »	42,94	42,12	42,81	42,63	—2,84	1,91	—1,69	1,34	0,12	[illegible]
	3ª »	44,17	42,94	43,75	43,62	0,52	3,85	1,45	3,46	3,06	[illegible]
	Mese	43,34	42,43	43,39	43,02	—2,26	2,78	— 1,13	2,39	1,08	[illegible]

Umidità assoluta				Umidità relativa				DATA	
9^h	15^h	21^h	Media	9^h	15^h	21^h	Media	Decade	Mese
4,02	4,29	4,34	4,23	76,6	62,9	69,1	69,1	1ª decade	Gennaio
4,31	4,44	4,30	4,32	90,9	86,2	86,5	87,7	2ª »	
5,10	5,37	5,24	5,21	91,0	87,2	87,0	88,8	3ª »	
4,48	4,70	4,63	4,59	86,2	78,7	80,8	81,9	Mese	
4,39	5,13	4,82	4,78	92,0	86,3	85,4	87,9	1ª decade	Febbraio
5,41	5,63	5,73	5,58	85,0	68,8	75,5	75,9	2ª »	
6,32	6,91	7,27	6,84	85,1	67,1	79,7	77,2	3ª »	
5,37	5,90	5,94	5,73	87,4	74,1	80,2	80,4	Mese	
6,32	5,61	6,36	6,10	84,3	59,5	73,0	72,2	1ª decade	Marzo
6,00	6,25	6,45	6,24	84,9	65,9	77,0	76,0	2ª »	
6,22	7,23	7,52	7,00	68,0	51,7	64,1	61,3	3ª »	
6,18	6,36	6,77	6,45	79,1	59,0	71,4	69,8	Mese	
5,65	5,67	5,77	5,69	58,9	43,6	51,7	51,4	1ª decade	Aprile
5,29	5,16	6,02	5,50	63,8	47,0	63,3	58,0	2ª »	
7,04	7,20	7,19	7,13	73,4	63,9	72,1	69,9	3ª »	
5,99	6,01	6,33	6,11	65,4	51,5	62,4	59,8	Mese	
8,99	8,85	9,82	9,20	76,4	57,5	71,9	68,5	1ª decade	Maggio
8,91	10,19	9,84	9,65	54,4	46,6	53,5	51,6	2ª »	
9,32	9,24	9,90	9,50	68,9	57,6	69,6	65,3	3ª »	
9,07	9,43	9,85	9,45	66,6	53,9	65,0	61,8	Mese	
10,28	10,42	10,77	10,45	75,5	64,9	77,2	72,5	1ª decade	Giugno
10,81	11,21	11,48	11,17	64,1	54,3	61,4	60,0	2ª »	
12,65	12,04	12,99	12,55	65,7	51,3	63,1	60,0	3ª »	
11,25	11,22	11,75	11,39	68,4	56,8	67,2	64,2	Mese	
11,39	11,40	12,18	11,65	64,3	53,1	64,6	60,3	1ª decade	Luglio
13,29	13,58	13,97	13,61	66,4	53,4	65,3	61,7	2ª »	
12,20	12,09	13,13	12,47	68,5	54,2	66,5	62,9	3ª »	
12,29	12,36	13,09	12,58	66,4	53,6	65,5	61,6	Mese	
12,35	12,71	13,19	12,77	75,7	62,2	77,6	71,8	1ª decade	Agosto
11,04	10,74	11,72	11,17	70,0	55,8	72,0	65,9	2ª »	
10,50	10,50	12,00	11,00	68,7	55,2	67,0	62,4	3ª »	
11,29	11,32	12,30	11,65	71,5	57,7	72,2	66,7	Mese	
8,78	8,05	8,88	8,57	69,4	44,1	56,6	56,7	1ª decade	Settembre
8,61	8,05	9,87	8,84	78,2	54,1	70,4	67,5	2ª »	
7,07	6,45	7,30	6,94	74,1	54,0	69,2	65,8	3ª »	
8,15	7,52	8,68	8,12	73,9	50,7	65,4	63,3	Mese	
7,98	8,29	8,60	8,30	81,1	66,4	80,2	75,9	1ª decade	Ottobre
7,76	8,15	8,32	8,08	84,4	63,3	75,9	74,6	2ª »	
6,95	6,77	7,43	7,04	85,4	66,0	79,2	77,1	3ª »	
7,56	7,74	8,12	7,69	83,6	65,2	78,4	75,9	Mese	
4,13	4,15	4,71	4,33	68,4	48,7	66,0	61,1	1ª decade	Novembre
4,82	4,87	5,26	4,97	80,7	66,6	81,7	76,3	2ª »	
3,84	4,07	4,00	3,96	78,8	63,1	70,1	70,6	3ª »	
4,26	4,36	4,66	4,42	76,0	59,5	72,6	69,3	Mese	
2,85	3,57	3,66	3,36	77,6	64,4	78,9	73,7	1ª decade	Dicembre
3,79	3,87	4,19	3,95	91,3	82,8	91,5	88,5	2ª »	
4,83	5,30	5,34	5,17	94,0	88,8	93,4	92,1	3ª »	
3,82	4,25	4,40	4,16	87,6	78,7	87,9	84,8	Mese	

RIASSUNTO delle Osservazioni fatte nell'anno 1912

MESI	Pressione atmosferica			Temperatura								
				Media			Media delle massime giornaliere			Media delle minime giornaliere		
	Normale	1912	Differenza	Normale	1912	Differenza	Normale	1912	Differenza	Normale	1912	Differenza
Gennaio .	739,17	738,59	—0,58	0°,4	2°,4	+2°,0	3°,3	4°,3	+1°,0	—2°,2	0°,5	+2,[illegible]
Febbraio.	38,44	35,99	—2,45	3,2	5,4	+2,2	6,8	8,4	+1,6	0,1	2,9	+2,8
Marzo . .	35,56	36,21	+0,65	7,4	8,5	+1,1	11,4	10,1	—1,3	4,0	5,5	+1,5
Aprile . .	34,66	36,55	+1,89	11,9	10,7	—1,2	16,1	14,4	—1,7	8,1	6,7	—1,4
Maggio .	35,62	36,83	+1,21	16,1	16,9	+0,8	20,1	21,1	+1,0	12,0	12,3	+0,3
Giugno .	37,76	35,94	—1,82	20,4	19,6	—0,8	24,6	23,8	—0,8	15,9	15,3	—0,6
Luglio . .	36,69	36,26	—0,43	22,8	21,6	—1,2	27,3	26,0	—1,3	18,3	17,1	—1,2
Agosto . .	37,31	35,59	—1,72	21,9	19,2	—2,7	25,5	23,1	—2,4	17,8	15,5	—2,3
Settembre	38,02	38,19	+0,17	18,3	14,2	—4,1	22,4	18,4	—4,0	14,6	10,2	—4,4
Ottobre .	37,71	38,65	+0,94	12,2	10,9	—1,3	15,7	14,4	—1,3	9,2	8,2	—1,0
Novembre	37,70	37,52	—0,18	6,0	4,0	—2,0	9,0	7,1	—1,9	3,6	1,3	—2,3
Dicembre	38,21	43,02	+4,81	1,4	0,1	—1,3	4,3	2,8	—1,1	—0,9	—2,3	—1,4
Anno . .	737,15	737,44	+0,29	11,8	11,1	—	15,5	14,4	—1,1	8,4	7,8	—0,6

I valori normali sono stati calcolati per il periodo 1866-1900.

Valori estremi

	Pressione atmosferica	Temperatura
Massimi	749,70 il 31 dicembre	31°,2 il 13 luglio
Minimi	711,92 il 3 febbraio	—6°,5 il 6 dicembre

e loro confronto coi valori normali.

Tensione del vapore Normale	1912	Differenza	Umidità relativa Normale	1912	Differenza	Precipitazioni in mm. Normale	1912	Differenza	Giorni con pioggia o neve Normale	1912	Differenza	MESI
3,8	4,6	+0,8	83	82	—1	48,7	81,6	+32,9	7	10	+3	Gennaio
3,9	5,7	+1,8	76	80	+4	29,3	69,2	+39,9	5	7	+2	Febbraio
5,0	6,5	+1,5	68	70	+2	68,3	70,6	+2,3	8	9	+1	Marzo
6,9	6,1	—0,8	65	60	—5	114,0	90,4	—23,6	12	20	+8	Aprile
9,4	9,5	+0,1	66	62	—4	114,4	68,5	—45,9	13	9	—4	Maggio
11,6	11,4	—0,2	64	64	0	83,6	143,4	+59,8	11	8	—3	Giugno
12,7	12,6	—0,1	61	62	+1	62,8	27,4	—35,4	9	6	—3	Luglio
12,6	11,7	—0,9	64	67	+3	66,7	56,1	—10,6	8	7	—1	Agosto
11,1	8,1	—3,0	70	63	—7	60,0	14,4	—45,6	8	5	—3	Settembre
8,7	7,7	—1,0	76	76	0	94,2	79,8	—14,4	10	9	—1	Ottobre
6,5	4,4	—2,1	80	69	—11	69,9	12,2	—57,7	9	7	—2	Novembre
4,7	4,2	—0,5	81	85	+4	40,0	33,3	—6,7	7	4	—3	Dicembre
8,1	7,7	—0,4	71	70	—1	851,9	746,9	—105,0	107	100	—7	Anno

sservati.

Tensione del vapore	Umidità relativa	Pioggia in mm.	
16,8 il 20 giugno	100 il 20 dicembre	62,6 il 2 giugno	Massimi
1,6 il 8 gennaio	6 il 10 aprile	—	Minimi

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XLVIII. DISP. **15ª**, **1912-1913**.

La Tavola qui acclusa, illustrante la nota del prof. P. GIACOSA, *va inserita nella dispensa 9ª del presente volume.*

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1913

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

2